arXiv:2601.00903v1 [physics.class-ph] 31 Dec 2025

静磁场线分类

Joel Franklin,* David Griffiths,† 和 Darrell Schroeter‡
Department of Physics, Reed College, Portland, Oregon 97202

与普遍看法相反，静磁场线通常并不形成闭合环路。那么，为什么在许多熟悉的例子中，它们实际上是闭合的呢？还有哪些其他拓扑结构？哪些电流配置会产生这些结构？

I. 引言

在经典电动力学中，基本物理量是电场和磁场，**E**(**r** *t*) 和**B**(**r** *t*)。场线[1] 将相邻点处的场矢量连接起来，有助于直观呈现场的结构，但它们在基础理论中完全不起作用。正如费曼所说：“[场]线……只是描述场的一种粗略方式，若直接用场线来表述正确的定量定律，将会非常困难。此外，场线的概念并未包含电动力学最深层的原理，即叠加原理。尽管我们知道一组电荷产生的场线是什么样子，也知道另一组电荷产生的场线是什么样子，但当两组电荷同时存在时，我们并不能据此得知场线图样会是什么样。 [另一方面，用场 **E** 和**B**], 来描述时，叠加就很简单——只需将两个矢量相加即可。”[2]

此外，人们对场线还存在一些常见的误解。入门阶段的学生常被告知：

1. 电场线不能终止于真空中；它们起始于正电荷，终止于负电荷（或者延伸至无穷远）。2. 磁力线不能终止于真空中；它们形成闭合环路（或者延伸至无穷远）。3. 电场线的密度与场强成正比。4. 磁力线的密度与场强成正比。5. 场线是“真实的”物理实体：它们是存在于电荷和电流周围空间中的、不可见的“细线”。

其中，只有第 3 条通常成立[3] （即使对于静态构型也是如此）。本文旨在纠正这些误解：通过给出若干简单明确的反例，并提醒读者注意有关这一主题的文献较为分散。我们并不声称发现了什么根本性的新事物，对于专家（尤其是等离子体物理学家）来说，本文的内容也算不上新闻。但我们确实认为，一些学生（以及他们的老师）会惊讶地发现，他们在高中学到的一些简单规则并不成立。我们表明，电场线和磁场线都可能在半空中终止于场为零的点；我们还证明，磁力线通常不会形成闭合环路[4] （尽管这是许多熟悉的例子中一个引人注目的特征）。我们指出了两种有趣的替代情形，分别称为“涡旋”（一条螺旋汇入线电流的场线）和“弹簧状曲线”（一条沿线电流螺旋前进的场线）。

这引出了几个出人意料的微妙问题：

- 究竟是熟悉的教科书式构型中的什么因素导致了闭合磁力线？我们如何才能预先根据源电流的结构判断它是否会产生闭合场线？
- 这些闭合场线通常实际上是平面的；位于一个平面内的场线与形成闭合环路的场线之间有什么联系（如果存在联系的话）？
- 电流构型的特殊对称性起什么作用？
- 我们能否对可能存在的非闭合场线的拓扑进行分类？

我们无法给出简单而确切的答案，但这至少是一个开始。

在第二节中，我们将更仔细地探讨“场线”这一概念。这个术语究竟意味着什么？我们是否可能被法拉第等人误导了？他们曾提出一种非常具体的解释，但这种解释在麦克斯韦电动力学中难以成立？[5] 在第三节中，我们将探讨一些令人惊讶的磁力线示例：它们不会 形成闭合环路。在第四节中，我们将考察源电流的一些特殊对称性，以及它们对磁力线构型的影响。在第五节中，我们将回到一个问题：为什么许多熟悉的电流会产生闭合场线。附录 A 根据毕奥-萨伐尔定律推导出第四节中引用的一些结果。附录 B 探讨了特殊二维问题中的场线与等高线图（通常是闭合环路）之间一种耐人寻味的关系。附录 C 则讨论场线的曲率和挠率，以及弗雷内-塞雷公式在此背景下的一些意义。在补充材料中，我们提供了一些实用工具，帮助有兴趣的读者探索自己设计的构型。

II. 场线

究竟什么是场线——例如，对于给定的场$\mathbf{F}(\mathbf{r})$，你会如何指示计算机绘制一条场线？基本思路非常简单：要从场线上的一点$\mathbf{r}(u)$到下一点$\mathbf{r}(u+du)$，只需沿着场的方向迈出一小步：

$$\mathbf{r}(u+du) = \mathbf{r}(u) + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}(u))}{|\mathbf{F}(\mathbf{r}(u))|}\,\lambda\,du. \tag{1}$$

这里，u是沿曲线单调递增的任意光滑参数，而$\lambda(u)\,du$是$\mathbf{r}(u)$到$\mathbf{r}(u+du)$的距离。在无穷小极限下，

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \lambda\,\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{|\mathbf{F}(\mathbf{r})|}. \tag{2}$$

你可以任意选择$\lambda > 0$（甚至可以是$\mathbf{r}$的函数），因为λ只决定了随着u增大，你沿场线前进的距离。一个自然的选择是$\lambda = 1$；此时u就是弧长，ℓ：

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\ell} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{|\mathbf{F}(\mathbf{r})|}. \tag{3}$$

另一种方便的选择——也是本文将采用的选择——是$\lambda = |\mathbf{F}(\mathbf{r})|$：

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{4}$$

无论如何，我们得到的是关于$\mathbf{r}(u)$的一阶常微分方程，而（四阶）龙格-库塔法是求数值解的首选方法。[6]

当一条场线接近场本身消失的点时，会发生什么？[7] 如果“远侧”的场方向相反，那么算法 (1) 就会使场线在零点两侧来回穿过，实际上在那里终止。[8] 例如，设想在x轴上的$x = +a$和$x = -a$处各有一个相同的正电荷。一条场线从位于$+a$的电荷出发，向左（朝向原点）延伸；另一条则从位于$-a$的电荷出发，向右（同样朝向原点）延伸。当这两条不相容的场线在中心相撞时，会发生什么？学生可能会被告知“不要画那条场线就好了”（毕竟，你只能画出具有代表性的场线样本；而在中心，也就是场为零的地方，不应有场线，因为场线的密度与场强成正比）。承认这两条完全合理的场线只是在$x = 0$处终止，然后修改规则，岂不是更好：“电场线可以在点电荷处（或无穷远）终止，也可以在场消失的地方终止”——

磁场也是如此：设想两个方形线圈，中心位于z轴上，分别在$z = b$和$z = -b$处，通有反向电流。沿z轴的磁场在z为正时指向$+z$方向，在z为负时指向$-z$方向（图 1）。一条场线从原点出发，沿z轴正向向上延伸；另一条也从原点出发，沿负向向下延伸
z轴。同时，如果（正如我们刚才所假设的）那个中心点是沿着z轴的场线的“源”，那么它就是沿着x和y轴进入的场线的“汇”：这些场线在原点的空中终止，而该处的场为零。[9]

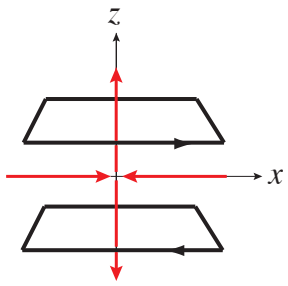

图 1. 在空中终止的场线（电流为黑色，场线为红色）。

按照构造，场线总是沿着场的方向“延伸”，如果它到达一个$\mathbf{F} = \mathbf{0}$（三个分量都为零）的点，就会停止。每条场线都有一个箭头——表示它的方向——而且它不能在途中改变方向。除去$|\mathbf{F}|$趋于无穷大的“奇异”点（例如载流导线上的点），以及$\mathbf{F} = \mathbf{0}$的点，空间中的每一点都有一条（唯一的）场线穿过。

III. 示例

从现在起，我们将把注意力限制在（静态）磁力线上；与电场线相比，磁力线有趣得多（也更复杂）。每一本入门教科书都会展示一些熟悉的磁力线：长直导线、圆形电流环、螺线管、环形线圈、无限大电流片和磁偶极子的磁力线。本节将探讨一些不太熟悉的构型，让我们领略其多样性。

A. 弹簧线圈

对于圆形电流，场线会围绕导线形成平面闭合环（图 2）。[10] 但是，假设我们现在沿着回路的轴（z）引入附加电流。[11] 它的场线环绕z轴，并为总场增添一个方位分量，使其形成一种螺旋线，像弹簧状曲线一样缠绕在导线回路上（图 3）。除非两种电流的比值恰好属于某些特殊值，否则场线不会自行闭合，而会一圈又一圈地缠绕，铺满一个环面。

对于方形电流环（图 4），也可以采用同样的方法；甚至可以将均匀纵向场（例如由无限长螺线管产生）与同轴导线组合起来。

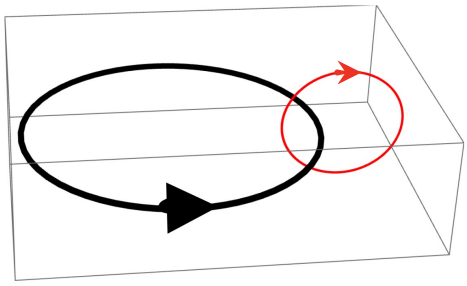

图 2. 圆形电流环的场线。

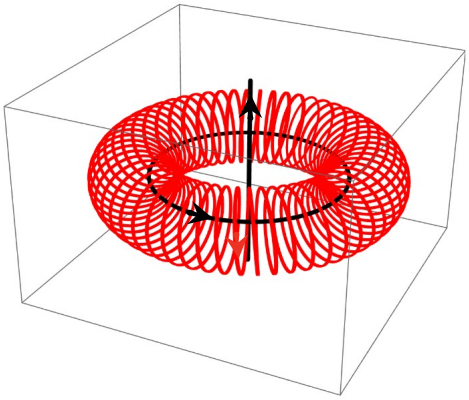

图 3. 圆形电流环上的弹簧状曲线。

电流（图 5）——不过在这种情况下，场线并未填满整个表面。

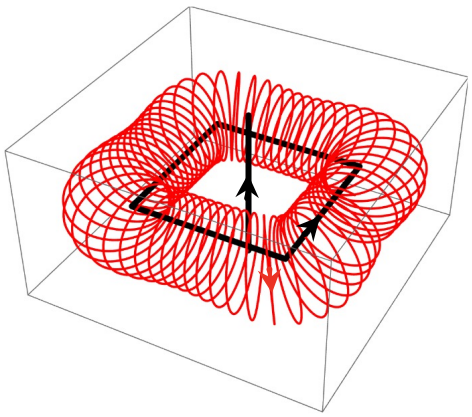

图 4. 方形电流环上的弹簧状曲线。

当然，从某种意义上说，这些构型是人为的，因为它们包含延伸至无穷远的导线。不过，可以用第二个圆形线圈替换无限导线，并让它与第一个线圈交错穿套（图6），从而实现基本相同的效果。[12]

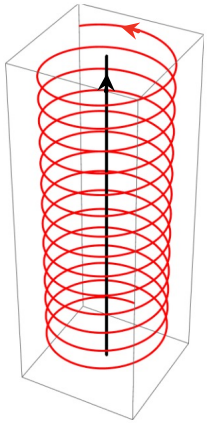

图 5. 无限长直电流上的弹簧状曲线。（未显示：均匀纵向场的源电流。）

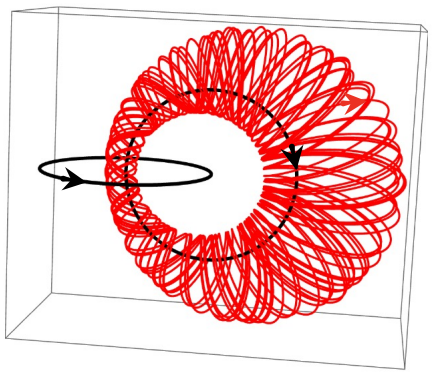

图6. 互锁圆形电流。

B. 涡旋

现在设想两个彼此平行的方形电流环，一个正好位于另一个上方，且电流相同。如果你离两根导线都不太近，场线就会形成闭合环路（图7）。但假设你一开始离（比如说）下方方形线圈很近，并且位于平分其一条边的平面内呢？由于对称性，场线会始终处于该平面内。它会围绕导线作扩张螺旋线运动，直到某处被上方方形线圈捕获，然后开始向内盘旋（图8）。如果我们沿另一个方向追踪这条场线（通过反转电流的符号），会怎样？它会不断向内盘旋，越来越靠近下方导线，填满图中的“空洞”。无论沿哪个方向，场线都不会真正终止，但也不会形成闭合回路；它会围绕电流“终结”于一条死亡螺旋上，我们称之为“涡旋”。在这种情况下，场线始于一根导线上的涡旋，终于另一根导线上的涡旋。

一条起初呈涡旋状的场线也可能飞向无穷远。图 9 中，我们将上方方形线圈的电流加倍，并再次从平分一条边的平面内出发（因此轨迹局限于该平面）。图 10 中我们也做了同样的处理，不过改为取包含后方角点的竖直平面——同样是利用对称性

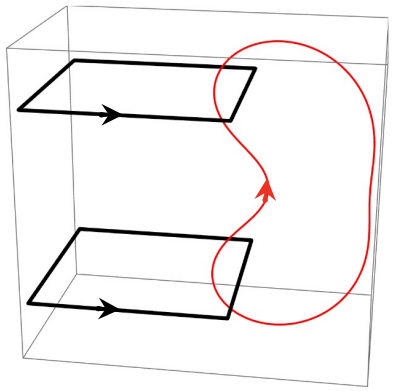

图7. 相同方形电流的典型场线。

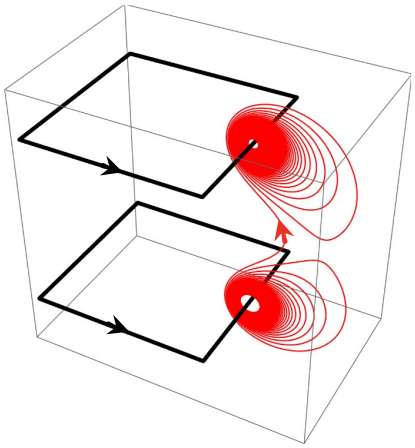

图8. 相等方形电流产生的成对涡旋。

这意味着整条场线都位于该平面内。（这里，场线从无穷远处飞入。）

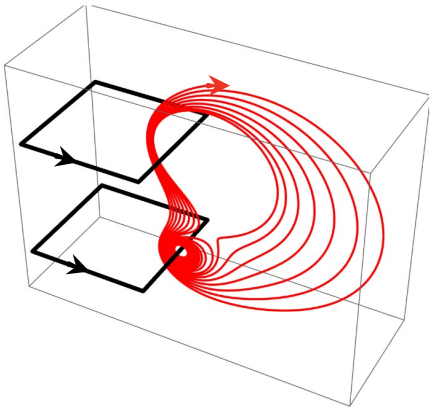

图9. 平分面对应的涡旋延伸至无穷远。

如果我们从一个既不在平分面上也不在角平面上的点出发，会怎样？那么，场线就不再受对称性的限制而只能位于某个平面内，也会出现更复杂的轨迹。在“两个线轴”的示意图中——

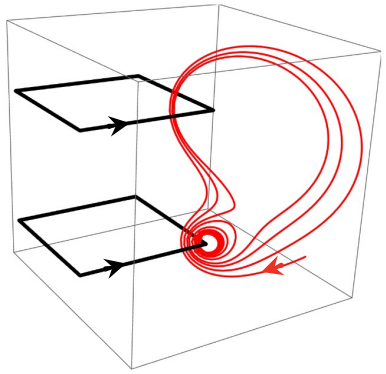

图 10. 角平面上的涡旋延伸至无穷远。

图 11 中，场线沿下环盘旋上行至拐角处，但它并未形成涡旋，而是向外展开并被上环捕获，随后沿上环盘旋下行，再转回到第一个环上。（对于其他初始条件，它会逃逸至无穷远。）这两个对称平面构成了场线无法穿透的“砖墙”；场线在其间形成“受阻”的涡旋和截断螺旋线。

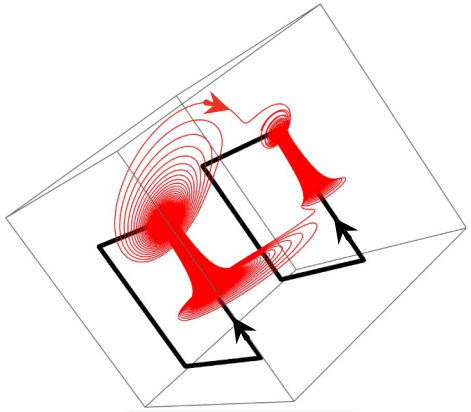

图 11. 受挫涡旋和截断螺旋线（与图 9 和图 10 中的场相同，但从 *between* 这些平面开始）。

涡旋怎么可能存在？我们当然会预期，靠近导线处的场线大致呈圆形。但显然，这里的场线受到一个指向内侧、朝向电流的场的扰动；对于位于“圆圈”平面内的点而言（由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$，这意味着沿导线方向的扰动场必须背离中心指向外侧）。

这种场出现在半径为 R、载有面电流[13]的球壳内部（例如）。

$$\mathbf{K}(r, \theta, \phi) = K_0 \sin(2\theta)\, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{5}$$

场所在的位置

$$\mathbf{B}(s, \phi, z) = \frac{2\mu_0 K_0}{5R}(-s\,\hat{\mathbf{s}} + 2z\,\hat{\mathbf{z}}) \tag{6}$$

（在柱坐标中）。因此，作为涡旋的简单模型，我们设想有一股稳恒电流 I 沿着 z 轴向下流动，并穿过这个球壳（以原点为中心）。在 $z = 0$ 平面内，扰动场指向内侧，迫使原本呈圆形的场线向轴螺旋延伸（图 12）；而对于平面上方（或下方）的点， z 分量会使弹簧状曲线沿着 z 轴向上（或向下）延伸（图 13）。

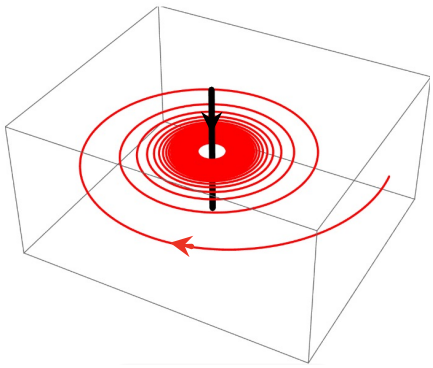

图 12。涡旋模型。（未显示：球形面电流。）

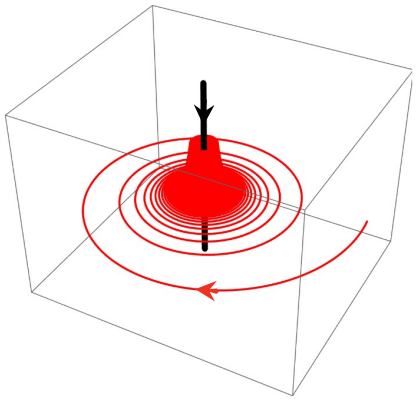

图 13。 $x\,y$ 平面上方的一条场线。（未显示：球形面电流。）

我们可以进行定量描述。方程 4 给出了场线的参数形式：

$$s(u) = s_0 e^{-\alpha u},\ \phi(u) = \frac{\beta}{2\alpha s_0^2}\left(e^{2\alpha u} - 1\right),\ z(u) = z_0 e^{2\alpha u}, \tag{7}$$

其中

$$\alpha \equiv \frac{2\mu_0 K_0}{5R}, \quad \beta \equiv \frac{\mu_0 I}{2\pi}, \tag{8}$$

s_0 是距轴的初始距离， z_0 是高于 $x\,y$ 平面的初始距离，并令 $\phi(0) = 0$。消去 u ，改用 ϕ作为自变量，场线的形式为

$$s(\phi) = \frac{s_0}{\sqrt{1+\gamma\phi}}, \quad z(\phi) = z_0(1+\gamma\phi), \tag{9}$$

与 $\gamma \equiv (8\pi K_0 s_0^2)/(IR)$。

C. 混沌场线

多年来，已有数位作者[14] 研究了所谓“混沌”的磁场：起始位置非常接近的场线，在延伸过程中会呈指数级分离。[15] 让我们从两条无限长、彼此垂直的直线电流开始，假设一条沿着 z 轴，另一条（电流相同）沿着 y 轴。靠近某条轴且远离原点时，场线当然近似为圆形。靠近原点时，典型的场线则是一条闭合的（但非平面的）环路（图 14）。

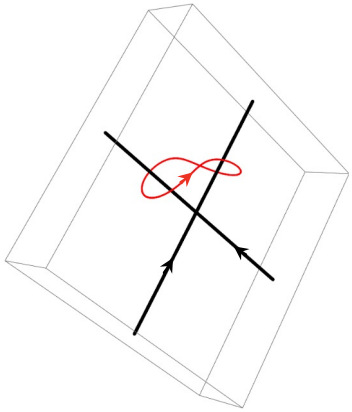

图 14. 相交的垂直电流所产生的非平面闭合场线。

但是，假设我们移动第二根导线，使其平行于 y 轴，但位于 $x = b$ 处（且 $z = 0$）。这是早期电子计算机最先接到的题目之一。[16] 图 15 展示了一条典型的场线。[17]

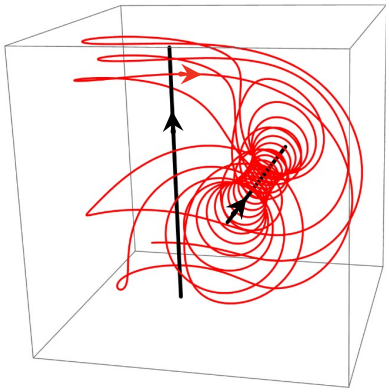

图 15. 不相交的垂直电流所产生的“混沌”场线。

IV. 对称性

场线的闭合性和平面性，与产生它们的电流所具有的对称性密切相关。本节将探讨一些示例。[18]

A. 平移对称性

我们所说的平移对称性，是指电流分布与某一个笛卡尔坐标无关——例如，z。我们考虑两种情况："纵向"（电流本身沿 z 方向）和"横向"（电流垂直于 z 方向）。由此产生的**B**场具有怎样的对称性?

1. **纵向电流**。设

$$\mathbf{J}(x,y,z) = J_z(x,y)\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{10}$$

根据毕奥-萨伐尔定律,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times \boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^{\,3}}\,d^3\mathbf{r}' \tag{11}$$

（其中 $\boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$），磁场的形式为[19]

$$\mathbf{B}(x,y,z) = B_x(x,y)\,\hat{\mathbf{x}} + B_y(x,y)\,\hat{\mathbf{y}}. \tag{12}$$

场以及场线都位于 z 为常数的平面内——在每一个这样的平面内都相同。（例：无限长直导线。）

2. **横向电流**。设

$$\mathbf{J}(x,y,z) = J_x(x,y)\,\hat{\mathbf{x}} + J_y(x,y)\,\hat{\mathbf{y}}. \tag{13}$$

Then

$$\mathbf{B}(x,y,z) = B_z(x,y)\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{14}$$

场线是无限长的直线，并且平行于 z 轴。这推广了关于任意横截面的无限长螺线管的熟知规则[20]：场平行于轴（对于内部的点，场等于 $\mu_0 K$，其中 K 是面电流密度）。

注意，式 10 与式 12 的关系，正如式 14 与式 13 的关系，体现了一种对偶性：**B**之于**J**，正如**J**之于（∇^2）**B**。（这是由 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0$、$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0$ 和 $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$ 得出的。）

B. 方位对称性

方位对称性是指电流与 ϕ无关。我们再考虑两种情况:

1. **环形电流**。假设

$$\mathbf{J}(s,\phi,z) = J_s(s,z)\,\hat{\mathbf{s}} + J_z(s,z)\,\hat{\mathbf{z}}, \tag{15}$$

在柱坐标中。那么

$$\mathbf{B}(s,\phi,z) = B_\phi(s,z)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}; \tag{16}$$

场指向方位方向，[21] 且场线是闭合的（平面）圆圈。这包括所有方位对称的**纵向电流**这一特殊情况:

$$\mathbf{J}(s,\phi,z) = J_z(s)\,\hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B}(s,\phi,z) = B_\phi(s)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{17}$$

2. **方位电流**。假设

$$\mathbf{J}(s,\phi,z) = J_\phi(s,z)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{18}$$

Then

$$\mathbf{B}(s,\phi,z) = B_s(s,z)\,\hat{\mathbf{s}} + B_z(s,z)\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{19}$$

场线位于 ϕ 恒定的平面内，但尚不清楚它们是否必定闭合。我们将在附录 B 中进一步探讨这一点。

同样，方程 15 与方程 16 的关系，正如方程 19 与方程 18 的关系，这体现了**J** 与**B**之间的对偶性。

C. 镜像对称性

假设源电流没有 z 分量

$$\mathbf{J}(x,y,z) = J_x(x,y,z)\,\hat{\mathbf{x}} + J_y(x,y,z)\,\hat{\mathbf{y}} \tag{20}$$

并且关于 xy 平面对称:

$$\begin{aligned} J_x(x,y,-z) &= J_x(x,y,z),\\ J_y(x,y,-z) &= J_y(x,y,z). \end{aligned} \tag{21}$$

那么磁场满足

$$\begin{aligned} B_x(x,y,-z) &= -B_x(x,y,z),\\ B_y(x,y,-z) &= -B_y(x,y,z),\\ B_z(x,y,-z) &= B_z(x,y,z). \end{aligned} \tag{22}$$

一如既往，这可以由毕奥-萨伐尔定律推出（见附录 **A**）。我们将这种组合称为"镜像"对称性。注意，$z=0$ 处的场指向 z 方向（方程 22），因此，任何穿过xy 平面的场线都与该平面垂直。

平面电流。 假设电流完全位于一个平面内（令其为 xy 平面）。这是镜像对称性的一种特殊情况（方程 20 和 21 显然成立），因此场满足方程 22。 问题： 可能出现哪些磁力线构型?

首先，考虑一条从未穿过 xy平面的场线。它不可能形成闭合回路（像的位置处也有一个对应的回路），因为根据安培定律，沿着该回路对**B** 进行的线积分将是

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{B}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{du}\,du = \int B^2\,du = \mu_0 I_{\text{enc}} = 0. \tag{23}$$

因此，**B** 必须沿场线处处为零——这根本就不是场线。它也不可能形成弹簧状曲线或涡旋——它们环绕着电流，因此必定会穿过 xy 平面。不过，它可以延伸至无穷远——例如，在 x 方向上无限延伸的电流薄片所产生的场。它能在半空中终止吗? 记住，这可能发生在$\mathbf{B} = \mathbf{0}$的点。考虑两个载有大小相等但

方向相反的电流的同心圆环，外环的半径是内环的两倍（a）。轴上的磁场为

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left[\frac{4}{(4a^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right]\hat{\mathbf{z}}, \quad (24)$$

并且它在 $z_0 \approx 0.9869\,a$ 处经过零点。如果 I 为正，场在 $-z_0 < z < z_0$ 时沿负 z 方向，其他情况下则沿正 z 方向；有一条场线从 (0，0，z_0) 出发，沿 z 轴向上延伸；另一条也从该处出发，向下延伸至 $-z_0$（当然，那条场线会穿过 xy 平面）；还有第三条从 $-\infty$ 出发，沿 (–)z 轴向上延伸至 $-z_0$。（此外，还有一些“水平”场线汇聚于 z_0，并从 $-z_0$ 发散。）因此答案是“是”：这类场线可以终止于空中。

那么，穿过 xy 平面的场线呢？如果它们只穿过一次，就可能终止于空中（我们刚才看到过一个示例），也可能延伸至无穷远（例如，沿圆形电流环的轴线延伸的场线）。如果它们穿过两次，那么它们必定构成闭合环路——一个叶瓣位于平面上方，与其镜像位于平面下方相连。它们不可能多次穿过平面（形成弹簧状曲线或涡旋等），因为这类构形从本质上违背了镜像对称性。

结论：平面电流产生的场线要么形成闭合环路，要么延伸至无穷远，要么在空中终止。[22]

V. 结论

磁力线可以形成有限的闭合环路，可以延伸至无穷远，可以在磁场为零的点于空中终止，可以在一条线电流处以死亡螺旋的形式终止，也可以像永不闭合的弹簧状曲线那样永远游荡；它们甚至可以形成混沌乱线团。请注意，本文除第一幅和最后一幅图外，每幅图展示的都是一条单独的场线！（所以，场线密度反映场强这一说法并不成立。）那么，我们最初的问题的答案是什么：为什么常见的稳恒电流构型会产生闭合磁力线？似乎并不存在简单而普遍的答案；一切取决于电流的对称性。

•**无限长直电流**。稳恒电流 I沿着 z 轴流动。这是具有方位对称性的纵向电流的一个示例（式 17）；磁场沿方位角方向，场线则是（同轴的）闭合圆圈。

• **环形线圈**。面电流 $\mathbf{K}(s,\ z) = K_s(s,\ z)\hat{\mathbf{s}} + K_z(s,\ z)\,\hat{\mathbf{z}}$沿着环形线圈表面流动，环形线圈绕$z$ 轴分布（截面可以是圆形或矩形，但只要沿整个圆周保持均匀，具体形状并不重要）。这是一个具有方位对称性的环向电流示例（公式 15），其场线是（同轴）圆圈。（环形线圈外部没有场线，那里的场为零。）

环形线圈外部没有场线，那里的场为零。）

• **圆形电流环**。电流 I 沿着位于 xy 平面、以原点为中心的圆形路径流动。这是具有方位对称性（方程 18）的方位电流示例，场线位于 ϕ 恒定的平面内（方程 19）。电流是平面的，因此场线是闭合的（轴上除外，场线会沿轴延伸至无穷远）。（理想的（点）磁偶极子也是如此，它是圆形电流环的极限情形。）

•**旋转回转体**。其他熟悉的示例包括均匀带电旋转球体和有限圆形螺线管（或具有等效电流的物体：均匀磁化球体和圆柱形条形磁铁）。这些同样是具有方位对称性（方程 18）的方位电流示例，因此场线位于 ϕ 恒定的平面内（方程 19）。我们可以将它们视为由不同半径的同轴圆形电流环堆叠而成。最简单的示例是位于 $z = \pm b$的两个相同圆环。典型的场线会绕着一个圆环（如图 2），或同时绕着两个圆环（如图7）形成闭合环路，但会不会出现涡旋（如图8）呢？不会：涡旋需要一个场分量指向内侧（朝向导线），位于 ϕ恒定的平面内；因此，对于垂直于该平面的点，这个分量会背离螺旋的中心（即沿着 $\pm\boldsymbol{\phi}$ 方向）。但是，方位对称性排除了沿 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的场。显然，这些场线也必定形成闭合环路（或者沿轴延伸至无穷远）。[23]

是的：简单的系统（直线电流、圆形线圈、紧密绕制的环形线圈、条形磁铁.....）会产生闭合的磁力线。但完整的图景要丰富得多！

附录 A：方程 20 的证明

如果电流具有镜像对称性（方程 20 和 21），那么

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\boldsymbol{\curlywedge} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ J_x & J_y & 0 \\ \curlywedge_x & \curlywedge_y & \curlywedge_z \end{vmatrix} \quad (25)$$
$$= (J_y\curlywedge_z)\,\hat{\mathbf{x}} - (J_x\curlywedge_z)\,\hat{\mathbf{y}} + (J_x\curlywedge_y - J_y\curlywedge_x)\,\hat{\mathbf{z}},$$

因此（令 $z'' = -z'$），毕奥-萨伐尔定律（方程 11）表明

$$B_x(x,y,z) \quad (26)$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J_y(x',y',z')(z-z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,dx'\,dy'\,dz'$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J_y(x',y',-z'')(z+z'')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z'')^2]^{3/2}}\,dx'dy'dz''$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J_y(x',y',z'')(z+z'')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z'')^2]^{3/2}}\,dx'\,dy'\,dz''$$

（最后一行用到了方程 21）。因此

$$
\begin{aligned}
&B_x(x,y,-z)\\
&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J_y(x',y',z'')(-z+z'')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(-z+z'')^2]^{3/2}}\,dx'\,dy'\,dz''\\
&=-B_x(x,y,z),
\end{aligned}\tag{27}
$$

对于 B_y 也是如此。这就得出了方程 22 中的前两个方程。同时，

$$
\begin{aligned}
&B_z(x,y,z)\\
&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J_x(x',y',z')(y-y')-J_y(x',y',z')(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\\
&\qquad dx'\,dy'\,dz'\\
&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J_x(x',y',-z'')(y-y')-J_y(x',y',-z'')(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z'')^2]^{3/2}}\\
&\qquad dx'dy'dz''\\
&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J_x(x',y',z'')(y-y')-J_y(x',y',z'')(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z'')^2]^{3/2}}\\
&\qquad dx'\,dy'\,dz''\\
&=B_z(x,y,-z),
\end{aligned}\tag{28}
$$

这证实了方程 22 中的第三个方程。

附录 B：磁力线与等高线图

在本附录中，我们进一步探讨具有方位对称性的方位角方向电流情形（方程 18）：

$$\mathbf{J}(s,\phi,z)=J_\phi(s,z)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}.\tag{29}$$

磁场的形式为（方程 19）

$$\mathbf{B}(s,\phi,z)=B_s(s,z)\,\hat{\mathbf{s}}+B_z(s,z)\,\hat{\mathbf{z}},\tag{30}$$

其分量满足

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sB_s)+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0.\tag{31}$$

场线位于 ϕ 恒定的平面内，其数值图像与等高线图极为相似。是否存在标量函数 $U(s,\ z)$，使得 U 的等值线与磁力线相对应？这就要求 $\mathbf{B}$ 垂直于 U 的梯度：

$$\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}U=B_s\frac{\partial U}{\partial s}+B_z\frac{\partial U}{\partial z}=0.\tag{32}$$

如果我们选择下式，就能满足方程 32，并自动满足方程 31：

$$\frac{\partial U}{\partial s}=sB_z,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=-sB_s.\tag{33}$$

对于方程 29 中的电流，矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\,d^3\mathbf{r}'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J_\phi(s',z')\,\hat{\boldsymbol{\phi}}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3\mathbf{r}'.\tag{34}$$

我们不妨选择坐标轴，使$\mathbf{r}$ 位于 $x\,z$平面，且处于 $y=0$ 处。在 P' 处的电流元与 P'' 处的电流元相对应，它们具有相同的 s' 和 z'，但ϕ' 相反（我们可以让它从 $-\pi$ 延伸到 $+\pi$，而不是从 0 延伸到2π）；P'和 P''具有相同的 $\mathscr{r}=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$，但电流$\hat{}'$ $\hat{}''$分别指向 $\boldsymbol{\phi}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 方向，将这两个矢量相加后，合矢量指向 y 方向。结论：位于 $x\,z$ 平面内的矢势纯粹指向 y 方向——也就是说，一般而言，$\hat{}$它指向 $\boldsymbol{\phi}$方向：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\int\frac{J_\phi(s',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,s'\,ds'\,d\phi'\,dz'.\tag{35}$$

Now

$$\boldsymbol{\mathscr{r}}=(s\cos\phi-s'\cos\phi')\hat{\mathbf{x}}+(s\sin\phi-s'\sin\phi')\hat{\mathbf{y}}+(z-z')\hat{\mathbf{z}},\tag{36}$$

so

$$\mathscr{r}^{\,2}=s^2+(s')^2+(z-z')^2-2ss'(\cos\phi\cos\phi'+\sin\phi\sin\phi'),\tag{37}$$

于是 ϕ' 积分变为

$$
\begin{aligned}
I_\phi&=\int_0^{2\pi}\frac{d\phi'}{\sqrt{q^2-2ss'\cos(\phi-\phi')}}\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{d\phi''}{\sqrt{q^2-2ss'\cos(\phi'')}},
\end{aligned}\tag{38}
$$

其中 $q^2\equiv s^2+(s')^2+(z-z')^2$。实际上我们可以计算这个积分，但并不需要.....关键在于结果与 无关，因此

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=A_\phi(s,z)\,\hat{\boldsymbol{\phi}}.\tag{39}$$

当然，$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$，或者

$$-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}=B_s,\quad \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sA_\phi)=B_z,$$

因此，等值线函数 U （公式 33）恰好是

$$U(s,z)=s\,A_\phi(s,z).\tag{40}$$

场线是函数 $U(s,\ z)$ 的等值线；在这种对称性下，它们通常是闭合环路，就像等值线通常也是闭合环路一样。不过也不总是如此：想象一条高度恒定的山脊——它甚至可能呈螺旋状——沿着山脊顶部的等值线并不会形成闭合环路。而且，这种对应关系只适用于二维构型；弹簧状曲线可不是什么人的等值线。

示例： 考虑一个带电球壳（半径R，电荷密度 σ），它绕 z 轴以角速度 ω 旋转（参见文献 19，例 5.11）。矢势为

$$\mathbf{A}=\begin{cases}ks\,\hat{\boldsymbol{\phi}}, & (r\le R),\\ k\dfrac{R^3 s}{r^3}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}, & (r\ge R),\end{cases}\tag{41}$$

其中 $k \equiv (\mu_0 \omega \sigma R)/3$。因此

$$U(s,z) = \begin{cases} ks^2, & (\sqrt{s^2+z^2} \le R), \\ \dfrac{kR^3 s^2}{(s^2+z^2)^{3/2}}, & (\sqrt{s^2+z^2} \ge R). \end{cases} \tag{42}$$

等高线图如图 16 所示。

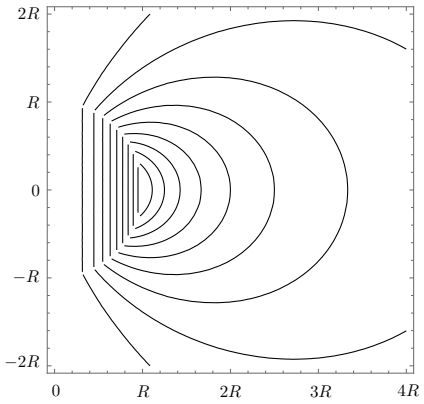

图 16. 方程 42 的等高线图。

附录 C：曲率与挠率

如果我们将弧长用作参数 u，那么

$$\hat{\mathbf{t}} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{du}, \tag{43}$$

是沿场线的单位切向量。它的导数定义了曲率 κ（用于衡量偏离直线的程度）以及单位向量 $\hat{\mathbf{n}}$：[24]

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{du} = \kappa\, \hat{\mathbf{n}}; \tag{44}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ 与 $\hat{\mathbf{t}}$垂直，而它们的叉积定义了第三个单位向量，

$$\hat{\mathbf{b}} \equiv \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}. \tag{45}$$

沿曲线上的任意一点，$\hat{\mathbf{t}}$、$\hat{\mathbf{n}}$和$\hat{\mathbf{b}}$ 构成一组三个（右手系）正交单位向量。它们的导数满足弗雷内-塞雷公式：[25]

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{du} = \kappa\, \hat{\mathbf{n}}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{du} = \tau\, \hat{\mathbf{b}} - \kappa\, \hat{\mathbf{t}}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{du} = -\tau\, \hat{\mathbf{n}}. \tag{46}$$

这里 τ 是挠率；它衡量曲线偏离平面的程度。平面曲线（κ不为零）处处满足 $\tau = 0$。

对于磁力线，$\hat{\mathbf{t}}$ 由式 3 给出：

$$\hat{\mathbf{t}}(u) = \frac{d\mathbf{r}}{du} = \hat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{r}(u)\right), \tag{47}$$

其中$\mathbf{B}$ 是沿场方向的单位向量。对第 i 个分量关于 u 求导，

$$\left(\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{du}\right)_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}_i}{\partial \mathbf{r}_j}\frac{d\mathbf{r}_j}{du} = \left(\boldsymbol{\nabla}_j \hat{\mathbf{B}}_i\right)\hat{\mathbf{B}}_j = (\hat{\mathbf{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\hat{\mathbf{B}}_i, \tag{48}$$

（默认对 j 求和），因此

$$\kappa\, \hat{\mathbf{n}} = (\hat{\mathbf{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\hat{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{B}} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \hat{\mathbf{B}}). \tag{49}$$

（最后一步是根据乘积法则得出的，适用于$\boldsymbol{\nabla}$（$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$）。）式 46 中的其他导数也可以用同样的方法处理。

示例： 考虑一根载有稳恒电流 I的无限导线。其场用柱坐标（s, ϕ, z）表示为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{B}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{50}$$

由式 49,

$$\kappa\, \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\boldsymbol{\phi}} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}) = -\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \left(\frac{1}{s}\,\hat{\mathbf{z}}\right) = -\frac{1}{s}\,\hat{\mathbf{s}}, \tag{51}$$

so

$$\kappa = \frac{1}{s}, \quad \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{s}}. \tag{52}$$

这很合理：场线是半径为 s（曲率为 $1/s$）的圆圈，而$\hat{\mathbf{n}}$是指向圆心的单位向量（沿着 z 轴）。与此同时

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \times (-\hat{\mathbf{s}}) = \hat{\mathbf{z}}, \tag{53}$$

而 $(\hat{\mathbf{t}},\ \hat{\mathbf{n}},\ \hat{\mathbf{b}}) = (\hat{\boldsymbol{\phi}},\ -\hat{\mathbf{s}},\ \hat{\mathbf{z}})$ 构成一个正交单位向量的右手三元组，正如前面所说。最后，

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{du} = -\frac{1}{s}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\kappa\,\hat{\mathbf{t}}, \tag{54}$$

因此（由式 46），挠率为 $\tau = 0$。这也很合理：场线是平面的（圆圈）。显然$_d\hat{\mathbf{b}}/du = (\hat{\mathbf{t}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$，事实确实如此。

现在假设我们引入一个沿 z 方向的均匀磁场，因此场线呈螺旋线（图 5）：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + B_0\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}(\hat{\boldsymbol{\phi}} + \alpha s\,\hat{\mathbf{z}}) \tag{55}$$

（其中 $\alpha \equiv 2\pi B_0/\mu_0 I$）。于是

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{B}} = \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}} + \alpha s\,\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1+\alpha^2 s^2}}. \tag{56}$$

由式 49 和 45 可得

$$\kappa = \frac{1}{s(1+\alpha^2 s^2)},\ \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{s}},\ \text{and}\ \hat{\mathbf{b}} = \frac{-\alpha s\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1+\alpha^2 s^2}}, \tag{57}$$

而公式 46 给出了挠率

$$\tau = \frac{\alpha}{1+\alpha^2 s^2} \tag{58}$$

致谢

我们感谢匿名审稿人认真审阅稿件、提出有益评论，并尤其感谢他们提醒我们注意几篇相关文献。

* 电子邮箱：jfrankli@reed.edu † 电子邮箱：griffith@reed.edu ‡ 电子邮箱：schroetd@reed.edu[1] 磁力线由迈克尔·法拉第提出，他受到磁铁附近铁屑排列图案的启发。它们有时被称为“磁通线”，甚至被称为“磁力线”（这种说法极具误导性）。[2] R. P. 费曼、R. L. 莱顿和 M. 桑兹，*The Feynman Lectures on Physics Vol. II*，Addison-Wesley，雷丁（1964），第 1–5 节。[3] 可以说，即使第三条也更像是 *choice* 而非一项要求。但在磁学情形下，正如我们将看到的，场线的密度 *cannot*（一般而言）可视为场强的代表——除非我们愿意容忍场线在任意点 *discontinuous* 的这种荒谬现象。[4] Zilberti 将磁力线总是形成闭合环路这一观念追溯至法拉第和麦克斯韦（1855），并指出 Li´enard（1921）和 Tamm（1929）可能是最早对此提出质疑的人：L. Zilberti，《闭合磁通线的误解》，*IEEE Magnetics Letters* **8**，1306005 2017( )。关于非闭合静磁场线的现代文献始于 J. Slepian 的《电场和磁场中的力线》，*Am. J. Phys.* **19**，87–90（1951），以及 K. L. McDonald 的《稳恒电流磁场的拓扑》，*Am. J. Phys.* **22**，586–596（1954）。我们的论文中的许多内容对研究太阳日冕的人来说早已广为人知。例如，参见 D. W. Longcope，《太阳磁场分析的拓扑方法》，*Living Rev. Sol. Phys.* **2**，7（2005）。[5] 在高导电等离子体中（例如太阳日冕），磁流体动力学所赋予的特殊环境使磁力线具有某种通常并不具备的物理“真实性”。例如，在太阳耀斑的照片中，它们可能清晰可见（当然，我们实际上看到的并非磁力线本身，而只是沿着它们运动的带电粒子所发出的辐射）。[6] 绘制本文图示所用的 Mathematica 代码，见随附的补充材料。[7] 文献中称它们为“零点”。在 *non*静态情形下，随着零点经过，磁力线可能断开并重新连接（与另一条线相连）；这一现象已在太阳日冕中观测到。例如，参见 A. Zangwill，《》，剑桥大学出版社，英国剑桥（2013），第 10.6.1 节。关于零点的一般理论，参见 C. E. Parnell 等人，《三维磁中性点的结构》，*Phys. Plasmas* **3**，759–770（1996）。[8] 使用 $\lambda = |\mathbf{F(r)}|$ 的一个优点是，它巧妙地避开了零点处$\mathbf{F}/|\mathbf{F}|$ 的歧义。当然，在这样的点上 $\lambda \not> 0$，但由于场线实际上从未 *gets* 那里，因此对于场线上的所有点，$\lambda > 0$ 这一点依然成立。

[9] 请注意，这里并不违反 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$——这是一个鞍点。顺便说一句，$\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 为（显然）$|\mathbf{B}|$的极小值（因而也是 $|\mathbf{B}|^2$ 的极小值）的点，并不受任何定律禁止：$|\mathbf{B}|$ 可以有局部极小值，但不能有局部极大值。参见 M. V. Berry 和 A. K. Geim，《飞行青蛙与悬浮子》，*Eur. J. Phys.* **18**，307–313（1997）。[10] 关于该场的椭圆积分表达式，见 W. R. Smythe，*Static and Dynamic Electricity*，第 3 版，1989 年，半球出版社，纽约（），第 7.10 节。[11] 这个引人注目的示例显然最早由 I. E. Tamm 在其 1929 年的教科书中提出。关于第 9 版的英文译本，见 I. E. Tamm，*Fundamentals of the Theory of Electricity*，和平出版社，莫斯科（1979）；相关章节为 4.12 和 4.13。关于近期的讨论及更多参考文献，见 M. Lieberherr，《螺旋线圈的磁力线并非简单闭环》，*Am. J. Phys.*，-**78** 1117 1119 2010 4（）；L. Zilberti，参考文献（）。[12] I. S. Veselovsky 和 A. T. Lukashenko，《最简单电流系统附近磁力线的混沌行为》，*Geomagnetism and Aeronomy* **56**，938–944（2016）。[13] 它可能是一个带有表面电荷 $\sigma = \sigma_0$ θ ω_0 z（θ）cos、并以角速度绕该轴旋转的球体。在这种情况下 $K_0 = \sigma_0\omega_0 R/2$。[14] P. J. Morrison，《磁力线、哈密顿动力学与非扭转系统》，*Phys. Plasmas* **7**，2279–2289（2000）；J. Aguirre 和 D. Peralta-Salas，《由导线产生的混沌磁场的真实示例》，*Eur. Phys. Lett.* **80**，60007（2007）；M. Hosoda 等，《现代电路中由三维交叉导线产生的混沌磁力线的普遍存在性》，*Phys. Rev. E* **80**，067202（2009）；Lieberherr，参考文献（11）；Veselovsky，参考文献（12）。[15] 仅凭数值模拟并不总能明确判断：起初呈现混沌的场线，在我们沿着它们向外追踪时，是否会始终保持这种状态；Hosoda，参考文献（14），将此称为“暂态混沌”。[16] S. M. Ulam，*Problems in Modern Mathematics*，威利出版社，纽约（1960），第 VIII 章第 6 节；*Analogies BetweenAnalogies*，加利福尼亚大学出版社，伯克利（1990），第 4 章第 5 节。[17] Lieberherr，参考文献（11），建议加入一个小的恒定磁场，以阻止（或至少延缓）场线趋向无穷远。M. Hosoda，参考文献（14），出于不同原因也采取了同样的做法，并指出在实际情况下，这种扰动通常以地球磁场的形式存在。[18] 关于进一步讨论，见 F. G. Gascon 和 D. Peralta-Salas，《由导线的对称构型产生的磁场的一些性质》，*Physica D* **206**，109–120（2005）。[19] 对于每一种对称性，计算本质上都是相同的，因此我们只在附录 A 中进行一次计算。

[20] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 第 4 版, 剑桥大学出版社，剑桥，英国（2013），问题 5.18。[21] 参见 Griffiths，参考文献（20），例 5.10。[22]其他人得出了略有不同的结论：S.tef˘anes.cu 说：“[所有磁力线都是闭合的这一断言] 在共面电路的情况下是正确的 [，即细丝电流]。” Lieberherr 写道：“[任意] 形状的 [平面多边形的场线.....绕行一周后闭合，或者不会返回]，即它们会逸向无穷远 [。”然而，早在 1954 年，McDonald 就给出了一个引人注目的反例，即其图 2b（我们的公式（24）是另一个反例）。S. S. S.tef˘anes.cu，《开放磁场线》，*Rev. Roum. Phys.* **3**，151–166（1958）；Lieberherr，参考文献（11）；McDonald，参考文献（4）。[23] 这里讨论的示例（球体、圆柱体、对称放置的圆）也具有 *mirror* 对称性，但这似乎与此无关。其他旋转体——例如圆锥体——在旋转时也会产生闭合场线。[24] 我们规定 $\kappa = 1/R$ （其中 R 为密切圆的半径）取非负值；那么 $\hat{\mathbf{n}}$ 就指向该圆的中心。[25] 例如，参见 K. F. Riley、M. P. Hobson 和 S. J. Bence，*Mathematical Methods for Physics and En-gineering*，剑桥大学出版社，英国剑桥（1997），第 8.3 节。