arXiv:2601.00902v1 [math.CA] 31 Dec 2025

格点上的最优分数阶拉普拉斯算子 Hardy 不等式

PHILIPP HAKE、MATTHIAS KELLER 和 FELIX POGORZELSKI

Abstract. 我们研究整数格上的分数阶 Hardy 不等式。我们证明了 Hardy 权的零临界性，从而证明了常数的最优性。更具体地说，我们给出一族依赖于参数的 Hardy 权，并证明当参数低于某个阈值时，该 Hardy 权为正临界；当参数高于该阈值时，则为次临界。特别地，阈值处的 Hardy 权是最优的，因为任何更大的权都不再是 Hardy 权，且该 Hardy 不等式不存在极小元。我们证明中的一个关键环节是分数阶离散 Riesz 核的渐近展开。

1. Introduction

分数阶拉普拉斯算子最初由 Riesz [Rie39], 提出，自然地出现在若干领域中，包括相对论量子力学、湍流、弹性力学、激光物理和反常输运 [MV04, Bak08, DPV15, Lon15, Mee11]。近年来，离散空间上的分数阶拉普拉斯算子引起了广泛关注，参见例如 [CR18, CRS+18, DFF25, DMERM24, Dyd25, FBRR24, GRM20, GKˇS25a]。本文研究整数格上分数阶拉普拉斯算子的 Hardy 不等式；这项工作补充了近年来对格点、半直线图或树上的经典拉普拉斯算子 Hardy 不等式的深入研究，参见例如 [BSV21, ˇ ˇ GKS25b, Gup23, Gup24, FKP23, FR25, KL16, KL23, KLS22, KPP18a, KPP18b, KˇS22, ˇSW25]及其中的参考文献。

对于连续情形，涉及分数阶拉普拉斯算子的 Hardy 不等式已有深入研究，其最优常数已知 [BDK16, FLS08, Her77, Yaf99] ，而半空间中的类似结果也已得到 [BD08]。然而，在离散情形下， [CR18]中得到的分数阶 Hardy 不等式，其常数的最优性仍是一个开放问题。与经典拉普拉斯算子的情形不同，后者的最优 Hardy 权重已在[Gup23, KL23, KPP20] 中针对 $\mathbb{Z}^d$进行了研究；而在分数阶情形下，Hardy 不等式的常数和权函数的最优性目前仅针对 $d = 1$[KN23, DFF25]已知。

处理 $\mathbb{Z}^d$上的离散分数阶拉普拉斯算子时，一个主要难点是该算子缺乏球面对称性，因此无法像 [FLS08]对连续介质所做的那样进行分析。另一方面，

Date：2026年1月6日。

即使将 [KPP20], 推广到非局部有限图，也很难由此推导出 Hardy 权或超解构造中常数的显式渐近行为。此外， [KN23] 的一维证明依赖于零序列的显式构造，而这种构造无法推广到任意维数。

因此，我们提出了一种证明 Hardy 权重及其常数最优性的新策略。这种方法从根本上基于临界性理论，并采用一族依赖于参数 α 的 Hardy 权重，如 [CR18] 中已引入的那样。主要困难在于确定阈值 α 处 Hardy 权重的临界类型，此时该 Hardy 权重的常数与某个最优 Hardy 权重的常数相匹配。在这里，第一作者博士论文 [Hak25]中基于势理论对正临界 Hardy 权重所作的刻画起着关键作用。基于这一刻画，我们利用这一族正临界 Hardy 权重的基态，构造一个零序列，从而得到零临界、因而也是最优的 Hardy 权重。在整个分析过程中，我们充分利用了 $\mathbb{Z}^d$ 上分数阶离散 Riesz 核的精确渐近行为（参见定理 A.1 ），这本身也可能具有独立的研究价值。

现在我们更详细地介绍本文的研究框架和主要结果。我们考虑 Δ 上 $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$ 的标准离散拉普拉斯算子，其定义为

$$\Delta f(x) = \sum_{|y-x|=1} (f(x) - f(y)),$$

它是作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上的有界算子。对于 $\sigma \in (0,1)$，分数阶拉普拉斯算子 Δ^σ 通过谱定理定义，并可表示为

$$\Delta^\sigma f(x) = \frac{1}{|\Gamma(-\sigma)|} \int_0^\infty (I - e^{-t\Delta}) f(x) \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\sigma}}.$$

若函数 $w : \mathbb{Z}^d \to [0,\infty)$ 满足 Hardy不等式的条件，则称其为分数阶拉普拉斯算子的 ***Hardy*** 权：

$$\langle \Delta^\sigma \varphi, \varphi \rangle \geq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} w(x) |\varphi(x)|^2$$

该不等式对所有 $\varphi \in C_c(\mathbb{Z}^d)$ 均成立。若此不等式成立，则可将其推广到属于下列空间的所有 φ

$$\mathcal{D}_0^\sigma = \overline{C_c(\mathbb{Z}^d)}^{\|\cdot\|_{\sigma,0}},$$

其中，闭包是相对于 $\|\varphi\|_{\sigma,0} = \sqrt{\langle \Delta^\sigma \varphi, \varphi \rangle + |\varphi(0)|^2}$ 而取的。

若对于每个 Hardy 权 $w' \geq w$ ，都有 $w' = w$ ，且 Hardy不等式在 $\mathcal{D}_0^\sigma$. 中不允许存在极小元，则称 Hardy 权 w 为<! style id='2'>最优。这一概念源自连续介质中的 Hardy 权重 [DFP14]；正如后文将讨论的，它也涵盖常数的尖锐性。

为了表述主要结果，我们还需要引入一些记号。对于 $\alpha \in (-d/2, 1]$，我们将 Riesz 核 κ_α ($\mathbb{Z}^d \to [0,\infty)$ 定义为 $\kappa_\alpha(0) = 0$ for

$\alpha > 0$, $\kappa_0 = 1_0$, $\kappa_1(x) = 1_{|x|=1}$，其他情况则定义为

$$\kappa_\alpha(x) = \frac{1}{|\Gamma(-\alpha)|}\int_0^\infty e^{-t\Delta}1_0(x)\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\alpha}}.$$

这里，1_y 表示 $y \in \mathbb{Z}^d$的特征函数。由于半群$e^{-t\Delta}$ 具有正性改进性质（参见 [KLW21，定理 1.26]），我们推知，除 $x = 0$ 和 $\alpha \notin \{0, 1\}$外，κ_α严格为正。可以证明κ_α 确实有限，并且当$x \to \infty$时具有如下渐近行为（参见定理 A.1）：

$$\kappa_\alpha(x) = C_{d,\alpha}\,|x|^{-d-2\alpha} + O\left(|x|^{-d-2\alpha-2}\right),$$

其中

$$C_{d,\alpha} = \frac{4^\alpha\Gamma(d/2+\alpha)}{\pi^{d/2}|\Gamma(-\alpha)|}$$

对于 $\alpha \notin \{0, 1\}$。

此外，我们定义 $\sigma \in (0, 1]$ 和 $\alpha \in (\sigma, d/2)$ 的权函数如下

$$w_{\sigma,\alpha} = \frac{\kappa_{\sigma-\alpha}}{\kappa_{-\alpha}}.$$

我们注意到$w_{\sigma,\alpha}$ 是严格正的，因为在 α 和 σ各自的取值范围内，$\kappa_{\sigma-\alpha}$ 和 $\kappa_{-\alpha}$ 都是严格正的。

本文的主要结果如下定理所述。

定理 1.1。设 $d \in \mathbb{N}$，且 $\sigma \in (0, 1]$，其中当 $d \in \{1, 2\}$时有 $\sigma < d/2$。那么，对于$\alpha_0 = \frac{d/2+\sigma}{2}$，函数 w_{σ,α_0} 是满足以下条件的最优 *Hardy* 权重

$$w_{\sigma,\alpha_0}(x) = \frac{c_{d,\sigma}}{|x|^{2\sigma}} + O\left(\frac{1}{|x|^{2\sigma+2}}\right)$$

其中最优常数为

$$c_{d,\sigma} = 4^\sigma\frac{\Gamma(\frac{d}{4}+\frac{\sigma}{2})^2}{\Gamma(\frac{d}{4}-\frac{\sigma}{2})^2}.$$

备注。需要强调的是，该结果还包括经典情形 $\Delta = \Delta^1$ 下的一个最优 Hardy 权重。自然地，对于 $\sigma = 1$、$d \geq 3$ 以及 $\alpha_0 = (d/2+1)/2$，w_{σ,α_0} 的一阶项与 Δ在 $\mathbb{Z}^d$ 上的最优 Hardy 权重的一阶项一致，该结果见 [KPP18b 中的定理 7.2]，，其最优常数为 $c_{d,1} = (d-2)^2/4$。比较这两个 Hardy 权重的高阶项将会很有意义，因为在 $\mathbb{N}_0$ 的一维情形中，[DFF25] 所采用的通过分数阶拉普拉斯算子进行的构造，比经典超解构造[KPP18a]产生了更优的高阶项。

该定理在第3节中得到证明。事实上，我们在下文的定理 3.5 中证明了一个结构性更强的结果，总结了我们对 Hardy 权重族 $w_{\sigma,\alpha}$ 的研究发现。特别地，我们证明参数 α 相对于 $\alpha_0 = (d/2+\sigma)/2$ 存在三种情形：

(a) 当 $\sigma < \alpha < \alpha_0$ 时，权函数 $w_{\sigma,\alpha}$ 是正临界的；(b) 当 $\alpha = \alpha_0$ 时，权函数 $w_{\sigma,\alpha}$ 是零临界的；(c) 当 $\alpha_0 < \alpha < d/2$ 时，权函数 $w_{\sigma,\alpha}$ 是次临界的。

为此，回顾一下，若存在一个 Hardy 权函数$w' \geq w$ 满足 $w' \neq w$，则称 w 为次临界；否则称其为临界。若临界 Hardy 权重 w 对应的算子 $\Delta^\sigma - w$ 在 $\mathcal{D}_0^\sigma$ 中存在一个基态 v（即一个除缩放外唯一的正调和函数），则称其为正临界；如果该基态 v 不属于 $\mathcal{D}_0^\sigma$，则称其为零临界。这实际上等价于基态 v 是否属于 $\ell^2(\mathbb{Z}^d, w)$，参见 [KPP20]。因此，在正临界情形下，Hardy 权仍然无法改进，但存在一个极小元 v；而在零临界情形下则不存在这样的极小元。此外，对于零临界 Hardy 权函数 w，不存在 $\lambda > 0$ 使得 $(1+\lambda)w$ 在任意有限集 $K \subset X$的 $C_c(X \setminus K)$ 上都是 Hardy 权函数，参见 [KPP20、KN23、Fis24、Hak25、KP20]。在 [DFP14、DP16、KPP20] 中，这被称为无穷远处最优。因此，渐近展开主导项前的常数无法改进，这也说明了定理 1.1 中“最优性”这一概念的合理性。

本文结构如下。下一节中，我们将利用分数阶离散 Riesz 核来表示分数阶拉普拉斯算子和格林函数。第3节中，我们证明主要结果——定理 1.1；该定理是前文所述结构性更强的定理 3.5 的推论。最后，第4节中，我们给出一个 Landis 型定理作为应用，它可以视为无穷远处的唯一延拓结果。附录中，我们给出分数阶离散 Riesz 核的渐近展开，并对已知结果作了略微推广，因此这一结果本身也可能具有独立的研究价值。

2. Representation of the Fractional Laplacian and the Green's function

本节中，我们将更深入地考察分数阶拉普拉斯算子和格林函数。特别地，我们注意到，分数阶拉普拉斯算子是带权非局部有限图上的最近邻算子，参见[CR18, CRS$^+$18, DFF25, DMERM24, FBRR24, GRM20, KN23]。尽管本节中的许多结果为专家所熟知，我们仍将其列出，以方便读者。

回顾上文中 Riesz 核 κ_α 的定义。由于 Δ具有平移不变性，对于 $\alpha \notin \{0,1\}$ 和 $x, y \in \mathbb{Z}^d$，我们有

$$\kappa_\alpha(x-y) = \frac{1}{|\Gamma(-\alpha)|}\int_0^\infty e^{-t\Delta}1_y(x)\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\alpha}}.$$

定理 2.1 (分数阶拉普拉斯算子**).** 对于 $\sigma \in (0,1],$ ，分数阶拉普拉斯算子 Δ^σ 可表示为

$$\Delta^\sigma f(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \kappa_\sigma(x-y)(f(x)-f(y)),$$

对于 $f \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 以及 $x \in \mathbb{Z}^d$。

证明。注意，由于 Δ 是马尔可夫半群的生成元，它可扩展到 ℓ^∞ ，特别是根据其保正性、单调收敛和随机完备性，我们得到 $1 = e^{-t\Delta}1 = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} e^{-t\Delta}1_y$。我们对 $\sigma \in (0,1)$进行计算

$$\begin{aligned}\Delta^\sigma f(x) &= \frac{1}{|\Gamma(-\sigma)|}\int_0^\infty \left[((e^{-t\Delta}1)(x)f(x) - (e^{-t\Delta}f)(x))\right]\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\sigma}} \\ &= \frac{1}{|\Gamma(-\sigma)|}\int_0^\infty \left[\sum_{y\neq x} e^{-t\Delta}1_y(x)(f(x)-f(y))\right]\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\sigma}}.\end{aligned}$$

现在，利用 Fubini定理（由 Riesz 核的渐近行为保证其适用性；参见定理 A.1），我们得出

$$\begin{aligned}\ldots &= \sum_{y\neq x}\left(\frac{1}{|\Gamma(-\sigma)|}\int_0^\infty e^{-t\Delta}1_y(x)\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\sigma}}\right)(f(x)-f(y)) \\ &= \sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\kappa_\sigma(x-y)(f(x)-f(y)).\end{aligned}$$

根据 $\kappa_1(x)$ 的定义， $\sigma = 1$ 的情形显然成立 $= 1_{|x|=1}$, $x \in \mathbb{Z}^d$。 □

上述定理和 Riesz 核的渐近性（定理 A.1）表明，我们可以将分数阶拉普拉斯算子 Δ^σ 延拓到 $\ell^1(\mathbb{Z}^d, (1+|\cdot|)^{-d-2\sigma})$。特别地，再次由定理 A.1 可知，对于 $-d/2 < \alpha < 1$, 有 $\kappa_{-\alpha} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d, (1+|\cdot|)^{-d-2\sigma})$，因此我们可以对 $\kappa_{-\alpha}$ 作用拉普拉斯算子。

分数阶拉普拉斯算子的格林函数 $G^\sigma\colon\ \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to (0, \infty]$ Δ^σ, $\sigma \in (0,1]$, , 其表达式为

$$G^\sigma(x,y) = \lim_{E\searrow 0}(\Delta^\sigma + E)^{-1}1_y(x) = \int_0^\infty e^{-t\Delta^\sigma}1_y(x)\,\mathrm{d}t.$$

若 G^σ 有限，即相应的图是暂态的，则我们将 G^σ 上的 Green算子 $\mathcal{G}^\sigma = \{f\colon\ \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R} \mid \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} G^\sigma(x,\ y)|f(y)| < \infty\}$ 记为

$$G^\sigma f(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} G^\sigma(x,y)f(y).$$

函数 u 若满足 $\Delta^\sigma u \in \mathcal{G}^\sigma$ 和 $u = G^\sigma\Delta^\sigma u$，则称其为 势 。

下一个命题的第一部分已在 [KN23] 中针对 $d = 1$ 证明过，其证明可原样推广到我们的情形。为方便读者，我们在此给出证明。

命题 2.2。设 $\sigma \in (0,1]$ 且 $\alpha \in [\sigma, d/2)$。则

$$\Delta^\sigma\kappa_{-\alpha} = \kappa_{-\alpha+\sigma}.$$

此外， $\kappa_{-\alpha}$ 是一个超调和势，且

$$\kappa_{-\alpha} = G^\sigma\kappa_{-\alpha+\sigma},$$

特别地，格林函数由 $G^\sigma(x,y) = \kappa_{-\sigma}(x-y)$给出，其中 $x,y\in\mathbb{Z}^d$。此外，

$$w_{\sigma,\alpha} = \frac{\Delta^\sigma \kappa_{-\alpha}}{\kappa_{-\alpha}} = \frac{\kappa_{\sigma-\alpha}}{\kappa_{-\alpha}} = \frac{\kappa_{\sigma-\alpha}}{G^\sigma \kappa_{\sigma-\alpha}}$$

是一个 *Hardy* 权。

证明。我们定义 $\kappa_{\beta,\,\varepsilon}\colon \mathbb{Z}^d \longrightarrow [0,\infty]$ 对于 $\beta\in(-\infty,\,1]$ 且 $\varepsilon>0$ 为

$$\kappa_{\beta,\varepsilon} = \frac{1}{|\Gamma(-\beta)|}\int_0^\infty e^{-t\varepsilon}e^{-t\Delta}1_0\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\beta}}$$

对于 $\beta\notin\{0,1\}$, $\kappa_{0,\,\varepsilon}=1_0$ 对于 $\beta=0$ 且 $\kappa_{1,\,\varepsilon}(x) = 1_{|x|=1}$ 对于 $\beta=1$ 和 $x\in\mathbb{Z}^d$。谱演算给出对于 $\beta\le 0$

$$(\Delta+\varepsilon)^\beta 1_0 = \kappa_{\beta,\varepsilon}$$

因此，$\kappa_{\beta,\,\varepsilon}\in\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 对于 $\beta\le 0$。

此外，对于 $0<\beta<1$ 和 $f\in\ell^2(\mathbb{Z}^d)$，通过谱演算可得

$$(\Delta+\varepsilon)^\beta f(x) = \frac{1}{|\Gamma(-\beta)|}\int_0^\infty (1-e^{-t\varepsilon}e^{-t\Delta})f(x)\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\beta}}.$$

我们使用 $\int_0^\infty (1-e^{-t\varepsilon})t^{-1-\beta}\,\mathrm{d}t = \varepsilon^\beta|\Gamma(-\beta)|$ 和 $e^{-t\Delta}1=1$，并按照定理 2.1 的证明中的论证得出结论

$$\begin{aligned}(\Delta+\varepsilon)^\beta f(x) &= \frac{1}{|\Gamma(-\beta)|}\int_0^\infty e^{-t\varepsilon}(1-e^{-t\Delta})f(x)\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\beta}} + \varepsilon^\beta f(x)\\ &= \sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\kappa_{\beta,\varepsilon}(x-y)(f(x)-f(y)) + \varepsilon^\beta f(x),\end{aligned}$$

相应地，左端与右端对 $\beta=1$ 的等式显然成立。现在，令 $0<\sigma\le\alpha<d/2$。根据谱演算以及关于 β 的上述情形，我们看到

$$(\Delta+\varepsilon)^\sigma\kappa_{-\alpha,\varepsilon} = (\Delta+\varepsilon)^\sigma(\Delta+\varepsilon)^{-\alpha}1_0 = (\Delta+\varepsilon)^{-(\alpha-\sigma)}1_0 = \kappa_{\sigma-\alpha,\varepsilon}.$$

此外，$\kappa_{\beta,\,\varepsilon}(x)$ 单调收敛于 $\kappa_\beta(x)$，$x\in\mathbb{Z}^d$，当 $\varepsilon\to 0$ 时。由此以及单调收敛定理可知，第一个陈述成立。

特别地，这表明 $\kappa_{-\alpha}$ 是超调和的，由定理 A.1 可得 $\kappa_{-\alpha}\in C_0(\mathbb{Z}^d)$。在 $C_0(\mathbb{Z}^d)$ 中存在非平凡超调和函数意味着该图具有暂态性，参见 [KLW21，定理 6.1]，；而在暂态图上，$C_0(\mathbb{Z}^d)$ 中的每个超调和函数都是一个势（[Hak25，推论 1.39]）。因此，$\kappa_{-\alpha}$ 是一个势，这意味着根据定义，$\Delta^\sigma\kappa_{-\alpha}=\kappa_{-\alpha+\sigma}\in\mathcal{G}^\sigma$ 且 $\kappa_{-\alpha} = G^\sigma\Delta^\sigma\kappa_{-\alpha} = G^\sigma\kappa_{-\alpha+\sigma}$。对于 $\alpha=\sigma$，这给出 $\kappa_{-\sigma} = G^\sigma\kappa_0 = G^\sigma 1_0 = G^\sigma(\cdot,0)$。由于 G^σ 具有平移不变性，有 $\kappa_{-\sigma}(x-y) = G(x,\,y)$。

现在，最终结论可直接由基态变换得到，参见例如 [KPP20，第 4.8], [KLW21 号引理 4.8] 或 [FLW14，第 10.1]，因为 $\kappa_{-\alpha}$ 是算子 $\Delta^\sigma - w_{\sigma,\,\alpha}$的调和函数。□

上述推论给出了一族 Hardy权重。现在我们来仔细考察它们的渐近行为和单调性。

命题 2.3。对于 $\sigma \in (0,1]$ 和 $\alpha \in (\sigma,\ d/2)$，我们有

$$w_{\sigma,\alpha}(x) = \frac{\Psi_{\sigma,d}(\alpha)}{|x|^{2\sigma}} + O\left(\frac{1}{|x|^{2\sigma+2}}\right), \quad x \in \mathbb{Z}^d,$$

with

$$\Psi_{\sigma,d}(\alpha) = 4^{\sigma}\frac{\Gamma(\frac{d}{2}-\alpha+\sigma)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\frac{d}{2}-\alpha)\Gamma(\alpha-\sigma)}.$$

此外，兰道符号所含的常数对于给定范围内的所有 σ 和 α 都是一致的。

此外，函数 $\Psi_{\sigma,\ d}$ 在 $(\sigma,\ d/2)$ 上严格对数凹，在 $(\sigma,\ \alpha_0)$ 上严格递增，并在 $(\alpha_0,\ d/2)$ 上严格递减，其中 $\alpha_0 = \frac{d/2+\sigma}{2}$。渐近展开为，

$$\Psi_{\sigma,d}(\alpha) = \Psi_{\sigma,d}(\alpha_0) + O((\alpha-\alpha_0)^2)$$

在 α_0 附近。

证明。.....的渐近展开$w_{\sigma,\ \alpha}$ 由定理 A.1 直接得到。记 ψ 为双伽马函数，即伽马函数的对数导数，它在 $(0,\infty)$ 上严格凹。我们计算$\Psi(\alpha) = \Psi_{\sigma,\ d}(\alpha)$ $= 4^{\sigma}\ \ \frac{\Gamma}{\Gamma(2\alpha_0-\alpha)\Gamma(\alpha)\,\Gamma(2\alpha_0-\sigma-\alpha)\Gamma(\alpha-\sigma)}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}\ln\Psi(\alpha) &= -\psi(2\alpha_0-\alpha)+\psi(\alpha)+\psi(2\alpha_0-\sigma-\alpha)-\psi(\alpha-\sigma)\\ &=: F(\alpha-\alpha_0).\end{aligned}$$

立即可得 $(\Psi'/\Psi)(\alpha_0) = F(0) = 0$，因此 $\Psi'(\alpha_0) = 0$。此外，令 $r = \alpha-\alpha_0$，得到

$$F(r) = -\psi(\alpha_0-r)+\psi(\alpha_0+r)+\psi(\alpha_0-\sigma-r)-\psi(\alpha_0-\sigma+r),$$

对于 $r \in (\sigma-\alpha_0,\ d/2-\alpha_0)$。我们注意到

$$\frac{d}{dr}F(r) = \psi'(\alpha_0+r)-\psi'(\alpha_0+r-\sigma)+\psi'(\alpha_0-r)-\psi'(\alpha_0-r-\sigma) < 0,$$

由于 ψ 在 $(0,\ \infty)$ 上严格凹，因此 ψ' 严格递减。因此，对于 $r \in (\sigma-\alpha_0,\ d/2-\alpha_0)$，$r = 0$ 是 F 的唯一根。由此可得，$\frac{d}{d\alpha}\ln\Psi(\alpha)$ 在 $\alpha \in (\sigma,\ \alpha_0)$ 上严格为正，在$\alpha \in (\alpha_0,\ d/2)$ 上严格为负。由此可得关于 Ψ 的结论；特别是，由于 Ψ 为正，$\Psi'(\alpha)$ 与 $\frac{d}{d\alpha}\ln\Psi(\alpha) = \Psi'(\alpha)/\Psi(\alpha)$ 的符号一致。α_0 附近的渐近行为可由泰勒近似及上述观察 $\Psi'(\alpha_0) = 0$ 得出。□

3. Positive and Null-Criticality

本节中，我们证明主要结果——定理 1.1。证明基于刻画 $\alpha < \alpha_0$ 上权函数 $w_{\sigma,\,\alpha}$ 的正临界性，然后利用基态 $\kappa_{-\alpha}$ 构造一个零序列，从而得出 α_0 处的最优性。

我们采用 [Hak25] 中对正临界性的刻画，并简要回顾一般图上的正临界 Hardy 权重的定义。更多详情请参阅 [KPP18b, Hak25] 。定义在可数集 X 上的图 b 是一个对称函数 $b\colon X \times X \to [0,\infty)$，其对角线为零，且满足 $\sum_{y\in X} b(x,\,y) < \infty$ 对所有 $x \in X$ 均成立。该图导出形式拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$ ，它作用于函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ ，且满足 $\sum_y b(x,\,y)|f(y)| < \infty$ 对所有 $x \in X$ 均成立，定义如下：

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{y\in X} b(x,y)(f(x) - f(y))$$

相应的二次型 $\mathcal{Q}$ 的定义域为 $\mathcal{D}$ ，其定义如下：

$$\mathcal{Q}(f) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in X} b(x,y)(f(x)-f(y))^2, \quad \mathcal{D} = \{f : X \to \mathbb{R} \mid \mathcal{Q}(f) < \infty\}.$$

我们令 $\mathcal{D}_0$ 为 $C_c(X)$ 在 $\mathcal{D}$ 中关于范数 $\|f\|_{\mathcal{Q}} = \sqrt{\mathcal{Q}(f) + |f(o)|^2}$ 的闭包，其中固定 $o \in X$。若函数 u 满足 $\mathcal{L}u \geq 0$ 逐点成立，则称其为超调和函数。若函数 $w\colon X \to [0,\infty)$ 满足以下条件，则称其为*Hardy* 权

$$\mathcal{Q}(\varphi) \geq \sum_{x\in X} w(x)\varphi(x)^2$$

对所有 $\varphi \in C_c(X)$ 都成立。只要该不等式成立，就可以将其扩展到所有 $\varphi \in \mathcal{D}_0$。此外，如果存在一个非平凡的 Hardy 权函数，则称该图具有暂态性，这等价于存在一个格林函数 $G\colon X \times X \to (0,\,\infty)$，其与 $\mathcal{L}$ 相关联，并由此产生一个保持正性的格林算子 G ，该算子与 $\mathcal{L}$相关联。暂态性等价于存在非平凡的 Hardy不等式，参见例如 [Fit00]或 [KLW21, 定理 6.1]。如果对于每个 Hardy 权函数 $w' \geq w$ 都有 $w' = w$，则称 Hardy 权函数 w 为临界。这等价于存在一个零序列，即 $C_c(X)$ 中的一个序列 (e_n)，使得 e_n 逐点收敛到一个正函数，并且当 $n \to \infty$趋于 [时，$(Q - w)(e_n) \to 0$ ，参见 KPP20，定理 5.3]。如果存在函数 $v \in \mathcal{D}_0$、 $v \neq 0$，使得 $(\mathcal{Q} - w)(v) = 0$，即 Hardy 不等式在 $\mathcal{D}_0$ 中允许一个极小元，则称临界 Hardy 权函数 w 为正临界。否则，称临界 Hardy 权函数为零临界。

定理 3.1 (定理 2.15 和 2.16，出自 [Hak25])。 以下陈述等价。

(i) w 是正临界 *Hardy* 权重。(ii) $w = \mathcal{L}v/v$ 对于某个严格为正的超调和 $v \in \mathcal{D}_0$。

(iii) $w = \mathcal{L}Gk/Gk = k/Gk$ 对于某个正的非平凡 k，使得 $\sum_X kGk < \infty$。

我们回到 $X = \mathbb{Z}^d$ 上的分数阶拉普拉斯算子，以及上一节讨论的 Hardy 权重 $w_{\sigma,\alpha}$。第一步是刻画 $w_{\sigma,\alpha}$ 的正临界性。

定理 3.2（正临界权重）。设 $d \in \mathbb{N}$, $\sigma \in (0,1]$, $\sigma < d/2$若 $d \in \{1,2\}$, $\alpha \in (\sigma, d/2)$ 且 $\alpha_0 = \frac{d/2+\sigma}{2}$。权函数 $w_{\sigma,\alpha} = \frac{\kappa_{\sigma-\alpha}}{\kappa_{-\alpha}}$ 是正临界 *Hardy* 权重，当且仅当 $\alpha < \alpha_0$。

我们需要以下引理来证明定理 3.2。

引理 3.3。令 $d \in \mathbb{N}$, $\sigma \in (0,1]$, $\sigma < d/2$ 当 $d \in \{1,2\}$, $\alpha \in (\sigma, d/2)$ 且 $\alpha_0 = \frac{d/2+\sigma}{2}$。则，函数 $\kappa_{\sigma-\alpha}$ 满足 $\sum_{\mathbb{Z}^d} \kappa_{\sigma-\alpha} G^\sigma \kappa_{\sigma-\alpha} < \infty$ 当且仅当 $\alpha < \alpha_0$。

证明。根据命题 2.2 以及定理 A.1 中给出的 κ_β, $\beta \in \mathbb{R}$ 的渐近行为，我们有

$$\sum_{\mathbb{Z}^d} \kappa_{\sigma-\alpha} G^\sigma \kappa_{\sigma-\alpha} = \sum_{\mathbb{Z}^d} \kappa_{\sigma-\alpha}\kappa_{-\alpha} \asymp \sum_{x\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \frac{1}{|x|^{2d-4\alpha+2\sigma}},$$

其中，符号 $\asymp$表示由正的常数给出的双边估计。后一个和收敛当且仅当 $2d - 4\alpha + 2\sigma > d$，即 $\alpha < (d/2 + \sigma)/2 = \alpha_0$。证明完毕。□

定理 *3.2* 的证明。根据命题 2.2 $w_{\sigma,\alpha} = \kappa_{\sigma-\alpha}/G^\sigma\kappa_{\sigma-\alpha}$ 对于所有 $\alpha > \sigma$ 都是一个 Hardy 权。利用引理 3.3，我们发现 $\kappa_{\sigma-\alpha}$ 满足定理 3.1 (iii) 的可求和条件，当且仅当 $\alpha < \alpha_0$。上述定理中 (iii)⇒(i) 的蕴含关系完成了证明。□

由上述定理以及渐近展开常数$\Psi_{\sigma,d}(\alpha)$的单调性，我们现在可以推导出主要结果。

定理 3.4（零临界权重）。设 $d \in \mathbb{N}$, $\sigma \in (0,1]$, $\sigma < d/2$ 当$d \in \{1,2\}$ 且 $\alpha_0 = \frac{d/2+\sigma}{2}$ 时。那么，权函数 $w_{\sigma,\alpha} = \frac{\kappa_{\sigma-\alpha}}{\kappa_{-\alpha}}$ 是零临界 *Hardy* 权，当且仅当 $\alpha = \alpha_0$。

证明。根据命题 2.2，我们有 $\kappa_{-\alpha} = G^\sigma\kappa_{\sigma-\alpha}$；根据引理 3.3，我们有 $\kappa_{\sigma-\alpha}$ 满足 $\sum_{\mathbb{Z}^d} \kappa_{\sigma-\alpha} G^\sigma \kappa_{\sigma-\alpha} < \infty$ 当且仅当 $\alpha < \alpha_0$。由定理 3.1 (iii)⇒(ii)，我们推得，对于 $\alpha < \alpha_0$，有 $\kappa_{-\alpha} \in \mathcal{D}_0^\sigma$。因此，记 Δ^σ的二次型为 Q^σ，注意到 Hardy不等式可推广至$\mathcal{D}_0^\sigma$，且等号由基态 $\kappa_{-\alpha}$实现，我们得到

$$\begin{aligned} 0 &\le (Q^\sigma - w_{\sigma,\alpha_0})(\kappa_{-\alpha}) = (Q^\sigma - w_{\sigma,\alpha})(\kappa_{-\alpha}) + (w_{\sigma,\alpha} - w_{\sigma,\alpha_0})(\kappa_{-\alpha}) \\ &= \sum_{\mathbb{Z}^d} (w_{\sigma,\alpha} - w_{\sigma,\alpha_0})\kappa_{-\alpha}^2. \end{aligned}$$

根据命题 2.3 和定理 A.1，由w_{σ}的渐近行为α 和 $\kappa_{-\alpha}$，我们得到

$$\ldots = (\Psi_{\sigma,d}(\alpha) - \Psi_{\sigma,d}(\alpha_0)) \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \left[\frac{1}{|x|^{2\sigma+2d-4\alpha}} + O\left(\frac{1}{|x|^{2\sigma+2d-4\alpha+2}} \right) \right],$$

其中，兰道符号中的常数对 α 一致，参见定理 A.1。将求和估计为积分并使用极坐标可得， $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$ 的求和为 $O(1/\varepsilon)$ 阶。此外，命题 2.3 表明 $\Psi_{\sigma,\, d}(\alpha_0 - \varepsilon) - \Psi_{\sigma,\, d}(\alpha_0) = O(\varepsilon^2)$。综上

$$(Q^{\sigma} - w_{\sigma,\alpha_0})(\kappa_{-(\alpha_0-\varepsilon)}) = O(\varepsilon).$$

由于 $\kappa_{-\alpha}$ 属于 $\mathcal{D}_0^{\sigma}$，且对所有 $x \in \mathbb{Z}^d$，当 $\alpha \nearrow \alpha_0$ 时， $\kappa_{-\alpha}(x) \to \kappa_{-\alpha_0}(x)$，由单调收敛可知，我们可以提取一个序列 (e_n^{α})，使其属于 $C_c(\mathbb{Z}^d)$，且 $e_n^{\alpha} \to \kappa_{-\alpha}$, $\alpha < \alpha_0$ 在 $\mathcal{D}_0^{\sigma}$ 的范数下收敛。通过对角序列论证，我们得到一个零序列，这表明根据 KPP20 定理 5.3], $w_{\sigma,\, \alpha_0}$ 是临界 Hardy 权重。由定理 3.2， $w_{\sigma,\, \alpha_0}$ 不是正临界的，因此它必定是零临界的。

为了证明 $w_{\sigma,\, \alpha}$ 对 $\alpha > \alpha_0$ 不是临界的，我们采用与 [KN23, 引理 9] 中相同的论证：若$w_{\sigma,\, \alpha}$ 对 $\alpha > \alpha_0$是临界的，那么根据定理 3.2，它必定是零临界的。利用常数$\Psi_{\sigma,\, d}(\alpha) < \Psi_{\sigma,\, d}(\alpha_0)$的单调性，以及 $w_{\sigma,\, \alpha_0}$ 是零临界的这一事实，我们推知$w_{\sigma,\, \alpha}$ 不可能在无穷远处最优，这意味着 $w_{\sigma,\, \alpha}$ 对 $\alpha > \alpha_0$ 不是零临界的，参见例如 [Hak25, 引理 2.12]。□

我们将研究结果总结为以下定理。

定理 3.5 (结果总结)。 设 $d \in \mathbb{N}$，且 $\sigma \in (0,\ 1]$， $\sigma < d/2$若 $d \in \{1, 2\}$，且 $\alpha_0 = \frac{d/2+\sigma}{2}$ 。那么，权~~函数 $w_{\sigma,\, \alpha}$~~ $= \frac{\kappa_{\sigma-\alpha}}{\kappa_{-\alpha}}$ 对所有 $\alpha \in (\sigma,\ ~~d/2)~~$ 都是 *Hardy* 权，且

(a) 对于 $\sigma < \alpha < \alpha_0$，权函数 $w_{\sigma,\, \alpha}$ 是正临界的；(b) 对于 $\alpha = \alpha_0$，权函数 $w_{\sigma,\, \alpha}$ 是零临界的；(c) 对于 $\alpha_0 < \alpha < d/2$, 权函数 $w_{\sigma,\, \alpha}$ 是次临界的。

证明。 这直接由定理 3.2、定理 3.4，以及由命题 2.2 可知对于所有 $\alpha \in (\sigma,\ d/2)$， $w_{\sigma,\, \alpha}$ 都是 Hardy 权这一事实得到。□

定理 *1.1* 的证明。 这由上述定理以及命题 2.3 中给出的 $w_{\sigma,\, \alpha}$ 的渐近行为得到。□

4. A Landis Type Theorem

作为我们结果的一项应用，我们给出一个 Landis 型结果。对于情形 $d = 1$ ，DKP25，定理 5.2] 中证明了这样的结果。若一个分数阶 Schr¨odinger 算子 $\Delta^{\sigma} + V$ 在 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上的二次型是正的，则称其为 正的。

定理 4.1. 令 $\sigma \in (0, 1 \wedge d/2)$。假设 u 是定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上的正分数阶 *Schr¨odinger* 算子 $\Delta^\sigma + V$ 的调和函数，且满足 $V \leq 1$。若

$$u \in O\left(|x|^{\sigma - d/2}\right) \quad and \quad \liminf_{x\to\infty} |u(x)||x|^{d+2\sigma} = 0,$$

那么 $u = 0$。

证明。由定理 3.4，存在一个最优 Hardy 权重 $w_{\sigma,\ \alpha_0}$ 使得其对应的 Agmon 基态 $\kappa_{-\alpha_0}$ of $\Delta^\sigma - w_{\sigma,\ \alpha_0}$ 在 $\mathbb{Z}^d$ 上满足 $\kappa_{-\alpha_0} \asymp |x|^{2\alpha_0 - d} = |x|^{\sigma - d/2}$，依据定理 A.1，并且由于 $\alpha_0 = (d/2 + \sigma)/2$。因此，根据我们的假设，$u \in O(\kappa_{-\alpha_0})$。

另一方面，算子 $\Delta^\sigma + 1$ 在 $\mathbb{Z}^d$ 上的格林函数 $G_1^\sigma = (\Delta^\sigma + 1)^{-1} 1_0$的渐近行为为 $G_1^\sigma \asymp |x|^{-(d+2\sigma)}$ [DMERM24，定理 7]。因此，[DKP25，推论 3.3] 推出 $u = 0$ 在 $\mathbb{Z}^d$上成立。□

Appendix A. Asymptotics of the Riesz Kernel on $\mathbb{Z}^d$

我们研究基于标准拉普拉斯算子 $\Delta = \Delta^1$ 的离散分数阶拉普拉斯算子 Δ^σ 在 $\mathbb{Z}^d$ 上的核。对于 $-d/2 < \sigma < 1$，该核 κ_σ 被称为 Riesz 核，其定义为 $\kappa_\sigma(0) = 0$，当 $\sigma > 0$, $\kappa_0 = 1_0$ 时；其他情况下则由积分表示给出

$$\kappa_\sigma(x) = \frac{1}{|\Gamma(-\sigma)|} \int_0^\infty e^{-t\Delta} 1_0(x)\, \frac{dt}{t^{1+\sigma}}.$$

事实上，有多种文献研究了 κ_σ 的渐近行为，例如 [CR18、CRS$^+$18、DMERM24、FBRR24、GRM20、Sla18]。因此，为了完整起见，并且由于据我们所知，文献中迄今尚未出现下文所给出的具有精确误差阶的渐近行为，我们在以下定理中给出证明。

定理 A.1 (Riesz 核的渐近性)。对于 $-d/2 < \sigma < 1$,$\sigma \neq 0$，*Riesz* 核有限，并且当 $|x| \to \infty$ 时满足

$$\kappa_\sigma(x) = C_{d,\sigma}\, |x|^{-d-2\sigma} + O\left(|x|^{-d-2\sigma-2}\right),$$

其中

$$C_{d,\sigma} = \frac{4^\sigma \Gamma(d/2 + \sigma)}{\pi^{d/2} |\Gamma(-\sigma)|}.$$

兰道符号中的常数可以在 σ 的取值范围内统一选取。

注。注意，条件 $\sigma > -d/2$ 对于 $\kappa_{-\sigma}$ 定义中的积分在无穷远处收敛是必要的，因为热核在 t较大时按 $t^{-d/2}$ 衰减。条件 $\sigma < 1$ 对于在 0 处收敛是必要的，因为当 t较小时，热核有一个常数倍于 t 的下界。这将在证明中精确说明。

在下文中，$C > 0$ 始终表示常数，它们可能在不同的行之间发生变化。

引理 A.2 (热核界)。 设 $d \in \mathbb{N}$。 $\mathbb{Z}^d$上的热核满足以下界:

(a) 对于所有 $x \neq 0$，都存在 $C > 0$，使得对于所有 $0 < t < |x|_\infty$，我们有 $e^{-t\Delta}1_0(x) \leq Ct^{|x|_\infty}$。此外，存在 $m_0 \in \mathbb{N}$ 和 $C > 0$，使得对于满足 $|x| \geq m_0$ 和 $0 < t \leq |x|^{1/(d+1)}$的 $x \in \mathbb{Z}^d$，我们有

$$e^{-t\Delta}1_0(x) \leq Ct^{|x|_\infty}e^{-(1/d)|x|\log|x|}.$$

(b) 固定 $k \in \mathbb{N}$。对于 $t \to \infty$ 和 $x \in \mathbb{Z}^d$，有

$$e^{-t\Delta}1_0(x) = (4\pi t)^{-d/2}e^{-|x|^2/(4t)} + O\left(t^{-d/2-1}\left[\left(1+\left(\tfrac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^k\right)e^{-|x|^2/(4t)} + t^{-(k-3)/2}\right]\right).$$

证明。 对于 (a)，我们使用 [Pan93，定理 3.5] 关于 $\mathbb{Z}$ 上的热核 $K^{(1)}$

$$K^{(1)}(t,0,m) \leq C|m|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(|m|F\left(\frac{|m|}{2t}\right)\right)$$

其中 $C > 0$ 和 $m \in \mathbb{Z}$为某些常数，且

$$\begin{aligned} F(y) &= -\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) + y^{-1}\left(\sqrt{y^2+1}-1\right) \\ &= -\log(2y) + 1 + O\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

因此，我们将其用于 $y = |m|/2t$。假设 $t/|m|$由一个常数所界，该常数将为 $\sqrt{d}$，我们可以选取足够大的 m_0，使得对于 $|m| \geq m_0$

$$\begin{aligned} K^{(1)}(t,0,m) &\leq e^{|m|F(|m|/2t)} \leq Ct^{|m|}e^{-|m|(\log(|m|/e)+O(t/|m|))} \\ &\leq Ct^{|m|}e^{-(1/\sqrt{d})|m|\log(\sqrt{d}|m|)}. \end{aligned}$$

对于高维情形，我们观察到，热核在 $\mathbb{Z}^d$ 上可分解为

$$e^{-t\Delta}1_0(x) = K^{(d)}(t,0,x) = \prod_{i=1}^{d} K^{(1)}(t,0,x_i).$$

我们取 $|x_j| = |x|_\infty \geq (1/\sqrt{d})\overline{|x|}$，其中某个 $j = 1,\ldots,d$。为应用上面一维情形的论证，我们观察到, _根据假设，$t/|x_j|_= t/|x_\infty| \leq \sqrt{d}|x|^{-d/(d+1)} \leq \sqrt{d}$ 对于 $x \neq 0$。由于热核有界于 1，我们可以将所有其他因子都估计为 1。因此，对于 $|x| \geq m_0$ 和 $t \leq |x|^{1/(d+1)}$

$$\begin{aligned} K^{(d)}(t,0,x) &\leq K^{(1)}(t,0,x_j) \leq Ct^{|x_j|}e^{-(1/\sqrt{d})|x_j|\log(\sqrt{d}|x_j|)} \\ &\leq Ct^{|x|_\infty}e^{-(1/d)|x|\log|x|}, \end{aligned}$$

这里我们再次用到了 $|x|_\infty \geq |x|/\sqrt{d}$。 (a) 的第一条结论沿用相同思路可更容易地得到。

对于 (b) 部分，我们应用 [LL10, 定理 2.1.3 (2.9)]，它给出了 $\mathbb{Z}^d$ 上当 t 较大时热核的渐近展开，以及简单随机

游走。也就是说，我们考虑带有协方差矩阵 $\Gamma = (1/d)I_d$ 的归一化拉普拉斯算子 $(1/2d)\Delta$，它满足 $\mathcal{J}^*(x) = x \cdot \Gamma^{-1}x = d^{1/2}|x|$，参见 [LL10，第 11]页。因此， [LL10, 定理 2.1.3 (2.9)] 指出，对所有$k \in \mathbb{N}$，我们有

$$e^{-(t/2d)\Delta}1_0(x) = (2\pi t/d)^{-d/2}e^{-d|x|^2/(2t)} + O\left(t^{-d/2-1}\left[\left(1+\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^k\right)e^{-d|x|^2/(2t)} + t^{-(k-3)/2}\right]\right),$$

对于 $t \to \infty$。将 t 替换为 $2dt$ 进行缩放，即得所需结果。 □

定理 *A.1* 的证明。我们将定义 κ_σ 的积分拆分为两个区域

$$\kappa_\sigma(x) = \frac{1}{|\Gamma(-\sigma)|}\int_0^\infty e^{-t\Delta}1_0(x)\,\frac{dt}{t^{1+\sigma}} = \frac{1}{|\Gamma(-\sigma)|}\left(\int_0^{|x|^{\frac{1}{d+1}}} \dots + \int_{|x|^{\frac{1}{d+1}}}^\infty \dots\right)$$

并分别将这两个积分记为 $I_1(x)$ 和 $I_2(x)$。

区域 I 由 $0 < t \le |x|^{1/(d+1)}$ 组成。由于热核有界于 1，因此在此区域中，有限性仅在 $\sigma > 0$ 时可能成为问题。此外，根据定义，对于 $\sigma > 0$，我们有 $\kappa_\sigma(0) = 0$。对于 $x \neq 0$，前一个引理 (a) 的第一条结论给出了热核的上界 t，因此积分在 0 处收敛。

关于 $|x| \to \infty$ 时的渐近行为，不失一般性，可假设$|x|_\infty \ge \max\{2, m_0\}$，其中 m_0 根据前一个引理的 (a) 部分选取。由后者可知，热核有界于

$$e^{-t\Delta}1_0(x) \le Ct^{|x|_\infty}e^{(-1/d)|x|\log|x|}.$$

结合 $|x|_\infty \le |x|$，可得

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^{|x|^{\frac{1}{d+1}}} e^{-t\Delta}1_0(x)\frac{dt}{t^{1+\sigma}} \\ &\le Ce^{-(1/d)|x|\log|x|}\left[\int_0^1 t^2\frac{dt}{t^{1+\sigma}} + \int_1^{|x|^{\frac{1}{d+1}}} t^{|x|}\frac{dt}{t^{1+\sigma}}\right] \\ &= O\left(e^{-(1/d)|x|\log|x|}\,e^{(1/(d+1))(|x|-\sigma)\log|x|}\right), \end{aligned}$$

对于 $|x| \to \infty$，该值小于任何多项式阶的量。此外，关于 $0 \le t \le 1$ 的积分前面的常数有界于 $C(2-\sigma)^{-1}$，且由于 $\sigma < 1$，可以找到一个与 σ 无关的兰道符号常数。

区域 II 由 $t > |x|^{1/(d+1)}$ 构成。这里我们使用上述引理 (b) 中针对 $k \in \mathbb{N}$ 给出的渐近展开：

$$e^{-t\Delta}1_0(x) = \frac{e^{-|x|^2/(4t)}}{(4\pi t)^{d/2}} + O\left(t^{-d/2-1}\left[\left(1+\left(\tfrac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^k\right)e^{-|x|^2/(4t)}\right]\right) + O\left(t^{-(d+k-1)/2}\right).$$

逐项积分后，积分 $I_2(x) = \int_{t\geq|x|^{1/(d+1)}} e^{t\Delta}1_0(x)dt/t^{1+\sigma}$分成三项，分别记为 $J_1(x)$、 $J_2(x)$ 和 $J_3(x)$。

我们首先计算主项 $J_1(x)$，通过变量替换 $u = \frac{|x|^2}{4t}$，可得 $t = \frac{|x|^2}{4u}$，$dt = -\frac{|x|^2}{4u^2}du$ — — —

$$J_1(x) = \int_{|x|^{\frac{1}{d+1}}}^{\infty} \frac{e^{-|x|^2/(4t)}}{(4\pi t)^{d/2}}\frac{dt}{t^{1+\sigma}} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{4^{d/2+\sigma}}{|x|^{d+2\sigma}}\int_0^{4^{-1}|x|^{\frac{2d+1}{d+1}}} e^{-u}u^{d/2+\sigma-1}du.$$

利用伽马函数的定义，$\Gamma(d/2+\sigma) = \int_0^\infty e^{-u}u^{d/2+\sigma-1}du$，得到

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{4^\sigma\Gamma(d/2+\sigma)}{\pi^{d/2}}|x|^{-d-2\sigma} - \frac{1}{\pi^{d/2}}\frac{4^\sigma}{|x|^{d+2\sigma}}\int_{4^{-1}|x|^{\frac{2d+1}{d+1}}}^{\infty} e^{-u}u^{d/2+\sigma-1}du \\ &= \frac{4^\sigma\Gamma(d/2+\sigma)}{\pi^{d/2}}|x|^{-d-2\sigma} + O(e^{-c|x|}) \end{aligned}$$

其中存在某个 $c > 0$，可使其取值独立于 σ。

第一个误差项可用类似的方法处理。我们将积分$J_2(x)$拆分为两个积分$J_{2,1}(x)$ 和$J_{2,2}(x)$，分别对应阶为 $t^{-d/2-1}$ 和 $t^{-d/2-1}(|x|/\sqrt{t})^k$的误差项。$J_2(x)$ 的第一部分 $J_{2,1}(x)$ 与主项类似，得到 $O(|x|^{-d-2\sigma-2})$，因为我们多出一个 t^{-1}，它代入后会产生一个额外的 $|x|^{-2}$。第二部分为

$$\begin{aligned} J_{2,2}(x) &= C\int_{|x|^{\frac{1}{d+1}}}^{\infty} t^{-d/2-1}\left(\tfrac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^k e^{-|x|^2/(4t)}\frac{dt}{t^{1+\sigma}} \\ &= C|x|^k\int_{|x|^{\frac{1}{d+1}}}^{\infty} t^{-d/2-k/2-2-\sigma}e^{-|x|^2/(4t)}dt \\ &= C\frac{4^{d/2+k/2+1+\sigma}}{|x|^{d+2+2\sigma}}\int_0^{4^{-1}|x|^{\frac{2d+1}{d+1}}} e^{-u}u^{d/2+k/2+\sigma}du \\ &= O(|x|^{-d-2\sigma-2}), \end{aligned}$$

其中在倒数第二步中，我们像之前一样作了变量替换 $u = |x|^2/(4t)$。再次注意，兰道符号中的常数可以选取得与 σ 无关。

最终误差 $J_3(x)$ 是 $O\left(t^{-(d+k-1)/2-1-\sigma}\right)$ 在$t \geq |x|^{1/(d+1)}$上的积分；对于适当选择的 k，它给出 $O(|x|^{-d-4})$，从而兰道符号中的常数可以选择为与 σ 无关。

因此，综合我们得到的一切，

$$\begin{aligned}\kappa_\sigma(x) &= \frac{1}{|\Gamma(-\sigma)|}\left(I_1(x)+J_1(x)+J_{2,1}(x)+J_{2,2}(x)+J_3(x)\right)\\ &= C_{d,\sigma}|x|^{-d-2\sigma}+O\left(|x|^{-d-2\sigma-2}\right),\end{aligned}$$

其中 $C_{d,\sigma}=4^\sigma\Gamma(d/2+\sigma)/(\pi^{d/2}|\Gamma(-\sigma)|)$ 如所述。由于朗道符号中误差项的所有常数都可以选取为与 σ 无关，并且对于 $\sigma<1$，$|\Gamma(-\sigma)|$ 有下界，我们发现，后一个朗道符号也可以取一个在给定范围内关于 σ 一致的常数。证明完毕。□

致谢。作者感谢德国研究联合会的资金支持。MK 和 FP 感谢国际高等研究院（耶路撒冷）提供的资金支持与热情款待。我们感谢 Ujjal Das、Bartek Dyda、Florian Fischer、Shubham Gupta、David Krejčiřík、Marius Nietschmann、Yehuda Pinchover 和 Luz Roncal 对本文初稿提出的意见。

References

[Bak08] Oleg G. Bakunin。*Turbulence and Diffusion: scaling versus equations*。施普林格科学与商业媒体。Springer Berlin Heidelberg，2008年。[BD08] Krzysztof Bogdan 和 Bart-lomiej Dyda。分数阶 Hardy 不等式中的最佳常数。*Math. Nachr.*，284：629–638，2008年。[BDK16] Krzysztof Bogdan、Bart-lomiej Dyda 和 Panki Kim。半群的 Hardy 不等式与非爆炸性结果。*Potential Anal.*，44(2)：229–247，2016年。[BSV21] Elvise Berchio、Federico Santagati 和 Maria Vallarino。齐次树上的 Poincar´e 不等式与 Hardy 不等式。载于 *Geometric properties for parabolic and elliptic PDEs* 47 *Springer INdAM Ser.* 1 22 ，第 卷，页码 – 。Springer，查姆， [2021] ©2021。[CR18] ´Oscar Ciaurri 和 Luz Roncal。离散拉普拉斯算子分数阶幂的 Hardy 不等式。*J. Anal.*，26(2)：211–225，2018年。[CRS+18] ´Oscar Ciaurri、Luz Roncal、Pablo R. Stinga、Jos´e L. Torrea 和 Juan L. Varona。非局部离散扩散方程与分数阶离散拉普拉斯算子：正则性及应用。*Advances in Mathematics*，330：688–738，2018年。[DFF25] Ujjal Das 和 Rub´en Fuente-Fern´andez。离散半直线上的最优分数阶 Hardy 不等式。*Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 2025 。已获接收，将发表。[DFP14] Baptiste Devyver、Martin Fraas 和 Yehuda Pinchover。二阶椭圆算子的最优 Hardy 权重：对 Agmon 问题的解答。*J. Funct. Anal.*，266：4422–4489，2014年。[DKP25] Ujjal Das、Matthias Keller 和 Yehuda Pinchover。关于图上正 Schr¨odinger 算子的 Landis猜想。*Int. Math. Res. Not. IMRN*，(12)：论文编号 rnaf151，共20页，2025年。[DMERM24] Margherita Disertori、Roberto Maturana Escobar 和 Constanza Rojas- Molina。分数阶 Anderson 模型的格林函数衰减及其与长程自避行走的联系。*J. Stat. Phys.*，191 33，25，2024 3( )：论文编号 。

[DP16] Baptiste Devyver 和 Yehuda Pinchover。最优 L^p Hardy 型不等式。
Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire，33(1)：93–118，2016年。[DPV15] S. Dipierro、G. Palatucci 和 E. Valdinoci。晶体中的位错动力学：分数阶拉普拉斯框架下的宏观理论。
Comm. Math. Phys.，333 2 1061 1105，2015 ( )：–。[Dyd25] Bart-lomiej Dyda。格点上的分数阶与非分数阶 Hardy 不等式 $\mathbb{Z}^d$。 *arXiv preprint 2506.08273*，2025年。[FBRR24] Aingeru Fern´andez-Bertolin、Luz Roncal 和 Angkana R¨uland。关于分数阶离散拉普拉斯算子的（整体）唯一延拓性质。 *J. Funct.* , ( )：论文编号 。[Fis24] Florian Fischer。图上 p-Hardy 权重的最优性与衰减。
Calc. Var. Partial Differential Equations，63(7)：论文编号 162，共37页，2024年。[Fit00] Patrick J. Fitzsimmons。Dirichlet 型的 Hardy 不等式。
J. Math. , ( )：–。[FKP23] Florian Fischer、Matthias Keller 和 Felix Pogorzelski。一种改进的离散 p-Hardy 不等式。
Integral Equations Operator Theory，95(4)：论文编号 24，共17页，2023年。[FLS08] Rupert L. Frank、Elliott H. Lieb 和 Robert Seiringer。分数阶 Schr¨odinger 算子的 Hardy-Lieb-Thirring 不等式。 *J. Amer. Math. Soc.*，21 4 925 950，2008 ( )：–。[FLW14] Rupert L. Frank、Daniel Lenz 和 Daniel Wingert。非局部对称 Dirichlet 型的内蕴度量及其在谱理论中的应用。
J. , ( )：–。[FR25] Florian Fischer 和 Christian Rose。流形与图上的最优 Poincar´e-Hardy 型不等式。
to appear in Indag. Math.，2025年。[GKˇS25a] Borbala Gerhat、David Krejˇciˇr´ık 和 Franti ˇsek ˇStampach。半直线上离散拉普拉斯算子正幂的临界性转变。 *Revista Matemática Iberoamericana* , ( )：–。[GKˇS25b] Borbala Gerhat、David Krejˇciˇr´ık 和 Franti ˇsek ˇStampach。半直线上的改进离散 Rellich 不等式。 *Israel J. Math.*，268 72，2025 1 45( )：–。[GRM20] Martin Gebert 和 Constanza Rojas-Molina。分数阶 Anderson 模型的 Lifshitz 尾。 *J. Stat. Phys.*，179(2)：341–353，2020年。[Gup23] Shubham Gupta。格点上的 Hardy 和 Rellich 不等式。
Calc. Var. Partial , ( )：论文编号 。[Gup24] Shubham Gupta。整数上的一维离散 Hardy 和 Rellich 不等式。 *J. Fourier Anal. Appl.*，30(2)：论文编号 15，共22页，2024年。[Hak25] Philipp Hake。
Optimal Hardy inequalities on lattices in stratified groups。博士论文，莱比锡大学，2025年10月。¨Her[Ira W. Herbst。算子 (77]) 的谱理论。
$p^2+m^2\ ^{1/2}-Ze^2/r$ *Comm.* 。 , ：–。[KL16] Lev Kapitanski 和 Ari Laptev。关于连续与离散 Hardy 不等式。 *J. Spectr. Theory*，6(4)：837–858，2016年。[KL23] Matthias Keller 和 Marius Lemm。欧几里得格点上的最优 Hardy 权重。
Trans. Amer. Math. Soc.，376(9)：6033–6062，2023年。[KLˇS22] David Krejˇciˇr´ık、Ari Laptev 和 Franti ˇsek ˇStampach。半直线上非自伴离散 Schr¨odinger 算子的谱包含与稳定性。
Bull. Lond. Math. Soc.，54(6)：2379–2403，2022年。[KLW21] Matthias Keller、Daniel Lenz 和 Rados-law K. Wojciechowski。 *Graphs and discrete Dirichlet spaces* 358 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* ，第 卷。Springer，查姆，2021年。

[KN23] Matthias Keller 和 Marius Nietschmann。整数上的分数阶拉普拉斯算子的最优 Hardy 不等式。 *Ann. Henri Poincaré*, 24 2741, 2023 8 2729( ): – .[KP20] Hynek Kovaˇr´ık 和 Yehuda Pinchover。关于 Hardy 权重在无穷远处的最小衰减。 *Commun. Contemp. Math.*, 22(5):1950046, 18, 2020. [KPP18a] Matthias Keller、Yehuda Pinchover 和 Felix Pogorzelski。改进的离散 Hardy 不等式。 *Amer. Math. Monthly*, 125(4):347–350, 2018. [KPP18b] Matthias Keller、Felix Pogorzelski 和 Yehuda Pinchover。图上 Schr¨odinger 算子的最优 Hardy 不等式。 *Comm. Math. Phys.*, 358 767 790, 2018 : – .[KPP20] Matthias Keller、Felix Pogorzelski 和 Yehuda Pinchover。图上 Schr¨odinger 算子的临界性理论。 *J. Spectr. Theory*, 10:73–114, 2020. [KˇS22] David Krejˇciˇr´ık 和 Franti ˇsek ˇ Stampach。离散 Hardy 不等式和 Keller-Pinchover-Pogorzelski 不等式的锐利形式。 *Amer. Math.* , ( ): – .[LL10] *Monthly* 129 3 281 283, 2022 Gregory F. Lawler 和 Vlada Limic。 *Random walk: a modern introduction*，第 123 卷，载于 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*。剑桥大学出版社，剑桥，2010。[Lon 15] Stefano Longhi。光学中的分数阶 Schr¨odinger 方程。 *Opt. Lett.*, 40 6 1117 1120, 2015 ( ): – .[Mee11] Mark M. Meerschaert。 *Fractional Calculus Anomalous Diffusion and Prob-* , , , pages – . .[*ability* 265 284 2011 MV04] Vladimir G. Maz'ya 和 Israel E. Verbitsky。相对论 Schr¨odinger 算子的形式有界性判据。 *Ann. de l'Institut Fourier*, 54 2 317 339, 2004 ( ): – .[Pan93] Michael M. H. Pang。图的热核。 *J. London Math. Soc. (2)*, 47 1 50 64, 1993 ( ): – .[Rie39] Marcel Riesz。黎曼–刘维尔积分与波动方程的柯西问题。 *Bull. Soc. Math. France*, 67:153–170, 1939. [Sla18] Gordon Slade。上临界维数以下长程 $O(n)$模型的临界指数。 *Comm. Math. Phys.*, 358(1):343–436, 2018. [˜SW25] Franti ˇsek ˇStampach 和 Jakub Waclawek。最优离散 Hardy-Rellich-Birman 不等式。 *to appear in J. Anal. Math.*, 2025. [Yaf99] Dimitri Yafaev。Hardy–Rellich 不等式中的最佳常数。 *J. Funct.* , ( ): – . *Anal.* 168 1 121 144, 1999

P. Hake and F. Pogorzelski, Institut für Mathematik, Universität Leipzig, 04109 Leipzig, Germany

M. Keller, Institut für Mathematik, Universität Potsdam 14476 Potsdam, Germany*Email address*: philipp.hake@math.uni-leipzig.de*Email address*: felix.pogorzelski@math.uni-leipzig.de*Email address*: matthias.keller@uni-potsdam.de