arXiv:2601.00934v1 [math.AP] 2 Jan 2026

一种包含拟变分不等式和抛物型变分不等式的新型偏微分非线性系统及其应用

Wei Li[a, b], Zhenghui Tang[a, c], Zengbao Wu[d*], Chunyan Yang[ea]成都理工大学数学科学学院，中国四川成都 *610059*[b]成都理工大学数学研究中心，中国四川成都 *610059*[c]四川省地数学重点实验室，成都理工大学，中国四川成都 *610059*[d]洛阳师范学院数学系，中国河南洛阳 *471934*[e]四川大学数学系，中国四川成都 *610064*

摘要

我们研究了巴拿赫空间中的一种新型非线性系统，该系统包含偏微分方程、拟变分不等式和抛物型变分不等式。利用巴拿赫不动点定理，在适当条件下证明了该耦合系统的唯一可解性。我们将主要结果用于研究具有长记忆效应、磨损过程和损伤现象的黏弹性摩擦接触问题。

关键词：偏微分变分不等式；拟变分不等式；抛物型变分不等式；损伤；磨损

2020年数学主题分类：49J40;47J20;35Q93

1 引言

变分不等式（VIs）已广泛应用于工程学、优化、经济学、力学及其他科学领域。引入常微分方程（ODE）后，由变分不等式和常微分方程构成的系统称为微分变分不等式

*通讯作者。电子邮箱：zengbaowu@hotmail.com, wuzengbao@lynu.edu.cn 本研究得到国家自然科学基金（12301395、11901273）、河南省高校科技创新人才计划（23HASTIT031）及河南省自然科学基金（252300421997）资助。

（DVIs），这一概念由 Pang 等人在 [1] 中提出并进行了深入研究。随后，Chen 在 [2] 中采用数值方法求解了一类微分变分不等式，并证明了该方法的收敛性。此外，Liu 等人在 [3] 中研究了偏微分变分不等式（PDVIs），并利用半群理论和不动点定理证明了这类问题的可解性。Zhang 等人在 [4] 中探讨了随机微分变分不等式的可解性。Hao 等人在 [5] 中分析了一类广义二阶时滞微分变分－半变分不等式的唯一可解性及其解的收敛性，并讨论了相关应用。Mig´orski 在 [6] 中研究了一个由两个演化包含构成的抽象系统，该系统可转化为两类变分不等式，并为研究多个拟静态或演化包含的学者提供了重要支持。目前，微分变分不等式和偏微分变分不等式因其在摩擦接触模型、动态交通、网络优化和纳什均衡等领域的重要应用，已引起相关学术界的广泛关注；在理论和应用层面均已取得显著成果，参见 [7–16]。

另一方面，摩擦接触问题中的磨损现象已成为工业领域广受关注的课题。Andrews 等人在 [17] 中研究了涉及磨损的摩擦接触问题。此外，他们依据Archard磨损定律建立了动态热黏弹性接触问题的模型，并证明了该问题的唯一可解性。近年来，Sofonea等人在 [18] 中基于 [17], 所采用的广义形式建立了准静态弹性接触问题的模型，并进一步证明了该问题的唯一可解性。Chen 等人在 [19] 中依据Archard磨损定律建立了接触问题的模型，随后获得了该问题的唯一可解性。然而，广义微分Archard条件允许磨损扩散，而这一现象曾在平面接触面中得到研究。因此，在摩擦接触问题中，总磨损可以通过偏微分方程得到更好的描述，见 [20]。由于水泥和橡胶等材料的承载能力会随时间降低，这种现象被称为材料损伤，见 [21]。 [22]首次使用损伤函数来量化材料损伤。在 [23–28]中可以找到许多与损伤接触问题相关的有趣模型。近年来，Gasi´nski 等人在 [25] 中采用变分-半变分不等式方法研究了一个涉及损伤的接触问题。

在摩擦接触问题中，具有长记忆效应的材料，包括橡胶和膏体，会被转化为含历史依赖算子的问题。 [29, 30]中给出了一些例子和解释。大量准静态接触的摩擦或无摩擦模型产生了许多历史依赖变分不等式和演化变分不等式，这些模型已经在一些抽象框架中得到研究。Mig´orski在 [31]中研究了一类与常微分方程耦合的变分－半变分不等式，并将其应用于动态单边黏塑性无摩擦接触问题以及带摩擦和黏附的黏弹性接触问题。Sofonea等人在 [32]中研究了一类源自众多描述准静态接触过程的数学模型的一般拟变分不等式。 [32] 中的拟变分不等式结果已应用于大量准静态接触模型的研究。Wang等人在 [33] 中研究了一类时变混合拟变分－半变分不等式的可解性，并将所得结果应用于弹性材料的接触模型和广义不可压缩牛顿流体的Oseen模型。Liang等人在 [34] 中研究了巴拿赫空间中由带扰动算子的拟变分－半变分不等式驱动的二阶微分包含

在巴拿赫空间中。

上述研究主要关注包含变分不等式的双耦合系统。该变分不等式与一个微分方程耦合，例如常微分方程、偏微分方程或分数阶微分方程；其中，变分不等式可以是拟变分不等式或半变分不等式等。此外，Chen 等人 [35] 研究了一类三耦合常微分系统，其中包含一个常微分方程、一个变分-半变分不等式和一个抛物型不等式，并将其应用于平面接触问题。受这些论文启发，我们研究一类包含偏微分方程、拟变分不等式和抛物型不等式的三耦合偏微分系统，并将其应用于曲线接触问题。

令 $\varphi\colon V\times Y\to\mathbb{R}$, $A\colon X\times K_V\to V$, $\mathcal{R}\colon C(I;K_V)\times C(I;K_Y)\to C(I;X)$, $\mathcal{S}\colon C(I;K_V)\to C(I;Z)$, $j\colon Z\times V\times\mathbb{R}\times K_V\to\mathbb{R}$, $f\colon I\to V$, $g\colon Y\times Y\to\mathbb{R}$, $\phi\colon I\times V\to Y_1$。所研究的问题如下：求 $\eta\colon I\to K_V$, $\xi\colon I\to K_Y$以及 $w\colon I\times\Omega\to\mathbb{R}$，使其满足以下不等式和方程

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t}-\Delta w(t,x)=\varphi(\eta(t),\xi(t)), \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}&\langle A(\mathcal{R}(\eta(t),\xi(t)),\eta(t)),v-\eta(t)\rangle_V+j(\mathcal{S}\eta(t),\eta(t),w(t,x),v)\\&\quad-j(\mathcal{S}\eta(t),\eta(t),w(t,x),\eta(t))\geq\langle f(t),v-\eta(t)\rangle_V\ \text{for all}\ v\in K_V,\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\langle\dot{\xi}(t),\delta-\xi(t)\rangle_{Y_1}+g(\xi(t),\delta-\xi(t))\geq\langle\phi(t,\eta(t)),\delta-\xi(t)\rangle_{Y_1}\ \text{for all}\ \delta\in K_Y, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial\nu}+bw(t,x)=0\ \text{for all}\ x\in\partial\Omega, \tag{1.4}$$

$$w(0,x)=w_0(x),\quad\xi(0)=\xi_0, \tag{1.5}$$

对于每个 $t\in I$ 和 $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$，其中 $b\in\mathbb{R}$, X, Y, Z 均为自反可分巴拿赫空间，而 X^*, Y^*, Z^* 分别是 X, Y, Z的对偶空间。此外，我们假设 Y_1 和 V 是可分希尔伯特空间，满足嵌入关系 $Y\subset Y_1\subset Y^*$；集合 $K_V\subset V$和 $K_Y\subset Y$是凸集，且 $I=[0,T]$ 满足 $T\in\mathbb{R}^+$。

本文的主要创新贡献如下。(i) 我们研究了一类新的非线性系统，该系统包含巴拿赫空间中的一个偏微分方程、一个拟变分不等式和一个抛物型变分不等式。该系统不同于以往的双耦合系统，并对其进行了推广，参见例如 [6, 31]。(ii) 大多数研究者采用算子半群理论研究偏微分方程，并利用不动点定理求解这类系统，参见例如 [3, 10, 13]，；而我们通过对解进行估计来研究该系统中的偏微分方程，并运用巴拿赫不动点定理证明该系统的唯一可解性。(iii) 我们将该系统的抽象结果应用于求解一个摩擦接触问题，并证明其具有唯一可解性。该问题的接触面为曲面，与上述大多数研究中提及的平面不同，参见例如 [9, 18, 35]。

本文结构如下。第 2 节回顾关键定义和有用结果。第 3 节证明问题(1.1)-(1.5)的唯一可解性。第 4 节研究一个具体的摩擦接触问题，并将其表述为系统(1.1)-(1.5)。此外，应用第 3 节得出的理论结果，我们证明了具有长记忆效应、磨损过程和损伤的黏弹性摩擦接触问题的唯一可解性。

2 预备知识

定义 2.1. 我们假设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是非空集合。单值映射 $S\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 的图 $Gr(S)$定义如下

$$Gr(S) = \{(a, b) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid b = Sa\}.$$

引理 2.1. *[36, p.9]* 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为非空集合，$\mathcal{P} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$，且对所有 $b \in \mathcal{Y}$，都有 $Ab = \{a \in \mathcal{X} \mid (a, b) \in \mathcal{P}\}$。假设 $S\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$是一个单值映射，并且对于每个 $b \in \mathcal{Y}$，存在唯一的 $a \in \mathcal{X}$使得有序对 $(a, b) \in \mathcal{P}$。那么，$P \cap Gr(S) \neq \emptyset$ 是单元素集，当且仅当 $\Lambda := SA$ 有唯一的不动点。

引理 2.2. *[36, p.21]* 假设 X 是一个希尔伯特空间，$y \in X$，非空闭凸集 $K \subset X$，算子 $A\colon K \to X$ 是强单调且利普希茨连续的，并且泛函 $j\colon K \to \mathbb{R}$ 是下半连续的。那么，存在唯一的 b 满足

$$b \in K,\ \langle Ab, a - b\rangle_X + j(a) - j(b) \geq \langle y, a - b\rangle_X \quad for\ all\ \ a \in K.$$

定义 2.2。 我们假设 I 是一个时间区间，几乎历史依赖算子$S\colon\ C(I;\ X) \to C(I;\ Y)$ 定义如下：对于每个紧致集 $K \subset I$，存在 $l_K \in [0, 1)$和 $L_K > 0$，使得对每个 $t \in K$，

$$\|Sa(t) - Sb(t)\|_Y \leq l_K \|a(t) - b(t)\|_X + L_K \int_0^t \|a(s) - b(s)\|_X \, ds$$

对所有 a、$b \in C(I;\ X)$。

引理 2.3。 *[36, p.41]* 我们假设 X 是一个巴拿赫空间，I 是一个时间区间，且算子$A\colon\ C(I;\ X) \to C(I;\ X)$ 是几乎历史依赖的。那么 A 有唯一的不动点。

引理 *2.4*。 *[37, p.8]* 我们假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个边界为$\partial\Omega$、$N \geq 2$的有界连通区域。给定 $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$、$b_j$、$c_i \in L^q(\Omega)$、$d \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ 和 $\beta \in L^{q-1}(\partial\Omega)$，其中$q > N$ 是任意的。我们假设存在 $m > 0$，使得对所有$\zeta \in \mathbb{R}^N$都有 $\sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\zeta_i\zeta_j \geq m|\zeta|^2$，且 $T > 0$、$w_0 \in L^2(\Omega)$、$h \in L^2([0, T];\ L^2(\Omega))$ 和 $p \in L^2([0, T];\ L^2(\partial\Omega))$。那么，以下罗宾问题存在唯一的弱解 $w \in C([0, T];\ L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T];\ H^1(\Omega))$。

$$\begin{cases} w_t(t, x) - Lw(t, x) = h(t, x),\ t > 0, x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial w(t, x)}{\partial \nu_L} + \beta w(t, x) = p(t, x),\ t > 0, x \in \partial\Omega, \\ w(0, x) = w_0(x),\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\nu = (\nu_j)_{j=1}^N$ 表示边界 $\partial\Omega$ 上的外单位法向量，并且

$$Lw := \sum_{j=1}^{N} D_j \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ij} D_i w + b_j w \right) - \left(\sum_{i=1}^{N} c_i D_i w + dw \right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu_L} := \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ij} D_i w + b_j w \right) \nu_j,$$

其中 $D_i w = \frac{\partial w}{\partial x_i}$。

引理 2.5。 *[37, p.9]* 我们假设 $T>0$, a_1, a_2, b_1, $b_2\in[2,+\infty)$ 满足 $\frac{1}{a_1}+\frac{N}{2b_1}<1$且 $\frac{1}{a_2}+\frac{N-1}{2b_2}<\frac{1}{2}$, $h\in L^{a_1}([0,T];L^{b_1}(\Omega))$, $p\in L^{a_2}([0,T];L^{b_2}(\partial\Omega))$ 以及 $w_0\in L^\infty(\Omega)$。那么 *(2.1)* 的弱解 w满足

$$\|w\|_{L^\infty([0,T];L^\infty(\Omega))}\le c(\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}+\|h\|_{L^{a_1}([0,T];L^{b_1}(\Omega))}+\|p\|_{L^{a_2}([0,T];L^{b_2}(\Omega))}),$$

其中， c仅依赖于 T、 N、Ω、 a_1、 b_1、 a_2、 b_2以及方程系数。

引理 2.6. *[37, p.10]* 假设 $T>0$、 h 和 p 满足引理 *2.5* 的条件，且 $w_0\in C(\Omega)$。那么，*(2.1)*的弱解 w属于 $C([0,T];C(\Omega))$。此外，当 $t\to0$时， $w(t)\to w_0$在Ω 上一致。

3 新非线性系统的唯一可解性

本节证明问题(1.1)-(1.5)的唯一可解性。我们需要以下假设。

H(A)： A： $X\times K_V\to V$满足

(a) $A(\cdot,\cdot)$是利普希茨连续的，且 L_1 和 L_2，即存在满足下列条件的 $L_1>0$, $L_2>0$

$$\|A(a_1,b)-A(a_2,b)\|_V\le L_1\|a_1-a_2\|_X$$

and

$$\|A(a,b_1)-A(a,b_2)\|_V\le L_2\|b_1-b_2\|_V$$

对于所有 a_1， a_2， $a\in X$ 以及 b_1， b_2， $b\in K_V$;

(b) 存在满足以下条件的 $m>0$

$$\langle A(a,b_1)-A(a,b_2),b_1-b_2\rangle_V\ge m\|b_1-b_2\|_V^2$$

对于所有 $a\in X$ 和 b_1， $b_2\in K_V$。

H(j)： j: $Z\times V\times\mathbb{R}\times K_V\to\mathbb{R}$ 满足

(a) 对于所有 $a\in Z$， $b\in V$和 $c\in\mathbb{R}$， $j(a,\ b,\ c,\ \cdot)$ 在 K_V 上是凸且下半连续的;

(b) 存在满足以下条件的 $\alpha>0$， $\beta>0$， $\gamma>0$

$$\begin{aligned}&j(a_1,b_1,c_1,d_2)-j(a_1,b_1,c_1,d_1)+j(a_2,b_2,c_2,d_1)-j(a_2,b_2,c_2,d_2)\\ \le\ &\alpha\|a_1-a_2\|_Z\|d_1-d_2\|_V+\beta\|b_1-b_2\|_V\|d_1-d_2\|_V+\gamma|c_1-c_2|\|d_1-d_2\|_V\end{aligned}$$

对于所有 a_1， $a_2\in Z$， b_1， $b_2\in V$， c_1， $c_2\in\mathbb{R}$ 以及 d_1， $d_2\in K_V$。

H($\mathcal{R}$)： $\mathcal{R}$： $C(I;\ K_V)\times C(I;\ K_Y)\to C(I;\ X)$ 满足：对于任意紧集 $J\subset I$，存在 $r_{1J}>0$, $r_{2J}>0$ 满足

$$\|\mathcal{R}(a_1(t),b(t))-\mathcal{R}(a_2(t),b(t))\|_X\le r_{1J}\int_0^t\|a_1(s)-a_2(s)\|_Vds$$

and

$$\|\mathcal{R}(a(t),b_1(t))-\mathcal{R}(a(t),b_2(t))\|_X\le r_{2J}\int_0^t\|b_1(s)-b_2(s)\|_{Y_1}ds$$

对于所有 a_1、 a_2、 $a\in C(I;\ K_V)$ b_1、 b_2、 $b\in C(I;\ K_Y)$ 和 $t\in J$。

H($\mathcal{S}$)： S： $C(I;K_V) \to C(I;Z)$ 满足：对于任意紧集 $J \subset I$，存在 $s_J > 0$ 满足

$$\|\mathcal{S}a_1(t) - \mathcal{S}a_2(t)\|_Z \le s_J \int_0^t \|a_1(s) - a_2(s)\|_V ds$$

对所有 $a_1,\ a_2 \in C(I;\ K_V)$ 以及 $t \in J$。

H(f)： f： $I \to V$是连续函数。

H(φ)： φ: $V \times Y \to \mathbb{R}$ 满足

(a) $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 关于 L_φ 利普希茨连续，即存在满足条件的 $L_\varphi > 0$

$$|\varphi(a_1,b_1) - \varphi(a_2,b_2)| \le L_\varphi(\|a_1 - a_2\|_V + \|b_1 - b_2\|_{Y_1})$$

对所有 $a_1,\ a_2 \in V$以及 $b_1,\ b_2 \in Y \subset Y_1$;

(b) $\varphi(0_V,0_Y) < +\infty$。

H(ϕ)： ϕ： $I \times V \to Y_1$ 满足

(a) $\phi(t,\ \cdot)$ 关于 L_ϕ 利普希茨连续，即存在满足条件的 $L_\phi > 0$

$$\|\phi(t,b_1) - \phi(t,b_2)\|_{Y_1} \le L_\phi \|b_1 - b_2\|_V$$

对所有 $b_1,\ b_2 \in V$ 和 $t \in I$;

(b) $\phi(t,0_V) \in L^2(I;Y_1)$.

H(g)： g： $Y \times Y \to \mathbb{R}$ 满足

(a) $g(\cdot,\ \cdot)$ 是连续双线性对称形式;

(b) 存在满足条件的 $g_1 \in \mathbb{R}$ 和 $g_2 > 0$

$$g(a,a) + g_1\|a\|^2_{Y_1} \ge g_2\|a\|^2_Y$$

对所有 $a \in Y$。

为了证明问题(1.1)-(1.5)的唯一可解性，我们首先考虑以下子问题。

问题 3.1. 对于给定的 $w \in C(I;\ C(\Omega))$ $\xi \in \overline{H}^1(I;Y_1) \cap L^2(I;Y)$，求 $\eta_{w\xi}$： $I \to K_V$，使得对每个 $t \in I$,

$$\begin{aligned}\langle A(\mathcal{R}(\eta_{w\xi}(t),\xi(t)),\eta_{w\xi}(t)), v - \eta_{w\xi}(t)\rangle_V + j(\mathcal{S}\eta_{w\xi}(t),\eta_{w\xi}(t),w(t,x),v)\\ -j(\mathcal{S}\eta_{w\xi}(t),\eta_{w\xi}(t),w(t,x),\eta_{w\xi}(t)) \ge \langle f(t), v - \eta_{w\xi}(t)\rangle_V \text{ for all } v \in K_V. \quad (3.1)\end{aligned}$$

定理 3.1. 假设满足 H($\overline{A}$)、H(j)、H($\mathcal{R}$)、H($\mathcal{S}$)、H(f) 和 $m > \beta$。那么，对于任意给定的 $w \in C(I;\ C(\Omega))$ 和 $\xi \in H^1(I;Y_1) \cap L^2(I;Y)$，问题 3.1 存在唯一解$\eta_{w\xi} \in C(I;K_V)$。

证明。为方便起见，假设 $\mathcal{X} = C(I; K_V)$ 和 $\mathcal{Y} = C(I;\ K_V)$。对于任意 $u \in C(I;\ K_V)$，函数 $y_{u\xi} \in C(I; X)$ 和 $z_u \in C(I;\ Z)$ 定义如下：对所有 $t \in I$,

$$y_{u\xi}(t) = \mathcal{R}(u(t), \xi(t)),\ z_u(t) = \mathcal{S}u(t).$$

此外，集合 $\mathcal{P}$ 定义如下

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \big\{&(\eta_{uw\xi}, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid \eta_{uw\xi}(t) \in K_V \text{ and}\\ &\langle A(y_{u\xi}(t), \eta_{uw\xi}(t)), v - \eta_{uw\xi}(t)\rangle_V + j(z_u(t), u(t), w(t,x), v)\\ &\quad -j(z_u(t), u(t), w(t,x), \eta_{uw\xi}(t)) \geq \langle f(t), v - \eta_{uw\xi}(t)\rangle_V \text{ for all } v \in K_V,\ t \in I\big\}.\end{aligned}$$

此外，算子 $M : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 定义如下:

$$M\eta_{uw\xi} = \eta_{uw\xi}.$$

现在，我们继续进行以下步骤。

步骤 1. 我们证明，对于任意 $u \in C(I; K_V)$，存在唯一的 $\eta_{uw\xi} \in C(I; K_V)$ 满足

$$\begin{aligned}&\langle A(y_{u\xi}(t), \eta_{uw\xi}(t)), v - \eta_{uw\xi}(t)\rangle_V + j(z_u(t), u(t), w(t,x), v)\\ &\quad -j(z_u(t), u(t), w(t,x), \eta_{uw\xi}(t)) \geq \langle f(t), v - \eta_{uw\xi}(t)\rangle_V \text{ for all } v \in K_V,\ t \in I. \quad (3.2)\end{aligned}$$

事实上，对于任意固定的 $t \in I$，利用 H(A) 和 H(j)(a)，可得存在唯一解 $\eta_{uw\xi}(t)$，根据引理 2.2，它是 (3.2) 的解。现在我们证明 $\eta_{uw\xi}(t) \in C(I; K_V)$。为方便起见，考虑 $t_1,\ t_2 \in I$，记 $u(t_i) = u_i$, $\eta_{uw\xi}(t_i) = \eta_i$, $y_{u\xi}(t_i) = y_i$, $z_u(t_i) = z_i$, $w(t_i,\ x) = w_i$, $f(t_i) = f_i$，其中 $i = 1,\ 2$。利用 (3.2)，得到

$$\eta_1 \in K_V,\ \langle A(y_1, \eta_1), v - \eta_1\rangle_V + j(z_1, u_1, w_1, v) - j(z_1, u_1, w_1, \eta_1) \geq \langle f_1, v - \eta_1\rangle_V \quad (3.3)$$

and

$$\eta_2 \in K_V,\ \langle A(y_2, \eta_2), v - \eta_2\rangle_V + j(z_2, u_2, w_2, v) - j(z_2, u_2, w_2, \eta_2) \geq \langle f_2, v - \eta_2\rangle_V \quad (3.4)$$

对所有的 $v \in K_V$。令 $v = \eta_2$ 和 $v = \eta_1$ 分别属于 (3.3) 和 (3.4)。因此

$$\langle A(y_1, \eta_1), \eta_2 - \eta_1\rangle_V + j(z_1, u_1, w_1, \eta_2) - j(z_1, u_1, w_1, \eta_1) \geq \langle f_1, \eta_2 - \eta_1\rangle_V \quad (3.5)$$

and

$$\langle A(y_2, \eta_2), \eta_1 - \eta_2\rangle_V + j(z_2, u_2, w_2, \eta_1) - j(z_2, u_2, w_2, \eta_2) \geq \langle f_2, \eta_1 - \eta_2\rangle_V. \quad (3.6)$$

此外，将 (3.5) 和 (3.6) 相加可得

$$\begin{aligned}&\langle A(y_1, \eta_1) - A(y_2, \eta_2), \eta_2 - \eta_1\rangle_V + j(z_1, u_1, w_1, \eta_2)\\ &\quad -j(z_1, u_1, w_1, \eta_1) + j(z_2, u_2, w_2, \eta_1) - j(z_2, u_2, w_2, \eta_2) \geq \langle f_1 - f_2, \eta_2 - \eta_1\rangle_V. \quad (3.7)\end{aligned}$$

于是，由 H(A) 可得

$$\begin{aligned}&\langle A(y_1, \eta_1) - A(y_2, \eta_2), \eta_2 - \eta_1\rangle_V\\ =\ &\langle A(y_1, \eta_1) - A(y_1, \eta_2), \eta_2 - \eta_1\rangle_V + \langle A(y_1, \eta_2) - A(y_2, \eta_2), \eta_2 - \eta_1\rangle_V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq -m\|\eta_1-\eta_2\|_V^2+\|A(y_1,\eta_2)-A(y_2,\eta_2)\|_V\cdot\|\eta_1-\eta_2\|_V \\ &\leq -m\|\eta_1-\eta_2\|_V^2+L_1\|y_1-y_2\|_X\|\eta_1-\eta_2\|_V. \end{aligned} \tag{3.8}$$

并利用 H(j)，我们得到

$$\begin{aligned} &j(z_1,u_1,w_1,\eta_2)-j(z_1,u_1,w_1,\eta_1)+j(z_2,u_2,w_2,\eta_1)-j(z_2,u_2,w_2,\eta_2) \\ \leq\ &\alpha\|z_1-z_2\|_Z\|\eta_1-\eta_2\|_V+\beta\|u_1-u_2\|_V\|\eta_1-\eta_2\|_V+\gamma|w_1-w_2|\|\eta_1-\eta_2\|_V. \end{aligned} \tag{3.9}$$

由 (3.8)、(3.9) 和 (3.7) 可得

$$\begin{aligned} &m\|\eta_1-\eta_2\|_V \\ \leq\ &L_1\|y_1-y_2\|_X+\alpha\|z_1-z_2\|_Z+\beta\|u_1-u_2\|_V+\gamma|w_1-w_2|-\|f_1-f_2\|_V. \end{aligned} \tag{3.10}$$

利用 $y_{u\xi}$ 和 z_u 的定义，结合 w 和 H(f) 的假设，我们证明 $\eta\in C(I;\ K_V)$。

步骤 2. 为了将 (3.2) 的结论与问题 3.1 联系起来，我们需要证明由下式定义的算子 Λ: $C(I;\ K_V)\to C(I;\ K_V)$

$$\Lambda u=\eta_{uw\xi}\text{ for all }u\in C(I;V)$$

存在唯一不动点。

事实上，假设集合 $J\subset I$ 是紧致的。对于任意 $u_1,\ u_2\in C(I;\ K_V)$ $t\in J$，类似于 (3.10) 的推导，我们得到

$$\begin{aligned} &m\|\eta_1(t)-\eta_2(t)\|_V \\ \leq\ &L_1\|y_1(t)-y_2(t)\|_X+\alpha\|z_1(t)-z_2(t)\|_Z+\beta\|u_1(t)-u_2(t)\|_V. \end{aligned} \tag{3.11}$$

现在，利用 H($\mathcal{R}$) 和 H($\mathcal{S}$)，我们得到

$$\|y_1(t)-y_2(t)\|_X=\|\mathcal{R}(u_1,\xi(t))-\mathcal{R}(u_2,\xi(t))\|_X\leq r_{1J}\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|_V ds \tag{3.12}$$

and

$$\|z_1(t)-z_2(t)\|_Z=\|\mathcal{S}u_1(t)-\mathcal{S}u_2(t)\|_Z\leq s_J\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|_V ds. \tag{3.13}$$

然后，结合不等式 (3.12) 和 (3.13)，利用 Λ 的定义，由 (3.11) 可得

$$\begin{aligned} \|\Lambda u_1(t)-\Lambda u_2(t)\|_V &= \|\eta_1(t)-\eta_2(t)\|_V \\ &\leq \frac{L_1r_{1J}+\alpha s_J}{m}\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|_V ds+\frac{\beta}{m}\|u_1(t)-u_2(t)\|_V. \end{aligned}$$

结合 $m>\beta$、 Λ 满足定义 2.2 且具有 $l_K=\frac{\beta}{m}$ 和 $L_K=\frac{L_1r_{1J}+\alpha s_J}{m}$ 这一条件。因此，根据引理 ~~2.3,~~ Λ 有唯一的不动点 $\eta^*\in C(I;\ K_V)$，使得 $\Lambda\eta^*=\eta^*$。

步骤 3. 步骤 1 给出了引理 2.1 的条件。步骤 2 表明 Λ 有唯一的不动点。因此，根据引理 2.1，我们知道 $\mathcal{P}\cap Gr(M)$ 是单元素集。因此，可以

得出结论：存在唯一的 η^* 满足 $(\eta^*,\ M\eta^*) \in \mathcal{P}$，因此 η^* 是 (3.1) 的解，且该解唯一。定理 3.1 的证明至此结束。□

接下来，我们考虑如下另一个子问题。

问题 3.2. 给定 $\xi \in H^1(I;\ Y_1) \cap L^2(I;Y)$，求 $\eta_\xi\colon\ I \to K_V$, $w_\xi\colon\ I \times \Omega\ \to \mathbb{R}$，使得对所有 $t \in I$，以下关系成立：

$$\frac{\partial w_\xi(t,x)}{\partial t} - \Delta w_\xi(t,x) = \varphi(\eta_\xi(t),\xi(t)), \tag{3.14}$$
$$\frac{\partial w_\xi(t,x)}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} + b w_\xi(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$w_\xi(0,x) = w_0(x),$$
$$\langle A(\mathcal{R}(\eta_\xi(t),\xi(t)),\eta_\xi(t)), v-\eta_\xi(t)\rangle_V + j(\mathcal{S}\eta_\xi(t),\eta_\xi(t),w_\xi(t,x),v)$$
$$-j(\mathcal{S}\eta_\xi(t),\eta_\xi(t),w_\xi(t,x),\eta_\xi(t)) \geq \langle f(t), v-\eta_\xi(t)\rangle_V \text{ for all } v \in K_V. \tag{3.15}$$

定理 3.2. 设 $w_0(x) \in C(\Omega)$ 且 $m > \beta + T(L_1 r_{1J} + \alpha s_J) + \gamma c L_\varphi$。假设 H($\varphi$) 以及定理 3.1 的所有假设均成立。那么，对于任意给定的 $\xi \in H^1(I;\ Y_1) \cap L^2(I;\ Y)$，问题 3.2 有唯一解 $(w_\xi, \eta_\xi) \in C(I;\ C(\Omega)) \times C(I;K_V)$。

证明。对于任意给定的 $\xi \in H^1(I;\ Y_1) \cap L^2(I;\ Y)$，为求解问题 3.2，我们定义 $\Theta\colon\ C(I;\ K_V) \to C(I;\ K_V)$，使得 $\Theta\eta_\xi(t) = \eta_{w_{\xi\eta}}(t)$，其中 $\eta_{w_{\xi\eta}}$ 是满足 $w = w_{\xi\eta}$ 的问题 3.1 的解，而 $w_{\xi\eta}$ 是方程 (3.14) 的解。现在，我们将按照以下步骤证明这一点。

步骤 1. 我们证明方程 (3.14) 的唯一可解性。

对于任意 $\eta_\xi \in C(I;K_V)$，令 $\bar{\varphi}(t) = \varphi(\eta_\xi(t)\ \xi(t))$。利用 H($\varphi$)(a)，可得对所有$t \in I$

$$\begin{aligned} |\bar{\varphi}(t)|^2 &= |\varphi(\eta_\xi(t),\xi(t)) - \varphi(0_V,0_Y) + \varphi(0_V,0_Y)|^2 \\ &\leq 2|\varphi(\eta_\xi(t),\xi(t)) - \varphi(0_V,0_Y)|^2 + 2\varphi(0_V,0_Y)^2 \\ &\leq 2L_\varphi^2\|\eta_\xi(t)\|_V^2 + 2L_\varphi^2\|\xi(t)\|_{Y_1}^2 + 2\varphi(0_V,0_Y)^2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

利用 H(φ)(b)，由 (3.16) 可得

$$\begin{aligned} &\|\bar{\varphi}(t)\|_{L^2(I)}^2 \\ =\ &\int_0^T |\varphi(\eta_\xi(t),\xi(t))|^2 dt \\ \leq\ &2L_\varphi^2 T\|\eta_\xi(t)\|_C^2 + 2L_\varphi^2\|\xi(t)\|_{L^2(I;Y)}^2 + 2T\varphi(0_V,0_Y)^2, \end{aligned}$$

其中 $\|\eta_\xi(t)\|_C = \sup\ \|\eta_\xi(t)\|_V$是 $C(I;V)$ 的范数。因此 $\bar{\varphi}(t) \in L^2(I)$。此外，由于$_{t\in I}\varphi$ 与 x 无关，我们可以证明 $\varphi \in L^a(\Omega)$，且 a 是任意的正规数。因此，取 $a_1 = 2$ 和 $b_1 = a$，即可满足引理 2.6 的条件。于是，存在一个唯一的 $w_{\xi\eta}$，它可以解 (3.14)。

步骤 2. 我们将证明问题 3.2 有唯一解。

事实上，定理 3.1 的证明表明 Θ 定义良好。为证明问题 3.2 的唯一可解性，我们只需证明算子 Θ的不动点存在。为方便起见，令 $w_1 = w_{\xi\eta_1}$, $w_2 = w_{\xi\eta_2}$ 表示对应于 η_1

和 η_2 的唯一解，其中我们省略了 ξ。假设集合 $J \subset I$ 是紧致的，则由 (3.15) 可得两个不等式：对于任意 $t \in J$,

$$\begin{aligned}&\langle A(\mathcal{R}(\eta_{w_1}(t),\xi(t)),\eta_{w_1}(t)),v-\eta_{w_1}(t)\rangle_V + j(\mathcal{S}\eta_{w_1}(t),\eta_{w_1}(t),w_1(t,x),v)\\&\quad -j(\mathcal{S}\eta_{w_1}(t),\eta_{w_1}(t),w_1(t,x),\eta_{w_1}(t)) \geq \langle f(t),v-\eta_{w_1}(t)\rangle_V \text{ for all } v\in K_V \quad (3.17)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\langle A(\mathcal{R}(\eta_{w_2}(t),\xi(t)),\eta_{w_2}(t)),v-\eta_{w_2}(t)\rangle_V + j(\mathcal{S}\eta_{w_2}(t),\eta_{w_2}(t),w_2(t,x),v)\\&\quad -j(\mathcal{S}\eta_{w_2}(t),\eta_{w_2}(t),w_2(t,x),\eta_{w_2}(t)) \geq \langle f(t),v-\eta_{w_2}(t)\rangle_V \text{ for all } v\in K_V. \quad (3.18)\end{aligned}$$

令 $v=\eta_{w_2}$ 属于 (3.17)， $v=\eta_{w_1}$ 属于 (3.18)。因此

$$\begin{aligned}&\langle A(\mathcal{R}(\eta_{w_1}(t),\xi(t)),\eta_{w_1}) - A(\mathcal{R}(\eta_{w_2}(t),\xi(t)),\eta_{w_2}),\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\rangle\\&\quad +j(\mathcal{S}\eta_{w_1}(t),\eta_{w_1}(t),w_1(t,x),\eta_{w_1}(t)) - j(\mathcal{S}\eta_{w_1}(t),\eta_{w_1}(t),w_1(t,x),\eta_{w_2}(t))\\&\quad +j(\mathcal{S}\eta_{w_2}(t),\eta_{w_2}(t),w_2(t,x),\eta_{w_2}(t)) - j(\mathcal{S}\eta_{w_2}(t),\eta_{w_2}(t),w_2(t,x),\eta_{w_1}(t)) \leq 0. \quad (3.19)\end{aligned}$$

根据内积的性质，结合 H(A)(b) 和 H($\mathcal{R}$)，可得

$$\begin{aligned}&\langle A(\mathcal{R}(\eta_{w_1}(t),\xi(t)),\eta_{w_1}) - A(\mathcal{R}(\eta_{w_2}(t),\xi(t)),\eta_{w_2}),\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\rangle\\=\;&\langle A(\mathcal{R}(\eta_{w_1}(t),\xi(t)),\eta_{w_1}) - A(\mathcal{R}(\eta_{w_1}(t),\xi(t)),\eta_{w_2}),\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\rangle\\&+\langle A(\mathcal{R}(\eta_{w_1}(t),\xi(t)),\eta_{w_2}) - A(\mathcal{R}(\eta_{w_2}(t),\xi(t)),\eta_{w_2}),\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\rangle\\\geq\;& m\|\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\|_V^2 - L_1\|\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\|_V\|\mathcal{R}(\eta_{w_1}(t),\xi(t))-\mathcal{R}(\eta_{w_2}(t),\xi(t))\|_X\\\geq\;& m\|\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\|_V^2 - L_1r_{1J}\|\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\|_V\int_0^t\|\eta_{w_1}(s)-\eta_{w_2}(s)\|_V ds. \quad (3.20)\end{aligned}$$

利用 (3.20) 和 H(j)(b)，由 (3.19) 可得

$$\begin{aligned}&m\|\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\|_V - L_1r_{1J}\int_0^t\|\eta_{w_1}(s)-\eta_{w_2}(s)\|_V ds\\\leq\;&\alpha\|\mathcal{S}\eta_{w_1}(t)-\mathcal{S}\eta_{w_2}(t)\|_{L^2}+\beta\|\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\|_V+\gamma|w_1(t,x)-w_2(t,x)|.\end{aligned}$$

结合 H($\mathcal{S}$)，我们得出

$$\begin{aligned}&\|\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\|_V\\\leq\;&\frac{L_1r_{1J}+\alpha s_J}{m-\beta}\int_0^t\|\eta_{w_1}(s)-\eta_{w_2}(s)\|_V ds+\frac{\gamma}{m-\beta}|w_1(t,x)-w_2(t,x)|. \quad (3.21)\end{aligned}$$

利用引理 2.5 可得

$$\|w_1-w_2\|_{L^\infty([0,T];L^\infty(\Omega))} \leq c\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^{a_1}([0,T];L^{b_1}(\Omega))} \leq c\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^\infty([0,T];L^\infty(\Omega))}, \quad (3.22)$$

其中 c 取决于 T, N, Ω a 和方程 (3.14) 的方程系数。

由于 φ 是连续的，根据（3.22）中的 H(φ)，我们有

$$|w_1(t,x)-w_2(t,x)| \leq cL_\varphi \sup_{t\in I}\|\eta_1(t)-\eta_2(t)\|_V = cL_\varphi\|\eta_1-\eta_2\|_C. \quad (3.23)$$

接下来，利用（3.21）中的（3.23），我们有

$$\begin{aligned} & \|\eta_{w_1}(t)-\eta_{w_2}(t)\|_V \\ \leq\ & \frac{L_1 r_{1J}+\alpha s_J}{m-\beta}\int_0^t \|\eta_{w_1}(s)-\eta_{w_2}(s)\|_V ds+\frac{\gamma c L_\varphi}{m-\beta}\|\eta_1-\eta_2\|_C. \end{aligned} \tag{3.24}$$

对不等式两边同时取上确界，由(3.24)以及 Θ的定义可得

$$\begin{aligned} \|\Theta\eta_1-\Theta\eta_2\|_C &= \|\eta_{w_1}-\eta_{w_2}\|_C \\ &\leq \frac{L_1 r_{1J}+\alpha s_J}{m-\beta}T\|\eta_{w_1}-\eta_{w_2}\|_C+\frac{\gamma c L_\varphi}{m-\beta}\|\eta_1-\eta_2\|_C. \end{aligned} \tag{3.25}$$

这意味着

$$\|\Theta\eta_1-\Theta\eta_2\|_C \leq L\|\eta_1-\eta_2\|_C,$$

其中 $L=\frac{\gamma c L_\varphi}{m-\beta-T(L_1 r_{1J}+\alpha s_J)}<1$。利用巴拿赫不动点定理，可以得到算子 Θ 在 $C(I;K_V)$中有唯一不动点。即定理 3.2 的证明完毕。□

最后，回到问题(1.1)-(1.5)的证明。为此，我们给出抛物型变分不等式(1.3)的相关结果。

引理3.1。 *[38, p.17]* 假设 $p\in L^2(I;\ Y_1)$ 和H(g) 成立。则存在唯一的 $\xi\in H^1(I;\ Y_1)\cap L^2(I;\ Y)$ 满足

$$\langle\dot{\xi}(t),\delta-\xi(t)\rangle_{Y_1}+g(\xi,\delta-\xi)\geq\langle p(t),\delta-\xi(t)\rangle_{Y_1}\text{for all }\delta\in K_Y, \tag{3.26}$$

且 $\xi(0)=\xi_0\in K_Y$。此外，对于 $p=p_i\in L^2(I;\ Y_1)\quad i=1,\ 2$，则可得到(3.26)的解 ξ_i，并且

$$\|\xi_1(t)-\xi_2(t)\|_{Y_1}^2\leq d_1\int_0^t\|p_1(s)-p_2(s)\|_{Y_1}^2 ds\ \text{for a.e. } t\in(0,T),$$

其中 $d_1>0$ 为常数。

现在我们将给出问题(1.1)-(1.5)的证明。为方便起见，记$\beta+T(L_1 r_{1J}+\alpha s_J)+\gamma c L_\varphi+(L_1 r_{2J}T+\gamma c L_\varphi)\sqrt{d_1}L_\phi T$为 m_0。

定理 3.3。 假设 H(A)、H(j)、H($\mathcal{R}$)、H($\mathcal{S}$)、H(f)、H(ϕ)、H(g) 和 H(φ) 均成立。设 $m>m_0$。则问题(1.1)-(1.5)具有唯一解 $(\xi,\ \eta,\ w)\in H^1(I;\ Y_1)\cap L^2(I;\ Y)\times C(I;\ K_V)\times C(I;C(\Omega))$。

证明。首先，我们给出不等式 (1.3) 的唯一可解性。对于任意给定的 $\kappa\in C(I;\ K_V)$，根据引理 3.2，我们只需证明 $\phi\in L^2(I;Y_1)$。令 $\bar{\phi}(t)=\phi(t,\ \kappa(t))$。利用 H($\phi$)(a)，我们得到对所有 $t\in I$

$$\begin{aligned} \|\bar{\phi}(t)\|_{Y_1}^2 &= \|\phi(t,\kappa(t))-\phi(t,0_V)+\phi(t,0_V)\|_{Y_1}^2 \\ &\leq 2\|\phi(t,\kappa(t))-\phi(t,0_V)\|_{Y_1}^2+2\|\phi(t,0_V)\|_{Y_1}^2 \\ &\leq 2(L_\phi\|\kappa(t)\|_V)^2+2\|\phi(t,0_V)\|_{Y_1}^2 \\ &\leq 2L_\phi^2\|\kappa(t)\|_V^2+2\|\phi(t,0_V)\|_{Y_1}^2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

利用 H(ϕ)(b)，由 (3.27) 可得

$$\|\bar{\phi}(t)\|^2_{L^2(I;Y_1)} = \int_0^T \|\phi(t,\kappa(t))\|^2_{Y_1} dt \le 2L^2_\phi T\|\kappa(t)\|^2_C + 2\|\phi(t,0_V)\|^2_{L^2(I;Y_1)}.$$

所以 $\bar{\phi}(t) \in L^2(I;Y_1)$。

为求解问题 3.1，我们定义 Π: $C(I;\ K_V) \to C(I;\ K_V)$，使得 $\Pi\kappa(t) = \eta_{\xi_\kappa,w_{\xi\kappa}}(t)$，其中 ξ_κ 是满足 $\eta = \kappa$的抛物型变分不等式(1.3)的解，$w_{\xi\kappa}$ 是满足 $\eta = \kappa$ 和 $\xi = \xi_\kappa$的抛物型方程(1.1)的解，而 $\eta_{\xi_\kappa,w_{\xi\kappa}}$ 是拟变分不等式(1.2)的解。定理 3.1 和定理 3.2 的证明表明 Π 是良定义的。为证明问题(1.1)-(1.5)的唯一可解性，我们只需证明算子 Π的不动点存在。假设 $\xi_1 = \xi_{\kappa_1}, \xi_2 = \xi_{\kappa_2}$ 和 $w_1 = w_{\xi_1\kappa_1}$, $w_2 = w_{\xi_2\kappa_2}$分别表示与 κ_1 和 κ_2 相对应的(1.3)和(1.1)的唯一解；此外，假设 $\eta_1 = \eta_{\xi_1,w_1}$ 和 $\eta_2 = \eta_{\xi_2,w_2}$ 分别表示与 κ_1 和 κ_2 相对应的(1.2)的唯一解。假设集合 $J \subset I$ 是紧致的，类似于算子 Θ，可直接推出：对所有 $t \in J$,

$$\begin{aligned} & m\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V - L_1(r_{1J}\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V ds + r_{2J}\int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_{Y_1} ds) \\ \le\ & \alpha\|\mathcal{S}\eta_1(t) - \mathcal{S}\eta_2(t)\|_Z + \beta\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V + \gamma|w_1(t,x) - w_2(t,x)|. \end{aligned} \tag{3.28}$$

考虑到 H($\mathcal{S}$) 成立，由 (3.28) 可推得

$$\begin{aligned} & \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V \\ \le\ & \frac{L_1 r_{1J} + s_J}{m-\beta}\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V ds + \frac{L_1 r_{2J}}{m-\beta}\int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_{Y_1} ds \\ & + \frac{\gamma}{m-\beta}|w_1(t,x) - w_2(t,x)|. \end{aligned} \tag{3.29}$$

利用引理 3.2，考虑到 H(ϕ) 成立，我们可推得

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|^2_{Y_1} \le d_1 L_\phi \int_0^t \|\kappa_1(s) - \kappa_2(s)\|^2_V ds. \tag{3.30}$$

类似于 (3.23)，由 H(φ) 可从 (3.22) 得到

$$|w_1(t,x) - w_2(t,x)| \le cL_\varphi \sup_{t\in I}(\|\kappa_1(t) - \kappa_2(t)\|_V + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_{Y_1}). \tag{3.31}$$

利用 (3.30) 和 (3.31)，由 (3.29) 可得

$$\begin{aligned} & \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V \\ \le\ & \frac{L_1 r_{1J} + s_J}{m-\beta}\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V ds + \frac{L_1 r_{2J}}{m-\beta}\int_0^t (d_1 L_\phi \int_0^s \|\kappa_1(\tau) - \kappa_2(\tau)\|^2_V d\tau)^{\frac{1}{2}} ds \\ & + \frac{\gamma}{m-\beta} cL_\varphi \sup_{t\in I}(\|\kappa_1(t) - \kappa_2(t)\|_V + (d_1 L_\phi \int_0^t \|\kappa_1(s) - \kappa_2(s)\|^2_V ds)^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \tag{3.32}$$

接下来，对不等式两边同时取上确界，由（3.32）可得

$$\|\Pi\kappa_1 - \Pi\kappa_2\|_C = \|\eta_1 - \eta_2\|_C \le L\|\kappa_1 - \kappa_2\|_C,$$

其中 $L = \frac{\gamma cL_\varphi + (\ L_1 r_{2J} T + \gamma cL_\varphi \sqrt{d_1 L_\phi T})()}{m-\beta-T\ L_1 r_{1J}+s_J}$。利用巴拿赫不动点定理可知，算子 Π 在 $C(I;K_V)$ 中有唯一的不动点。定理 3.3 的证明至此完成。□

注 3.1. 大多数偏微分变分不等式中的偏微分方程都是借助半群理论求解的。例如，*Liu* 等人在 *[3]* 中运用半群理论和集值映射的不动点定理，证明了一类偏微分混合变分不等式解的存在性；*Liu* 等人在 *[10]*中应用半群理论和集值映射的不动点定理，证明了一类偏微分 *hemivariational* 不等式解的存在性；*Li* 等人 *[13]* 结合算子半群理论与集值映射的不动点定理，证明了一类偏微分集值变分不等式的唯一可解性。与此相反，本文利用抛物型偏微分方程解估计的性质以及索伯列夫空间中的巴拿赫不动点定理，证明了该系统的唯一可解性。

4 摩擦接触问题的应用

本节通过应用上一节的结果，研究黏弹性材料的摩擦接触问题。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ 中一个具有光滑边界 Γ 的有界开区域。$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$边界 Γ 分为 Γ_1、Γ_2 和 Γ_3，其中 Γ_1、Γ_2 和 Γ_3 两两不相交。此外，假设 Γ_1 满足 $meas(\Gamma_1) > 0$。向量和张量用黑体字母表示。例如，Γ 上的外单位法向量记作 $\boldsymbol{\nu}$，而 $\mathbb{R}^d$ 中的一点表示为 $\boldsymbol{x} = (x_i)$。时间区间记作 I，可以是 $[0,T]$ 或$\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$，其中 $T > 0$。此外，时间变量的导数用该字母上方的点表示，例如 $\dot{u}$。我们将 $\mathbb{S}^d$ 定义为 $\mathbb{R}^d$上的二阶对称张量空间，它等价于 d阶对称矩阵空间。注意，$\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{S}^d$ 上的标准内积及其相应范数定义如下

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \Sigma u_i v_i, \|\boldsymbol{u}\| = \langle u,u\rangle^{1/2} \text{ for all } \boldsymbol{u} = (u_i), \boldsymbol{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^d,$$
$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} = \Sigma\sigma_i\tau_i, \|\boldsymbol{\sigma}\| = \langle\sigma,\sigma\rangle^{1/2} \text{ for all } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}), \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d.$$

位移向量、应力张量和线性化应变张量分别记为 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$（$\boldsymbol{u}$）。线性化应变张量表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_{i,j} + \boldsymbol{u}_{j,i}),$$

其中 $\boldsymbol{u}_{i,\ j} = \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{x}_j}$。尽管这些函数取决于空间变量和时间变量，但在下文中我们不明确表示这一点，即 $\boldsymbol{\sigma}$ 代替 $\boldsymbol{\sigma}$（$\boldsymbol{x}$）或 $\boldsymbol{\sigma}$（$\boldsymbol{x}$，t）。

我们研究一个位于上述 Ω 上的可变形物体。物体整个内部在 Ω 内受到密度为 $\boldsymbol{f}_0(t)$ 的体力，并在 Γ_2 上受到密度为 $\boldsymbol{f}_2(t)$ 的表面牵引力。物体固定在 Γ_1 上，并与一个完全刚体接触，该刚体在边界 Γ_3 处覆盖着厚度为 g 的可穿透软材料。随着时间推移，这层软材料会因摩擦而磨损。下文将提供有关接触摩擦的更详细说明。

现在，我们给出以下接触问题的数学表述。

问题 4.1。求位移场 $\boldsymbol{u}$: $\Omega \times I \to \mathbb{R}^d$、应力场 $\boldsymbol{\sigma}$: $\Omega \times I \to \mathbb{S}^d$、损伤场 ξ: $\Omega \times I \to [0,1]$ 以及磨损函数 w: $\Gamma_3 \times I \to \mathbb{R}$，使得

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{C}(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{u}(s)), \xi(s))ds \text{ in } \Omega, \tag{4.1}$$

$$\dot{\xi} - \kappa\Delta\xi + \partial I_{[0,1]}(\xi) \ni \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))) \text{ in } \Omega, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 \text{ on } \Gamma, \tag{4.3}$$

$$Div\boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \boldsymbol{0} \text{ in } \Omega, \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma_1, \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \text{ on } \Gamma_2, \tag{4.6}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\nu(t) = p(u_\nu(t) - g) \text{ on } \Gamma_3, \tag{4.7}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| \le \mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|, w(\boldsymbol{x},t))|\sigma_\nu(t)| \text{ on } \Gamma_3, \tag{4.8}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|, w(\boldsymbol{x},t))|\sigma_\nu(t)|\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|} \text{ on } \Gamma_3, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial w(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} - \Delta w(\boldsymbol{x},t) = \varphi(\dot{u}(t), \xi(\boldsymbol{x},t)) \text{ on } \Gamma_3, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial w(\boldsymbol{x},t)}{\partial \nu} + bw(\boldsymbol{x},t) = 0 \text{ on } \partial\Gamma_3, \tag{4.11}$$

$$w(\boldsymbol{x},0) = w_0(\boldsymbol{x}), \xi(0) = \xi_0 \in (0,1) \text{ on } \Gamma_3, \tag{4.12}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = u_0 \text{ on } \Omega, \tag{4.13}$$

对每个 $t \in I$。

(4.1) 描述黏弹性本构关系，其中 $\mathcal{A}$ 表示黏度算子， $\mathcal{B}$ 表示弹性算子， $\mathcal{C}$ 表示松弛张量， $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示变形算子。(4.2) 描述损伤函数 ξ （详情参见 [27]），其中 $\kappa > 0$, $\partial I_{[0,1]}$ 表示 $I_{[0,1]}$ 的凸次微分， ϕ 表示取决于 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的损伤源项。具体而言，损伤函数可指定为

$$\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}})) = \lambda_w - \frac{1}{2}\lambda_E\|\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}})\|^2,$$

其中 $\lambda_E \ and \ \lambda_w$ 为正的常数（参见 [21, 22]）。(4.3)是 ξ 在Σ上的诺伊曼条件。(4.4)是不含惯性项的平衡方程。(4.5)-(4.6)分别表示 Γ_1 上的零位移和 Γ_2 上的牵引条件。(4.7)-(4.9)分别描述具有法向顺应和库仑干摩擦定律的接触，其中 σ_ν表示法向应力， $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ 表示切向牵引力， $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau$ 表示速度场的切向分量。此外，间隙函数记为 g，法向顺应函数记为 p，摩擦系数记为 μ ，它们取决于速度场和磨损。(4.10)描述磨损过程，并考虑损伤响应（详情参见 [20]）；Δ 是拉普拉斯算子 Γ_3， φ 表示双线性泛函。该方程是带有边界条件(4.11)的阿查德定律的扩展形式。最后，(4.12)-(4.13)分别表示 w、 ξ 和 $\boldsymbol{u}$ 的初始条件。

为获得上述问题的相关变分公式，函数的索伯列夫空间记为 $W^{k,\ p}(\Omega;\ \mathbb{R}^d)$，其分量的弱导数函数直至 $k-th$ 阶均在 Ω 上 $p-th$ 可积。此外，令 $H^k = W^{k,\ 2}(\Omega;\ \mathbb{R}^d)$、 $H = L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d)$和

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d) | \boldsymbol{v} = 0 \text{ on } \Gamma_1\},\ Q = \{\boldsymbol{q} = (q_{ij}) | \boldsymbol{q}(x) \in \mathbb{S}^d \text{ and } q_{ij} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)\}$$

它们分别具有如下内积

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle_V = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_2) d\Omega,\ \langle \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \rangle_Q = \int_\Omega \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2 d\Omega.$$

此外，范数分别记为 $\|\cdot\|_V$和 $\|\cdot\|_Q$，变形算子$\boldsymbol{\varepsilon}$: $H^1(\Omega;\ \mathbb{R}^d) \to Q$ 由上述线性化应变张量的定义给出。由于 $meas(\Gamma_1) > 0$，利用 Korn不等式可得以下关系，

$$\|\boldsymbol{u}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\|_Q \text{ for all } \boldsymbol{u} \in V. \tag{4.14}$$

对于每个元素 $\boldsymbol{u} \in V$，法向和切向部分定义如下

$$u_\nu = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

由于 $u_\nu \in L^2(\Gamma)$、 $\boldsymbol{u}_\tau \in L^2(\Gamma;\mathbb{R}^d)$ 且迹是连续的，可以推导出

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^d)} \leq \|\rho\| \|\boldsymbol{u}\|_V,$$

其中 ρ: $V \to L^2(\Gamma_3;\ \mathbb{R}^d)$ 是迹算子。

此外，设 $Y = H^1(\Omega;\mathbb{R})$ 和 $Y_1 = L^2(\Omega;\ \mathbb{R})$，这两个空间中的内积定义如下

$$\langle a, b \rangle_{Y_1} = \int_\Omega a \cdot b\ d\Omega,\ \langle c, d \rangle_Y = \langle c, d \rangle_{Y_1} + \int_\Omega \nabla c \cdot \nabla d\ d\Omega.$$

此外，令 $K_V = \{u \in V \mid u_\nu \leq g \text{ 几乎处处在 } \Gamma_3\}$ 上，且 $K_Y = \{\xi \in Y \mid 0 \leq \xi \leq 1 \text{ 几乎处处在 } \Omega\}$.

接下来，我们开始推导上述问题的变分公式。假设$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, ξ 和 w 足够光滑，且满足(4.1)-(4.13)。接下来，我们将使用以下格林公式

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) dx + \int_\Omega Div\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} dx = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{v} d\Gamma \text{ for all } \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d).$$

由于 Γ的性质，结合格林公式，由等式 (4.4)和 (4.6)可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))) dx = &\int_\Omega f_0(t) \cdot (\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)) dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t) \cdot (\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)) d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)) d\Gamma \text{ for all } v \in V. \end{aligned} \tag{4.15}$$

接下来，利用（4.5）和内积的结论，可得以下恒等式

$$\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{a.e. on } \Gamma_1,$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}})=\sigma_\nu(v_\nu-\dot{u}_\nu)+\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau)\qquad\text{a.e. on }\Gamma_3.$$

利用这些恒等式，可将（4.15）转化为

$$\begin{aligned}\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)))dx=&\int_\Omega\boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}(t))dx+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{f}_2(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}(t))d\Gamma\\&+\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu\cdot(v_\nu-\dot{u}_\nu(t))d\Gamma+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t))d\Gamma\text{ for all }v\in V.\end{aligned}\tag{4.16}$$

对于 $\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t))d\Gamma$，利用 (4.8) 和 (4.9) 可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t))\\=\;&-\mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|,w(\boldsymbol{x},t))|\sigma_\nu|\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|}\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t))\\=\;&-\mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|,w(\boldsymbol{x},t))|\sigma_\nu|\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|}\cdot\boldsymbol{v}_\tau+\mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|,w(\boldsymbol{x},t))|\sigma_\nu|\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\\=\;&-\mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|,w(\boldsymbol{x},t))|\sigma_\nu|\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|}\cdot\boldsymbol{v}_\tau+\mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|,w(\boldsymbol{x},t))|\sigma_\nu|\cdot\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|\\=\;&\mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|,w(\boldsymbol{x},t))|\sigma_\nu|\cdot(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|-\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\cdot\boldsymbol{v}_\tau}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|})\\\geq\;&\mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|,w(\boldsymbol{x},t))|\sigma_\nu|\cdot(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|-\|\boldsymbol{v}_\tau\|).\end{aligned}\tag{4.17}$$

利用 (4.1) 和 (4.7)，由 (4.16) 和 (4.17) 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)))dx+\int_\Omega\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)))dx\\&\quad+\int_\Omega\int_0^t\mathcal{C}(t-s,\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{u}(s)),\xi(s))ds\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)))dx\\&\quad+\int_{\Gamma_3}p(u_\nu(t)-g)(v_\nu-\dot{u}_\nu(t))d\Gamma\\&\quad+\int_{\Gamma_3}\mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|,w(\boldsymbol{x},t))p(u_\nu(t)-g)(\|\boldsymbol{v}_\tau\|-\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|)d\Gamma\\\geq\;&\int_\Omega\boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}(t))dx+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{f}_2(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}(t))d\Gamma\text{ for all }v\in V.\end{aligned}\tag{4.18}$$

为方便起见，将速度场 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 记为 $\boldsymbol{\eta}$。结合初始条件，可得

$$\boldsymbol{u}(t)=\mathcal{I}\boldsymbol{\eta}(t)=\int_0^t\boldsymbol{\eta}(s)ds+\boldsymbol{u}_0\text{ for all }t\in I,$$

其中，$\mathcal{I}\colon C(I;V)\to\mathbb{R}_+$ 是积分算子。采用上述记号，变分形式 (4.18) 导出原问题的如下变分形式。

问题4.2. 求 $\boldsymbol{\eta}\colon I\to V$, $\xi\colon I\to K_Y$，使其对每个 $t\in I$ 都满足

$$\int_\Omega\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t))\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t)))dx+\int_\Omega\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{I}\boldsymbol{\eta}(t))\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t)))dx$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_\Omega\int_0^t \mathcal{C}(t-s,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(s)),\xi(s))ds\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t)))dx\\
&+\int_{\Gamma_3} p((\mathcal{I}\eta)_\nu(t)-g)(v_\nu-\eta_\nu(t))d\Gamma\\
&+\int_{\Gamma_3}\mu(\|\boldsymbol{\eta}_\tau(t)\|,w(\boldsymbol{x},t))p((\mathcal{I}\eta)_\nu(t)-g)(\|\boldsymbol{v}_\tau\|-\|\boldsymbol{\eta}_\tau(t)\|)d\Gamma\\
\geq\ &\int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\eta}(t))dx+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{f}_2(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\eta}(t))d\Gamma \text{ for all } v\in V. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

为得到问题 4.1 的变分公式，接下来我们将对（4.2）进行变换。根据凸次微分的性质，由（4.2）可得

$$
\langle\phi(t,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t)))-\dot{\xi}(t)+\kappa\Delta\xi,\delta-\xi(t)\rangle_{Y_1}\leq I(\delta)-I(\xi)=0,\ \forall\delta\in K_Y. \qquad (4.20)
$$

结合下列分部积分公式

$$
\int_\Omega(-\Delta u)vd\Omega=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla vd\Omega
$$

以及由 β 表示的双线性泛函的定义

$$
g(\delta,\xi)=\kappa\int_\Omega\nabla\delta\cdot\nabla\xi d\Omega, \qquad (4.21)
$$

由 (4.20) 可得

$$
\langle\dot{\xi(t)},\delta-\xi(t)\rangle_{Y_1}+g(\xi,\delta-\xi)\geq\langle\phi(t,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t))),\delta-\xi(t)\rangle_{Y_1},\ \forall\delta\in K_Y. \qquad (4.22)
$$

现在我们已得到了问题 4.1 的所有变分公式。为方便起见，我们将这些公式汇总在一起，并将其记为以下问题。

问题 4.3。求 $\boldsymbol{\eta}$：$I\to V$、ξ：$I\to K_Y$ 和 w：$\Gamma_3\times I\to L^2(\Gamma_3;\ \mathbb{R})$，使其对每个 $t\in I$ 都满足以下关系

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t))\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t)))dx+\int_\Omega\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{I}\boldsymbol{\eta}(t))\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t)))dx\\
&+\int_\Omega\int_0^t\mathcal{C}(t-s,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(s)),\xi(s))ds\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t)))dx\\
&+\int_{\Gamma_3}p((\mathcal{I}\eta)_\nu(t)-g)(v_\nu-\eta_\nu(t))d\Gamma\\
&+\int_{\Gamma_3}\mu(\|\boldsymbol{\eta}_\tau(t)\|,w(\boldsymbol{x},t))p((\mathcal{I}\eta)_\nu(t)-g)(\|\boldsymbol{v}_\tau\|-\|\boldsymbol{\eta}_\tau(t)\|)d\Gamma\\
\geq\ &\int_\Omega\boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\eta}(t))dx+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{f}_2(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\eta}(t))d\Gamma \text{ for all } v\in V. \qquad (4.23)\\
&\langle\dot{\xi(t)},\delta-\xi(t)\rangle_{Y_1}+g(\xi,\delta-\xi)\geq\langle\phi(t,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t))),\delta-\xi(t)\rangle_{Y_1},\ \forall\delta\in K_Y,\\
&\frac{\partial w(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}-\Delta w(\boldsymbol{x},t)=\varphi(\boldsymbol{\eta}(t),\xi(\boldsymbol{x},t))\text{ on }\Gamma_3,
\end{aligned}
$$

$$w(\boldsymbol{x},0)=w_0(\boldsymbol{x}),\xi(0)=\xi_0\in(0,1).$$

为了获得 为证明问题 4.3 的可解性，我们提出以下假设。

$$\mathrm{H}(\mathcal{A}):\begin{cases}\mathcal{A}\colon \Omega\times\mathbb{S}^d\to\mathbb{S}^d \text{ satisfies}\\ \text{(a) there exists } L_{\mathcal{A}}>0 \text{ satisfying}\\ \qquad\qquad \|\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_1)-\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_2)\|\le L_{\mathcal{A}}\|\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2\|\\ \quad \text{for all } \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\in\mathbb{S}^d,\ \text{a.e. } \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \text{(b) there exists } m_{\mathcal{A}}>0 \text{ satisfying}\\ \qquad\qquad (\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_1)-\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_2))\cdot(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2)\ge m_{\mathcal{A}}\|\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2\|^2\\ \quad \text{for all } \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\in\mathbb{S}^d,\ \text{a.e. } \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \text{(c) } \mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) \text{ is measurable on } \Omega, \text{ for any } \boldsymbol{b}\in\mathbb{S}^d,\\ \text{(d) } \mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) \text{ belongs to } Q.\end{cases}$$

$$\mathrm{H}(\mathcal{B}):\begin{cases}\mathcal{B}\colon \Omega\times\mathbb{S}^d\to\mathbb{S}^d \text{ satisfies}\\ \text{(a) there exists } L_{\mathcal{B}}>0 \text{ satisfying}\\ \qquad\qquad \|\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_1)-\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_2)\|\le L_{\mathcal{B}}\|\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2\|\\ \quad \text{for all } \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\in\mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \text{(b) } \mathcal{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) \text{ is measurable on } \Omega, \text{ for any } \boldsymbol{b}\in\mathbb{S}^d,\\ \text{(c) } \mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) \text{ belongs to } Q.\end{cases}$$

$$\mathrm{H}(\mathcal{C}):\begin{cases}\mathcal{C}\colon \Omega\times I\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}\to\mathbb{S}^d \text{ satisfies}\\ \text{(a) there exists } L_{\mathcal{C}}>0 \text{ satisfying}\\ \qquad \|\mathcal{C}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{c}_1,d_1)-C(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{c}_2,d_2)\|\le L_{\mathcal{C}}(\|\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{c}_2\|+|d_1-d_2|)\\ \quad \text{for all } \boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\in\mathbb{S}^d,\ d_1,d_2\in\mathbb{R},\ t\in I, \text{ a.e. } \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \text{(b) } \mathcal{C}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{c},d) \text{ is measurable on } \Omega, \text{ for any } t\in I,\boldsymbol{c}\in\mathbb{S}^d,d\in\mathbb{R},\\ \text{(c) } \mathcal{C}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{0},d) \text{ belongs to } Q.\end{cases}$$

$$\mathrm{H}(p):\begin{cases}p\colon \Gamma_3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \text{ satisfies}\\ \text{(a) there exists } L_p>0 \text{ satisfying}\\ \qquad\qquad |p(\boldsymbol{x},b_1)-p(\boldsymbol{x},b_2)|\le L_p|b_1-b_2|\\ \quad \text{for all } b_1,b_2\in\mathbb{R}, \text{ a.e. } \boldsymbol{x}\in\Gamma_3,\\ \text{(b) there exists } p^*>0 \text{ satisfying}\\ \quad p(\boldsymbol{x},b)\le p^*\\ \quad \text{for all } b\in\mathbb{R}, \text{ a.e. } \boldsymbol{x}\in\Gamma_3,\\ \text{(c) } p(\boldsymbol{x},b) \text{ is measurable on } \Gamma_3, \text{ for any } b\in\mathbb{R},\\ \text{(d) } p(\boldsymbol{x},b)=0 \text{ for all } b\le 0, \text{ a.e. } \boldsymbol{x}\in\Gamma_3.\end{cases}$$

$\mathrm{H}(g')$: $g\in L^2(\Gamma_3)$ and $g(\boldsymbol{x})\ge 0$ a.e. $\boldsymbol{x}\in\Gamma_3$.

$$\mathrm{H}(\mu)\colon \begin{cases} \mu\colon \Gamma_3\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \text{ satisfies}\\ \text{(a) there exists } L_\mu>0 \text{ satisfying}\\ \qquad |\mu(\boldsymbol{x},b_1,c_1)-\mu(\boldsymbol{x},b_2,c_2)|\le L_\mu(|b_1-b_2|+|c_1-c_2|)\\ \quad \text{for all } b_1,b_2\in\mathbb{R}_+,\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \text{ a.e. } x\in\Gamma_3,\\ \text{(b) there exists } \mu^*>0 \text{ satisfying}\\ \quad \mu(\boldsymbol{x},b,c)\le\mu^*\\ \quad \text{for all } b\in\mathbb{R}_+,\ c\in\mathbb{R}, \text{ a.e. } \boldsymbol{x}\in\Gamma_3,\\ \text{(c) } \mu(\boldsymbol{x},b,c) \text{ is measurable on } \Gamma_3, \text{ for any } b\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\mathrm{H}(\varphi')\colon \begin{cases} \varphi\colon \Gamma_3\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ satisfies}\\ \text{(a) there exists } L\varphi>0 \text{ satisfying}\\ \qquad |\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_1,c_1)-\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_2,c_2)|\le \bar{L}_\varphi(\|\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2\|+|c_1-c_2|)\\ \quad \text{for all } \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\in\mathbb{R}^d,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}, \text{ a.e. } \boldsymbol{x}\in\Gamma_3,\\ \text{(b) } \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b},c) \text{ is measurable on } \Gamma_3, \text{ for any } \boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^d,\ c\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\mathrm{H}(\phi')\colon \begin{cases} \phi\colon \Omega\times I\times\mathbb{S}^d\to\mathbb{R} \text{ satisfies}\\ \text{(a) there exists } \bar{L}_\phi>0 \text{ satisfying}\\ \qquad |\phi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{c}_1)-\phi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{c}_2)|\le \bar{L}_\phi\|\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{c}_2\|\\ \quad \text{for all } t\in I,\ \boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\in\mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \text{(b) } \phi(\cdot,\cdot,\mathbf{0}_{\mathbb{S}^d})\in L^2(I;L^2(\Omega;\mathbb{R})),\\ \text{(c) } \phi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{c}) \text{ is measurable on } \Omega, \text{ for any } t\in I,\ \boldsymbol{c}\in\mathbb{S}^d. \end{cases}$$

N现在，我们可以给出问题 4.3 的唯一可解性证明 .

定理4.1。 设上述假设 H(*A*)-H(ϕ')成立， $\boldsymbol{f}_2\in C(I;\ L^2(\Gamma_2;\ \mathbb{R}^d))$，且 $\boldsymbol{f}_0\in C(I;\ L^2(\Omega;\ \mathbb{R}^d))$。则上述问题 4.3 与问题(1.1)-(1.5) 具有等价关系。

证明。为方便起见，我们定义以下算子。设 $A\colon\ Q\times V\to V$， $\mathcal{R}\colon\ C(I;\ V)\times C(I;\ Y)\to C(I;\ Q)$, $\mathcal{S}\colon\ C(I;\ V)\to C(I;\ L^2(\Gamma_3))$ $\phi\colon\ I\times V\to Y_1$， $j\colon\ L^2(\Gamma_3)\times V\times\mathbb{R}\times V\to\mathbb{R}$以及 $f\colon\ I\to V$定义如下

$$\langle A(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}\rangle_V = \langle\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_Q+\langle\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_Q, \tag{4.24}$$

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{u}(t),\xi(t)) = \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{I}\boldsymbol{u}(t))+\int_0^t\mathcal{C}(t-s,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)),\xi(s))ds, \tag{4.25}$$

$$\mathcal{S}\boldsymbol{u}(t) = (\mathcal{I}\boldsymbol{u})_\nu(t)=\int_0^t u_\nu(s)ds+u_{0_\nu}, \tag{4.26}$$

$$j(z,\boldsymbol{u},w,\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3}p(z-g)v_\nu d\Gamma+\int_{\Gamma_3}\mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|,w)p(z-g)\|\boldsymbol{v}_\tau\|d\Gamma, \tag{4.27}$$

$$\langle f(t),\boldsymbol{v}\rangle_V = \int_\Omega\boldsymbol{f}_0(t)\cdot\boldsymbol{v}dx+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{f}_2(t)\cdot\boldsymbol{v}d\Gamma, \tag{4.28}$$

$$\phi(t,\ \boldsymbol{\eta}(t)) = \phi(t,\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}(t)))。 \tag{4.29}$$

因此，(4.23) 可重新表述为求解 $\eta\colon\ I\to V$，使其对每个 $t\in I$ 都满足

$$\langle A(\mathcal{R}(\boldsymbol{\eta}(t),\xi(t)),\boldsymbol{\eta}(t)),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\eta}(t)\rangle_V+j(\mathcal{S}\boldsymbol{\eta}(t),\boldsymbol{\eta}(t),w(t),\boldsymbol{v})$$

$$-j(\mathcal{S}\boldsymbol{\eta}(t),\boldsymbol{\eta}(t),w(t),\boldsymbol{\eta}(t)) \geq \langle f(t),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\eta}(t)\rangle_V \text{ for all } \boldsymbol{v}\in V. \tag{4.30}$$

注意，(4.30) 描述了一个形式为 (1.2) 的拟变分不等式，其中第 3 节的 (1)–(3) 中的 $X=Q$、V 和 K_V 在此分别等于 V 和 $Z=L^2(\Gamma_3)$。此外，前几节中的 Ω 在此等于 Γ_3。接下来，我们验证问题 4.1 中的算子满足第三节在上述定义下给出的假设。

利用 (4.24)，对于所有 $a,\ a_1,\ a_2\in Q,\ b,\ b_1,\ b_2\in V$，有

$$\langle A(a_1,b)-A(a_2,b),c\rangle_V = \langle a_1-a_2,\boldsymbol{\varepsilon}(c)\rangle_X,$$

and

$$\langle A(a,b_1)-A(a,b_2),c\rangle_V = \langle \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(b_1)-\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(b_2),\boldsymbol{\varepsilon}(c)\rangle_X.$$

分别令 $c=A(a_1,\ b)-A(a_2,\ b)$ 和 $A(a,\ b_1)-A(a,\ b_2)$，由 H($\mathcal{A}$) 可得

$$\begin{aligned}\|A(a_1,b)-A(a_2,b)\|_V^2 &= \langle a_1-a_2,\boldsymbol{\varepsilon}(A(a_1,b)-A(a_2,b))\rangle_X\\ &\leq \|a_1-a_2\|_Q\cdot\|\boldsymbol{\varepsilon}(A(a_1,b)-A(a_2,b))\|_X,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|A(a,b_1)-A(a,b_2)\|_V^2 &= \langle \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(b_1)-\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(b_2),\boldsymbol{\varepsilon}(A(a,b_1)-A(a,b_2))\rangle_X\\ &\leq L_{\mathcal{A}}\|\boldsymbol{\varepsilon}(b_1)-\boldsymbol{\varepsilon}(b_2)\|_Q\cdot\|\boldsymbol{\varepsilon}(A(a,b_1)-A(a,b_2))\|_X.\end{aligned}$$

根据 ε 的性质，可得

$$\|A(a_1,b)-A(a_2,b)\|_V \leq \|a_1-a_2\|_X,$$

and

$$\|A(a,b_1)-A(a,b_2)\|_V \leq L_{\mathcal{A}}\|b_1-b_2\|_V,$$

它满足条件 H(A)(a)，其中 $L_1=1,\ L_2=L_{\mathcal{A}}$。此外，由 (4.14) 可得

$$\begin{aligned}\langle A(a,b_1)-A(a,b_2),b_1-b_2\rangle_V &= \langle \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(b_1)-\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(b_2),\boldsymbol{\varepsilon}(b_1-b_2)\rangle_X\\ &= \int_\Omega(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(b_1)-\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(b_2))\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(b_1-b_2)d\Omega\\ &\geq \int_\Omega m_{\mathcal{A}}\|\boldsymbol{\varepsilon}(b_1)-\boldsymbol{\varepsilon}(b_2)\|^2d\Omega\\ &\geq m_{\mathcal{A}}\|b_1-b_2\|_V^2,\end{aligned}$$

它满足条件 H(A)(b)，其中 $m=m_{\mathcal{A}}$。

利用（4.27），根据 H(p)、H(μ) 以及范数和迹算子的性质，显然满足 H(j)(a)，此外，我们得到

$$\begin{aligned}&j(a_1,\boldsymbol{b}_1,c_1,\boldsymbol{d}_2)-j(a_1,\boldsymbol{b}_1,c_1,\boldsymbol{d}_1)+j(a_2,\boldsymbol{b}_2,c_2,\boldsymbol{d}_1)-j(a_2,\boldsymbol{b}_2,c_2,\boldsymbol{d}_2)\\ =\ &\int_{\Gamma_3}(p(a_1-g)-p(a_2-g))(\boldsymbol{d}_{2\nu}-\boldsymbol{d}_{1\nu})d\Gamma\\ &+\int_{\Gamma_3}(\mu(\|\boldsymbol{b}_{1\tau}\|,c_1)p(a_1-g)-\mu(\|\boldsymbol{b}_{2\tau}\|,c_2)p(a_2-g))(\|\boldsymbol{d}_{2\tau}\|-\|\boldsymbol{u}_{1\tau}\|)d\Gamma\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \|p(a_1-g)-p(a_2-g)\|_Z\cdot\|\boldsymbol{d}_{2\nu}-\boldsymbol{d}_{1\nu}\|_Z\\
&+\|\mu(\|\boldsymbol{b}_{1\tau}\|,c_1)p(a_1-g)-\mu(\|\boldsymbol{b}_{2\tau}\|,c_2)p(a_2-g)\|_Z\cdot\|(\|\boldsymbol{d}_{2\tau}\|-\|\boldsymbol{d}_{1\tau}\|)\|_Z\\
\leq\ & L_p\|a_1-a_2\|_Z\cdot\|\rho\|\|\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_2\|_V+\mu^*\|p(a_1-g)-p(a_2-g)\|_Z\cdot\|\rho\|\|\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_2\|_V\\
&+p^*\|\mu(\|\boldsymbol{b}_{1\tau}\|,c_1)-\mu(\|\boldsymbol{b}_{2\tau}\|,c_2)\cdot\|\rho\|\|\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_2\|_V\\
\leq\ & L_p\|\rho\|\|a_1-a_2\|_Z\|\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_2\|_V+\mu^*L_p\|\rho\|\|a_1-a_2\|_Z\|\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_2\|_V\\
&+p^*\|\rho\|(L_\mu\|\rho\|\|(\|b_1-b_2\|)\|_V+L_\mu|c_1-c_2|)\|\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_2\|_V,
\end{aligned}
$$

对所有的 $a_1,\quad a_2\in Z,\quad \boldsymbol{b_1},\quad \boldsymbol{b_2},\quad \boldsymbol{d_1},\quad \boldsymbol{d_2}\in V,\quad c_1,\quad c_2\in\mathbb{R}$，它们满足条件 H($j$)(b)，其中 $\alpha=L_p\|\rho\|(1+\mu^*),\quad \beta=L_\mu p^*\|\rho\|^2$ 和 $\gamma=L_\mu p^*\|\rho\|$。

利用 (4.25)，令 $J\subset I$ 和 $t\in J$，由 H($\mathcal{B}$) 和 H($\mathcal{C}$) 可得

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}(\boldsymbol{a}_1(t),b(t))-\mathcal{R}(\boldsymbol{a}_2(t),b(t))\|_Q\\
\leq\ & \|\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{I}\boldsymbol{a}_1(t))-\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{I}\boldsymbol{a}_2(t))\|_Q\\
&+\int_0^t\|\mathcal{C}(t-s,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{a}_1(s)),b(s))-\mathcal{C}(t-s,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{a}_2(s)),b(s))\|_Q ds\\
\leq\ & L_{\mathcal{B}}\|\mathcal{I}\boldsymbol{a}_1(t)-\mathcal{I}\boldsymbol{a}_2(t)\|_V+L_{\mathcal{C}}\int_0^t\|\boldsymbol{a}_1(s)-\boldsymbol{a}_2(s)\|_V ds\\
\leq\ & (L_{\mathcal{B}}+L_{\mathcal{C}})\int_0^t\|\boldsymbol{a}_1(s)-\boldsymbol{a}_2(s)\|_V ds
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}(\boldsymbol{a}(t),b_1(t))-\mathcal{R}(\boldsymbol{a}(t),b_2(t))\|_Q\\
\leq\ & \int_0^t\|\mathcal{C}(t-s,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{a}(s)),b_1(s))-\mathcal{C}(t-s,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{a}(s)),b_2(s))\|_Q ds\\
\leq\ & L_{\mathcal{C}}\int_0^t\|\boldsymbol{b}_1(s)-\boldsymbol{b}_2(s)\|_V ds,
\end{aligned}
$$

对所有 $\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a_1},\quad \boldsymbol{a_2}\in C(I;V)\quad b,\quad b_1,\quad b_2\in C(I;Y)$，它们满足条件 H($\mathcal{R}$)，其中 $r_{1J}=L_{\mathcal{B}}+L_{\mathcal{C}}$ 和 $r_{2J}=L_{\mathcal{C}}$。

利用 (4.26)，令 $J\subset I$ 和 $t\in J$，由边界上法向和切向部分的分解可得

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{S}\boldsymbol{a}_1(t)-\mathcal{S}\boldsymbol{a}_2(t)\|_Z &= \|\int_0^t a_{1\nu}(s)-a_{2\nu}(s)ds\|_Z\\
&\leq \int_0^t\|\boldsymbol{a}_1(s)-\boldsymbol{a}_2(s)\|_V ds
\end{aligned}
$$

对所有 $\boldsymbol{a}_1,\quad \boldsymbol{a}_2\in C(I;V)$，它满足条件 H($\mathcal{S}$)，其中 $s_J=1$.

利用 (4.28)，显然可得其满足条件 H(f)。

利用条件 H(φ')，可直接得到 H(φ)，其中 $L_\varphi=\bar{L}_\varphi$.

利用 (4.29)，显然 H(ϕ)({b}) 来自 H(ϕ')；此外，结合 Y_1 中的内积，由 (4.14) 可得

$$
\|\phi(t,\boldsymbol{b}_1)-\phi(t,\boldsymbol{b}_2)\|_{Y_1}^2 = \int_\Omega(\phi(t,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{b}_1))-\phi(t,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{b}_2)))\cdot(\phi(t,\boldsymbol{b}_1)-\phi(t,\boldsymbol{b}_2))d\Omega
$$

$$\begin{aligned} &\leq \bar{L}_\phi^2 \int_\Omega \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{b}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{b}_2)\|^2 d\Omega \\ &= \bar{L}_\phi^2 \|\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\|_V^2 \end{aligned}$$

¯对所有 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2 \in V,\ t \in I$，均满足条件 H($\phi$)，其中 $L_\phi = L_{\phi\circ}$

最后，由(4.21)及 Y 中的内积可得

$$\|a\|_Y^2 = \|a\|_{Y_1}^2 + \int_\Omega \nabla a \cdot \nabla a d\Omega,$$

我们知道 $g(a,a) + \kappa\|a\|_{Y_1} = \kappa\|a\|_Y$，因此 H($g$)成立，其中 $g_1 = g_2 = \kappa_\circ$

现在综合上述所有关系和不等式，我们可以得出问题(1.1)-(1.5)与问题 4.3之间的等价关系。因此，由定理 3.3可知，问题 4.3有唯一解。□

注4.1。 大多数通过微分变分不等式求解的接触模型都是针对平面接触建立的。例如，*Zeng*等人 *[9]*研究了一个黏塑性无摩擦接触问题；*Sofonea*等人 *[18]* 研究了一个准静态弹性接触问题；*Chen* 等人 *[35]* 研究了一个弹性摩擦接触问题。然而，在许多实际问题中，接触面是曲面的。因此，我们研究了曲面接触条件下的一个新型非线性系统*(1.1)-(1.5)*，并利用该系统的理论结果证明了这一接触问题的唯一可解性。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

利益冲突声明

我们声明，与所提交的工作相关，我们不存在任何可能构成利益冲突的商业或关联利益。

参考文献

[1]Pang J S, Stewart D E. 微分变分不等式. 数学规划, 2008, 113(2):345-424.[2] Chen X J, Wang Z Y. 微分变分不等式正则化时间步进方法的收敛性. SIAM优化期刊, 2013, 23(3):1647-1671.[3] Liu Z H, Mig´orski S, Zeng S D. 巴拿赫空间中涉及非局部边界条件的偏微分变分不等式. 微分方程杂志, 2017, 263(7):3989-4006.[4] Zhang Y J, Chen T, Huang N J, Li X S. 求解一类随机微分变分不等式的罚函数法及其应用. 《非线性分析：现实世界应用》, 2023, 73(2):103889.[5] Hao J W, Han J F, Liu Q S. 带记忆项的二阶时滞微分变分-半变分不等式的存在性与收敛性分析. 《非线性分析：现实世界应用》, 2025, 85:104373.

[6] Mig´orski S. 一类历史依赖的演化包含系统及其应用. 《非线性分析：现实世界应用》, 2021, 59:103246.[7] Liu Z H, Zeng S D, Motreanu D. 由变分不等式驱动的演化问题 . 微分方程杂志, 2016, 260(9):6787-6799.[8] Pang J S, Stewart D E. 微分变分不等式的解对初始条件的依赖性. 数学规划, 2009, 116(1):429-460.[9] Liu Z H, Sofonea M. 接触力学中的微分拟变分不等式. 《数学与固体力学》, 2019, 24(3):845-861.[10] Liu Z H, Zeng S D, Motreanu D. 偏微分半变分不等式. Adv Nonlinear Anal, 2018, 7(4):571-586.[11] Mig´orski S, Zeng S D. 巴拿赫空间中的一类微分半变分不等式. J Global Optim, 2018, 72:761-779.[12] Chen T, Zhang Y J, Huang N J, Xiao Y B. 一种新型非局部脉冲分数阶微分半变分包含及其在摩擦接触问题中的应用. Appl Math Comput, 2025, 490:129211.[13] Li W, Wang X F. 巴拿赫空间上偏微分集值变分不等式的稳定性分析. J Convex Anal, 2020, 27(2):425-444.[14] Li W, Wang X, Huang N J. 有限维空间中的微分逆变分不等式. Acta Math Sci, 2015, 35(2):407-422.[15] Ceng L C, Huan X Z, Liang Y S, Yao J C. 关于带Levy跳跃的随机分数阶微分变分不等式一般系统. 《非线性科学与数值模拟通讯》, 2025, 140(1):108373.[16] Ceng L C, Cao S L, Yao J C, Cen J X, Liang Y S. 带Levy跳跃的随机分数阶微分混合变分不等式演化系统. 《非线性科学与数值模拟通讯》, 2025, 140:109194.[17] Andrews K T, Shillor M, Wright S, Klarbring A. 带摩擦和磨损的动态热黏弹性接触问题. Int J Eng Sci, 1997, 35(14):1291-1309.[18] Sofonea M, P˘atrulescu F, Souleiman Y. 带磨损和单侧约束的接触问题分析. Appl Anal, 2016, 95(11):2590-2607.[19] Chen T, Huang N J, Xiao Y B. 带摩擦和磨损的动态黏弹性接触问题的变分与数值分析. Optimization, 2020, 69(9):2003-2031.[20] Kalita P, Szafraniec P, Shillor M. 带磨损扩散的摩擦接触问题. Z Angew Math Phys, 2019, 70(4):96.[21] Fr´emond M, Nedjar B. 混凝土损伤：单侧现象. Nucl Eng Des, 1995, 156(1-2):323-335.

[22] Fr´emond M, Nedjar B. 损伤、损伤梯度与虚功原理。《国际固体与结构杂志》, 1996, 33(8):1083-1103.[23] Han W M, Jureczka M, Ochal A. 含损伤黏弹性接触问题半变分不等式的数值研究。《计算与应用数学杂志》, 2020, 377:112886.[24] Li Y X, Liu Z H. 一个具有摩擦和损伤的黏弹性材料准静态接触问题。《非线性分析：理论、方法与应用》, 2010, 73(7):2221-2229.[25] Gasi´nski L, Ochal A, Shillor M. 采用变分-半变分方法研究具有法向顺应、摩擦和材料损伤的准静态黏弹性问题。《分析与应用杂志》, 2015, 34(3):251-275.[26] Szafraniec P. 热黏弹性中含损伤的动态非光滑摩擦接触问题。《数学与固体力学》, 2016, 21(5):525-538.[27] Sofonea M, Han W M, Shillor M. 含黏附或损伤的接触问题分析与近似。Chapman and Hall/CRC：博卡拉顿，2005.[28] Xuan H L, Cheng X L. 具有损伤和长记忆的黏附接触问题的数值分析与模拟。《离散与连续动力系统B辑》, 2021, 26(5):2781-2804.[29] Drozdov A. 有限弹性与黏弹性：固体非线性力学教程。世界科学出版社：新加坡，1996.[30] Banks H T, Hu S H, Kenz Z R. 固体弹性与黏弹性简述。《应用数学与力学进展》, 2011, 3(1):1-51.[31]Mig´orski S. 带约束演化微分变分-半变分不等式的适定性及其应用。《非线性分析：现实世界应用》, 2022, 67:103593.[32] Sofonea M, Matei A. 接触力学中产生的历史依赖型拟变分不等式。《欧洲应用数学杂志》, 2011, 22(5):471-491.[33]Wang C, Xiao Y B, Cai D L. 一类时变混合拟变分 - 半变分不等式问题：可解性及应用。《非线性科学与数值模拟通讯》, 2025, 150:108966.[34] Liang Y S, Ceng L C, Yao J C, Zeng S D. 关于由拟变分-半变分不等式驱动的二阶微分包含。《非线性分析：现实世界应用》, 2024, 77:104060.[35] Chen T, Huang N J, Li X S, Zou Y Z. 一类新的微分非线性系统，涉及接触力学中产生的抛物型变分不等式和历史依赖型半变分不等式。《非线性科学与数值模拟通讯》, 2021, 101:105886.[36] Sofonea M, Mig´orski S. 变分-半变分不等式及其应用。Chapman and Hall/CRC：博卡拉顿，2017。

[37] Nittka R. 非齐次抛物型 Neumann 问题。捷克数学杂志, 2014年, 64(3):703- 742.

[38] Han J F, Mig´orski. 一类具有多值法向顺应、单侧约束和材料损伤的准静态黏弹性摩擦接触问题。数学分析与应用杂志，2016年，443(1)：57-80。