arXiv:2601.00910v1 [math.NT] 1 Jan 2026

关于短区间内整数的最大素因子 III

李润博

Abstract. 利用 Watt 均值定理和精细的筛分解，作者证明，对于充分大的 x，区间 $[x, x+x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}]$ 中含有一个整数，其素因子大于 $x^{\frac{35}{36}-\varepsilon}$。这为哈曼专著中的练习 5.1 给出了一个满足 $\gamma = \frac{1}{36}$ 的解，并改进了作者于2024年证明的先前纪录；在该纪录中，$\gamma = \frac{1}{26.5}$ 得以获得。

如果你觉得自己足够大胆，不妨尝试引入 *Watt* 均值定理。 —格林·哈曼

Contents

1. 引言 1
2. 算术信息 2
3. 最终分解 4
参考文献 32

1. Introduction

勒让德猜想指出，连续平方数之间总有一个素数，是朗道关于素数问题之一。显然，这意味着在区间 $[x, x+x^{\frac{1}{2}}]$ 中总有一个素数。然而，即使在黎曼猜想成立的条件下，我们也无法证明这一点。假设 RH 成立，我们至多只能证明区间 $[x, x+x^{\frac{1}{2}}\log x]$ 中总有一个素数。最好的无条件结果出自作者 [16]，，他证明了区间 $[x, x+x^{0.52}]$ 含有素数。在关于西格尔零点存在性的一个特殊条件下，他 [12] 还证明了区间 $[x, x+x^{0.4923}]$ 在较长范围的 x 中含有素数。

与其放宽短区间的长度，不如放宽对素数的限制来研究这一猜想。具有大素因子的数是素数的良好近似。因此，我们可以尝试在区间 $[x, x+x^{\frac{1}{2}}]$ 或 $[x, x+x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}]$中寻找具有大素因子的数。在 [13] 和 [14] 中，我们分别研究了前一个和后一个区间；在这里，我们将再次回到前一个区间。

在这方面，尤蒂拉 [11] 于1973年证明，该区间包含一个具有大于 $x^{\frac{2}{3}-\varepsilon}$的素因子的数。指数23已被改进至

$$0.73,\ 0.7338,\ 0.772,\ 0.82,\ \frac{11}{12},\ \frac{17}{18},\ \frac{19}{20},\ \frac{24}{25},\ \frac{25}{26} \text{ and } \frac{25.5}{26.5}$$

巴洛格 [1] [2]，、巴洛格、Harman 和平茨 [3]，、Heath-Brown [7]，、Heath-Brown 和 Jia [8]，、Harman [[5]，、Chapter 5]，、Haugland [6]，、Jia 和刘 [10] 以及作者 [13]分别取得了这些改进。在其专著中，Harman [[5]，(习题 5.1] ）鼓励我们尽可能降低这个指数。本文通过将 Watt 均值定理 [17]与精细的筛分解相结合，并运用 [13]，中的论证，大幅改进了以往的结果，得到了以下结论。

定理 1. 当 x 足够大时，区间 $[x, x+x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}]$ 中含有一个具有大于 $x^{\frac{35}{36}-\varepsilon}$ 的素因子的整数。

2020 Mathematics Subject Classification. **11N05**，**11N35**，**11N36**。
Key words and phrases. **素数**，**筛法**，**狄利克雷多项式**。

在本文中，我们始终假设 ε 是一个充分小的正常数，而 $B = B(\varepsilon)$ 是一个充分大的正常数。我们选择 ε，使得 $K = \frac{8}{\varepsilon}(\frac{1}{36} + \frac{\varepsilon}{2})$ 是整数。字母 p 和 β（带或不带下标）分别专用于表示素数和几乎素数。令 c_1 和 c_2 表示正数常数，它们在不同位置可以取不同值；我们用 $m \sim M$ 表示 $c_1 M < m \leqslant c_2 M$。令 $b = 1 + \frac{1}{\log x}$、$v = x^{\frac{35}{36} - \frac{\varepsilon}{2}}$ 和 $P = x^{\frac{\varepsilon}{8}}$。我们用 $M(s)$、$N(s)$ 以及其他一些大写字母（L 和 P 除外）表示有界于 1 的狄利克雷多项式

$$M(s) = \sum_{m \sim M} a_m m^{-s}, \quad N(s) = \sum_{n \sim N} b_n n^{-s}.$$

我们用 $L(s)$ 表示一个“ζ 因子”

$$L(s) = \sum_{l \sim L} l^{-s}.$$

我们还用 $P(s)$ 表示

$$P(s) = \sum_{P < p \leqslant 2P} p^{-s}.$$

2. Arithmetic Information

本节将提供一些算术信息（即关于某些狄利克雷多项式的均值界），这些信息将帮助我们证明下一节中筛函数的渐近公式。前两个引理源自 Heath-Brown 和 Jia 的工作 [8], ，它们也是 [[5], 章 5] 和 [6]中使用的主要算术信息输入。

引理 2.1. *([8], 引理 1])*。设 $MN = v$ 且 $v^{\frac{17}{35}} \ll M \ll v^{\frac{18}{35}}$。那么对于 $(\log x)^{2B} \leqslant T \leqslant x^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{6}}$，有

$$\int_T^{2T} |M(b+it)N(b+it)P^K(b+it)|dt \ll (\log x)^{-B}.$$

引理 2.2. *([8], 引理 2])*。设 $MNL = v$，$M \ll v^{\frac{18}{35}}$ 且 $N \ll v^{\frac{9}{35}}$。那么对于 $\sqrt{L} \leqslant T \leqslant x^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{6}}$，有

$$\int_T^{2T} |M(b+it)N(b+it)L(b+it)P^K(b+it)|dt \ll (\log x)^{-B}.$$

在他专著 [[5], 的第 5], 章练习 5.1 中，Harman 鼓励读者“尽可能降低 γ（指数）的取值”。他还说：“如果你有胆量，不妨尝试引入 Watt 均值定理 [17]。”这里我们将使用 [15] 中给出的 Watt 定理的另一种形式。

引理 2.3。 *([15], 引理 4.1])*。设 $T \geqslant 1$，则

$$\int_T^{2T} \left|L\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^4 \left|N\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt \ll \left(T + N^2 T^{\frac{1}{2}} + L^2 T^{-4}(N+T)\right) T^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

我们将使用引理 2.3 推导下面这个重要引理，它给出的 I 型信息比 [10] 和 [13]中的更多。这种新的算术信息，加上类似于 [16],中所用的更精细的筛法过程，是我们优于 [13]的关键。

引理 2.4。 假设 $MNHL = v$，且 M、N 和 H 满足以下 3 个条件之一：*(1).* $M \ll v^{\frac{18}{35}}$、$N \gg H$、$N^{\frac{3}{4}} H \ll v^{\frac{9}{35}}$、$NH^{\frac{1}{2}} \ll v^{\frac{9}{35}}$、$N^{\frac{7}{4}} H^{\frac{3}{2}} \ll v^{\frac{18}{35}}$；*(2).* $M \ll v^{\frac{18}{35}}$、$N \ll v^{\frac{9}{35}}$、$H \ll v^{\frac{9}{140}}$；*(3).* $M \ll v^{\frac{18}{35}}$、$N^2 H \ll v^{\frac{18}{35}}$、$H \ll v^{\frac{9}{70}}$。则对于 $\sqrt{L} \leqslant T \leqslant x^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{6}}$，有

$$\int_T^{2T} |M(b+it)N(b+it)H(b+it)L(b+it)P^K(b+it)|dt \ll (\log x)^{-B}.$$

证明。 我们只需证明

$$\int_T^{2T}\left|M\left(\frac{1}{2}+it\right)N\left(\frac{1}{2}+it\right)H\left(\frac{1}{2}+it\right)L\left(\frac{1}{2}+it\right)P^K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\ll x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-B}$$

在上述每个条件下均成立。

假设条件（1）成立。本情形的证明与 [[10], 引理 3]中 [[4],定理 2] 的用法类似。

假设条件（2）成立。利用 H¨older 不等式和狄利克雷多项式的均值定理，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_T^{2T}\left|M\left(\frac{1}{2}+it\right)N\left(\frac{1}{2}+it\right)H\left(\frac{1}{2}+it\right)L\left(\frac{1}{2}+it\right)P^K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\\
\ll&\left(\int_T^{2T}\left|M\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left|P^K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_T^{2T}\left|N\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4dt\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\left(\int_T^{2T}\left|L\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4\left|H\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4dt\right)^{\frac{1}{4}}\\
\ll&x^{\frac{1}{4}}\left(\int_T^{2T}\left|N\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4dt\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_T^{2T}\left|L\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4\left|H\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4dt\right)^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

由狄利克雷多项式的均值定理，我们得到

$$\left(\int_T^{2T}\left|N\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4dt\right)^{\frac{1}{4}}\ll\left(N^2+T\right)^{\frac{1}{4}}.$$

注意到 $\sqrt{L}\leqslant T$，我们得到

$$L^2T^{-4}(N+T)\ll N+T.$$

现在，利用引理2.3 和 $N=H^2$，可得

$$\left(\int_T^{2T}\left|L\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4\left|H\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4dt\right)^{\frac{1}{4}}\ll\left(T+H^4T^{\frac{1}{2}}+H^2\right)^{\frac{1}{4}}T^{\frac{\varepsilon}{8}}.$$

将上述界与条件（2）结合，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_T^{2T}\left|M\left(\frac{1}{2}+it\right)N\left(\frac{1}{2}+it\right)H\left(\frac{1}{2}+it\right)L\left(\frac{1}{2}+it\right)P^K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\\
\ll&x^{\frac{1}{4}}\left(N^2+T\right)^{\frac{1}{4}}\left(T+H^4T^{\frac{1}{2}}+H^2\right)^{\frac{1}{4}}T^{\frac{\varepsilon}{8}}\\
\ll&x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-B}.
\end{aligned}$$

注意，这种情形优于引理2.2。

假设条件（3）成立。利用 H¨older 不等式和狄利克雷多项式的均值定理，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_T^{2T}\left|M\left(\frac{1}{2}+it\right)N\left(\frac{1}{2}+it\right)H\left(\frac{1}{2}+it\right)L\left(\frac{1}{2}+it\right)P^K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\\
\ll&\left(\int_T^{2T}\left|M\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left|P^K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_T^{2T}\left|N\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4\left|H\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\left(\int_T^{2T}\left|L\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4\left|H\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

$$\ll x^{\frac{1}{4}}\left(\int_T^{2T}\left|N\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4\left|H\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_T^{2T}\left|L\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4\left|H\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{4}}.$$

由条件（3），引理 2.3 结合 $N=H$ 以及狄利克雷多项式的均值定理，我们有

$$\begin{aligned}&\int_T^{2T}\left|M\left(\frac{1}{2}+it\right)N\left(\frac{1}{2}+it\right)H\left(\frac{1}{2}+it\right)L\left(\frac{1}{2}+it\right)P^K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\\ &\ll x^{\frac{1}{4}}\left(N^2H+T\right)^{\frac{1}{4}}\left(T+H^2T^{\frac{1}{2}}+H\right)^{\frac{1}{4}}T^{\frac{\varepsilon}{8}}\\ &\ll x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-B}.\end{aligned}$$

现在，引理 2.4 的证明完成了。 □

3. The final decomposition

令 $\mathcal{C}$ 表示一个有限的正整数集，$p_j\sim v^{t_j}$ 并令

$$N(d)=\sum_{\substack{x<pp_1\dots p_K\leqslant x+x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\\ P<p_i\leqslant 2P}}1,\quad \mathcal{A}=\{n:2^{-K}v<n\leqslant 2v,\ n\text{ repeats }N(n)\text{ times}\},$$

$$\mathcal{B}=\{n:v<n\leqslant 2v\},\quad \mathcal{C}_d=\{a:ad\in\mathcal{C}\},\quad P(z)=\prod_{p<z}p,\quad S(\mathcal{C},z)=\sum_{\substack{a\in\mathcal{C}\\(a,P(z))=1}}1.$$

那么我们只需证明 $S\left(\mathcal{A},(2v)^{\frac{1}{2}}\right)>0$。

布赫斯塔布恒等式为方程

$$S(\mathcal{C},z)=S(\mathcal{C},w)-\sum_{w\leqslant p<z}S(\mathcal{C}_p,p),$$

其中 $2\leqslant w<z$。

我们的目标是证明，较稀疏的集合 $\mathcal{A}$ 中含有的素数比例，与较大的集合 $\mathcal{B}$ 中的预期比例相符。为此，我们需要将 $S\left(\mathcal{A},(2v)^{\frac{1}{2}}\right)$ 分解，并证明如下形式的渐近公式

$$S(\mathcal{A},z)=v^{-1}x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(\sum_{P<p\leqslant 2P}\frac{1}{p}\right)^K(1+o(1))S(\mathcal{B},z)\tag{1}$$

对其中的某些部分取值，并舍弃其他正值部分。

令 $\omega(u)$ 表示 记由下列微分差分方程确定的布赫施塔布函数

$$\begin{cases}\omega(u)=\frac{1}{u}, & 1\leqslant u\leqslant 2,\\ (u\omega(u))'=\omega(u-1), & u\geqslant 2.\end{cases}$$

此外，我们有 $\omega(u)$ 的上界和下界：

$$\omega(u)\geqslant\omega_0(u)=\begin{cases}\frac{1}{u}, & 1\leqslant u<2,\\ \frac{1+\log(u-1)}{u}, & 2\leqslant u<3,\\ \frac{1+\log(u-1)}{u}+\frac{1}{u}\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\geqslant 0.5607, & 3\leqslant u<4,\\ 0.5612, & u\geqslant 4,\end{cases}$$

$$\omega(u)\leqslant\omega_1(u)=\begin{cases}\frac{1}{u}, & 1\leqslant u<2,\\ \frac{1+\log(u-1)}{u}, & 2\leqslant u<3,\\ \frac{1+\log(u-1)}{u}+\frac{1}{u}\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\leqslant 0.5644, & 3\leqslant u<4,\\ 0.5617, & u\geqslant 4.\end{cases}$$

我们将使用 $\omega_0(u)$ 和 $\omega_1(u)$ 为下文讨论的一些筛函数给出数值界。此外，我们还将使用简单的上界 $\omega(u) \leqslant \max(\frac{1}{u}, 0.5672)$（见 [9] 的引理 8(iii)）来估计高维积分。

根据带有维诺格拉多夫误差项的素数定理以及 [[5], Chapter A.2],中的归纳论证，我们知道，对于充分大的 z,

$$S(\mathcal{B}, z) = \sum_{\substack{a \in \mathcal{B} \\ (a, P(z))=1}} 1 = (1+o(1)) \frac{v}{\log z} \omega\left(\frac{\log v}{\log z}\right), \tag{2}$$

我们预期，对于 $S(\mathcal{A}, z)$，类似的关系也成立：

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ (a, P(z))=1}} 1 = (1+o(1)) \left(\sum_{P<p\leqslant 2P} \frac{1}{p}\right)^K \frac{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\log z} \omega\left(\frac{\log v}{\log z}\right). \tag{3}$$

如果 (1) 对于 $S(\mathcal{A}, z)$ 成立，那么我们可以由 (1) 和 (2) 轻易推出 (3)。否则，我们必须舍弃这一项$S(\mathcal{A}, z)$。我们将这一项造成的损失 定义为相应的 $S(\mathcal{B}, z)$ 的大小：

$$S(\mathcal{B}, z) = (loss + o(1)) \frac{v}{\log x}. \tag{4}$$

我们注意到，对于下界问题，只能舍弃正部，并且被舍弃部分造成的总损失必须小于 1。

在分解之 前，我们定义渐近区域 $\mathcal{T}_0$–$\mathcal{T}_2$、$\mathcal{I}_n$ $\mathcal{J}_n$ 以及二维区域 $\mathcal{L}$ 如下：

$$\mathcal{T}_0(m_1, m_2) := \left\{ \frac{17}{35} \leqslant m_1 \leqslant \frac{18}{35} \text{ or } \frac{17}{35} \leqslant m_2 \leqslant \frac{18}{35} \text{ or } \frac{17}{35} \leqslant m_1 + m_2 \leqslant \frac{18}{35} \right\},$$

$$\mathcal{T}_1(m_1, m_2) := \left\{ m_1 \leqslant \frac{18}{35},\ m_2 \leqslant \frac{9}{35} \right\},$$

$$\mathcal{T}_{21}(m_1, m_2, m_3) := \left\{ m_1 \leqslant \frac{18}{35},\ m_2 \geqslant m_3,\ \frac{3}{4}m_2 + m_3 \leqslant \frac{9}{35},\ m_2 + \frac{1}{2}m_3 \leqslant \frac{9}{35},\ \frac{7}{4}m_2 + \frac{3}{2}m_3 \leqslant \frac{18}{35} \right\},$$

$$\mathcal{T}_{22}(m_1, m_2, m_3) := \left\{ m_1 \leqslant \frac{18}{35},\ m_2 \leqslant \frac{9}{35},\ m_3 \leqslant \frac{9}{140} \right\},$$

$$\mathcal{T}_{23}(m_1, m_2, m_3) := \left\{ m_1 \leqslant \frac{18}{35},\ 2m_2 + m_3 \leqslant \frac{18}{35},\ m_3 \leqslant \frac{9}{70} \right\},$$

$$\mathcal{T}_2(m_1, m_2, m_3) := \mathcal{T}_{21} \cup \mathcal{T}_{22} \cup \mathcal{T}_{23},$$

$\mathcal{I}_i(m_1, m_2, \ldots\ldots, m_i) := \{(m_1, m_2, \ldots\ldots, m_i)$ 可以划分为 $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{T}_0\}$,

$\mathcal{J}_i(m_1, m_2, \ldots\ldots, m_i) := \{(m_1, m_2, \ldots\ldots, m_i)$ 可以划分为 $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{T}_1$ 或 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathcal{T}_2\}$,

$$\mathcal{L}(m, n) := \left\{ (m, n) \notin \mathcal{T}_0,\ (m, n, n) \notin \mathcal{J}_3,\ n \geqslant \frac{53}{255} \text{ or } m \geqslant \frac{1129}{2448} \text{ or } \frac{1}{2}m + n \geqslant \frac{9361}{24480} \right\}.$$

根据 $\mathcal{J}_i$ 的定义，如果 $(m_1, m_2, \ldots\ldots, m_i) \in \mathcal{J}_i$，那么 $(m_1, m_2, \ldots\ldots, m_{i-1}, l) \in \mathcal{J}_i$ 对所有 $l \leqslant m_i$ 都成立。约化其他变量的情形类似。

现在我们陈述最终分解中所需的一般筛渐近公式。

引理 3.1。 我们可以对下式给出形如 *(1)* 的渐近公式

$$\sum_{t_1 \cdots t_n} S\left(\mathcal{A}_{p_1 \cdots p_n}, v^{\frac{1}{35}}\right)$$

以及涉及角色反转的类似求和，如果 $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{J}_n$。

证明。该引理可由引理2.4 结合 [[8], 引理 7,9]中的讨论。 □

引理 3.2。 我们可以给出形式为 *(1)* 的渐近公式，适用于

$$\sum_{t_1 \cdots t_n} S(\mathcal{A}_{p_1 \cdots p_n}, p_n)$$

以及涉及角色反转的类似求和，只要 $(t_1,\dots,t_n)\in\mathcal{I}_n$。

证明。This lemma can beproved by Lemma 2.1 together with the discussions in [[8], 引理 8]. □

我们开始对 $S\left(\mathcal{A},(2v)^{\frac{1}{2}}\right)$ 进行最后的分解。根据布赫斯塔布恒等式，我们有

$$\begin{aligned}
S\left(\mathcal{A},(2v)^{\frac{1}{2}}\right) &= S\left(\mathcal{A},v^{\frac{1}{35}}\right)-\sum_{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}} S\left(\mathcal{A}_{p_1},p_1\right)-\sum_{\frac{17}{35}\leqslant t_1<\frac{1}{2}} S\left(\mathcal{A}_{p_1},p_1\right)\\
&= S\left(\mathcal{A},v^{\frac{1}{35}}\right)-\sum_{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}} S\left(\mathcal{A}_{p_1},v^{\frac{1}{35}}\right)-\sum_{\frac{17}{35}\leqslant t_1<\frac{1}{2}} S\left(\mathcal{A}_{p_1},p_1\right)\\
&\quad+\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)\\
&= S_1-S_2-S_3+S_4. \qquad (5)
\end{aligned}$$

根据引理 2.1 和引理 2.2，我们可以给出 S_1、S_2 和 S_3的渐近公式。在估计 S_4之前，我们先将其分成三部分：

$$\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)\\
&= \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{T}_0}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)+\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{L}}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)\\
&\quad+\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\notin\mathcal{T}_0\\ (t_1,t_2,t_2)\in\mathcal{J}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)+\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\notin\mathcal{T}_0\cup\mathcal{L}\\ (t_1,t_2,t_2)\notin\mathcal{J}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)\\
&= \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{T}_0}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)+\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{L}}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)\\
&\quad+\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)+\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)\\
&= S_{41}+S_{42}+S_{43}+S_{44}, \qquad (6)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(m,n) &:= \{(m,n)\notin\mathcal{T}_0,\ (m,n,n)\in\mathcal{J}_3\},\\
\mathcal{N}(m,n) &:= \{(m,n)\notin\mathcal{T}_0\cup\mathcal{L},\ (m,n,n)\notin\mathcal{J}_3\}.
\end{aligned}$$

根据引理 3.2，S_{41} 有一个渐近公式。对于 S_{42}，我们无法进一步分解，只能舍弃整个区域，从而造成损失

$$\int_{\frac{1}{35}}^{\frac{17}{35}}\int_{\frac{1}{35}}^{\min\left(t_1,\frac{1-t_1}{2}\right)} \mathbb{1}_{(t_1,t_2)\in\mathcal{L}}\frac{\omega\left(\frac{1-t_1-t_2}{t_2}\right)}{t_1t_2^2}dt_2dt_1<0.7226. \qquad (7)$$

对于 S_{43}，我们可以使用布赫斯塔布恒等式得到

$$
\begin{aligned}
S_{43} = & \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},p_2\right)\\
= & \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},v^{\frac{1}{35}}\right) - \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{I}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3},p_3\right)\\
& - \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3},p_3\right)\\
= & \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2},v^{\frac{1}{35}}\right) - \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{I}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3},p_3\right)\\
& - \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3},v^{\frac{1}{35}}\right) + \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{I}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)\\
& + \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)\\
= & \, S_{431} - S_{432} - S_{433} + S_{434} + S_{435}. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

由于 $(t_1,\ t_2)\in\mathcal{M}$，根据引理 3.1，我们有 S_{431} 和 S_{433} 的渐近公式。根据引理 3.2，我们还有 S_{432} 和 S_{434} 的渐近公式。

对于剩余的 S_{435}，我们首先将其分成三部分：

$$
\begin{aligned}
S_{435} = & \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)\\
&+ \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)\\
&+ \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ \text{either } (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4 \text{ or } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)\\
&= S_{4351}+S_{4352}+S_{4353}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

对于上面的每个求和式，我们都有三种方法可以获得更多可能的储蓄：对于 S_{4351}，我们可以直接再使用两次布赫斯塔布恒等式，得到

$$
\begin{aligned}
S_{4351} &= \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)\\
&= \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},v^{\frac{1}{35}}\right) - \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5},p_5\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5},p_5\right)\\
=&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},v^{\frac{1}{35}}\right)-\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5},p_5\right)\\
&- \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5},v^{\frac{1}{35}}\right)\\
&+ \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\min\left(t_5,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in\mathcal{I}_6}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5p_6},p_6\right)\\
&+ \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\min\left(t_5,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5p_6},p_6\right)\\
&= S_{43511}-S_{43512}-S_{43513}+S_{43514}+S_{43515}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

根据引理 3.2，我们得到了 S_{43512} 和 S_{43514} 的渐近公式。由于上述五个和中都包含 $(t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5$，因此我们也有 $(t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4$ 和 $(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{J}_5$。现在，根据引理 3.1，我们得到了 S_{43511} 和 S_{43513} 的渐近公式。对于 S_{43515}，我们可以类似地将包含 $(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6)\in\mathcal{J}_7$的部分分解，从而得到一个八维和

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\min\left(t_5,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6)\in\mathcal{J}_7\\ \frac{1}{35}\leqslant t_7<\min\left(t_6,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7)\notin\mathcal{I}_7\\ \frac{1}{35}\leqslant t_8<\min\left(t_7,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6-t_7)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\notin\mathcal{I}_8}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7p_8},p_8\right), \tag{11}$$

并舍弃其余部分，其中 $(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6)\notin\mathcal{J}_7$:

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\min\left(t_5,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6)\notin\mathcal{J}_7}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5p_6},p_6\right). \tag{12}$$

S_{4351} 所对应的损失是 (11) 和 (12) 中的两个和。

对于 S_{4352}，我们无法以直接的方式再使用两次布赫斯塔布恒等式，但可以通过变量角色反转再使用两次布赫斯塔布恒等式，这可视为“将布赫斯塔布恒等式应用于大素数变量”。我们先应用一次布赫斯塔布恒等式，得到

$$S_{4352}=\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4}, v^{\frac{1}{35}}\right)\\
&- \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5}, p_5\right)\\
&- \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5}, p_5\right). \qquad (13)
\end{aligned}
$$

根据引理 3.1和引理 3.2 ，我们分别得到了右端第一项和第二项的渐近公式。右端最后一项统计形如 $p_1p_2p_3p_4p_5\beta_1$的数，其中 $\beta_1 \sim v^{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}$ 且 $(\beta_1,\ P(p_5)) = 1$。现在我们交换 p_1 和 β_1的角色:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5}, p_5\right)\\
&= \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_1p_2p_3p_4p_5}, \left(\frac{2v}{\beta_1p_2p_3p_4p_5}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

注意，(14) 右侧的和统计了形如 $\beta_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_1$的数。现在，我们对变量 p_1 进行布赫斯塔布迭代，得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_1 p_2 p_3 p_4 p_5},\left(\frac{2v}{\beta_1 p_2 p_3 p_4 p_5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
=&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_1 p_2 p_3 p_4 p_5},v^{\frac{1}{35}}\right)\\
-&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in\mathcal{I}_6}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6},p_6\right)\\
-&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6},p_6\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

结合 (13)–(15)，我们得到

$$
\begin{aligned}
S_{4352} = & \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)\\
= & \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},v^{\frac{1}{35}}\right)\\
& - \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5},p_5\right)\\
& - \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_1p_2p_3p_4p_5},v^{\frac{1}{35}}\right)\\
& + \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in\mathcal{I}_6}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_1p_2p_3p_4p_5p_6},p_6\right)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_1p_2p_3p_4p_5p_6},p_6\right)$$

$$=S_{43521}-S_{43522}-S_{43523}+S_{43524}+S_{43525}. \tag{16}$$

根据引理 3.1，我们有 S_{43521} 的渐近公式。根据引理 3.2，我们有 S_{43522} 和 S_{43524} 的渐近公式。由于我们有 $\beta_1p_5\sim v^{1-t_1-t_2-t_3-t_4}$，因此 S_{43523} 有渐近公式。对于 S_{43525}，我们可以采用类似于分解 S_{43515} 时的方式分解其中一些部分，但现在我们有两个几乎素数变量。注意，S_{43525} 计数的是形如 $\beta_1p_2p_3p_4p_5p_6\beta_2$ 的数，其中 $\beta_2\sim v^{t_1-t_6}$ 且 $(\beta_2,P(p_6))=1$。现在我们可以对 β_1 或 β_2 进行布赫斯塔布迭代。对于分解 β_2 的情形，我们需要条件 $(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6)\in\mathcal{J}_7$，相应的八维和为

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6)\in\mathcal{J}_7\\ \frac{1}{35}\leqslant t_7<\min\left(t_6,\frac{1}{2}(t_1-t_6)\right)\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7)\notin\mathcal{I}_7\\ \frac{1}{35}\leqslant t_8<\min\left(t_7,\frac{1}{2}(t_1-t_6-t_7)\right)\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\notin\mathcal{I}_8}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7p_8},p_8\right). \tag{17}$$

对于分解 β_1 的情况，我们需要条件 $(t_1-t_6,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_5)\in\mathcal{J}_7$，相应的八维和为

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6\\ (t_1-t_6,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_5)\in\mathcal{J}_7\\ \frac{1}{35}\leqslant t_7<\min\left(t_5,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5)\right)\\ (t_1-t_6,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7)\notin\mathcal{I}_7\\ \frac{1}{35}\leqslant t_8<\min\left(t_7,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_7)\right)\\ (t_1-t_6,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\notin\mathcal{I}_8}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_2p_2p_3p_4p_5p_6p_7p_8},p_8\right). \tag{18}$$

我们还需要舍弃 S_{43525} 的其余部分:

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6\\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6)\notin\mathcal{J}_7\\ (t_1-t_6,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_5)\notin\mathcal{J}_7}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_1 p_2p_3p_4p_5p_6},p_6\right). \tag{19}$$

相应的损失来自 (17)、(18) 和 (19) 中的三个求和式。

对于剩余的 S_{4353}，我们无法使用直接分解和角色反转，但可以换一种方式使用布赫斯塔布恒等式，以获得可能的储蓄。注意，S_{4353} 所计数的数具有 $p_1p_2p_3p_4m_0$ 的形式，其中 m_0 的最小素因子大于 p_4。如果 $t_4>\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)$，我们知道 m_0 不可能有两个或更多素因子，因此必定是一个素数。否则，m_0 可能有多个素因子，这意味着我们可以“拆分” m_0 的最小素因子并单独考察它:

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{t_1,t_2,t_3,t_4\\ t_4<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)\\ =&\sum_{\substack{t_1,t_2,t_3,t_4\\ t_4<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},\left(\frac{x}{p_1p_2p_3p_4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\sum_{\substack{t_1,t_2,t_3,t_4\\ t_4<t_5<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5},p_5\right).\end{aligned} \tag{20}$$

求和式 $S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},\ \underline{\left(\frac{x}{p_1p_2p_3p_4}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$ 对具有 $p_1p_2p_3p_4p'$ 形式的数进行计数，其中 $p'=m_0$。求和式$S($$\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5},\ p_5)$ 对具有 $p_1p_2p_3p_4(p_5m_1)$ 形式的数进行计数，其中 $p_5m_1=m_0$、$p_5>p_4$，且 m_1 的所有素因子都大于 p_5。在这个求和式中，我们引入了一个新变量 t_5，这意味着其中一部分可能有渐近公式。在这种情况下，我们可以为 (20) 右端最后一个求和式的一部分给出渐近公式，因此可以从 S_{4353} 的损失中减去它的贡献。同样，对于 $S(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5},\ p_5)$ 的剩余部分，我们可以按照 (20) 中的类似过程，减去具有渐近公式的数 $p_1p_2p_3p_4p_5(p_6m_2)$ 的贡献。上述过程可改写为

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{t_1,t_2,t_3,t_4\\ t_4<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},\left(\frac{x}{p_1p_2p_3p_4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\ =&\sum_{\substack{t_1,t_2,t_3,t_4\\ t_4<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)-\sum_{\substack{t_1,t_2,t_3,t_4\\ t_4<t_5<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5},p_5\right).\end{aligned} \tag{21}$$

由于（21）是布赫斯塔布恒等式的直接应用，在本文余下部分，我们将（20）称为“布赫斯塔布恒等式的反向形式”或“反向 Buchstab 恒等式”。由于反复应用反向 Buchstab 恒等式只会略微改善高维求和的估计，我们仅在 S_{4353} and 上应用一次,

并减去该求和项的贡献

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{M}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ \text{either } (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4 \text{ or } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4\\ t_4<t_5<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4p_5},p_5\right) \tag{22}$$

来自 S_{4353}。我们舍弃 S_{4353}的其他部分。

综合以上三种情况，我们会从 S_{435} 中损失一部分，也会从 S_{43} o 中损失一部分 f

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4)\in U_{\mathcal{M}1}}\frac{\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4}{t_4}\right)}{t_1t_2t_3t_4^2}dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&-\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in U_{\mathcal{M}2}}\frac{\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}{t_5}\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5^2}dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{M}3}}\frac{\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6}{t_6}\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{M}4}}\frac{\omega\left(\frac{t_1-t_6}{t_6}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}{t_5}\right)}{t_2t_3t_4t_5^2t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{M}5}}\frac{\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6-t_7-t_8}{t_8}\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7t_8^2}dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{M}6}}\frac{\omega\left(\frac{t_1-t_6-t_7-t_8}{t_8}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}{t_5}\right)}{t_2t_3t_4t_5^2t_6t_7t_8^2}dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{M}7}}\frac{\omega\left(\frac{t_1-t_6}{t_6}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_7-t_8}{t_8}\right)}{t_2t_3t_4t_5t_6^2t_7t_8^2}dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&\leqslant\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4)\in U_{\mathcal{M}1}}\frac{\omega_1\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4}{t_4}\right)}{t_1t_2t_3t_4^2}dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&-\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in U_{\mathcal{M}2}}\frac{\omega_0\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}{t_5}\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5^2}dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{M}3}}\frac{\omega_1\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6}{t_6}\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{M}4}}\frac{\omega_1\left(\frac{t_1-t_6}{t_6}\right)\omega_1\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}{t_5}\right)}{t_2t_3t_4t_5^2t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{M}5}} \frac{\max\left(\frac{t_8}{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6-t_7-t_8},0.5672\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7t_8^2}dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{M}6}} \frac{\max\left(\frac{t_8}{t_1-t_6-t_7-t_8},0.5672\right)\max\left(\frac{t_5}{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5},0.5672\right)}{t_2t_3t_4t_5^2t_6t_7t_8^2}dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{M}7}} \frac{\max\left(\frac{t_6}{t_1-t_6},0.5672\right)\max\left(\frac{t_8}{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_7-t_8},0.5672\right)}{t_2t_3t_4t_5t_6^2t_7t_8^2}dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&\leqslant (0.081234-0.002216+0.030572+0.061125+0.005742+0.000001+0.000001)\\
&=0.176459, \qquad (23)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
U_{\mathcal{M}1}(t_1,t_2,t_3,t_4):=\ &\Bigg\{(t_1,t_2)\in\mathcal{M},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5,\\
&\text{either } (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4 \text{ or } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\},\\
U_{\mathcal{M}2}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5):=\ &\Bigg\{(t_1,t_2)\in\mathcal{M},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5,\\
&\text{either } (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4 \text{ or } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4,\\
&t_4<t_5<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\},\\
U_{\mathcal{M}3}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6):=\ &\Bigg\{(t_1,t_2)\in\mathcal{M},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_6<\min\left(t_5,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6)\notin\mathcal{J}_7,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\},\\
U_{\mathcal{M}4}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6):=\ &\Bigg\{(t_1,t_2)\in\mathcal{M},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{35} \leqslant t_4 < \min\left(t_3, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4) \notin \mathcal{J}_5,\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4) \in \mathcal{J}_4,\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4) \in \mathcal{J}_4,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_5 < \min\left(t_4, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) \notin \mathcal{I}_5,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_6 < \frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) \notin \mathcal{I}_6,\\
&(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6) \notin \mathcal{J}_7,\\
&(t_1-t_6,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_5) \notin \mathcal{J}_7,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{\mathcal{M}5}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8) := \Bigg\{&(t_1,t_2) \in \mathcal{M},\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\ (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_4 < \min\left(t_3, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4) \in \mathcal{J}_5,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_5 < \min\left(t_4, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) \notin \mathcal{I}_5,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_6 < \min\left(t_5, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) \notin \mathcal{I}_6,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6) \in \mathcal{J}_7,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_7 < \min\left(t_6, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7) \notin \mathcal{I}_7,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_8 < \min\left(t_7, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6-t_7)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8) \notin \mathcal{I}_8,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{\mathcal{M}6}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8) := \Bigg\{&(t_1,t_2) \in \mathcal{M},\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\ (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_4 < \min\left(t_3, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4) \notin \mathcal{J}_5,\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4) \in \mathcal{J}_4,\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4) \in \mathcal{J}_4,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_5 < \min\left(t_4, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) \notin \mathcal{I}_5,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_6 < \frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) \notin \mathcal{I}_6,\\
&(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6) \in \mathcal{J}_7,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_7 < \min\left(t_6, \frac{1}{2}(t_1-t_6)\right),\\
&(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7) \notin \mathcal{I}_7,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{\mathcal{M}7}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8) := \Bigg\{ & \frac{1}{35} \leqslant t_8 < \min\left(t_7, \frac{1}{2}(t_1 - t_6 - t_7)\right), \\
& (1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8) \notin \mathcal{I}_8, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1 - t_1)\right) \Bigg\}, \\
\Bigg\{ & (t_1,t_2) \in \mathcal{M},\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1 - t_1 - t_2)\right),\ (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_4 < \min\left(t_3, \frac{1}{2}(1 - t_1 - t_2 - t_3)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4) \notin \mathcal{J}_5, \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4) \in \mathcal{J}_4,\ (1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4, t_2, t_3, t_4) \in \mathcal{J}_4, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_5 < \min\left(t_4, \frac{1}{2}(1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4)\right),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) \notin \mathcal{I}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_6 < \frac{1}{2}t_1,\ (1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) \notin \mathcal{I}_6, \\
& (1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_6) \notin \mathcal{J}_7, \\
& (t_1 - t_6, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_5) \in \mathcal{J}_7, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_7 < \min\left(t_5, \frac{1}{2}(1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5)\right), \\
& (t_1 - t_6, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7) \notin \mathcal{I}_7, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_8 < \min\left(t_7, \frac{1}{2}(1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5 - t_7)\right), \\
& (t_1 - t_6, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8) \notin \mathcal{I}_8, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1 - t_1)\right) \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

注意，上述七个积分分别对应于 S_{4353} 以及式 (22)、(12)、(19)、(11)、(17) 和 (18) 中的求和。

接下来我们将分解 S_{44}。根据布赫斯塔布恒等式，有

$$
\begin{aligned}
S_{44} &= \sum_{\substack{\frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35} \\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right) \\ (t_1,t_2) \in \mathcal{N}}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2}, p_2\right) \\
&= \sum_{\substack{\frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35} \\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right) \\ (t_1,t_2) \in \mathcal{N}}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2}, v^{\frac{1}{35}}\right) - \sum_{\substack{\frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35} \\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right) \\ (t_1,t_2) \in \mathcal{N} \\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right) \\ (t_1,t_2,t_3) \in \mathcal{I}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3}, p_3\right) \\
&\quad - \sum_{\substack{\frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35} \\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right) \\ (t_1,t_2) \in \mathcal{N} \\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right) \\ (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3 \\ (t_1,t_2,t_3) \in \mathcal{J}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3}, p_3\right) - \sum_{\substack{\frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35} \\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right) \\ (t_1,t_2) \in \mathcal{N} \\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right) \\ (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3 \\ (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{J}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3}, p_3\right) \\
&= S_{441} - S_{442} - S_{443} - S_{444}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

由引理 3.1 和引理 3.2，我们得到 S_{441} 和 S_{442}的渐近公式。

对于 S_{443}，我们可以再次使用布赫斯塔布恒等式，得到

$$
\begin{aligned}
S_{443} = & \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{J}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3},p_3\right)\\
= & \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{J}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3},v^{\frac{1}{35}}\right) - \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{I}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)\\
& - \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3p_4},p_4\right)\\
= & S_{4431} - S_{4432} - S_{4433}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

根据引理3.1和引理3.2，我们得到了 S_{4431} 和 S_{4432}的渐近公式。对于 S_{4433}，我们可以对 S_{435} 进行完整的分解过程，以求出损失。所得积分与式（23）中的积分非常相似，我们只需将这些积分中的条件（t_1,t_2）$\in\mathcal{M}$ 替换为（t_1,t_2）$\in\mathcal{N}$和（t_1,t_2,t_3）$\in\mathcal{J}_3$。因此， S_{443} 所产生的损失可由下式界定

$$
\begin{aligned}
& \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4)\in U_{\mathcal{N}01}} \frac{\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4}{t_4}\right)}{t_1t_2t_3t_4^2}dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
- & \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in U_{\mathcal{N}02}} \frac{\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}{t_5}\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5^2}dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
+ & \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}03}} \frac{\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6}{t_6}\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
+ & \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}04}} \frac{\omega\left(\frac{t_1-t_6}{t_6}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}{t_5}\right)}{t_2t_3t_4t_5^2t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
+ & \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{N}05}} \frac{\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6-t_7-t_8}{t_8}\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7t_8^2}dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
+ & \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{N}06}} \frac{\omega\left(\frac{t_1-t_6-t_7-t_8}{t_8}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}{t_5}\right)}{t_2t_3t_4t_5^2t_6t_7t_8^2}dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
+ & \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{N}07}} \frac{\omega\left(\frac{t_1-t_6}{t_6}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_7-t_8}{t_8}\right)}{t_2t_3t_4t_5t_6^2t_7t_8^2}dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4)\in U_{\mathcal{N}01}} \frac{\omega_1\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4}{t_4}\right)}{t_1t_2t_3t_4^2} dt_4dt_3dt_2dt_1 \right) \\
&- \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in U_{\mathcal{N}02}} \frac{\omega_0\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}{t_5}\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5^2} dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1 \right) \\
&+ \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}03}} \frac{\omega_1\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6}{t_6}\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5t_6^2} dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1 \right) \\
&+ \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}04}} \frac{\omega_1\left(\frac{t_1-t_6}{t_6}\right)\omega_1\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}{t_5}\right)}{t_2t_3t_4t_5^2t_6^2} dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1 \right) \\
&+ \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{N}05}} \frac{\max\left(\frac{t_8}{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6-t_7-t_8}, 0.5672\right)}{t_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7t_8^2} dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1 \right) \\
&+ \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{N}06}} \frac{\max\left(\frac{t_8}{t_1-t_6-t_7-t_8}, 0.5672\right)\max\left(\frac{t_5}{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5}, 0.5672\right)}{t_2t_3t_4t_5^2t_6t_7t_8^2} dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1 \right) \\
&+ \left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\in U_{\mathcal{N}07}} \frac{\max\left(\frac{t_6}{t_1-t_6}, 0.5672\right)\max\left(\frac{t_8}{1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_7-t_8}, 0.5672\right)}{t_2t_3t_4t_5t_6^2t_7t_8^2} dt_8dt_7dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1 \right) \\
&\leqslant (0.016780 - 0 + 0.007814 + 0.015516 + 0.000001 + 0.000001 + 0.000001) \\
&= 0.040113, \qquad (26)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
U_{\mathcal{N}01}(t_1,t_2,t_3,t_4) := \Bigg\{ & (t_1,t_2)\in\mathcal{N},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{J}_3, \\
& \frac{1}{35}\leqslant t_4 < \min\left(t_3, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5, \\
& \text{either } (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4 \text{ or } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4, \\
& \frac{1}{35}\leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\}, \\
U_{\mathcal{N}02}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) := \Bigg\{ & (t_1,t_2)\in\mathcal{N},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{J}_3, \\
& \frac{1}{35}\leqslant t_4 < \min\left(t_3, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5, \\
& \text{either } (t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4 \text{ or } (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4, \\
& t_4 < t_5 < \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5, \\
& \frac{1}{35}\leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{\mathcal{N}03}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) := \Bigg\{ & (t_1,t_2) \in \mathcal{N},\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3) \in \mathcal{J}_3, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_4 < \min\left(t_3, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4) \in \mathcal{J}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_5 < \min\left(t_4, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) \notin \mathcal{I}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_6 < \min\left(t_5, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) \notin \mathcal{I}_6,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6) \notin \mathcal{J}_7, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\}, \\
U_{\mathcal{N}04}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) := \Bigg\{ & (t_1,t_2) \in \mathcal{N},\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3) \in \mathcal{J}_3, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_4 < \min\left(t_3, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4) \notin \mathcal{J}_5, \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4) \in \mathcal{J}_4,\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4) \in \mathcal{J}_4, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_5 < \min\left(t_4, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) \notin \mathcal{I}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_6 < \frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) \notin \mathcal{I}_6, \\
& (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6) \notin \mathcal{J}_7, \\
& (t_1-t_6,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_5) \notin \mathcal{J}_7, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\}, \\
U_{\mathcal{N}05}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8) := \Bigg\{ & (t_1,t_2) \in \mathcal{N},\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3) \in \mathcal{J}_3, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_4 < \min\left(t_3, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4) \in \mathcal{J}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_5 < \min\left(t_4, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) \notin \mathcal{I}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_6 < \min\left(t_5, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) \notin \mathcal{I}_6,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6) \in \mathcal{J}_7, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_7 < \min\left(t_6, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7) \notin \mathcal{I}_7, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_8 < \min\left(t_7, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6-t_7)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\notin\mathcal{I}_8,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Big\},\\
U_{\mathcal{N}06}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8):=\ &\Big\{(t_1,t_2)\in\mathcal{N},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{J}_3,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5,\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4,\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_6<\frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6,\\
&(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6)\in\mathcal{J}_7,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_7<\min\left(t_6,\frac{1}{2}(t_1-t_6)\right),\\
&(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7)\notin\mathcal{I}_7,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_8<\min\left(t_7,\frac{1}{2}(t_1-t_6-t_7)\right),\\
&(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\notin\mathcal{I}_8,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Big\},\\
U_{\mathcal{N}07}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8):=\ &\Big\{(t_1,t_2)\in\mathcal{N},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{J}_3,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_4<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4,\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5,\\
&(t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4,\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4)\right),\ (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_6<\frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6,\\
&(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_6)\notin\mathcal{J}_7,\\
&(t_1-t_6,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_5)\in\mathcal{J}_7,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_7<\min\left(t_5,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5)\right),\\
&(t_1-t_6,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7)\notin\mathcal{I}_7,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_8<\min\left(t_7,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_7)\right),\\
&(t_1-t_6,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8)\notin\mathcal{I}_8,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

对于 S_{444}，我们不能像在 (25) 中那样直接进行布赫斯塔布迭代，因为这个和中有 $(t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3$。不过，我们可以结合角色反转与布赫斯塔布恒等式，进一步分解这个和。注意，S_{444} 统计的是形如 $p_1p_2p_3\beta_3$ 的数，其中 $\beta_3\sim v^{1-t_1-t_2-t_3}$ 且 $(\beta_3,P(p_3))=1$。将 p_1 和 β_3 的角色互换，并结合布赫斯塔布恒等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
S_{444}=&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3}} S\left(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3},p_3\right)\\
=&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3},\left(\frac{2v}{\beta_3p_2p_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
=&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3},v^{\frac{1}{35}}\right)-\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{I}_4}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4},p_4\right)\\
&-\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4},p_4\right)\\
=&\,S_{4441}-S_{4442}-S_{4443}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

根据引理 3.2，我们有关于 S_{4442} 的渐近公式。由于 $t_2<\frac{53}{255}<\frac{9}{35}$ 位于区域 $\mathcal{N}$，必有 $t_1+t_2>\frac{18}{35}$。否则，根据引理 2.2 以及 $\mathcal{M}$ 的定义（其中 $m=t_1$ 且 $n=t_2$），我们有 $(t_1,t_2)\in\mathcal{M}$。现在，对于 $(t_1,t_2)\in\mathcal{N}$，我们有 $1-t_1-t_2<\frac{17}{35}$。由于 $\beta_3p_3\sim x^{1-t_1-t_2}$，我们有 $(1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3)\in\mathcal{J}_3$。根据引理 3.1，我们有关于 S_{4441} 的渐近公式。

对于剩余的 S_{4443}，我们首先将其分成四部分：

$$
S_{4443}=\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4},p_4\right)
$$

$$
\begin{aligned}
= & \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4},p_4\right)+\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\in\mathcal{J}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4},p_4\right)\\
& +\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\in\mathcal{J}_4}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4},p_4\right)\\
& +\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ \text{either } (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4 \text{ or } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\notin\mathcal{J}_4}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4},p_4\right)\\
= & S_{44431}+S_{44432}+S_{44433}+S_{44434}. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

与求和 S_{435} 类似，我们可以用不同的方法分解 S_{4443} 的每一部分。对于 S_{44431}，我们可以直接两次应用布赫斯塔布恒等式，而将要舍弃的相应六维求和为

$$
\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\in\mathcal{J}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(t_1-t_4)\right)\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\min\left(t_5,\frac{1}{2}(t_1-t_4-t_5)\right)\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4p_5p_6},p_6\right). \qquad (29)
$$

注意， S_{4443} 统计形式为 $\beta_3 p_2 p_3 p_4 \beta_4$ 的数，其中 $\beta_4 \sim v^{t_1-t_4}$ 且 $(\beta_4,\ P(p_4)) = 1$。对于S_{44432}，我们可以将其改写为

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\in\mathcal{J}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3 p_2 p_3 p_4}, p_4\right) = \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\in\mathcal{J}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_4 p_2 p_3 p_4}, p_3\right) \tag{30}$$

并对 β_3 两次应用布赫斯塔布恒等式。将被舍弃的相应六维求和为

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\in\mathcal{J}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_3,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right)\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_6<\min\left(t_5,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_5)\right)\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\notin\mathcal{I}_6}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_4 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6}, p_6\right). \tag{31}$$

对于 S_{44433}，我们使用一次布赫斯塔布恒等式:

$$\begin{aligned} S_{44433} &= \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\in\mathcal{J}_4}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3 p_2 p_3 p_4}, p_4\right)\\ &= \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\in\mathcal{J}_4}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3 p_2 p_3 p_4}, v^{\frac{1}{35}}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(t_1-t_4)\right)\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5\end{subarray}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4p_5},p_5\right)\\
&- \sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(t_1-t_4)\right)\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\end{subarray}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4p_5},p_5\right)\\
&= S_{444331}-S_{444332}+S_{444333}. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

根据引理 3.1 和引理 3.2 ，我们分别得到了 S_{444331} 和 S_{444332} 的渐近公式；现在我们要对 S_{444333}进行角色反转。注意， S_{444333} 统计形式为 $\beta_3p_2p_3p_4p_5\beta_5$的数，其中 $\beta_5\sim v^{t_1-t_4-t_5}$ 且（β_5， P（p_5））$=1$。现在，我们可以反转 β_5和 p_2的角色，也可以反转 β_5 和 p_4的角色。由于我们不知道哪个素变量更大，因此选择反转 β_5和 $\min(p_2,\ p_4)$ 的角色。我们可以将这一过程写为：

$$
\begin{aligned}
S_{444333}=&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(t_1-t_4)\right)\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\end{subarray}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4p_5},p_5\right)\\
=&\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(t_1-t_4)\right)\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\end{subarray}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3\beta_5p_3p_5\min(p_2,p_4)},\left(\frac{2v}{\beta_3\beta_5p_3p_5\min(p_2,p_4)}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (33)
\end{aligned}
$$

并且，通过一次 应用布赫斯塔布恒等式，我们需要舍弃的六维求和为

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\in\mathcal{J}_4 \text{ and } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\in\mathcal{J}_4\\ \frac{1}{35}\leqslant t_5<\min\left(t_4,\frac{1}{2}(t_1-t_4)\right)\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5)\notin\mathcal{I}_5\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}\max(t_2,t_4)\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4-t_5,t_3,t_5,t_6,\min(t_2,t_4))\notin\mathcal{I}_6}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3\beta_5p_3p_5p_6\min(p_2,p_4)},p_6\right). \tag{34}$$

对于剩余的 S_{44434}，我们可以使用反向 Buchstab 恒等式，减去所计数的几乎素数的贡献。由于我们有两个几乎素数变量 β_3 和 β_4，因此可以减去两个求和项

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ \text{either } (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4 \text{ or } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\notin\mathcal{J}_4\\ t_4<t_5<\frac{1}{2}(t_1-t_4)\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_3p_2p_3p_4p_5},p_5\right) \tag{35}$$

and

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ \text{either } (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4 \text{ or } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\notin\mathcal{J}_4\\ t_3<t_5<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_4p_2p_3p_4p_5},p_5\right). \tag{36}$$

求和 (35) 统计形如 $\beta_3p_2p_3p_4(p_5\beta_6)$ 的数，其中 $\beta_6\sim v^{t_1-t_4-t_5}$ and $(\beta_6,P(p_5))=1$。求和 (36) 统计形如 $(\beta_7p_6)p_2p_3p_4\beta_4$ 的数，其中 $\beta_7\sim v^{1-t_1-t_2-t_3-t_6}$ and $(\beta_7,P(p_6))=1$。现在，很容易发现，形如 $(\beta_7p_6)p_2p_3p_4(p_5\beta_6)$ 的数在两个求和中都被统计，因此我们必须

从储蓄中减去以下求和：

$$\sum_{\substack{\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\\ (t_1,t_2)\in\mathcal{N}\\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right)\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3\\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3\\ \frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5\\ \text{either } (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4 \text{ or } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\notin\mathcal{J}_4\\ t_4<t_5<\frac{1}{2}(t_1-t_4)\\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5\\ t_3<t_6<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_6)\in\mathcal{I}_5}} S\left(\mathcal{A}_{\beta_6 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6},p_6\right). \tag{37}$$

Co综合以上四种情况，我们从 S_{4443} 和 S_{444} 各自得到的损失为

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4)\in U_{\mathcal{N}08}}\frac{\omega\left(\frac{t_1-t_4}{t_4}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3}{t_3}\right)}{t_2t_3^2t_4^2}dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&-\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in U_{\mathcal{N}09}}\frac{\omega\left(\frac{t_1-t_4-t_5}{t_5}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3}{t_3}\right)}{t_2t_3^2t_4t_5^2}dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&-\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in U_{\mathcal{N}10}}\frac{\omega\left(\frac{t_1-t_4}{t_4}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_5}{t_5}\right)}{t_2t_3t_4^2t_5^2}dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}11}}\frac{\omega\left(\frac{t_1-t_4-t_5}{t_5}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_6}{t_6}\right)}{t_2t_3t_4t_5^2t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}12}}\frac{\omega\left(\frac{t_1-t_4-t_5-t_6}{t_6}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3}{t_3}\right)}{t_2t_3^2t_4t_5t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}13}}\frac{\omega\left(\frac{t_1-t_4}{t_4}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_5-t_6}{t_6}\right)}{t_2t_3t_4^2t_5t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}14}}\frac{\omega\left(\frac{\max(t_2,t_4)-t_6}{t_6}\right)\omega\left(\frac{t_1-t_4-t_5}{t_5}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3}{t_3}\right)}{\min(t_2,t_4)t_3^2t_5^2t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&\leqslant\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4)\in U_{\mathcal{N}08}}\frac{\omega_1\left(\frac{t_1-t_4}{t_4}\right)\omega\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3}{t_3}\right)}{t_2t_3^2t_4^2}dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&-\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in U_{\mathcal{N}09}}\frac{\omega_0\left(\frac{t_1-t_4-t_5}{t_5}\right)\omega_0\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3}{t_3}\right)}{t_2t_3^2t_4t_5^2}dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&-\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\in U_{\mathcal{N}10}}\frac{\omega_0\left(\frac{t_1-t_4}{t_4}\right)\omega_0\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_5}{t_5}\right)}{t_2t_3t_4^2t_5^2}dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}11}}\frac{\omega_1\left(\frac{t_1-t_4-t_5}{t_5}\right)\omega_1\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_6}{t_6}\right)}{t_2t_3t_4t_5^2t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}12}} \frac{\omega_1\left(\frac{t_1-t_4-t_5-t_6}{t_6}\right)\omega_1\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3}{t_3}\right)}{t_2t_3^2t_4t_5t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}13}} \frac{\omega_1\left(\frac{t_1-t_4}{t_4}\right)\omega_1\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3-t_5-t_6}{t_6}\right)}{t_2t_3t_4^2t_5t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&+\left(\int_{(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6)\in U_{\mathcal{N}14}} \frac{\omega_1\left(\frac{\max(t_2,t_4)-t_6}{t_6}\right)\omega_1\left(\frac{t_1-t_4-t_5}{t_5}\right)\omega_1\left(\frac{1-t_1-t_2-t_3}{t_3}\right)}{\min(t_2,t_4)t_3^2t_5^2t_6^2}dt_6dt_5dt_4dt_3dt_2dt_1\right)\\
&\leqslant (0.057182-0.004301-0.000022+0.000001+0.002635+0.000001+0.000001)\\
&=0.055497,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
U_{\mathcal{N}08}(t_1,t_2,t_3,t_4):=\ &\Bigg\{(t_1,t_2)\in\mathcal{N},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4,\\
&(1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5,\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5,\\
&\text{either } (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4\\
&\quad\text{or } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\notin\mathcal{J}_4,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\},\\
U_{\mathcal{N}09}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5):=\ &\Bigg\{(t_1,t_2)\in\mathcal{N},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4,\\
&(1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5,\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5,\\
&\text{either } (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4\\
&\quad\text{or } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\notin\mathcal{J}_4,\\
&t_4<t_5<\frac{1}{2}(t_1-t_4),\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\},\\
U_{\mathcal{N}10}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5):=\ &\Bigg\{(t_1,t_2)\in\mathcal{N},\ \frac{1}{35}\leqslant t_3<\min\left(t_2,\frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right),\\
&(t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3)\notin\mathcal{J}_3,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_4<\frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{I}_4,\\
&(1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4)\notin\mathcal{J}_5,\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3)\notin\mathcal{J}_5,\\
&\text{either } (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4)\notin\mathcal{J}_4\\
&\quad\text{or } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4))\notin\mathcal{J}_4,\\
&t_3<t_5<\frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3),\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_5)\in\mathcal{I}_5,\\
&\frac{1}{35}\leqslant t_1<\frac{17}{35},\ \frac{1}{35}\leqslant t_2<\min\left(t_1,\frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{\mathcal{N}11}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) := \Bigg\{ & (t_1,t_2) \in \mathcal{N},\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{J}_3, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_4 < \frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4, \\
& (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4) \notin \mathcal{J}_5,\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3) \notin \mathcal{J}_5, \\
& \text{either } (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{J}_4 \\
& \quad \text{or } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4)) \notin \mathcal{J}_4, \\
& t_4 < t_5 < \frac{1}{2}(t_1-t_4),\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5) \in \mathcal{I}_5, \\
& t_3 < t_6 < \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3),\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_6) \in \mathcal{I}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\}, \\
U_{\mathcal{N}12}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) := \Bigg\{ & (t_1,t_2) \in \mathcal{N},\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{J}_3, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_4 < \frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4, \\
& (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4) \in \mathcal{J}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_5 < \min\left(t_4, \frac{1}{2}(t_1-t_4)\right), \\
& (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5) \notin \mathcal{I}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_6 < \min\left(t_5, \frac{1}{2}(t_1-t_4-t_5)\right), \\
& (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) \notin \mathcal{I}_6, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\}, \\
U_{\mathcal{N}13}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) := \Bigg\{ & (t_1,t_2) \in \mathcal{N},\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{J}_3, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_4 < \frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4, \\
& (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4) \notin \mathcal{J}_5,\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3) \in \mathcal{J}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_5 < \min\left(t_3, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3)\right), \\
& (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_5) \notin \mathcal{I}_5, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_6 < \min\left(t_5, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2-t_3-t_5)\right), \\
& (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) \notin \mathcal{I}_6, \\
& \frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\}, \\
U_{\mathcal{N}14}(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) := \Bigg\{ & (t_1,t_2) \in \mathcal{N},\ \frac{1}{35} \leqslant t_3 < \min\left(t_2, \frac{1}{2}(1-t_1-t_2)\right), \\
& (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{I}_3,\ (t_1,t_2,t_3) \notin \mathcal{J}_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{35} \leqslant t_4 < \frac{1}{2}t_1,\ (1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4) \notin \mathcal{I}_4,\\
&(1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_4) \notin \mathcal{J}_5,\ (t_1-t_4,t_2,t_3,t_4,t_3) \notin \mathcal{J}_5,\\
&(1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4) \in \mathcal{J}_4\\
&\quad \text{and } (1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4,t_3,\min(t_2,t_4)) \in \mathcal{J}_4,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_5 < \min\left(t_4, \frac{1}{2}(t_1-t_4)\right),\\
&(1-t_1-t_2-t_3,t_2,t_3,t_4,t_5) \notin \mathcal{I}_5,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_6 < \frac{1}{2}\max(t_2,t_4),\\
&(1-t_1-t_2-t_3,t_1-t_4-t_5,t_3,t_5,t_6,\min(t_2,t_4)) \notin \mathcal{I}_6,\\
&\frac{1}{35} \leqslant t_1 < \frac{17}{35},\ \frac{1}{35} \leqslant t_2 < \min\left(t_1, \frac{1}{2}(1-t_1)\right)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

注意，上述七个积分分别对应于式 (35)、(36)、(37)、(29)、(31) 和 (34) 中的 S_{44434} 与和。

最后，由式 (7)、(23)、(26) 和 (38)，总误差小于

$$0.7226 + 0.176459 + 0.040113 + 0.055497 < 0.995,$$

并且我们有

$$S\left(\mathcal{A}, (2v)^{\frac{1}{2}}\right) > 0.005 \left(\sum_{P<p\leqslant 2P} \frac{1}{p}\right)^{K} \frac{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{\log v}.$$

现在定理1 的证明完成。

References

[1] A. Balog. 具有大素因子的数。 *Studia Sci. Math. Hungar.*，15:139–146，1980年。[2] A. Balog. 具有大素因子的数 II. 载于 *Topics in Classical Number Theory*，第 49–67 页。Math. Soc. J´anos Bolyai 34，爱思唯尔，北荷兰，阿姆斯特丹，1984年。[3] A. Balog、G. Harman 和 J. Pintz. 具有大素因子的数 IV。 *J. London Math. Soc.*，28(2):218–226，1983年。[4] J.-M. Deshouillers 和 H. Iwaniec. 狄利克雷多项式与黎曼ζ函数的幂均值，II。 *Acta Arith.* 43 3 305 312, 1984 ，( ): – 。[5] G. Harman. *Prime-detecting Sieves*，第 33 卷， *London Mathematical Society Monographs (New Series)*。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2007年。[6] J. K. Haugland. 筛法在素数中的应用。 *Ph.D. Thesis*，牛津大学，1998年。[7] D. R. Heath-Brown. 区间内整数的最大素因子。 *Sci. China Ser. A*，39(5):449–476，1996年。[8] D. R. Heath-Brown 和 C. Jia. 区间内整数的最大素因子，II。 *J. Reine Angew. Math.*，498 59，1998 35: – 。[9] C. Jia. 关于 Piatetski–Shapiro–Vinogradov 定理。 *Acta Arith.*，73(1):1–28，1995年。[10] C. Jia 和 M.-C. Liu. 关于整数的最大素因子。 *Acta Arith.*，95(1):17–48，2000年。[11] M. Jutila. 关于具有大素因子的数。 *J. Indian Math. Soc. (N. S.)*，37:43–53，1973年。[12] R. Li. 单指数和、例外特征与短区间内素数的混合估计。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:2401.11139v3 页，2024年。[13] R. Li. 短区间内整数的最大素因子。 *Preprints*，第 preprints202504.1212.v2 页，2025年。[14] R. Li. 短区间内整数的最大素因子 II。 *Cambridge Open Engage*，第 10.33774/coe–2025– xnbjq–v2 页，2025年。[15] R. Li. 几乎所有短区间内的素数 II。 *Cambridge Open Engage*，第 10.33774/coe–2025–jrnjl 页，2025年。[16] R. Li. 短区间内素数的数量及 Harman 筛法的数值计算。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:2308.04458v8 页，2025年。[17] N. Watt. Kloosterman 和与狄利克雷多项式的一个均值。 *J. Number Theory*，53:179–210，1995年。

International Curriculum Center, The High School Affiliated to Renmin University of China, Beijing, China
Email address: runbo.li.carey@gmail.com