arXiv:2601.00958v1 [math.NT] 2 Jan 2026

Kac–Moody 斐波那契数列

Lisa Carbone 和 Pranav Shankar

摘要。我们总结了如何从秩 2 Kac-Moody 代数的根格生成无穷族整数数列的已知结果。我们计算并列表列出了其中若干数列的前二十项。这为一大类斐波那契型整数数列、切比雪夫S多项式和U多项式的取值等提供了一个总体框架。

设 A为广义Cartan矩阵

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$$

其中 $a,\ b \in \mathbb{Z}_{>0}$、 $ab \geqslant 4$、 $a \geqslant b$，对应的 Kac-Moody 代数为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$，根系为 $\Delta = \Delta(A)$，Weyl群为 $W = W(A)$。当 $ab = 4$、 A 为半正定但非正定时， A 为仿射型。当 $ab > 4$、 A为双曲型。

令 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ 为单根，令 w_1, w_2 为简单反射。我们有

$$W = \langle w_1 \rangle * \langle w_2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

因此， W中的每个元素都具有 $w_1^{\epsilon_1}(w_2w_1)^n w_2^{\epsilon_2}$ 的形式，其中 $\epsilon_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2$ 且 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。由于 W 是一个无限群， Π 在 W 作用下的平移像 $\Delta^{\mathrm{re}} = W\Pi$ 构成无限集，相应的李代数$\mathfrak{g}(A)$ 是无限维的。

Weyl群对单根 α_1 和 α_2 的作用产生了一列关于 a和 b的多项式，其中 $-a$ 和 $-b$ 是广义Cartan矩阵的非对角元。
在 [ACP] 和 [CKMS], 中，作者将“斐波那契类型”的整数数列与这些代数的Weyl群和根格联系起来。这些数列由实根向量在根空间中的坐标明确导出

1. 设定

我们可以将与 A 对应的根格 $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2$ 识别为 $\mathbb{R}^{1,\ 1}$。于是，任意根 β 都可以表示为基向量（单根）的线性组合：

$$\beta = x\alpha_1 + y\alpha_2 \quad \text{where } x, y \in \mathbb{Z}.$$

作者将 α_1 识别为坐标 $(1,\ 0)$ 并将 α_2 识别为 $(0,\ 1)$ 以表示它们在该基下的系数。根空间的几何结构，特别是根的长度，由二次型 $Q(x,\ y)$ 编码：

$$Q(x, y) = 2x^2 - 2axy + \left(\frac{2a}{b}\right) y^2.$$

对于每个根 $\beta \in \Delta^{\mathrm{re}}$，我们写作

$$\beta = x(\beta)\alpha_1 + y(\beta)\alpha_2,$$

对于 $x(\beta),\ y(\beta)\in\mathbb{Z}$，从而得到 β 在

$$\Delta^{\mathrm{re}}\cap(\mathbb{Z}\alpha_1\oplus\mathbb{Z}\alpha_2).$$

Then

$$x(\alpha_1)=1,\ y(\alpha_1)=0$$

$$x(\alpha_2)=0,\ y(\alpha_2)=1.$$

对于 $i=1,2$，我们记作 $W^+\{\alpha_i\}=W\{\alpha_i\}\cap\Delta^{\mathrm{re}}_+$，其中 Δ^{re} 表示实根。于是

$$W^+\{\alpha_1\}=\{(w_1w_2)^n\alpha_1,\ n\geqslant 0\}\ \sqcup\ \{w_2(w_1w_2)^n\alpha_1,\ n\geqslant 0\},$$

$$W^+\{\alpha_2\}=\{(w_2w_1)^n\alpha_2,\ n\geqslant 0\}\ \sqcup\ \{w_1(w_2w_1)^n\alpha_2,\ n\geqslant 0\}.$$

注意，对于 每个实根 $\alpha\in\Delta^{\mathrm{re}}$，若记作 $\alpha=w\alpha_i$，则单词 w 是约化的，并以 w_{3-i}结尾。

我们列出所有 $\alpha\in\Delta^{\mathrm{re}}$ 对应的 $x(\alpha)$ 和 $y(\alpha)$，其中 $\ell(w)=n$ 对某个 $n\geqslant 0$ 成立，而 $\ell(\cdot)$ 是 W 上的标准长度函数:

$n=\ell(w)$	$\alpha\in\{(w_1w_2)^{\lfloor n/2\rfloor}\alpha_1\mid\ n\geqslant 0\}$	$x(\alpha)$	$y(\alpha)$
0	α_1	1	0
2	$w_1w_2\alpha_1$	$ab-1$	b
4	$w_1w_2w_1w_2\alpha_1$	$a^2b^2-3ab+1$	ab^2-2b
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$n=\ell(w)$	$\alpha\in\{w_2(w_1w_2)^{\lfloor n/2\rfloor}\alpha_1\mid\ n\geqslant 0\}$	$x(\alpha)$	$y(\alpha)$
1	$w_2\alpha_1$	1	b
3	$w_2w_1w_2\alpha_1$	$ab-1$	ab^2-2b
5	$w_2(w_1w_2)^2\alpha_1$	$a^2b^2-3ab+1$	$a^2b^3-4ab^2+3b$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$n=\ell(w)$	$\alpha\in\{(w_2w_1)^{\lfloor n/2\rfloor}\alpha_2\mid\ n\geqslant 0\}$	$x(\alpha)$	$y(\alpha)$
0	α_2	0	1
2	$w_2w_1\alpha_2$	a	$ab-1$
4	$w_2w_1w_2w_1\alpha_2$	a^2b-2a	$a^2b^2-3ab+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$n=\ell(w)$	$\alpha\in\{w_1(w_2w_1)^{\lfloor n/2\rfloor}\alpha_2\mid\ n\geqslant 0\}$	$x(\alpha)$	$y(\alpha)$
1	$w_1\alpha_2$	a	1
3	$w_1w_2w_1\alpha_2$	a^2b-2a	$ab-1$
5	$w_1(w_2w_1)^2\alpha_2$	$a^3b^2-4a^2b+3a$	$a^2b^2-3ab+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

现在，我们用数列的语言改写上表中的系数 $x(\alpha)$ 和 $y(\alpha)$。对于 $i=1,\ 2$ 以及 $\alpha\in W^+\{\alpha_i\}$，有 $\alpha=w\alpha_i$ 对某个 $w\in W$ 成立，其中 $\ell(w)=n$ 对某个 $n\geqslant 0$ 成立，而 $\ell(\cdot)$ 是 W 上的标准长度函数。对于 $i=1,\ 2$，我们为多项式 $x(\alpha)$ 和 $y(\alpha)$ 引入以下记号。令

$$x_{i,n}:=x_{i,n}(a,b)=x(\alpha)\text{ where }\alpha=w\alpha_i,\ \ell(w)=n,$$
$$y_{i,n}:=y_{i,n}(a,b)=y(\alpha)\text{ where }\alpha=w\alpha_i,\ \ell(w)=n.$$

一旦固定了一个实根 $\alpha=w\alpha_i$，对于每个 $n=\ell(w),\ (x(\alpha),y(\alpha))$ 都是唯一的。

引理 1.1。我们有

$$x_{1,n}=x_{1,n+1},\ n\ \textit{even},\ n\geqslant 0,$$
$$y_{1,n}=y_{1,n-1},\ n\ \textit{even},\ n\geqslant 2.$$

$$x_{2,n}=x_{2,n-1},\ n\ \textit{even},\ n\geqslant 2,$$
$$y_{2,n}=y_{2,n+1},\ n\ \textit{even},\ n\geqslant 0.$$

已知：

(1) 如果 $a=b=-2$，那么 A 是仿射的，并且 [K]:

$$Q(\alpha,\beta)=\{j\alpha+(j+1)\beta,\ (j+1)\alpha+j\beta\ j\in\mathbb{Z}_{>0}\}.$$

(2) 如果 $a=b=-3$，那么 A 是双曲的，并且 [F]:

$$Q(\alpha,\beta)=\{\phi_{2j}\alpha+\phi_{(2j+2)}\beta,\ \phi_{(2j+2)}\alpha+\phi_{2j}\beta\ j\in\mathbb{Z}_{>0}\},$$

其中 ϕ_j 是第 j 个斐波那契数。

2. 根格中的整数数列

对于 $m\geqslant 0$，定义

$$X_1(a,b)=(x_{1,2m}),\qquad Y_1(a,b)=(y_{1,2m}),$$
$$X_2(a,b)=(x_{2,2m}),\qquad Y_2(a,b)=(y_{2,2m}).$$

这些数列满足如下线性递推关系，例如

$$x_{1,2m}=(ab-2)x_{1,2m-2}-x_{1,2m-4},\qquad m\geqslant 2,$$

$$x_{2,2m}=(ab-2)x_{2,2m-2}-x_{2,2m-4}$$

其　　对于 $y_{1,\ 2m}$, $y_{2,\ 2m}$，有类似的公式。初始条件来自单根：

$$x_{1,0}=1,\ y_{1,0}=0,\qquad x_{2,0}=0,\ y_{2,0}=1.$$

由此可知，对于每个 $(a,\ b)$，当 $ab\geqslant 4$ 时，我们有整数数列：

$$X_1(a,b)=Y_2(a,b),\qquad X_2(a,b)=Y_1(b,a).$$

现在令 $X_2(a,a)=\{u_0,u_1,u_2,\dots\}$ 和 $X_1(a,a)=\{v_0,v_1,v_2,\dots\}$。定义一个数列 $X(a)=\{x_0,x_1,x_2,\dots\}$，其通项 x_n 为：

$$x_n = \begin{cases} u_{n/2} & \text{if } n \text{ is even} \quad (\text{the } \frac{n}{2}\text{-th term of } X_2(a,a)) \\ v_{(n-1)/2} & \text{if } n \text{ is odd} \quad (\text{the } \frac{n-1}{2}\text{-th term of } X_1(a,a)) \end{cases}$$

数列 $X(a) = \{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足以下递推关系:

$$x_n = ax_{n-1} - x_{n-2} \quad \text{for } n \geqslant 2$$

初始条件为 $x_0 = 0, x_1 = 1$。

由 [ACP]可得

(1)

$$X_1(a,b) = (x_{1,2m})_{m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} = \{1, ab-1, a^2b^2 - 3ab + 1, \dots\}$$
$$X_2(a,b) = (x_{2,2m})_{m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} = \{0, a, a^2b - 2a, a^3b^2 - 4a^2b + 3a, \dots\}$$

(2) $X(a) = \{0, 1, a, a^2 - 1, a^3 - 2a, a^4 - 3a^2 + 1, \dots\}$.

(3) 对于每一对 $a, b, ab \geqslant 4$, 有 $X_1(a,b) = X_1(b,a)$。

(4) 对于每一对 $a, b, ab \geqslant 4$, 有 $aX_2(1,ab) = X_2(a,b)$.

(5) 对于每个 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}, ab \geqslant 4$, 有

$$x_{1,2m}(a,b) \quad = \quad U_{2m}\left(\frac{\sqrt{ab}}{2}\right),$$

and

$$x_{2,2m-1}(a,b) \quad = \quad \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot U_{2m-1}\left(\frac{\sqrt{ab}}{2}\right),$$

其中, $U_n\left(\frac{\sqrt{ab}}{-2}\right)$是代入 $x = \frac{\sqrt{ab}}{2}$后求值的切比雪夫 U多项式 $U_n(x)$。 (6) 对于每个 $i = 1, 2$以及 $a \geqslant 2$、 $X_i(a, a)$ 和 $Y_i(a, a)$ 都是 $X(a)$的二分法。

回顾一下， $X(k) = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots\}$ 定义如下：

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1$$
$$x_n = kx_{n-1} - x_{n-2} \quad \text{for } n \geqslant 2$$

定理 2.1. 数列 $X_2(a,b)$ 和 $X_1(a,b)$ 可表示为数列 $X(k)$ 的项，其中 $k = ab - 2$ 如下：

(1)
$$X_2(a,b) = a \cdot X(ab-2)$$

(2)
$$X_1(a,b)_n = X(ab-2)_n + X(ab-2)_{n+1}$$

*P*证. 对于 (1)，令 Y_n 为 $X_2(a$ 的第 n 项，$b)$ 令 Z_n 为 $a \cdot X(k)$ 的第 n 项。
数列 $X_2(a,b)$ 满足递推关系 $Y_n = (ab-2)Y_{n-1} - Y_{n-2}$。数列 $X(k)$ 满足$x_n = kx_{n-1} - x_{n-2}$。
因此 Z_n 满足 $Z_n = kZ_{n-1} - Z_{n-2}$。由于 $k = ab - 2$，二者满足相同的递推关系。

对于 $X_2(a,b)$：$Y_0 = 0, Y_1 = a$。对于 $a \cdot X(k)$：$Z_0 = a(0) = 0, Z_1 = a(1) = a$。
由于递推关系和初始值相同，这些数列也相同。
对于（2），令 $S_n = x_n + x_{n+1}$ 为来自 $X(k)$ 的和数列。
我们验证 S_n 满足标准递推关系 $S_n = kS_{n-1} - S_{n-2}$。

$$\begin{aligned} kS_{n-1} - S_{n-2} &= k(x_{n-1} + x_n) - (x_{n-2} + x_{n-1}) \\ &= (kx_{n-1} - x_{n-2}) + (kx_n - x_{n-1}) \\ &= x_n + x_{n+1} \\ &= S_n \end{aligned}$$

数列 $X_1(a,\ b)$ 由初始条件 $x_{1,\ 0} = 1$ 和 $x_{1,\ 2} = ab - 1$定义。我们有 $S_0 = x_0 + x_1 = 0 + 1 = 1$，它等于 $X_1(a,\ b)$ 的第一项。并且 $S_1 = x_1 + x_2 = 1 + (k \cdot 1 - 0) = 1 + k$。令 $k = ab - 2$，我们得到

$$S_1 = 1 + (ab - 2) = ab - 1$$

这与 $X_1(a,\ b)$ 的第二项相符。

□

3. 整数序列表

表1. $X(j)$, 对于 $j = 2,$ ....., 20

j	数列项	在线整数数列百科全书条目及描述
2	0, 1, 2, 3, 4, ...	A001477
3	0, 1, 3, 8, 21, ...	A001906 斐波那契数列的二分法
4	0, 1, 4, 15, 56, ...	A001353 图中生成树的数量 $2\times n$ grid
5	0, 1, 5, 24, 115, ...	A004254
6	0, 1, 6, 35, 204, ...	A001109 平方三角数的平方根序列 bers
7	0, 1, 7, 48, 329, ...	A004187
8	0, 1, 8, 63, 496, ...	A001090
9	0, 1, 9, 80, 711, · · ·	A018913
10	0, 1, 10, 99, 980, . . .	A004189 平方数的指标, 它们是 广义五边形数
11	0, 1, 11, 120, 1309, · · ·	A004190
12	0, 1, 12, 143, 1704, · · ·	A004191
13	0, 1, 13, 168, 2171, · · ·	A078362
14	0, 1, 14, 195, 2716, · · ·	A007655
15	0, 1, 15, 224, 3345, · · ·	A078364
16	0, 1, 16, 255, 4064, · · ·	A077412
17	0, 1, 17, 288, 4879, · · ·	A078366
18	0, 1, 18, 323, 5796, · · ·	A049660
19	0, 1, 19, 360, 6821, · · ·	A078368
20	0, 1, 20, 399, 7960, · · ·	A075843

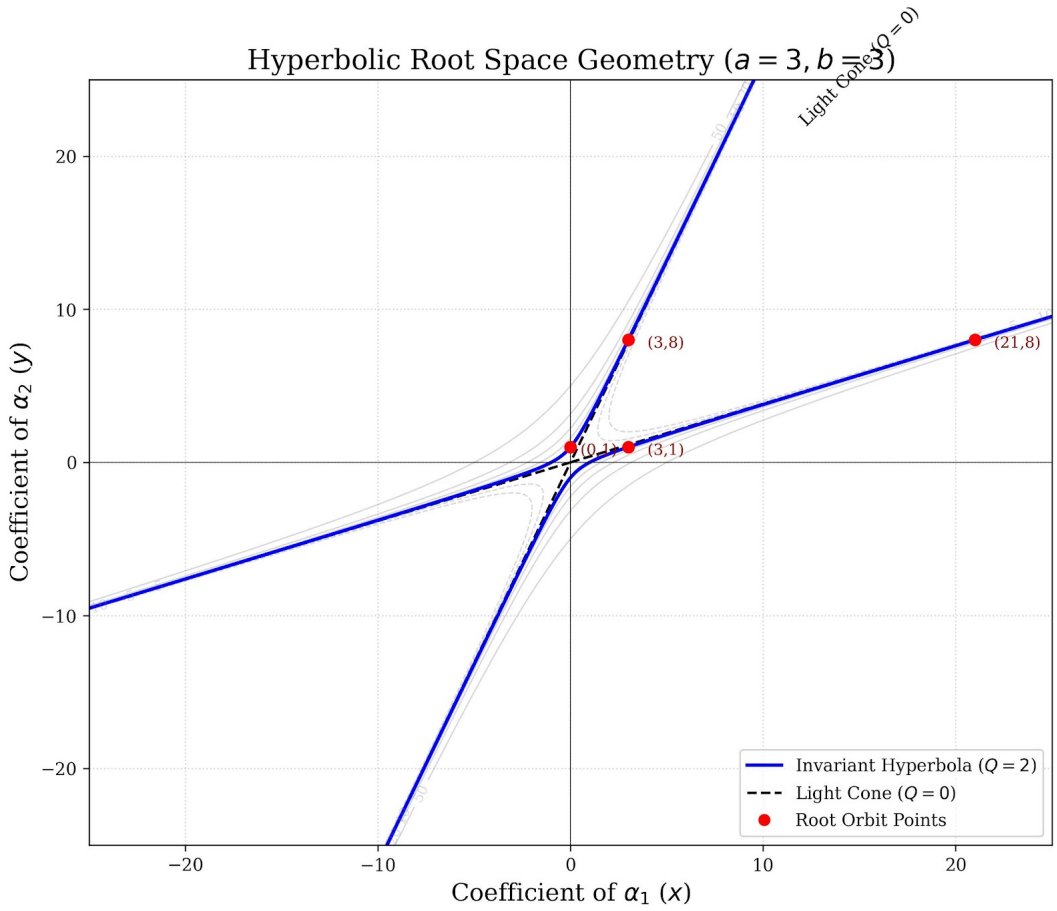
Hyperbolic Root Space Geometry ($a = 3, b = 3$)
Light Cone ($Q = 0$)
(3,8)
(21,8)
(0,1)
(3,1)
Invariant Hyperbola ($Q = 2$)
Light Cone ($Q = 0$)
Root Orbit Points
Coefficient of α_2 (y)
Coefficient of α_1 (x)
20
10
0
−10
−20
−20
−10
0
10
20

表2. $X_1(1,\ j)$ 对应 $j=4,\ \ldots,\ 20$：描述和OEIS参考文献

j	**数列项**	**OEIS条目及描述**
4	$1,3,5,7,9,\ldots$	A005408
5	$1,\ 4,\ 11,\ 29,\ 76,\ \ldots$	A002878：卢卡斯数列的二分法
6	$1,5,19,71,265,\ldots$	A001834
7	$1,6,29,139,666,\ldots$	A030221：切比雪夫偶数索引 U-多项式 在 $\sqrt{7}/2$处求值
8	$1,7,41,239,1393,\ldots$	A002315：　纽曼-尚克斯-威廉姆斯数
9	$1,\ 8,\ 55,\ 377,\ 2584,\ \ldots$	A033890：斐波那契$(4n+2)$
10	$1,9,71,559,4401,\ldots$	A057080：切比雪夫偶数下标 U-多项式的取值 在 $\sqrt{10}/2$ 处，且 $\lim_{n\longrightarrow\infty} a(n)/a(n-1) = 4+\sqrt{15}$
11	$1,10,89,791,7030,\ldots$	A057081：切比雪夫偶数下标 U-多项式 在 $\sqrt{11}/2$处取值
12	$1,11,109,1079,10681,\ldots$	A054320：在 U 处取值的切比雪夫偶次多项式 其各项的平方数是星形数
13	1，12，131，1429，15588，.....	A097783：具有丢番图性质的切比雪夫多项式
14	1，13，155，1847，22009，.....	A077416：具有丢番图性质的切比雪夫 S 数列
15	$1,14,181,2339,30226,\ldots$	A126866
16	$1,\ 15,\ 209,\ 2911,\ 40545,\ \ldots$	A028230：平方数的指标，同时也是八边形数
17	$1,16,239,3569,53296,\ldots$	A161591：公共解中的 B 值列表 关于方程 $13k+1=A^2, 17k+1=B^2$
18	1，17，271，4319，68833，.....	A159678：二方程问题的 $b(j)$ 解 $7n(j)+1=a(j)*a(j)$ 和 $9n(j)+1=b(j)*b(j)$ 其中正整数。
19	$1,18,305,5167,87534,\cdots$	A161599：公共解中的 B 值列表 这两个方程 $15k+1=A^2, 19k+1=B^2$
20	$1,19,341,6119,109801,\ldots$	A049629：$a(n)=1/4[F(6n+4)+F(6n+2)]$ 其中 $F(n)$ 是斐波那契数列

表3. $X_1(2,\ j)$ 对于 $j = 1,$ ....., 20

j	数列项	OEIS条目及描述
1	1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, . . .	A057078：周期数列（周期6）。
2	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, · · ·	A005408：奇数。
3	1, 5, 19, 71, 265, 989, . . .	A001834：$a(n) = 4a(n-1) - a(n-2)$。
4	1, 7, 41, 239, 1393, 8119, · · ·	A002315：纽曼-尚克斯-威廉姆斯数列 bers.
5	1, 9, 71, 559, 4401, 34649, . . .	A057080：$U_{2n}(\sqrt[10]{2})$的取值。
6	1, 11, 109, 1079, 10681, . . .	A054320：$U_{2n}(\sqrt{3})$的取值。
7	1, 13, 155, 1847, 22009, . . .	A077416：切比雪夫 S 序列。
8	1, 15, 209, 2911, 40545, · · ·	
9	1, 17, 271, 4319, 68833, . . .	A126866：递推关系 $a(n) = 16a(n-1) - a(n-2)$。
10	1, 19, 341, 6119, 109801, . . .	A049629：递推关系 $a(n) = 18a(n-1) - a(n-2)$。
11	1, 21, 419, 8359, 166761, ...	A083043：递推关系 $a(n) = 20a(n-1) - a(n-2)$。
12	1, 23, 505, 11087, 243409, · · ·	A133283：满足 $30k^2 + 6$ 为 k 的数 平方数
13	1, 25, 599, 14351, 343825, ...	A159661：满足 $b(j)$ 个方程的解 问题 $11n(j) + 1 = a(j)^2$ and $13n(j) + 1 = b(j)^2$ 且具有正整数元素 .
14	1, 27, 701, 18199, 472473, . . .	A157461：展开 $\frac{x(x+1)}{x^2-26x+1}$.
15	1, 29, 811, 22679, 634201, . . .	A159669：展开 $\frac{x(x+1)}{x^2-28x+1}$.
16	1, 31, 929, 27839, 834241, . . .	A157878：展开 $\frac{x(x+1)}{x^2-30x+1}$.
17	1, 33, 1055, 33727, 1078209, . . .	A159675：展开 $\frac{x(x+1)}{x^2-32x+1}$.
18	1, 35, 1189, 40391, 1372105, . . .	A046176：六角平方数的指标 bers.
19	1, 37, 1331, 47879, 1722313, · · ·	
20	1, 39, 1481, 56239, 2135601, . . .	A097314：与佩尔方程解相关的 38.

表4. $X_1(3,\ j)$ 对应 $j = 1,$ ....., 20

j	**数列项**	**OEIS条目及描述**
1	1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, ⋯⋯	A057078
2	1, 5, 19, 71, 265, 989, ⋯⋯	A001834
3	1, 8, 55, 377, 2584, 17711, ⋯	A033890
4	1, 11, 109, 1079, 10681, ⋯	A054320
5	1, 14, 181, 2339, 30226, ⋯	A126866
6	1, 17, 271, 4319, 68833, ⋯	A028230
7	1, 20, 379, 7181, 136060, ⋯	
8	1, 23, 505, 11087, 243409, ⋯	A133283
9	1, 26, 649, 16199, 404326, ⋯	
10	1, 29, 811, 22679, 634201, ⋯	A159669
11	1, 32, 991, 30689, 950368, ⋯	
12	1, 35, 1189, 40391, 1372105, ⋯	A046176
13	1, 38, 1405, 51947, 1920634, ⋯	
14	1, 41, 1639, 65519, 2619121, ⋯	
15	1, 44, 1891, 81269, 3492676, ⋯	
16	1, 47, 2161, 99359, 4568353, ⋯	A189173
17	1、50、2449、119951、5875150、.....	$a_n + a_{n+1} = \frac{51}{7}$*A154024
18	1, 53, 2755, 143207, 7444009, ⋯	$\frac{1}{5}$* A175180
19	1, 56, 3079, 169289, 9307816, ⋯	
20	1, 59, 3421, 198359, 11501401, ⋯	

表5。 $X_1(4,\ j)$ 对于 $j = 1,\ \ldots\ldots,\ 20$

j	**数列项**	**OEIS条目及描述**
1	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ⋯⋯	A005408
2	1, 7, 41, 239, 1393, 8119, ⋯⋯	A002315
3	1, 11, 109, 1079, 10681, 105731, ⋯	A054320
4	1, 15, 209, 2911, 40545, 564719, ⋯	A077416
5	1, 19, 341, 6119, 109801, 1970300, ⋯	A049629
6	1, 23, 505, 11087, 243409, 5343911, ⋯	A133283
7	1, 27, 701, 18199, 472473, 12266099, ⋯	A157461
8	1, 31, 929, 27839, 834241, 25000391, ⋯	A157878
9	1, 35, 1189, 40391, 1372105, 46611179, ⋯	A046176
10	1, 39, 1481, 56239, 2135601, 81096599, ⋯	A097314
11	1, 43, 1805, 75767, 3180409, 133501399, ⋯	
12	1, 47, 2161, 99359, 4568353, 210044879, ⋯	A189173
13	1, 51, 2549, 127399, 6367401, 318242651, . . .	$a_n + a_{n+1}$ = A004296
14	1, 55, 2969, 160271, 8651665, 466902964, ⋯	
15	1, 59, 3421, 198359, 11501401, 666882899, ⋯	
16	1, 63, 3905, 242047, 15003009, 929944511, . . .	A001090（二分法）
17	1, 67, 4421, 291719, 19249033, 1270144459, ⋯	A078989
18	1, 71, 4969, 347759, 24338161, 1703323511, ⋯	
19	1, 75, 5549, 410551, 30375225, 2247356099, ⋯	
20	1, 79, 6161, 480499, 37472761, 2922394859, ⋯	

表6。 $X_2(1,\ j)$ 对于 $j = 1,\ \ldots,\ 20$

j	数列项	OEIS条目及说明
1	1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, ...	周期数列（周期6）
2	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ⋯	A005408：奇数
3	1, 5, 19, 71, 265, 989, . . .	A001834：$a(n) = 4a(n-1) - a(n-2)$
4	1, 7, 41, 239, 1393, 8119, ⋯	A002315：NSW 数
5	1, 9, 71, 559, 4401, 34649, . . .	A057080：$U_{2n}(\sqrt{10}/2)$
6	1, 11, 109, 1079, 10681, ...	A054320：$U_{2n}(\sqrt{3})$
7	1, 13, 155, 1847, 22009, . . .	A077416：具有丢番图性质的切比雪夫 S 数列
8	1, 15, 209, 2911, 40545, . . .	A028230：八边形平方数的指标
9	1, 17, 271, 4319, 68833, . . .	A126866：$a(n) = 16a(n-1) - a(n-2)$
10	1, 19, 341, 6119, 109801, . . .	A049629：$a(n) = 18a(n-1) - a(n-2)$
11	1, 21, 419, 8359, 166761, ...	A083043：$a(n) = 20a(n-1) - a(n-2)$
12	1, 23, 505, 11087, 243409, . . .	A133283：满足 $30k^2 + 6$ 是平方数的数 k
13	1, 25, 599, 14351, 343825, . . .	A159661：具有 $24a(n-1)$ 的递推关系
14	1, 27, 701, 18199, 472473, . . .	A157461：展开 $\frac{x(x+1)}{x^2-26x+1}$.
15	1, 29, 811, 22679, 634201, . . .	A159669：展开 $\frac{x(x+1)}{x^2-28x+1}$.
16	1, 31, 929, 27839, 834241, ...	A157878：展开 $\frac{x(x+1)}{x^2-30x+1}$.
17	1, 33, 1055, 33727, 1078209, . . .	A159675：展开 $\frac{x(x+1)}{x^2-32x+1}$.
18	1, 35, 1189, 40391, 1372105, ...	A046176：六边形平方数的指标
19	1, 37, 1331, 47879, 1722313, ⋯	
20	1, 39, 1481, 56239, 2135601, . . .	A097314：与 38 相关的佩尔方程解。

表 7. $X_2(2, j)$ 当 $j = 2,\ldots, 20$

j	**数列项**	**OEIS条目及描述**
2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ⋯	A005843：偶数
3	2, 8, 30, 112, 418, 1560, ⋯	A005319
4	2, 12, 70, 408, 2378, 13860, ⋯	A054486：A001541 的偶数项抽取
5	2, 16, 126, 992, 7810, 61488, ⋯	A057076
6	2, 20, 198, 1960, 19402, 192060, ⋯	A057077
7	2, 24, 286, 3408, 40610, 483912, ⋯	A057079
8	2, 28, 390, 5432, 75658, 1053780, ⋯	A157065
9	2, 32, 510, 8128, 129538, 2064480, ⋯	A157456
10	2, 36, 646, 11592, 208010, 3732588, ⋯	A157648
11	2, 40, 798, 15920, 317602, 6336120, ⋯	A157778
12	2, 44, 966, 21208, 465610, 10222212, ⋯	A158228
13	2, 48, 1150, 27552, 660098, 15814800, ⋯	A158586
14	2, 52, 1350, 35048, 909898, 23622300, ⋯	A158679
15	2, 56, 1566, 43792, 1224610, 34245288, ⋯	A158768
16	2, 60, 1798, 53880, 1614602, 48384180, ⋯	A158819
17	2, 64, 2046, 65408, 2091010, 66846912, ⋯	A158849
18	2, 68, 2310, 78472, 2665738, 90556620, ⋯	A158888
19	2, 72, 2590, 93168, 3351458, 120559320, ⋯	A158913
20	2, 76, 2886, 109592, 4161610, 158031588, ⋯	A158941

表 8. $X_2(3,\ j)$ 对于 $j = 1,\ \ldots,\ 20$

j	**数列项**	**OEIS条目及描述**
1	3, 3, 0, -3, -3, 0, 3, $\cdots$	A084103
2	3, 12, 45, 168, 627, 2340, $\cdots$	A005320
3	3, 21, 144, 987, 6765, $\cdots$	A014445
4	3, 30, 297, 2940, 29103, $\cdots$	3A004189
5	3, 39, 504, 6513, 84165, $\cdots$	3A078362
6	3, 48, 765, 12192, 194307, $\cdots$	A001080
7	3, 57, 1080, 20463, 387717, $\cdots$	3A078368
8	3, 66, 1449, 31812, 698415, $\cdots$	3A077421
9	3, 75, 1872, 46725, 1166253, $\cdots$	3A097780
10	3, 84, 2349, 65688, 1836915, $\cdots$	3A097311
11	3, 93, 2880, 89187, 2761917, $\cdots$	3A200442
12	3, 102, 3465, 117708, 3998607, $\cdots$	3A029547
13	3, 111, 4104, 151737, 5610165, $\cdots$	3A206565
14	3, 120, 4797, 191760, 7665603, $\cdots$	
15	3, 129, 5544, 238263, 10239765, $\cdots$	
16	3, 138, 6345, 291732, 13413327, $\cdots$	$\frac{3}{4}$A174772
17	3, 147, 7200, 352653, 17272797, $\cdots$	$\frac{3}{7}$A154024
18	3, 156, 8109, 421512, 21910515, $\cdots$	3A370188
19	3, 165, 9072, 498795, 27424653, $\cdots$	
20	3, 174, 10089, 584988, 33919215, $\cdots$	$\frac{1}{20}$A004297

表9。 $X_2(4,\ j)$ 当 $j = 1,\ \ldots,\ 20$

j	数列项	OEIS条目及描述
1	4, 8, 12, 16, 20, 24, ⋯	A008586
2	4, 24, 140, 816, 4756, 27720, ⋯	A005319
3	4, 40, 396, 3920, 38804, 384120, ⋯	A122652
4	4, 56, 780, 10864, 151316, 2107560, ⋯	4*A007655’
5	4, 72, 1292, 23184, 416020, 7465176, ⋯	A060645
6	4, 88, 1932, 42416, 931220, 20444424, ⋯	4*A077421
7	4, 104, 2700, 70096, 1819796, 47244600, ⋯	2*A174779
8	4, 120, 3596, 107760, 3229204, 96768360, ⋯	A068204
9	4, 136, 4620, 156944, 5331476, 181113240, ⋯	A202299’
10	4, 152, 5772, 219184, 8323220, 316063176, ⋯	4 * A078987
11	4, 168, 7052, 296016, 12425620, 521580024, ⋯	$\frac{1}{11}$* A004295’
12	4, 184, 8460, 388976, 17884436, 822295080, ⋯	A174772’
13	4, 200, 9996, 499600, 24970004, 1248000600, ⋯	A174776’
14	4, 216, 11660, 629424, 33977236, 1834141320, ⋯	
15	4, 232, 13452, 779984, 45225620, 2622305976, ⋯	$\frac{1}{15}$* A004297’
16	4, 248, 15372, 952816, 59059220, 3660718824, ⋯	
17	4, 264, 17420, 1149456, 75846676, 5004731160, ⋯	4 * A097316
18	4, 280, 19596, 1371440, 95981204, 6717312840, ⋯	$\frac{2}{3}$* A174773’
19	4, 296, 21900, 1620304, 119880596, 8869543800, ⋯	$\frac{2}{3}$* A174777’
20	4, 312, 24332, 1897584, 147987220, 11541105576, ⋯	

注：序列编号后带有 ’ 的在线整数数列百科全书序列表示删除了首项的在线整数数列百科全书序列。

[ACP] Andersen, K.、Carbone, L. 和 Penta, D. *Kac–Moody* 斐波那契数列、双曲黄金比例与实二次域，《数论与组合学杂志》第 2 卷第 3 期，245–278 页（2011 年）[CKMS] Carbone, L.、Kownacki, M.、Murray, S. H. 和 Srinivasan, S. 秩 *2 Kac–Moody* 代数的交换关系与结构常数，《代数杂志》，第

566，2021 443 476 1804 02308 卷（），第 – 页，arXiv：。

[ ]

F Feingold, A.、J. 一个双曲广义*Cartan*矩阵李代数与斐波那契数，《美国数学学会会刊》，第 80 卷第 3 期（1980 年 11 月），379–385 页[K] Kac, V.，《无限维李代数》，剑桥大学出版社，1990 年