arXiv:2601.00971v1 [math.RT] 2 Jan 2026

KAC–MOODY 群中的原可求和性

ABID ALI、LISA CARBONE、ELIZABETH JURISICH 和 SCOTT H. MURRAY

摘要。设 $\mathfrak{g}$ 是一个可对称化的 Kac–Moody 代数。我们描述标准分次 $\mathfrak{g}$-模 V，并利用它们构造完备化 $\widehat{V}$ 和 GL($\widehat{V}$) 中的原幺幂群 $\widehat{U}$。这些标准分次模包括伴随模、所有可积模、范畴 O 模以及对偶范畴 O$\widehat{\ }$ 模。我们证明，U 的元素都是原可求和级数，也就是说，对于每个 $k > 0$，它们都是商空间 $\widehat{V}/\prod_{j=k}^{\infty} V_j$ 上可求和级数的射影极限。我们明确构造了根子代数及其完备化，涵盖每一个根，包括虚根。我们还为虚根构造了完备根群，其元素也是作用于 V 上的原可求和级数$\widehat{\ }$。我们证明，这些群同构于以虚根空间的基元素为对应变量的幂级数群。

1. 引言

Kac–Moody 群是 Kac–Moody 代数的李群类比。这类群已有成熟的理论（例如参见 [Mar 18], [Tit85]）。这一理论在仿射情形下发展得最为完善[Gar80a]）。大多数构造都将 Kac–Moody 群实现为相应 Kac–Moody 代数的自同构。直到最近，许多 Kac–Moody 群的构造都没有明确纳入虚根向量的贡献（也就是说，李代数中平方范数非正的根向量）。

为说明描述虚根群时面临的根本障碍，我们先回顾可求和性的概念。若空间 V 上的算子无穷和 $\sum_n E_n$ 对所有 $y \in V$ [都能化为有限和 y，则称其为可求和$\sum_n E_n$Bou98, LL04]。回想一下，对于有限维半单李代数 $\mathfrak{g}$，单根向量 e_i 和 f_i 是伴随幂零的，也就是说，存在 n，使得 (ad(e_i))^n =(ad(f_i))^n = 0。因此，

$$\chi_{\alpha_i}(u) := \exp(u\,\mathrm{ad}(e_i)) \quad \text{and} \quad \chi_{\alpha_i}(u) := \exp(u\,\mathrm{ad}(e_i))$$

对于 $u \in \mathbb{C}$，它们是有限和，其中 exp(X) $:= 1 + tX + \frac{t^2}{2} X^2 + \cdots$ 一如往常。这些元素生成伴随群 G_{ad}，其元素是 $\mathfrak{g}$-自同构。现在考虑 $\mathfrak{g}$ 一个可对称化的 Kac–Moody 代数。单根向量 e_i 和 f_i 是局部ad-幂零的，也就是说，对于所有 $y \in \mathfrak{g}$，存在 $n = n(y)$，使得 (ad(e_i))^n(y) = (ad(f_i))^n(y) = 0。这意味着 $\chi_{\alpha_i}(u)$ 和 $\chi_{-\alpha_i}(u)$ 对于 $u \in \mathbb{C}$ 是可求和的。这再次保证 $\chi_{\pm\alpha_i}(u)$ 可以被视为 Aut($\mathfrak{g}$) 的一个元素，而它们生成的群是一个伴随 Kac–Moody 群 G_{ad}。给定一个表示 ρ，它作用在可积最高权 $\mathfrak{g}$-模 V 上，我们同样可以定义 Chevalley 群 G_V[CG03, Gar80a, KP85] 的 Kac–Moody 类比。

日期：2026年1月6日。**关键词：** Kac–Moody 代数、Kac–Moody 群。第一作者的研究部分得到了西蒙斯基金会“数学与物理科学——数学家合作资助”（奖项编号 961267）的支持。

要构造一种充分纳入虚根向量贡献的 Kac–Moody 群，事实证明是一项颇具挑战性的任务。如果 α 是一个正虚根，其根向量为x_α，那么 $\exp \rho(x_\alpha)$ 在模 V 上不可求和。

在本文中，我们针对一大类合适的模构造这类 Kac–Moody 群。我们研究带有分次函数 $f : Q \to \mathbb{Z}$ 的分次权模，这些模满足引理 3.1 的条件 (F1)–(F4)，其中 Q 是根格。我们称这类模为标准分次模。这类范围广泛的模包含许多 $\mathfrak{g}$的表示 V，包括范畴 O、对偶范畴 O 和伴随表示。我们回顾一下，范畴 O 中的不可约最高权模 $\mathfrak{g}$-模可积，当且仅当其最高权 λ 是支配整权（[Kac74], 第 10.1 节）。因此，范畴 O 包含许多不可积表示。尽管如此，我们的方法仍能针对这些表示构造 Kac–Moody 群。第 5 节将对此作更详细的讨论。

为了推广先前对 Kac–Moody 群的构造，我们的目标是得到一种群构造，其中包含与虚根向量相对应的显式元素。我们的方法是构造一种环境结构，使得形如 $\exp \operatorname{ad}(x_\alpha)$ 的无穷和有意义，其中 α 为虚根。受 [Kum12], 的方法启发，我们构造 $\mathfrak{g}$的正形式完备化 $\widehat{\mathfrak{g}}$：

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}^+$$

也就是说，对于相容的 $\mathfrak{n}^+ := \oplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ 分次，我们从直和转向无限直积（前者的元素是有限和）

$$\widehat{\mathfrak{n}}^+ := \prod_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha = \prod_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}_k,$$

（其元素是 无穷和），其中每个 $\mathfrak{g}_k$ 都是有限维的 1.

我们回顾一下，若一个群是有限维幺幂代数群的射影极限，则称其为原幺幂群；若它是有限维幂零代数群的射影极限，则称其为原幂零群。类似地，原幂零李代数是有限维幂零李代数的射影极限（更多详情见[Kum12] ）。

在第 4 节中，我们构造了一个完备原幺幂群 U，它是标准分次模 V 的完备化 V 的自同构群，其中该模取自 $\mathfrak{g}$。对于这些模，当 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 为虚根时，$\exp \rho(x_\alpha)$ 是原可求和的，其含义见 [CJM22] （参见命题 3.2）。也就是说，对于每个 $k > 0$，$\exp \rho(x_\alpha)$ 在商空间 $\widehat{V}/\prod_{j=k}^{\infty} V_j$ 上都是可求和的。

Rousseau [Rou16] 使 Mathieu [Mat89]和[Mar13] 构造完备 Kac–Moody 群的方法更加明确。 [Rou16] 中的构造与本文的构造相似。

在第5节中，我们将对应于虚根 α 的根代数 $\mathfrak{n}_\alpha$ 定义为包含根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的 $\mathfrak{g}$ 的最小子代数。这个定义不同于 [Mar18],中的定义，后者定义了一个更大的根代数。我们还将完备化 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha$ 定义为包含 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的最小完备子代数。

我们还在第5节中定义了与虚根 α相对应的完备根群 U_α 。我们证明，这些群是定义在相应虚根空间的一组基上的幂级数所构成的原幺幂群（见定理 5.6 的（5）），并且这些群的元素是作用于 V 上的原可求和级数（见定理 5.6 的（6））。）这一 U_α 定义与[Mar18] 构造的虚根群 $\mathfrak{U}_{(\alpha)}$ 有以下区别。首先，我们的群 U_α 是相对于一类一般的忠实表示来定义的；与之相反， [Mar18] 中的 $\mathfrak{U}_{(\alpha)}$ 是根据伴随表示来定义的

表示。其次，我们的群 $\widehat{U}_\alpha$ 是包含每个 α的 exp($\rho(\mathfrak{g}_\alpha)$) 的最小闭群（见定理 5.6 的（3））。 [Mar18] 中的群 $\mathfrak{U}_{(\alpha)}$ 更大，因为它包含虚根 α的整数$\widehat{}$倍所带来的贡献。当 V 是伴随表示时，对于每个虚根 α，我们都有 $U_\alpha \le \mathfrak{U}_{(\alpha)}$。虽然我们的定义与 [Mar18] 和 [Rou16], 中的定义略有不同，但我们的方法有一个优点：我们将虚根的完备根群实现为 Magnus 群（另见 [Mar13], 命题 7.10 和 [Mar18],例 8.89）。

接下来我们定义完备化

$$\widehat{B}_V := \langle H_V, \widehat{U}_V \rangle \quad \text{and} \quad \widehat{G}_V := \langle U_V^-, \widehat{B}_V \rangle$$

其中 H_V 是与 Cartan 子代数相关联的群，而 U_V^- 由对应于单根向量之负向的指数映射生成。群 G_V 与大多数其他 Kac–Moody 群构造不同，因为它包含正虚根向量的指数映射。在早期关于如此一般情形下 Kac–Moody 群的定义中（例如 [Tit87] 和 [CG03]），并非如此。关于仿射 Kac–Moody 代数在 p-adic 域上的虚根所对应群元素的贡献，以坐标形式表示的内容可见 [Gar80b，第 7] 节及 [BGKP14，第 4]节。我们的群构造直接涉及虚根的根向量，并且对于一般的可对称化 Kac–Moody 群，处理得更加明确。此外，我们对群元素的定义也可轻松推广到其他值得关注的域，包括非阿基米德局部域。当 $V\widehat{}$是 $\mathfrak{g}$的伴随表示时， G_V 与 Rousseau 构造的群相似 [Rou16]。与⊿[Rou16] 和 [GR08], 一样，我们预期 G_V 具有一个相关的建筑，其 Coxeter 群是该 Kac–Moody 群的 Weyl 群（见 [Rou16], 命题 3.16、推论 3.18）。从几何角度理解虚根向量所对应群元素在 Bruhat–Tits 建筑和 hovel 背景下的作用，将会很有意思。

作者感谢 Timothée Marquis、Shrawan Kumar 和 Guy Rousseau 提供有益的评论，并解释他们的工作。

2. KAC–MOODY 代数与 KAC–MOODY 群

本节回顾复数域 $\mathbb{C}$ 上 Kac–Moody 李代数和 Kac–Moody 群的基础理论。本节参考文献为 [Kac 90], [Kum12] 和 [MP95a]。

2.1. 广义卡当矩阵。 设 $I = \{1, 2, \ldots, \ell\}$ 是一个有限指标集。广义卡当矩阵 是一个 $\ell \times \ell$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{i,\, j \in I}$ 其元素属于 $\mathbb{Z}$，并满足

(C1) $$a_{ii} = 2,$$

(C2) $$a_{ij} \le 0 \quad \text{if } i \ne j,$$

(C3) $$a_{ji} = 0 \quad \text{if } a_{ij} = 0,$$

对所有 $i,\ j \in I$ 均成立。若存在正有理数 $d_1, \ldots\ldots, d_\ell$，使得矩阵 diag($d_1, \ldots\ldots, d_\ell$)$A$ 为对称矩阵，则广义卡当矩阵 A 是可对称化的 。

我们始终假设 A 是一个可对称化广义 Cartan 矩阵。令 $\mathfrak{h}$ 为一个 $\mathbb{C}$-向量空间，并令 〇、〇 ：$\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ 表示自然配对，即对于 $\varphi \in \mathfrak{h}^*$、 $h \in \mathfrak{h}$，有 $\varphi,\ h := \varphi(h)$。如 [Kac 90]，（$\mathfrak{h}$，$\Pi$，$\Pi^\vee$）中所述，若满足以下条件，则称其为 A 的一个实现：

(R1): $\mathfrak{h}$ has dimension $n := 2\ell - \operatorname{rank}(A)$,

(R2)： $\Pi = \{\alpha_1、\ldots\ldots、\ \alpha_\ell\} \subseteq \mathfrak{h}^*$ 和 $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee、\ldots\ldots、\ \alpha_\ell^\vee\} \subseteq \mathfrak{h}$ 是线性独立集；

(R3)：对于 $i,\ j \in I$，有 $\alpha_j,\ \alpha_i^\vee = \alpha_j(\alpha_i^\vee) = a_{ij}$。

我们将这些元素称为 α_i 单根和 $\alpha_i^\vee$ 单余根。每个可对称化广义 Cartan 矩阵都有一个实现 [Kac90]。

2.2. **Kac–Moody 代数**。与 [MP95a] 和 [Kac90 一样，定理 9.11], 给定一个实现 $(\mathfrak{h},\ \Pi,\ \Pi^\vee)$，相应的 *Kac–Moody* 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的李代数，其生成集为 $\mathfrak{h} \cup \{e_i,\ f_i \mid i \in I\}$，并满足以下定义关系：

(L1) $$[h, h'] = 0;$$

(L2) $$[h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i; \qquad [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i;$$

(L3) $$[e_i, f_i] = \alpha_i^\vee; \qquad [e_i, f_j] = 0;$$

(L4) $$(\operatorname{ad} e_i)^{-a_{ij}+1}(e_j) = 0; \qquad (\operatorname{ad} f_i)^{-a_{ij}+1}(f_j) = 0;$$

对于 $h,\ h' \in \mathfrak{h}$，以及 $i,\ j \in I$。

如果 A 是有限型，我们称之为有限型；如果 A 是正定的，则称 A 为仿射型，如果 A 是半正定但非正定的，则称 A 为不定型。特别地，当 A 是不定型，但每个真不可分解子矩阵均为有限型或仿射型时，我们称 A 为双曲型。

2.3. **根与 Weyl 群**。$\mathfrak{g}$ 的根是满足相应根空间 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ 非零的非零元素

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}$$

。注意，$0 \in \mathfrak{h}^*$ 不被视为根，但 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$是。单根 α_i 及其负根的根空间分别为 $\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}e_i$ 和 $\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbb{C}f_i$。每个根 α 都可以写成 $\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} k_i\alpha_i$ 的形式，其中 k_i 为整数，且要么全都 $k_i \geq 0$，此时 α 称为正根；要么全都 $k_i \leq 0$，此时 α称为负根。α 的高度为 $\operatorname{ht}(\alpha) := \sum_{i=1}^{\ell} k_i$，$\alpha$ 的重数为 $\operatorname{mult}(\alpha) := \dim(\mathfrak{g}_\alpha)$。我们用 Δ 表示根的集合，用 Δ^+ 表示正根的集合（相应地，用Δ^-表示负根的集合）。根格为 $Q := \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\Pi) \subseteq \mathfrak{h}^*$。

李代数 $\mathfrak{g}$ 具有根空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

以及三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

其中 $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ 和 $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha$，根据 [Kac90，定理 1.2]。

由于 A 是可对称化的，$\mathfrak{g}$ 存在一个非退化对称不变双线性形式 $(\bigcirc, \bigcirc)_{\mathfrak{g}}$，满足

(B1) $$(\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee)_{\mathfrak{g}} = d_i a_{ij},$$

(B2) $$(e_i, f_j)_{\mathfrak{g}} = \delta_{ij},$$

(B3) $$(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta)_{\mathfrak{g}} = 0 \quad \text{if } \alpha, \beta \in \Delta \text{ with } \alpha + \beta \neq 0,$$

(B4) $$(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha)_{\mathfrak{g}} = 0 \quad \text{if } \alpha \in \Delta$$

对于 $i,\ j \in I$。$(\bigcirc,\bigcirc)_{\mathfrak{g}}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制由此诱导出 $\mathfrak{h}^*$ 上的对称双线性形式 $(\bigcirc,\bigcirc) = (\bigcirc,\bigcirc)_{\mathfrak{h}^*}$，满足

$$(\alpha_i, \alpha_j) = d_i a_{ij}.$$

注意

$$\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = \alpha_i(\alpha_j^\vee) = a_{ij} = \frac{2d_i a_{ij}}{d_i a_{ii}} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}.$$

若根 $\alpha \in \Delta$ 满足 $(\alpha,\ \alpha) > 0$（分别为 $(\alpha,\ \alpha) \le 0$），则称其为实根（分别称为虚根）。我们用 Δ_{re}（分别用 Δ_{im}）表示所有实根（分别为虚根）的集合。我们还记 $\Delta_{\mathrm{re}}^{\pm} = \Delta_{\mathrm{re}} \cap \Delta^{\pm}$ 和 $\Delta_{\mathrm{im}}^{\pm} = \Delta_{\mathrm{im}} \cap \Delta^{\pm}$。

给定一个实根 α，我们将相应的余根 $\alpha^\vee$ 定义为 $\mathfrak{h}$ 中满足以下条件的唯一元素：　　t

$$\langle x, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

对所有 $x \in \mathfrak{h}^*$ 均成立。注意，这与上文对 $\alpha_i^\vee$ 的定义一致。每个余根 $\alpha^\vee$ 都是单余根的整数线性组合，因此属于余根格 $Q^\vee := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(\Pi^\vee) \subset \mathfrak{h}$。我们将关于 α 的反射定义为

$$w_\alpha : \quad \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*, \quad x \mapsto x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha.$$

单反射是 $w_i := w_{\alpha_i}$，对应于 $i \in I$。由单反射生成的群 $W \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ 称为***Weyl*** 群。$\mathfrak{h}^*$ 上的双线性形式 $(\bigcirc,\ \bigcirc)$ 是 W-不变的。根 α 是实根，当且仅当存在 $w \in W$ 使得 $w\alpha$ 是一个单根，因而 $\Delta_{\mathrm{re}} = W \cdot \Pi$ [Kac90]。由于对某个 $w \in W$ 和 $i \in I$ 有 $w \cdot \alpha = \alpha_i$，因此我们有 $w_\alpha = w w_i w^{-1} \in W$。群 W 保持集合 Δ_{re}、Δ_{im}^{+} 和 Δ_{im}^{-} 不变。

利用广义卡当矩阵 $A = (a_{ij})_{i,\ j \in I}$，我们定义考克斯特矩阵 $(c_{ij})_{i,\ j \in I}$ 如下

$$c_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 2 & \text{if } a_{ij}a_{ji} = 0, \\ 3 & \text{if } a_{ij}a_{ji} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 & \text{if } a_{ij}a_{ji} = 2, \\ 6 & \text{if } a_{ij}a_{ji} = 3, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Weyl 群 W 是一个***Coxeter*** 群，其表示为

$$W = \langle w_1, \ldots, w_\ell \mid (w_i w_j)^{c_{ij}} = 1 \text{ for } i, j \in I \rangle.$$

对于 $w \in W$，长度最小的字 $w = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}$ 称为 w 的约化字。我们称 $\ell(w) := k$ 为 w 的长度。

2.4. 权模。存在满足 $\omega_i,\ \alpha_j^\vee = \delta_{ij}$（对 $i,\ j \in I$）的元素 $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$。我们称 $\{\omega_i \mid i \in I\}$ 为一组基本权。若元素 $\mu \in \mathfrak{h}^*$ 满足对所有 $i \in I$ 均有 $\mu,\ \alpha_i^\vee \neq 0$，则称其为正则。

$\mathfrak{h}^*$ 的子群 P 称为权格，如果

(W1)：$Q \subseteq P$，(W2)：$\mu,\ \alpha_i^\vee \in \mathbb{Z}$ 对所有 $\mu \in P$ 和 $i \in I$，(W3)：P 包含一个在正则性方面极小的权重，(W4)：P 包含一组基本权 $\{\omega_i \mid i \in I\}$。

如果基本权可以扩充为一组

$$\{\omega_1, \ldots, \omega_\ell, \omega_{\ell+1}, \ldots, \omega_n\}$$

它既是 P 的 $\mathbb{Z}$-基，也是 $\mathfrak{h}^*$ 的 $\mathbb{C}$-基，那么我们称 P 为一个受限权格。容易看出，对每个 $\mathfrak{g}$ 都存在一个受限权格。注意，若 $\det(A) \neq 0$，则权格

$$P = \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for all } i \in I\}$$

是唯一的，且基本权集是 P 的一个 $\mathbb{Z}$-基。我们始终假设 P 是一个受限权格（参见 [MP95a] 的第 6.1 节）。

若对所有 $i \in I$，均有 λ，$\alpha_i^\vee \geq 0$，则称元素 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 为支配的。我们将支配元素的集合记为 P 记作 P^+，并写作 $Q^+ = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$。$\mathfrak{h}^*$ 上的支配序 $\leq$ 定义如下：当 $\lambda - \mu \in Q^+$ 时，$\mu \leq \lambda$。设 V 为一个 $\mathfrak{g}$- 模，其定义同态为 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$。$\mu \in \mathfrak{h}^*$ 的权空间为

$$V_\mu := \{v \in V \mid \rho(h)(v) = \mu(h)v \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\},$$

而 V 的权集合为

$$\mathrm{wts}(V) := \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid V_\mu \neq 0\}.$$

一个非零元 称为 V_μ 的权向量，其权重为 μ。若 V 可对角化，则称其

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{wts}(V)} V_\mu.$$

权空间均为有限维的可对角化模 V 称为权模。回忆一下，若对每个 $v \in V$，都存在自然数 $n = n(x, v)$ 使得 $\rho(x)^n(v) = 0$，则称 $x \in \mathfrak{g}$ 在 V 上局部幂零。若 V 是权模，且对所有 $i \in I$，e_i 和 f_i 在 V 上均局部幂零，则称 V 为可积模。若 $\det(A) \neq 0$ 且 V 可积，则 $\mathrm{wts}(V) \subseteq P$，如 [Kac90] 所示。

基本群 P/Q 是一个阿贝尔群；当 $\det(A) = 0$ 时它是无限群，否则其阶为 $|\det(A)|$ [CS13]。V 的权格为 $L_V := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{wts}(V))$。此外，$V$ 忠实当且仅当 $Q \subseteq L_V$。因此，当 V 是忠实的可积模时，L_V/Q 是 P/Q 的子群。

伴随模 $V = \mathfrak{g}$ 在 $\rho = \mathrm{ad}$ 下是一个忠实的可积模，其 $\mathrm{wts}(V)$ 为 $= \Delta$。

若 V 是一个最高权模，其最高权为 λ，且含有一个权为 λ 的权向量 v_λ（即最高权向量），满足 $\mathfrak{n}^+ \cdot v_\lambda = 0$，并且由 v_λ 生成的 $\mathfrak{n}^-$-模就是整个 V，则称之为最高权模。权 λ 满足：对所有 $\mu \in \mathrm{wts}(V)$，都有 $\mu \leq \lambda$。对每个 $\lambda \in P^+$，都存在唯一的不可约最高权模，且该模是可积的 [Kac90]。更一般地，若 V 是一个范畴O模 [MP95b]，则它是一个权模，并且存在有限多个权 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in P$，使得 V 的每个权都小于或等于其中至少一个 λ_i。

另一方面，若 V 是一个最低权模，其最低权为 λ，且含有一个最低权向量 v_λ，满足 $\mathfrak{n}^- \cdot v_\lambda = 0$，并且由 $\mathfrak{n}^+ \cdot v_\lambda$ 生成的模就是整个 V，则称之为最低权模。更一般地，若 V 是一个对偶范畴 O模，则它是一个权模，并且存在有限多个权 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in P$，使得 V 的每个权都大于或等于其中至少一个 λ_i。

我们始终假设 P 是受限权格，且 V 是权重 $\mathfrak{g}$-模，其所有权都包含在 P 中。因此，V 的权重都是整数的，也就是说，对所有 $\mu \in \mathrm{wts}(V)$ 和 $i \in I$，μ，$\alpha_i^\vee \in \mathbb{Z}$。

2.5. **Kac–Moody–Chevalley 群**。假设 V 是可积的。那么可得 t

$$\chi_{\alpha_i}(t) := \exp(t\rho(e_i)) = 1 + t\rho(e_i) + \frac{t^2}{2}(\rho(e_i))^2 + \cdots \quad \text{and}$$

$$\chi_{-\alpha_i}(t) := \exp(t\rho(f_i)) = 1 + t\rho(f_i) + \frac{t^2}{2}(\rho(f_i))^2 + \cdots$$

对于 $t \in \mathbb{C}$，它们是可求和的，也就是说，作用于 V 的元素时，它们会化为有限和。因此，它们定义了一般线性群 GL(V) 中的元素。我们将幺幂群 U_V^+和 U_V^-定义为

$$U_V^{\pm} := \langle \chi_{\pm\alpha_i}(t) \mid i \in I, t \in \mathbb{C} \rangle.$$

给定 $\varpi \in P$ 和 $t \in \mathbb{C}^\times$，我们在 $V = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{wts}(V)} V_\mu$ 上定义 $h_\varpi(t)$ 为

$$h_\varpi(t) \cdot v = t^{\langle \mu, \varpi \rangle} v$$

对于 $v \in V_\mu$。那么 $h_\varpi(t)$ 也属于一般线性群 GL(V)，我们定义环面群环面群

$$H_V = \langle h_\varpi(t) \mid \varpi \in L_V, t \in \mathbb{C}^\times \rangle.$$

它们共同生成一个*Kac–Moody–Chevalley* 群

$$G_V := \langle H_V, U_V^+, U_V^- \rangle.$$

对于 $i \in I$ 和 $s \in \mathbb{C}^\times$，令

$$\widetilde{w}_i(s) = \chi_{\alpha_i}(s)\chi_{-\alpha_i}(-s^{-1})\chi_{\alpha_i}(s),$$

并令 $\widetilde{w}_i := \widetilde{w}_i(1)$。我们将由所有 $i \in I$ 对应的 $\widetilde{w}_i$ 生成的 G_V 的子群记作 W。注意，$WH_V/H_V \cong W$通过映射 $\widetilde{w}_i H_V \mapsto w_i$。每个 $w \in W$ 都可以写成约化字 $\widetilde{w_{j_1} w_{j_2} \dots w_{j_m}}$，相应的元素记作 $\widetilde{w} = \widetilde{w}_{j_1}\widetilde{w}_{j_2}\dots\widetilde{w}_{j_m} \in W$.

命题 2.1。每个 $\widetilde{w}$ 都不依赖于 w的约化字的选择。

证明。根据 [Tit69]，我们可以仅使用辫关系 $w_i w_j w_i \cdots = w_j w_i w_j \cdots$，将 w 的任一约化字变换为 w 的任一其他约化字，其中两边的长度均为 c_{ij}。这些关系只有在 $c_{ij} = 2$、3、4、6 时才非平凡，因此只需分别证明 $\widetilde{w}_i\widetilde{w}_j\widetilde{w}_i\cdots = \widetilde{w}_j\widetilde{w}_i\widetilde{w}_j\cdots$在 Cartan 型为 A_1A_1、A_2、B_2、G_2的子群中成立。这是 [Spr09，命题 9.3.2]。□

引理 2.2 ([Kac90], 引理 3.8(a))。我们有 $\widetilde{w} \cdot V_\mu = V_{w\mu}$，因此 $\dim V_\mu = \dim V_{w\mu}$。

推论 2.3。若 V是 $V = \mathfrak{g}$的伴随表示，则有 权(V) = Δ，且对 $\alpha \in \Delta$有 $V_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$。因此 $\widetilde{w} \cdot \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\alpha}$，从而 重数($\alpha$) = 重数($w\alpha$)。

对于每个 $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}$，我们固定 $w \in W$使得 $\alpha = w\alpha_i$，并记作 $x_\alpha = \widetilde{w}e_i$。现在，根空间 $\mathfrak{g}_\alpha = \widetilde{w} \cdot \mathbb{C}e_i$，我们固定基元素 $x_\alpha = \widetilde{w}e_i$ 使得 $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}x_\alpha$。定义 $\chi_\alpha(t)$:=exp($t\rho(x_\alpha)$)。于是

$$\chi_\alpha(t) = \exp(t\rho(\widetilde{w}e_i)) = \widetilde{w}\chi_{\alpha_i}(t)\widetilde{w}^{-1} \in G_V.$$

实根 α 的 根群为

$$U_\alpha = \{\chi_\alpha(t) \mid t \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^+,$$

其中 $\mathbb{C}^+$ d 表示 $\mathbb{C}$ 的加法群。我们在第5节讨论虚根群 .

定理 2.4 ([CER08])。对于忠实可积模 V，U_V^+独立于 V 的选择，而G_V仅取决于 L_V。

因此，当 $L = L_V$ 时，我们将 $U^{\pm}$ 记作 $U_V^{\pm}$，将 G_L 记作 G_V。

3. 模的完备化与原可和性

在本节中，我们构造 Kac–Moody 代数及其模的完备化，然后在这些完备化上定义原可求和映射（第 3.4 小节）。设 $I = \{1、\ldots\ldots、\ell\}$ 是一个有限指标集，设$A = (a_{ij})_{i,\ j\in I}$ 是一个可对称化广义 Cartan 矩阵，设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ 是A的 Kac–Moody 代数，并设 P是 $\mathfrak{g}$ 的一个受限权格。设 V是 $\mathfrak{g}$ 的一个权模，其 wts(V) 为 $\subseteq P$。

3.1. 分次代数与模。首先，我们回顾分次李代数与模的一般理论 [NR66]。固定一个格 L。回顾一下，域 $\mathbb{C}$ 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 称为L-分次的，如果

$$\mathfrak{L} = \bigoplus_{a\in L} \mathfrak{L}_a,$$

其中 $[\mathfrak{L}_a, \mathfrak{L}_b] \subseteq \mathfrak{L}_{a+b}$，且对所有 $a,\ b \in L,\ \mathfrak{L}_a$ 都是有限维的。子代数 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$ 称为分次子代数，如果

$$\mathfrak{M} = \bigoplus_{a\in L} \mathfrak{M}_a$$

其中 $\mathfrak{M}_a = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}_a$。如果 $\mathfrak{M}$ 还是 $\mathfrak{L}$中的一个理想，那么 $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ 是分次的，且 $(\mathfrak{L}/\mathfrak{M})_a := \mathfrak{L}_a/\mathfrak{M}_a$。

固定一个李代数 $\mathfrak{L}$，它 对某个格 L而言是 L 分次的。L 分次模是一个 $\mathfrak{L}$-模 V，满足

$$V = \bigoplus_{a\in L} V_a$$

其中，对于所有 $a,\ \mathfrak{L}_a \cdot V_b \subseteq V_{a+b}$ 和 V_a 都是有限维的，$b \in L$。

每个分量 $\mathfrak{L}_a$ 都具有有限维 $\mathbb{C}$-向量空间的拓扑，该拓扑在 $\mathfrak{L} = \oplus_{a\in L} \mathfrak{L}_a \subseteq \prod_{a\in L} \mathfrak{L}_a$ 上诱导出乘积拓扑。我们在 V 上也得到类似的拓扑。进而，这些拓扑在 $\mathrm{End}_{\mathfrak{L}}(V)$ 和 $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{L}}(V)$ 上诱导出拓扑。所有这些拓扑空间都是序列 [Mun99], ，因此我们可以使用序列或级数的极限来证明我们的拓扑学结果。

假设 M 是另一个格，并且 $f : L \to M$ 是一个同态，具有如下性质：对于每个 $m \in M$，除有限多个 $a \in f^{-1}$ 外，对所有 $a \in f^{-1}$ 均有 $\mathfrak{L}_a = 0$(m)。于是，通过令下式成立，我们得到一个 M 分次 $\mathfrak{L} = \oplus_{m\in M} \mathfrak{L}_m$

$$\mathfrak{L}_m = \bigoplus_{a\in f^{-1}(m)} \mathfrak{L}_a,$$

对所有 $m \in M$ 均成立。类似地，如果 $V_a = 0$ 对除有限多个 $a \in f^{-1}(m)$ 之外的所有情况均成立，那么我们得到 V 的一个 M 分次，其中 $V_m = \oplus_{a\in f^{-1}(m)} V_a$。

3.2. 的分次以及 V。现在考虑 Kac–Moody 代数 $\mathfrak{g}$ 和权模 V，其中 wts(V) $\subseteq P$。于是 $\mathfrak{g}$ 按根格 Q 分次。此外，$V = \oplus_{\mu\in L_V} V_\mu$，其中 L_V = 张成 $\mathbb{Z}$(wts(V))。因此，我们可以将 $\mathfrak{g}$ 和 V 视为在 $M_V :=$ 上的分次，其中 $\mathbb{Z}(Q,\ L_V)$。根据 [Ste16，引理 27]，V 是忠实的，当且仅当 $Q \subseteq L_V$，当且仅当 $M_V = L_V$。

我们发现，为 $\mathfrak{g}$ 和 V赋予一个 $\mathbb{Z}$-分次很方便，因此需要一个合适的函数 $f : M_V \to \mathbb{Z}$。现在我们构造一个映射 f，它适用于一大类权模（见引理 3.1）。首先考虑通常的高度函数 ht $: \Delta \to \mathbb{Z}$，其中 Δ是根的集合。它可以扩张为一个 $\mathbb{Q}$-线性映射$f' : \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\Delta) \to \mathbb{Q}$，定义如下：

$$f'(\alpha) = \sum_{i\in I} a_i$$

其中 $\alpha = \sum_{i\in I} a_i\alpha_i$。现在将 f'扩张为一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(P) \to \mathbb{Q}$（扩张的选取并不重要）。现在令 $q_j = f'(b_j)$，其中 $\{b_j\}$ 是 M_V 的某个基。我们可以选取一个正整数 a，使得对所有 j都有$aq_j \in \mathbb{Z}$。现在令 f为 af'在 P上的限制。注意，对于 $\alpha \in \Delta$，有 $f(\alpha) = a\,\mathrm{ht}(\alpha)$。如果$L_V \subseteq Q$，那么可以取 $a = 1$。当 $\det(A) \neq 0$时，可以取 a 为 $|\det(A)|$的一个因子。
现在我们写作

$$\Delta_m := \{\alpha \in \Delta \cup \{0\} \mid f(\alpha) = m\}, \qquad \mathrm{wts}_m(V) := \{\mu \in \mathrm{wts}(V) \mid f(\mu) = m\}.$$

若 V是伴随表示，则可取 $f = \mathrm{ht}$ 和 $\mathrm{wts}_m(V) = \Delta_m$.

引理 3.1。设 V属于范畴 $\mathcal{O}$、属于反范畴$\mathcal{O}$，或为伴随模。那么如上所述的映射 f 满足以下条件：

(F1) f 是 $\mathbb{Z}$-线性的，(F2) 对每个 $m \in \mathbb{Z}$， Δ_m 和 $\mathrm{wts}_m(V)$ 都是有限集，(F3) 若 $m > 0$，则 $\Delta_m \subseteq \Delta^+$ $\Delta_0 = \{0\}$；若 $m < 0$，则 $\Delta_m \subseteq \Delta^-$，(F4) 对于每个$m \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{wts}_m(V)$ 中的权在支配序下两两不可比。

注意，(F1) 和 (F2) 是第 3.1 小节中关于 $\mathfrak{g}$ 和 V成为 $\mathbb{Z}$-分次的条件，其中

$$\mathfrak{g}_m := \bigoplus_{\alpha\in\Delta_m} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{and} \quad V_m := \bigoplus_{\mu\in\mathrm{wts}_m(V)} V_\mu$$

对所有 $m \in \mathbb{Z}$均成立。若 V是一个权模，满足 $\mathrm{wts}(V) \subseteq P$，且存在满足 (F1)– (F4) 的函数 $f : P \to \mathbb{Z}$，则称 V为标准分次模。我们不知道每个满足 $\mathrm{wts}(V) \subseteq P$的权模是否都是标准分次模。

3.3. **.....的完备化 $\mathfrak{g}$ 和 V**。设 $\mathfrak{g}$ 是一个 Kac–Moody 代数， V 是 $\mathfrak{g}$的一个标准分次模。注意，

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0, \qquad \mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{m>0} \mathfrak{g}_m, \qquad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{m<0} \mathfrak{g}_m.$$

对于 $m \in \mathbb{Z}$，定义

$$\mathfrak{n}_m := \bigoplus_{k\geq m} \mathfrak{g}_k \quad \text{and} \quad N_m := \bigoplus_{k\geq m} V_k.$$

注意，每个 N_k 都是一个 $\mathfrak{n}^+$-模，而 $\mathfrak{n}_k$ 对于 $k \geq 0$ 是一个李代数，但对于 $k < 0$ 只是一个 $\mathfrak{n}^+$-模。我们有一列递降的理想

$$\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}_1 \geq \mathfrak{n}_2 \geq \cdots \geq \mathfrak{n}_i \geq \cdots.$$

对于所有 $k \geq 1$，由引理 3.1(F2) 可知 $\mathfrak{n}^+/\mathfrak{n}_k$ 是有限维的；由引理 3.1(F4) 可知 $\mathfrak{n}_k/\mathfrak{n}_{k+1}$ 在 $\mathfrak{n}^+/\mathfrak{n}_{k+1}$ 中是中心的。由于 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{n}_k = 0$， $\mathfrak{n}^+$ 是剩余幂零的（参见 [Kum12]）。
我们将（正的形式）.....的完备化 $\mathfrak{g}$ 和 V定义为

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{m<0} \mathfrak{g}_m \oplus \prod_{m\geq 0} \mathfrak{g}_m \quad \text{and} \quad \widehat{V} = \bigoplus_{m<0} V_m \oplus \prod_{m\geq 0} V_m$$

分别定义。还定义

$$\widehat{\mathfrak{n}}^+_m := \prod_{k\geq m} \mathfrak{g}_k \quad \text{and} \quad \widehat{N}_m := \prod_{k\geq m} V_k$$

^对 $m \in \mathbb{Z}$，并令 $\widehat{\mathfrak{n}}^+ := \widehat{\mathfrak{n}}_1^+$。再次注意，每个 N_m 都是一个 $\widehat{\mathfrak{n}}^+$-模，而对于 $m \geq 0$，$\widehat{\mathfrak{n}}_m$ 是一个李代数，但对于 $m < 0$，它只是一个 $\widehat{\mathfrak{n}}^+$-模。注意，当集合 $f(\mathrm{wts}(V))$ 有上界时，$\widehat{V} = V$。特别地，这对所有 O 类模都成立，但对反 O 类模不成立。当 V^是 $\mathfrak{g}$的伴随模时，V 自然同构于 $\widehat{\mathfrak{g}}$的伴随模。我们将 ρ 从作用于 V上的 $\mathfrak{g}$ 的^表示扩展为作用于 V上的 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的表示。

我们有一个递降理想链

$$\widehat{\mathfrak{n}}^+ = \widehat{\mathfrak{n}}_1 \geq \widehat{\mathfrak{n}}_2 \geq \cdots \geq \widehat{\mathfrak{n}}_k \geq \cdots$$

使得 $\widehat{\mathfrak{n}}/\widehat{\mathfrak{n}}_k$ 与 $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_k$ 同构，其中 $k \geq 0$。因此

$$\widehat{\mathfrak{n}}^+ \cong \varprojlim_{i \geq 1} \mathfrak{n}^+/\mathfrak{n}_i,$$

$\mathfrak{n}^+$的 原幂零完备化。因此 $\widehat{\mathfrak{n}}^+$ 是原幂零的，且 $\mathfrak{n}^+ \subseteq \widehat{\mathfrak{n}}^+$。由此，我们对 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的定义与该定义一致

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}^+$$

^出自 [Kum12，IV.4]节。此外，对每个 $m \in \mathbb{Z}$，N_m 在 $\widehat{\mathfrak{n}}^+$ 意义下是一个原模，见 [Kum12，定义 IV.4.23]。

我们注意到，$\widehat{V}$可以视为一个 $\mathfrak{g}$-模，也可以视为一个 $\widehat{\mathfrak{g}}$-模。如果 V可积，那么 $G_V \subseteq \mathrm{GL}(V) \subseteq \mathrm{GL}(\widehat{V})$。对于伴随表示 $V = \mathfrak{g}$，我们有 $G_{\mathrm{ad}} := G_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Aut}(\widehat{\mathfrak{g}})$。

^**3.4. 原可求和映射**。完备化 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 和 V继承了来自 $\prod_{m\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_m$ 和$\prod_{m\in\mathbb{Z}} V_m$的乘积拓扑，该拓扑在 $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathfrak{g}})$ 和 $\mathrm{GL}(\widehat{V})$ 上诱导出拓扑，而它们也都是序列拓扑空间。记 π_m 为投影 $\widehat{V} \to V_m$。对于 $v \in \widehat{V}$，记 $v_m := \pi_m v \in V_m$，并令 $N = N(v)$为 v的阶^，也就是说，是满足 $v_N \neq 0$的最小整数。于是 $v \in V$有唯一的表达式

$$v = \sum_{m=N}^{\infty} v_m.$$

类似地，将投影记为 $\pi_m\ \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}_m$，使得每个 $x \in \widehat{\mathfrak{g}}$ 对于 $N = N\ (x)$ 和 $x_m = \pi_m x$ 都有唯一的表达式 $x = \sum_{m=N}^{\infty} x_m$。

设 J 为一个可数指标集，并设 $\{\vartheta_j\}_{j\in J}$ 为一族线性算子 $\widehat{V} \to \widehat{V}$，满足$\vartheta_j(\widehat{N}_k) \subseteq \widehat{N}_k$，对所有 $j \in J$，$k \in \mathbb{Z}$ 均成立。设 $\vartheta_{j,\,k}$ 为诱导映射 $\widehat{V}/\widehat{N}_k \to \widehat{V}/\widehat{N}_k$。若对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，$\{\vartheta_{j,\,k}\}_{j\in J}$ 都是可求和的，我们称 $\{\vartheta_j\}_{j\in J}$为原可求和^。换言之，对于所有 $v \in \widehat{V}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $\pi_m(\vartheta_k(v)) \neq 0$ 的 $m \leq k$ 的数量有限。可求和性保证 $\sum_{j\in J} \vartheta_{j,\,k}$ 是 $\widehat{V}/\widehat{N}_k$ 上定义良好的自同态。因此，我们可以在 $\widehat{V}$ 上定义一个自同态:

$$\sum_{j\in J} \vartheta_j := \varprojlim_{k\geq 1} \sum_{j\in J} \vartheta_{j,k}.$$

更具体地说，

$$\pi_m \sum_{j\in J} \vartheta_j(v) := \sum_{j\in J} \pi_m \vartheta_j(v)$$

对所有 $v \in \widehat{V}$。注意，$\widehat{V}/\widehat{N}_k \cong V/N_k$，这是一个有限维或可数维向量空间。（关于原可和性的更一般定义，请参见 [CJM22，第 3.1] 小节。）

For 为方便起见，我们从右向左读取乘积符号。例如 le,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\exp\left(\rho\left(x_k\right)\right) := \cdots\exp\left(\rho\left(x_3\right)\right)\exp\left(\rho\left(x_2\right)\right)\exp\left(\rho\left(x_1\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\rho\left(x_n\right)\right)\cdots\exp\left(\rho\left(x_2\right)\right)\exp\left(\rho\left(x_1\right)\right).$$

下面的结果现在显而易见：

命题 3.2. 设 $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \widehat{\mathfrak{n}}^+$ 对所有 $k \geq 1$均满足 $x_k \in \mathfrak{g}_k$。那么 $\exp(\rho(x))$和 $\prod_{k=n}^{\infty}\exp(\rho\left(x_k\right))$可展开为原可求和级数，其公式如下：

$$\pi_k\left(\exp(\rho(x))\cdot v\right) = v_k + \sum_{n=1}^{k-N(v)} \sum_{\substack{m,n_1,\ldots,n_m>0,\\ j_1,\ldots,j_m>0,\ s.t.\\ n_1j_1+\cdots+n_mj_m=n}} \frac{x_{j_m}^{n_m}\cdots x_{j_1}^{n_1}}{n_1!\cdots n_m!}\cdot v_{k-n}, \tag{1}$$

$$\pi_k\left(\prod_{j=n}^{\infty}\exp\left(\rho\left(x_j\right)\right)\cdot v\right) = v_k + \sum_{n=1}^{k-N(v)} \sum_{\substack{m,n_1,\ldots,n_m>0,\\ 0<j_1<\cdots<j_m,\ s.t.\\ n_1j_1+\cdots+n_mj_m=n}} \frac{x_{j_m}^{n_m}\cdots x_{j_1}^{n_1}}{n_1!\cdots n_m!}\cdot v_{k-n}, \tag{2}$$

对于 $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$和 $v = \sum_{i=N(v)}^{\infty} v_i$。因此，它们定义了一般线性群$(\widehat{V})$中的元素。特别地，$\exp($伴随表示 $(x))$和 $\prod_{k=1}^{\infty}\exp($伴随表示$(x_k))$ 定义了自同构群 $(\widehat{\mathfrak{g}})$中的自同构。

证明。 这些公式显而易见，并表明这些级数是原可求和的。在伴随表示的情形下，这些映射是自同构这一事实，是指数级数的一项标准性质。□

请注意， $\widehat{\mathfrak{n}}^+$ 并非通常 可交换，因此 $\prod_{k=1}^{\infty}\exp\left(\rho\left(x_k\right)\right)$ 通常不等于 $\exp\left(\rho(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)$).

引理 3.3。 映射 $\widehat{\mathfrak{n}}^+ \to$ 一般线性群$(\widehat{V})$ 由下式给出

$$x \mapsto \exp(\rho(x)) \quad \textit{and} \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mapsto \prod_{k=1}^{\infty}\exp(\rho(x_k))$$

是连续的。

证明。 命题 3.2 中给出的公式表明，这些映射限制在子空间 $\mathfrak{g}_k$ for $k \geq 1$ 上时是连续的。因此，这些映射在 $\widehat{\mathfrak{n}}^+ = \prod_{k=1}^{\infty}\mathfrak{g}_k$ 上连续。□

现在我们可以将 U_V^+ 的定义扩展到 V 是非可积标准分次模的情形：

$$U_V^+ := \langle\chi_{\alpha_i}(t) \mid i \in I,\, t \in \mathbb{C}\rangle \subseteq \mathrm{GL}(\widehat{V}).$$

H_V 的定义也可以扩展到这种情形，但我们无法扩展 U_V^- 或 $G_V\widehat{\ }$的定义，因为 V 是一个正完备化。

4. 完备群

如上所述， $\mathfrak{g}$ 是一个具有可对称化Cartan矩阵 A的Kac–Moody 代数。令 V为一个具有分次函数 $f : P \to \mathbb{Z}$的标准分次$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$模。回顾 $V = \sum_{j\in\mathbb{Z}} V_j$、 $V = \sum_{j<0} V_j \oplus \prod_{j\geq 0} V_j$和 $N_k = \curvearrowright\prod_{j\geq k} V_j \subseteq V$。

现在我们引入一些来自量子场论严格表述的有用术语（例如参见 [GJ87]）：

定义4.1。令 m 为一个整数，令 φ 为一个线性算子 $V \to V$。

(1) 如果对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，φ 满足 $\varphi(V_k) \subseteq V_{k+m}$，则称 φ 为一个 m-移位算子。(2) 如果对于所有 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $v \in V_k$，φ 满足 $\varphi(v) \in v + N_{k+1}$，则称 φ 为一个涂抹算子。

注意，对于 $x_m \in \mathfrak{g}_m$，$\rho(x_m)$ 是一个 m-移位算子，而对于 $x \in \widehat{\mathfrak{n}}^+$，$\exp(\rho(x))$ 是一个涂抹算子。令 φ 为一个涂抹算子，并令 $\varphi_{jm} := \pi_{j+m} \bigcirc \varphi|_{\widehat{V}_j} : V_j \to V_{j+m}$。于是我们可以定义一个 m-移位算子

$$\varphi_m : \quad \widehat{V} \to \widehat{V}, \quad v := \sum_{j=N}^{\infty} v_j \mapsto \sum_{j=N}^{\infty} \varphi_{jm}(v_j).$$

容易看出 对于 $m < 0$、$\varphi_0 = 1_{\widehat{V}}$，$\{\varphi_m\}_m$ 是原可求和的，并且

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m.$$

也就是说，每个涂抹算子都可以写成首项为 1 的移位算子的原可求和级数。

4.1. 完备原幺幂群。我们将完备原幺幂群 U_V^+ 定义为 U_V^+在一般线性群($\widehat{V}$)中的闭包。这个定义直观但不够明确，因此我们先考虑群

$$\widehat{U}_{V,n}^+ = \left\{ \prod_{k=n}^{\infty} \exp\left(\rho\left(x_k\right)\right) \mid x_k \in \mathfrak{g}_k \right\}$$

其中 n 为正整数。我们最终将证明，对于 V 忠实的情形，U_V^+ 与$U_{V,1}^+$ 相同（推论 4.11）。注意，$U_{V,1}^+ \supseteq U_{V,2}^+ \supseteq \cdots$。

以下标准结果可由 Baker–Campbell–Hausdorff公式形式地推出（例如参见 [Ste04，第 32] 页）：

引理 4.2。若 $x, y \in \widehat{\mathfrak{n}}^+$，则

$$\exp(\rho(x)) \exp(\rho(y)) = \exp(\rho(z))$$

for

$$z = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}\left([x, [x, y]] - [y, [x, y]]\right) + \cdots \in \widehat{\mathfrak{n}}^+$$

所有系数均属于 $\mathbb{Q}$。

下面这个描述 $U_{V,n}^+$ 及其陪集的引理，其证明与 [CJM22] 中引理 3.11 的证明类似。

命题 4.3. 对于正整数 n 和 m，我们有：

(1) $\widehat{U}_{V,n}^+ = \exp\left(\rho\left(\widehat{\mathfrak{n}}_n^+\right)\right)$. (2) $\exp(\rho(x)) \widehat{U}_{V,n+1}^+ = \exp\left(\rho(x + \widehat{\mathfrak{n}}_{n+1}^+)\right)$，对于 $x \in \mathfrak{g}_n$。

(3) $\exp(\rho(x + y)) \widehat{U}_{V,n+1}^+ = \exp(\rho(x)) \exp(\rho(y)) \widehat{U}_{V,n+1}^+$，对于 $x, y \in \mathfrak{g}_n$。 12

(4) $\exp(\rho([x,y]))\,\widehat{U}^+_{V,n+m+1} = (\exp(\rho(x)),\exp(\rho(y)))\,\widehat{U}^+_{V,n+m+1}$, *for* $x\in\mathfrak{g}_n$ *and* $y\in\mathfrak{g}_m$.

Proof. 假设 $x\in\widehat{\mathfrak{n}}^+_n$。取 $x_n\in\mathfrak{g}_n$，使得 $x-x_n\in\widehat{\mathfrak{n}}^+_{n+1}$。因此，引理 4.2 告诉我们

$$x^{(n+1)} = x - x_n + \frac{1}{2}[x,-x_n] + \cdots \in \widehat{\mathfrak{n}}^+_{n+1}$$

使得

$$\exp(\rho(x))\exp(\rho(-x_n)) = \exp\left(\rho\left(x^{(n+1)}\right)\right)$$

因此

$$\exp(\rho(x)) = \exp\left(\rho\left(x^{(n+1)}\right)\right)\exp(\rho(x_n)).$$

由归纳可得

$$\exp(\rho(x)) = \exp\left(\rho\left(x^{(N+1)}\right)\right)\prod_{\ell=n}^{N}\exp(\rho(x_l))$$

其中有 $x^{(N+1)}\in\widehat{\mathfrak{n}}^+_{N+1}$。由乘积拓扑的定义可知

$$\lim_{N\to\infty}\exp\left(\rho\left(x^{(N+1)}\right)\right) = 1,$$

因此 $\exp(\rho(x)) = \prod_{\ell=n}^{\infty}\exp(\rho(x_\ell))\in\widehat{U}^+_n$. 因此 $\exp(\rho(\widehat{\mathfrak{n}}^+_n))\subseteq\widehat{U}^+_n$，从而证明了 (1)　　d.

(2) 和 (3) 现在显而易见，而 (4) 由引理 4.2 得出。 □

推论 4.4。 $\exp\circ\rho$ 在加法群 $\widehat{\mathfrak{n}}^+_n/\widehat{\mathfrak{n}}^+_{n+1}$ 与乘法群 $\widehat{U}^+_{V,n}/\widehat{U}^+_{V,n+1}$之间诱导出一个群同构。

证明。 命题 4.3(3) 和 (4)。 □

推论 4.5。 $\bigcap_{k=1}^{\infty}\widehat{U}_{V,k} = 1$，因此 $\widehat{U}_{V,1}$ 是剩余幂零的。

证明。 应用命题 4.3(1)。 □

给定 $\alpha,\ \beta\in\Delta$，我们将根张成 定义为 $\Sigma(\alpha,\ \beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Sigma_n$，其中 Σ_n 按归纳方式定义：

$$\Sigma_1 = \{\alpha+\beta\}\cap\Delta; \qquad \Sigma_n = \{\gamma+\alpha,\gamma+\beta \mid \gamma\in\Sigma_{n-1}\}\cap\Delta.$$

注意，　$\Sigma(\alpha,\ \beta) = \varnothing$ 当且仅当 $\alpha+\beta\notin\Delta$，并且 $\Sigma(\alpha,\ \beta)\subseteq\{a\alpha+b\beta \mid a,\ b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}\cap\Delta$　.

命题 4.6。 设 $\alpha,\beta\in\Delta^+$, $x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $y_\beta\in\mathfrak{g}_\beta$。则对每个 $\gamma\in\Sigma(\alpha,\beta)$，存在唯一的 $z_\gamma\in\mathfrak{g}_\gamma$，使得

$$(\exp(u\rho(x_\alpha)),\exp(v\rho(y_\beta))) = \prod_{\gamma=i\alpha+j\beta\in\Sigma(\alpha,\beta)}\exp\left(u^iv^j\rho(z_\gamma)\right)$$

对每个 $u,v\in\mathbb{C}$，在 $\widehat{U}^+_{V,\ 1}$ 中成立。特别地，　$z_{\alpha+\beta} = [x_\alpha,y_\beta]$。

定理 4.7。 $\widehat{U}^+_{V,\ 1}$是一个原幺幂群，因为 $\widehat{U}^+_{V,\ 1}\cong\varprojlim_{i\geq 1}\widehat{U}^+_{V,\ 1}/\widehat{U}_{V,\ i}$。

证明。 令 $k\geq n\geq 1$。容易证明 $\widehat{U}^+_{V,n}\cdot\widehat{N}^+_k\subseteq\widehat{N}_k$。因此 $\widehat{U}_{V,1}/\widehat{U}_{V,k}$忠实地作用于 $\widehat{V}/\widehat{N}_k$，其作用方式为一个幺幂群。由此可得 $U^+_{V,1}$ 是原幺幂的。我们有

$$\prod_{k=1}^{\infty}\exp(\rho(x_k)) = \varprojlim_i\prod_{k=1}^{i}\exp(\rho(x_k))\,\widehat{U}^+_{V,1}.$$ □

推论 4.8。$U^+_{V,n}$是$U^+_{V,1}$的闭子群。

证明。 根据原幺幂群$U^+_{V,1}$的构造，子群$U^+_{V,n}$ 在$\widehat{U}^+_{V,1}$上的原幺幂拓扑中是闭的，而该拓扑与$\widehat{U}^+_{V,1} \subseteq \mathrm{GL}(\widehat{V})$ 上的原有拓扑相同。□

在本节余下部分，我们假设 V是忠实的。

引理 4.9。 如果 V是忠实的，那么 $x \mapsto \exp(\rho(x))$ 和 $x = \sum_{k=n}^{\infty} x_k \mapsto \prod_{k=n}^{\infty} \exp(\rho(x_k))$ 都是的同胚 $\widehat{\mathfrak{n}}^+_n \to U^+_{V,n}$。

证明。 由于 $\mathfrak{g}$ 忠实地作用于 V，可知 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 忠实地作用于 V。因此，第二个映射是单射。根据$U^+_{V,n}$的定义，它是满射。由于 $\widehat{\mathfrak{n}}^+_n$ 和$U^+_{V,n}$ 具有相同的乘积拓扑，因此它是一个同胚。利用命题 3.2 和命题 4.3，可以直接证明第一个映射是一个同胚。□

定理 4.10。 设 V是忠实的，且 X 是 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{g}_k$的一个子集。令 $\mathfrak{s}$ 为 $\widehat{\mathfrak{n}}^+$ 中由 X 生成的子代数的闭包，并令 $\widehat{S}$ 为一般线性群$(\widehat{V})$ 中由$\{\exp(t\rho(x)) \mid t \in \mathbb{C}, x \in X\}$生成的群的闭包。则 $\widehat{S} = \exp(\rho(\mathfrak{s}))$。

证明。 令 $E = \exp(\rho(\mathfrak{s}))$，其中 $\mathfrak{s}$ 是由 X生成的子代数。由引理 4.9，对于 $n = 1$，$\exp \circ \rho$是一个同胚 $\widehat{\mathfrak{n}}^+ \to \widehat{U}^+_{V,1}$，因此 E 的闭包是 $\widehat{E} = \exp(\rho(\mathfrak{s}))$。注意，根据引理 4.2， $\widehat{E}$ 是一个群。

令 S 为由$\{\exp(t\rho(x)) \mid t \in \mathbb{C}, x \in X\}$生成的群。根据定义， $\widehat{S}$ 是 S 的闭包。对于每个 $x \in X$ 和 $t \in \mathbb{C}$，我们有 $tx \in \mathfrak{s}$，因此 $\exp(t\rho(x)) = \exp(\rho(tx)) \in E$。于是 $S \subseteq E$，从而$\widehat{S} \subseteq E$。

还需证明 $E \subseteq S$。令 $y \in \widehat{\mathfrak{s}}$，即对某个 $y_j \in \mathfrak{s}$， $y = \lim_{j\to\infty} y_j$。于是，每个 y_j 都可以利用数乘、求和和李括号写成 X中元素的表达式。对于任意固定的正整数 N，根据命题 4.6 和 4.3 的反复应用，$\exp(\rho(y_j))$ $\widehat{U}^+_{V,N}$属于 $S\widehat{U}^+_{V,N}$（注意，这是幂零群的一个标准结果 [Bou98，第 III 章 §6]，应用于$\widehat{U}^+_{V,1}/\widehat{U}^+_{V,N}$）。取 $N \to \infty$，我们得到 $\exp(\rho(y_j))$ 属于 $\widehat{E}$。由于 $\widehat{E}$是闭的，$\exp \rho(y) = \lim_{j\to\infty} \exp \rho(y_j) \in \widehat{E}$，如所需。□

推论 4.11. 对于 V忠实的，$\widehat{U}^+_{V,1} = \widehat{U}^+_V$， U^+_V在 一般线性群$(\widehat{V})$中的拓扑闭包。

利用定理 2.4 和推论 4.11，我们得到如下结论。

推论 4.12. 对于 V忠实的， U_V不依赖于 V 的选择。

对于 V忠实的，我们将 U 记作 U_V。

4.2. **其他完备群**。 假设 V是忠实且可积的。群 U_V是 Chevalley 群 G_V中幂零子群 U_V的完备化。由于 H_V和 $U_{\bar{V}}$是一般线性群 $\mathrm{GL}(\widehat{V})$的子群，我们可以定义 Borel 群和 Chevalley 群的完备化如下

$$\widehat{B}_V := \langle H_V, \widehat{U}_V \rangle \quad \text{and} \quad \widehat{G}_V := \langle U^-_V, \widehat{B}_V \rangle.$$

Kumar [Kum12], 、Marquis [Mar18] 和 Rousseau[Rou17]也构造了类似的完备群。

结合推论 4.11 与定理 2.4，我们得到如下结论。

定理 4.13。 对于忠实可积模 V， G_V仅取决于 L_V。

对于 V忠实且为整数的情形，当 $L = L_V$时，我们将 G_V记为 G_L。当 V是伴随表示时， U正是 Aut($\mathfrak{g}$) 中所有 smear 算子的集合。

5. 根群

在本节中，我们将对应于任意根 α 的根代数 $\mathfrak{n}_\alpha$ 定义为包含 $\mathfrak{g}_\alpha$的 $\mathfrak{g}$ 的最小子代数。我们还将 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha$ 定义为包含$\mathfrak{g}_\alpha$的$\widehat{\mathfrak{g}}$的最小完备子代数。注意，这不同于 [Mar18] 的定义，后者定义了一个更大的根代数。我们还定义虚根群及其完备化。

为方便起见，我们假设 V忠实且可积，因此 G_L和 G_L取决于格 $L = L_V$、，而 U和 U则独立于 V的选择。注意，如果我们仅考虑正根，本节中的所有结果都可以推广到忠实标准分次模。

定义 5.1。 给定一个根 α （实根或虚根），我们作如下定义：

(1) α 的根代数是由 $\mathfrak{g}_\alpha$生成的子代数 $\mathfrak{n}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$。(2) α 的完备根代数是根代数 $\mathfrak{n}_\alpha$的原幂零完备化 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha$。(3) α 的完备根群是子群在 $\widehat{G}$ 中的闭包 $\widehat{U}_\alpha$；该子群由那些对 $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ 而言在 G中有定义的 exp($\rho(x)$)生成。

由于我们使用正向完备化，(3) 中的 exp($\rho(x)$) 对负虚根 α而言，在 $\widehat{G}$ 中可能没有定义。小节 5.3 将对此作详细讨论。注意

$$\mathfrak{n}_\alpha \subseteq \bigoplus_{n\geq 1} \mathfrak{g}_{n\alpha} \quad \text{and} \quad \widehat{\mathfrak{n}}_\alpha \subseteq \prod_{n\geq 1} \mathfrak{g}_{n\alpha}.$$

这些较大的代数在 [Mar18] 和 [Kum12]中有讨论。关于根 α的根代数的刻画，参见定理 5.3；关于 α的完备根代数的刻画，参见定理 5.4；关于 α的完备根群的刻画，参见引理 5.5 或命题 5.6。

将虚根 α 的根群 $U_\alpha \subseteq G$ 定义为 G 的一个子群，似乎很自然。然而，对于我们感兴趣的大多数根 α， α 的完备根群与 G 的交集是平凡的。

5.1. **自由群与 Magnus 代数**。我们回顾自由群及其相关结构的一些结果。详情参见 [Bou02] 和 [Bah93]。设 $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ 为一个有限符号集，并设 $F(X)$ 为由 X 生成的自由群。

令 $\mathbb{C}X$ 为非交换变量的多项式代数。若在 $\mathbb{C}X$ 上赋予李乘积 $[x, y] = xy - yx$，则它成为一个李代数。自由李代数 $\mathfrak{F}(X)$ 是由 X 生成的李子代数。注意， $\mathbb{C}X$ 是 $\mathfrak{F}(X)$ 的包络代数，并且与自由结合代数同构。

令 N_k 定义为　由 $N_1 := F(X)$ 和 $N_k := (N_{k-1},\ F(X))$ 归纳定义。下中心级数　　s

$$F(X) = N_1 \geq N_2 \geq \cdots$$

不会终止，也就是说，我们永远不会有 $N_k = N_{k+1}$。

然而，$\bigcap_{k=1}^{\infty} N_k = \varnothing$ 根据 [Bah93], , 因此 $F(X)$可以视为其幂零完备化的子群

$$\widehat{F}(X) = \varprojlim_k F(X)/N_k.$$

这里，$\widehat{F}(X)$定义为代数幂零群 $F(X)/N_k$的射影极限。注意，$F(X)$不是 $\widehat{F}(X)$的闭子群，而且其本身也不是幂零群。

自由李代数 $\mathfrak{F}(X)$是一个 $\mathbb{Z}$分次李代数，其中 $\mathfrak{F}(X)_n$ 是 $\mathbb{C}X$中 n齐次李多项式的集合，当 $n \geq 0$ 时成立；而 $\mathfrak{F}(X)_n = 0$ 则在 $n < 0$时成立。令

$$\mathfrak{N}_k = \bigoplus_{k>n}^{\infty} \mathfrak{F}(X)_k.$$

于是，$\mathfrak{N}_k$ 与下中心列的第 k个子代数相同，该下中心列由 $\mathfrak{N}_1 := \mathfrak{F}(X)$和 $\mathfrak{N}_{n+1} := [\mathfrak{F}(X)\ \mathfrak{N}_n]$归纳定义。$\mathfrak{F}(X)$的幂零完备化为

$$\widehat{\mathfrak{F}}(X) = \varprojlim_n \mathfrak{F}(X)/\mathfrak{N}_n.$$

与自由群一样，$\mathfrak{F}(X)$ 是 $\widehat{\mathfrak{F}}(X)$ 的子代数，但 $\mathfrak{F}(X)$ 并非闭子代数，本身也不是原幂零的。

自由李代数的幂零完备化的包络代数 $U(\widehat{\mathfrak{F}}(X))$ 是由非交换变量 X 构成的形式幂级数代数 $\mathbb{C}X$。代数 $\mathbb{C}X$ 也称为 Magnus代数。所有常数项为零的幂级数组成理想 $\mathrm{I}(X)$，它是 $\mathbb{C}X$ 的理想。集合 $1 + \mathrm{I}(X)$ 构成一个群，称为 Magnus 群 $M(X)$ [Bah93]。这是 $\mathbb{C}X$ 中常数项为 1 的幂级数组成的群。

5.2. **根子代数**。 我们先描述 $\mathfrak{g}$ 中的根子代数及其完备化。设 $\alpha \in \Delta$ 和 $m = \mathrm{mult}(\alpha) = \dim(\mathfrak{g}_\alpha)$。递归定义 $\mathfrak{g}_{\alpha,1} := \mathfrak{g}_\alpha$ 和

$$\mathfrak{g}_{\alpha,k} := [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{\alpha,k-1}] = \mathrm{span}\{[x,y] \mid x \in \mathfrak{g}_\alpha,\ y \in \mathfrak{g}_{\alpha,k-1}\}$$

对于 $k \geq 2$。

引理 5.2。设 $\alpha \in \Delta$。

(1) $\mathfrak{g}_{\alpha,\ k} \subseteq \mathfrak{g}_{k\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_n$ 其中 $n = kf(\alpha)$。(2) $[\mathfrak{g}_{\alpha,j}, \mathfrak{g}_{\alpha,k}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha,\ j+k}$ 对于 $j, k \geq 1$(3) 由 $x_1, \ldots,$ $x_k \in \mathfrak{g}_\alpha$构成的重复李乘积，无论李括号如何排列，都属于 $\mathfrak{g}_{\alpha,\ k}$。

证明。 (1)显然。(3)可通过完全归纳法和雅可比恒等式证明。我们对 j 使用归纳法来证明 (2)。对于 $j = 1$,

$$[\mathfrak{g}_{\alpha,1}, \mathfrak{g}_{\alpha,k}] = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{\alpha,k}] = \mathfrak{g}_{\alpha,k+1}$$

根据定义，结论随即成立。接下来，假设

$$[\mathfrak{g}_{\alpha,m}, \mathfrak{g}_{\alpha,k}] = \mathfrak{g}_{\alpha,k+m}$$

对所有 k都成立。然后

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g}_{\alpha,m+1},\mathfrak{g}_{\alpha,k}] &= [[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{\alpha,m}],\mathfrak{g}_{\alpha,k}] \text{ by definition}\\ &= -[\mathfrak{g}_{\alpha,k},[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{\alpha,m}]]\\ &= [\mathfrak{g}_\alpha,[\mathfrak{g}_{\alpha,m},\mathfrak{g}_{\alpha,k}]+[\mathfrak{g}_{\alpha,m},[\mathfrak{g}_{\alpha,k},\mathfrak{g}_\alpha]] \text{ by the Jacobi Identity.}\end{aligned}$$

由归纳假设$[\mathfrak{g}_{\alpha,m},\mathfrak{g}_{\alpha,k}]=\mathfrak{g}_{\alpha,\ k+m}$并由定义$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{\alpha,k+m}]=\mathfrak{g}_{\alpha,\ k+m+1}$。类似地，由定义$[\mathfrak{g}_{\alpha,k},\mathfrak{g}_\alpha]=\mathfrak{g}_{\alpha,\ k+1}$并由归纳假设$[\mathfrak{g}_{\alpha,m},\mathfrak{g}_{\alpha,k+1}]=\mathfrak{g}_{\alpha,\ m+k+1}$。因此

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g}_{\alpha,m+1},\mathfrak{g}_{\alpha,k}] &= [\mathfrak{g}_\alpha,[\mathfrak{g}_{\alpha,m},\mathfrak{g}_{\alpha,k}]+[\mathfrak{g}_{\alpha,m},[\mathfrak{g}_{\alpha,k},\mathfrak{g}_\alpha]]\\ &= [\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{\alpha,k+m}]+[\mathfrak{g}_{\alpha,m},\mathfrak{g}_{\alpha,k+1}]\\ &= \mathfrak{g}_{\alpha,m+k+1}+\mathfrak{g}_{\alpha,m+k+1}.\end{aligned}$$

So,

$$[\mathfrak{g}_{\alpha,m+1},\mathfrak{g}_{\alpha,k}]=\mathfrak{g}_{\alpha,m+k+1}.$$

归纳由此完成，等式得证。 □

Let

$$\mathfrak{n}_{\alpha,n}:=\bigoplus_{k=n}^{\infty}\mathfrak{g}_{\alpha,k}.$$

一般而言，当 α 是虚根时，$\mathfrak{n}_{\alpha,\ n}$ 是 $\oplus_{k\geq n}\mathfrak{g}_{k\alpha}$的真子空间。
下面的命题说明，$\mathfrak{n}_{\alpha,\ 1}$ 与定义 5.1 中的根代数 $\mathfrak{n}_\alpha$ 一致。

定理 5.3. 设 $\alpha\in\Delta$，且 $b_1,\ldots,b_m$ 是 $\mathfrak{g}_\alpha$的一组基。

(1) 根代数 $\mathfrak{n}_\alpha$ 等于 $\mathfrak{n}_{\alpha,\ 1}$。(2) $\mathfrak{n}_\alpha$ 是原幂零的，其级数为

$$\mathfrak{n}_\alpha=\mathfrak{n}_{\alpha,1}\geq\mathfrak{n}_{\alpha,2}\geq\cdots.$$

(3) 若 α 是实根，则 $m=1$ 和 $\mathfrak{n}_\alpha=\mathfrak{g}_\alpha=\mathbb{C}b_1$。(4) 若 $(\alpha、\ \alpha)=0$，则 $\mathfrak{n}_\alpha=\mathfrak{g}_\alpha=\oplus_{i=1}^m\mathbb{C}b_i$ 是阿贝尔的。(5) 若 $(\alpha、\ \alpha)<0$，则 $\mathfrak{n}_\alpha$ 是关于 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的自由的，即 $\mathfrak{n}_\alpha$ 是 $\mathfrak{F}(b_1,\ .....,\ b_m)$。(6) 若 $w\in W$，则 $\widetilde{w}\cdot\mathfrak{n}_\alpha=\mathfrak{n}_{w\alpha}$。

证明。 (1) 由引理 5.2(3)立即得到。引理 5.2(1)表明， $\mathfrak{n}_\alpha$ 是 $\mathfrak{g}$的分次子代数，因此(2)得证。(4)和(5)由 [Kac90], 推论 9.12 得到。(6)由(1)和引理 2.2得到。由于 $\alpha=w\alpha_i$ 对某个 $w\in W$ 和 $i\in I$成立，且根据(6)有 $\mathfrak{n}_{\alpha_i}=\mathfrak{g}_{\alpha_i}=\mathbb{C}e_i$， 因此(3)得证。□

Let

$$\widehat{\mathfrak{n}}_{\alpha,n}:=\prod_{k=n}^{\infty}\mathfrak{g}_{\alpha,k}.$$

下面的命题证明，$\widehat{\mathfrak{n}}_{\alpha,1}$ 与定义 5.1 中的根代数 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha$ 一致。注意，对每个根 α都可以定义 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha$，但并非每个根对应的 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha$ 都包含于 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 中，因为 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 仅在正方向上完备。

定理 5.4. 设 $\alpha \in \Delta$，且 $b_1, \ldots, b_m$ 是 $\mathfrak{g}_\alpha$的一组基。

(1) $\widehat{\mathfrak{n}}_{\alpha,1}$ 是 $\mathfrak{n}_\alpha$ 的原幂零完备化，因此也是完备根代数 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha = \widehat{\mathfrak{n}}_{\alpha,1}$。*(2)* 若 α 为正，或 $(\alpha,\alpha) \geq 0$，则 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha$ 是 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 中 $\mathfrak{n}_\alpha$ 的闭包。*(3)* 若 α 为负且 $(\alpha,\alpha) < 0$，则 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha$ 不包含于 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 中。*(4)* 若 $(\alpha,\alpha) \geq 0$，则 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha = \mathfrak{n}_\alpha$ 是阿贝尔的。*(5)* 若 $(\alpha,\alpha) < 0$，则 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha$ 是 $\widehat{\mathfrak{F}}(b_1, \ldots, b_m)$。*(6)* 设 $w \in W$。若 $(\alpha,\alpha) \geq 0$ 或 $\alpha \in \Delta^+$，则 $\widetilde{w} \cdot \widehat{\mathfrak{n}}_\alpha = \widehat{\mathfrak{n}}_{w\alpha}$ 属于 $\widehat{\mathfrak{g}}$。

证明。由于 $\widehat{\mathfrak{n}}/\widehat{\mathfrak{n}}_k \cong \mathfrak{n}/\mathfrak{n}_k$，我们有 $\widehat{\mathfrak{n}}_{\alpha,1} = \varprojlim_{i\geq 1} \mathfrak{n}_{\alpha,1}/\mathfrak{n}_{\alpha,i}$，因此 (1) 由定理 5.3(2) 得出。(4) 由定理 5.3(3,4) 得出。当 $(\alpha,\alpha) = 0$ 时，(2) 由 (4) 得出；当 α 为正时，(2) 由引理 5.2(1) 得出。(5) 由 (1)、定理 5.3 (5) 及 [Bah93] 得出。(3) 由引理 5.2(1) 得出，并利用 (5) 说明每个 $\mathfrak{g}_{\alpha,k}$ 都是非平凡的。回忆 $W \cdot \Delta_+^{\mathrm{im}} = \Delta_+^{\mathrm{im}}$，因此 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha \subseteq \widehat{\mathfrak{g}}$ 当且仅当 $\widehat{\mathfrak{n}}_{w\alpha} \subseteq \widehat{\mathfrak{g}}$，故 (6) 由定理 5.3 (6) 得出。□

5.3. **完备根群**。下面的引理直接由群 G仅在正方向上完备这一事实得出。

引理 5.5。若 α 为负，且$(\alpha,\alpha) < 0$，则对任意非零的 $x \in \mathfrak{g}_\alpha$，$\exp(\rho(x))$ 都不能良好定义为 $\widehat{G}$ 的元素。因此，这种情况下完备根群是平凡的。

注意，这些根 群若取 $\mathfrak{g}$ 和 G的负 完备化，则会是非平凡的。
现在假设 α为正，或（α,α） ≥ 0，于是由定理 5.4(2) 可知 $\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha \subseteq \widehat{\mathfrak{g}}$。令

$$\widehat{U}_{\alpha,n} := \left\{ \prod_{k=n}^{\infty} \exp(\rho(x_k)) \mid x_k \in \mathfrak{g}_{\alpha,k} \right\}.$$

注意，我们有单参数子群

$$\exp(\rho(\mathbb{C}b_j)) := \{\exp(\rho(tb_j)) \mid t \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^+,$$

并记作

$$U_\alpha := \langle \exp(\rho(\mathbb{C}b_j)) \mid j = 1, \ldots, m \rangle.$$

当 α 为实根且 $m = 1$时，这就是实根群的通常定义。如果 α 不是实根， U_α 可能不包含于 U^+ 中，并且一般不独立于基的选取。因此，当 α 为虚根时，这一定义下的 U_α 并不适合作为根群。

下面的命题说明，$U_{\alpha,\,1}$ 与定义 5.1 中的根群 U_α 重合。

定理 5.6。设 $\alpha \in \Delta$，并令 b_1、……、b_m 为 $\mathfrak{g}_\alpha$的一组基。假设 α 为正根，或 $(\alpha$、 $\alpha) \geq 0$。

(1) 根群 $\widehat{U}_\alpha = \widehat{U}_{\alpha,\,1} = \exp(\rho(\widehat{\mathfrak{n}}_\alpha))$。

(2) U_α 是 U 中 U_α的闭包。(3) U_α 是 U_α 的原幺幂完备化，其级数为

$$\widehat{U}_\alpha = \widehat{U}_{\alpha,1} \geq \widehat{U}_{\alpha,2} \geq \cdots.$$

(4) 若$(\alpha,\alpha) \geq 0$，则 $\widehat{U}_\alpha = U_\alpha$是$\exp(\rho(\mathbb{C}b_i))$ 的直积，其中 $i = 1$，……， m。(5) 若 α 为正且(α,α) < 0，则 $\widehat{U}_\alpha$ 同构于 ***Magnus*** 群 $M(b_1$，……， b_m).

(6) U_α 中的元素是作用于 V上的原可求和级数。

(7) 令 $w \in W$。则 $\widetilde{w}\widehat{U}_\alpha\widetilde{w}^{-1} = \widehat{U}_{w\alpha}$。

证明。 (1) 和 (2) 由命题 4.10 得出。(3) 由第 5.1 节得出。(4) 由定理 5.4(4) 得出。(5) 由定理 5.4(5) 和第 5.1 节得出。(6) 由第 4 节得出。(7) 由 (1) 和定理 5.4(6) 得出。□

参考文献

[Bah93] Yuri Bahturin，《现代代数的基本结构》，数学及其应用，第265卷，Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1993年。MR 1265937[BGKP14] A. Braverman、H. Garland、D. Kazhdan 和 M. Patnaik，《仿射 Gindikin-Karpelevich 公式》，《表示论新视角》，Contemp. Math.，第610卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014年，第43–64页。MR 3220625[Bou98] Nicolas Bourbaki，《李群与李代数》第1–3章，数学基础丛书（柏林），Springer-Verlag，柏林，1998年，译自法文，1989年英文译本重印。MR 1728312[Bou02] ，《李群与李代数》第4–6章，数学基础丛书（柏林），Springer-Verlag，柏林，2002年，由 Andrew Pressley 从1968年法文原版翻译。MR 1890629[CER08] Lisa Carbone、Mikhail Ershov 和 Gordon Ritter，《有限域上完备 Kac–Moody 群的抽象单性》，《纯粹与应用代数杂志》212 (2008)，第10期，2147–2162页。[CG03] Lisa Carbone 和 Howard Garland，《有限域上 Kac-Moody 群中格的存在性》，Commun. Contemp. Math. 5 (2003)，第5期，813–867页。[CJM22] Lisa Carbone、Elizabeth Jurisich 和 Scott H. Murray，《构造 Monster 李代数的李群类比》，数学物理通讯112 (2022)，第3期，论文编号43，共16页。MR 4418318[CS13] John Horton Conway 和 Neil James Alexander Sloane，《球堆积、格与群》，第290卷，Springer Science & Business Media，2013年。[Gar80a] Howard Garland，《环群的算术理论》，高等科学研究所数学出版物 (1980)，第52期，5–136页。MR 601519[Gar80b] ，《环群的算术理论》，高等科学研究所数学出版物 (1980)，第52期，5–136页。MR 601519[GJ87] James Glimm 和 Arthur Jaffe，《量子物理学》，第2版，Springer-Verlag，纽约，1987年，从泛函积分的角度出发。MR 887102[GR08] Stéphane Gaussent 和 Guy Rousseau，《Kac-Moody 群、hovel 与 Littelmann 路径》，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008)，第7期，2605–2657页。MR 2498360[Kac74] V. G. Kac，《无限维李代数与 Dedekind η-函数》，Funkcional. Anal.i Priložen. 8 (1974)，第1期，77–78页。MR 51 #10410[Kac90] Victor G. Kac，《无限维李代数》，第3版，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。MR 92k:17038[KP85] V. G. Kac 和 D. H. Peterson，《某些无限维群的定义关系》，《Élie Cartan 的数学遗产》（里昂，1984），Astérisque，第131卷，法国数学学会，1985年，第165–208页。MR 837201[Kum12] Shrawan Kumar，《Kac-Moody 群、其旗簇与表示论》，第204卷，Springer Science & Business Media，2012年。[LL04] James Lepowsky 和 Haisheng Li，《顶点算子代数及其表示导论》，数学进展，第227卷，Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2004年。MR 2023933[Mar13] Timothée Marquis，《拓扑 Kac–Moody 群及其子群》，博士论文，鲁汶天主教大学，2013年。[Mar18] Timothée Marquis，《域上 Kac-Moody 群导论》，EMS 数学教材，欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2018年。MR 3838421[Mat89] Olivier Mathieu，《Kac-Moody 群的构造及其应用》，Compositio Math. 69 (1989)，第1期，37–60页。MR 986812

[MP95a] R. Moody 和 A. Pianzola，具有三角分解的李代数，加拿大数学学会专著与高级教材丛书，John Wiley & Sons Inc.，纽约，1995年，Wiley-Interscience 出版物。MR 96d:17025[MP95b] Robert V. Moody 和 Arturo Pianzola，具有三角分解的李代数，加拿大数学学会专著与高级教材丛书，John Wiley & Sons Inc.，纽约，1995年，Wiley-Interscience 出版物。MR 1353140[Mun99] James Munkres，拓扑学，第2版，Pearson，纽约，1999年。[NR66] Albert Nijenhuis 和 RW Richardson，分次李代数中的上同调与变形，《美国数学学会通报》**72** (1966)，第1期，1–29页。[Rou16] Guy Rousseau，局部域上劈裂的 *Kac-Moody* 群 *II*：有序 *hovel*，《法国数学学会通报》**144**(2016)，第4期，613–692页。MR 3562609[Rou17] , 超度量域上的几乎分裂 *Kac-Moody* 群，Groups Geom. Dyn. **11** (2017)，第3期，891–975页。MR 3692902[Spr09] T. A. Springer，线性代数群，第2版，现代 Birkhäuser 经典著作，Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2009年。MR 2458469[Ste04] Shlomo Sternberg，李代数，佛罗里达大学出版社，2004年。[Ste16] Robert Steinberg，*Chevalley* 群讲义，修订版，大学讲座丛书，第66卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2016年，John Faulkner 和 Robert Wilson 整理的笔记，附 Robert R. Snapp 序言。MR 3616493[Tit69] Jacques Tits，*Coxeter* 群中的字问题，Symposia Mathematica，第1卷，1969年，第175–185页。[Tit85] , 与 *Kac-Moody* 数据相关的群及群函子，1984年波恩研讨会（波恩，1984），数学讲义，第1111卷，Springer，柏林，1985年，第193–223页。MR 797422[Tit87] , 域上 *Kac-Moody* 群的唯一性与表示，J. Algebra **105** (1987)，第2期，542–573页。MR 873684

萨斯喀彻温大学数学与统计系，加拿大萨斯卡通，SK S7N5E6电子邮箱：abid.ali@usask.ca

罗格斯大学数学系，美国新泽西州皮斯卡塔韦，NJ 08854-8019电子邮箱：lisa.carbone@rutgers.edu[1]

查尔斯顿学院科学、数学与工程学院，美国南卡罗来纳州查尔斯顿，SC 29403电子邮箱：jurisiche@cofc.edu

罗格斯大学数学系，美国新泽西州皮斯卡塔韦，NJ 08854-8019电子邮箱：scotthmurray@gmail.com

[1]通讯作者