草稿版本 2026年1月6日 使用 LaTeX 默认样式排版，采用 AASTeX7.0.1

arXiv:2601.00976v1 [astro-ph.IM] 2 Jan 2026

thornado+FLASH-X：用于核心坍缩超新星中微子辐射流体力学的 DG-IMEX 与有限体积混合框架*

Eirik Endeve，[1,2] Vassilios Mewes，[3] J. Austin Harris，[3] M. Paul Laiu，[1] Ran Chu，[2] Steven A. Fromm，[3] Anthony Mezzacappa，[2] O. E. Bronson Messer，[3] W. Raphael Hix，[4,2] Stephen W. Bruenn，[5] Eric J. Lentz，[2,4] Klaus Weide，[6] Christian Y. Cardall，[4] Ann S. Almgren，[7] Anshu Dubey，[8,6] Sean M. Couch，[9,10,11] Philipp M ¨osta，[12] 和 Donald E. Willcox[7]

[1]橡树岭国家实验室计算机科学与数学部，橡树岭，田纳西州 *37831*，美国[2]田纳西大学诺克斯维尔分校物理与天文学系，诺克斯维尔，田纳西州 *37996*，美国 [3] 橡树岭国家实验室国家计算科学中心，橡树岭，田纳西州 *37831*，美国 [4] 橡树岭国家实验室物理部，橡树岭，田纳西州 *37831*，美国[5]佛罗里达大西洋大学物理系，博卡拉顿，佛罗里达州 *33431*，美国[6]芝加哥大学计算机科学系，芝加哥，伊利诺伊州 *60637*，美国[7]劳伦斯伯克利国家实验室计算科学与工程中心，加利福尼亚州 *94720*，美国[8]阿贡国家实验室数学与计算机科学部，莱蒙特，伊利诺伊州 *60439*，美国[9]密歇根州立大学物理与天文学系，东兰辛，密歇根州 *48824*，美国[10]密歇根州立大学计算数学、科学与工程系，东兰辛，密歇根州 *48824*，美国[11]密歇根州立大学稀有同位素束流设施，东兰辛，密歇根州 *48824*，美国[12]*GRAPPA*、安东·潘内科克天文学研究所、高能物理研究所和理论物理研究所，阿姆斯特丹大学，阿姆斯特丹，荷兰

（收稿日期：2026年1月6日）

摘要

我们介绍了高阶中微子辐射流体动力学工具包（thornado）中实现的中微子输运算法，以及这些算法如何在基于自适应网格细化（AMR）的多物理场模拟框架 FLASH-X 中与自引力流体力学耦合。thornado 主要用于核心坍缩超新星（CCSNe）模拟，采用具有代数闭合关系和狭义相对论观测者修正的谱六种粒子双矩形式，精度达到 $\mathcal{O}(v/c)$；其相空间离散化采用不连续伽辽金（DG）方法，并结合隐式-显式时间推进。一项关键进展是基于嵌套不动点迭代和 Anderson 加速的非线性中微子–物质耦合算法，可对碰撞过程进行全隐式处理，其中包括中微子-电子散射和对产生等能量耦合相互作用。通过流体变量的混合间断伽辽金-有限体积表示以及在 FLASH-X 中进行算子分裂演化，实现了与有限体积（FV）流体动力学的耦合。我们使用理想化不透明度进行基础输运测试，并通过表格化微观物理下的弛豫问题和轻子数减少问题验证了该实现。球对称核心坍缩超新星模拟展现了耦合方案的准确性和稳健性，所得结果与核心坍缩超新星模拟代码 CHIMERA 高度吻合。轴对称核心坍缩超新星模拟进一步证明，基于间断伽辽金的中微子输运可用于 FLASH-X 中的多维超新星建模。thornado 的中微子输运求解器支持通过 OpenMP 卸载或 OpenACC 使用 GPU，本研究中的所有核心坍缩超新星应用均采用 GPU 实现。总之，这些结果为未来提升物理保真度、改进数值算法和提高计算性能奠定了基础，从而支持日益逼真的大规模核心坍缩超新星模拟。

通讯作者：Eirik Endeveendevee@ornl.gov

* 本手稿由 UT-Battelle, LLC 根据与美国能源部（DOE）签订的合同 DE-AC05-00OR22725 部分撰写。美国政府保留相关权利；出版商接受本文发表，即承认美国政府拥有非独占、已付清、不可撤销、全球范围内的许可，可为美国政府目的出版或复制本手稿的已发表版本，或允许他人这样做。DOE 将依照美国能源部公共获取计划（http://energy.gov/downloads/doe-public-access-plan）向公众提供这些由联邦资助的研究成果。

关键词：计算方法 (1965)，核心坍缩超新星 (304)，流体动力学模拟 (767)，辐射输运模拟 (1967)，核天体物理学 (1129)，超新星中微子 (1666)

1. 引言

本文介绍开源高阶中微子辐射流体力学工具包 thornado 中中微子输运功能的公式、实现及初步验证。该输运模型基于带代数闭合关系的谱双矩公式，演化六种不同的中微子种类，包含针对 $\mathcal{O}(v/c)$ 的狭义相对论观测者修正，并考虑中微子-电子散射等具有谱耦合特征的中微子–物质相互作用。数值方法将不连续伽辽金（DG）相空间离散化与隐式-显式（IMEX）时间积分相结合，并与 FLASH-X 用于牛顿自引力流体动力学的有限体积方法耦合，同时采用自适应网格细化（AMR），以解析核心坍缩超新星（CCSNe）所特有的宽广空间尺度范围。我们提出一种新颖的非线性中微子–物质耦合算法，该算法基于嵌套不动点迭代和安德森加速，并描述了将间断伽辽金中微子输运与有限体积流体动力学耦合的策略。我们通过一系列层次化问题展示验证结果：具有已知解和理想化不透明度的基础测试、采用表格化微观物理（状态方程和不透明度）的弛豫与输运测试，以及球对称和轴对称下的完整核心坍缩超新星模拟。

核心坍缩超新星是大质量恒星（初始质量约大于十个太阳质量）生命终结时发生的高能爆炸。恒星寿命将尽时，其铁核不再能够抵抗引力支撑自身，并发生灾难性坍缩，直至中心密度超过原子核的密度。在这种密度下，强核力的排斥分量会终止坍缩，并驱动内核反弹，进而引发超新星冲击波，使其向外穿过正在内落的外层。这道激波最终会摧毁恒星，留下中子星或黑洞形式的致密天体。中微子在导致大质量恒星爆炸的一系列事件中发挥着关键作用。它们是平衡坍缩过程中释放的引力能的主要途径（$\sim 10^{46}$ J），而被抛射物质的动能则大约小两个数量级（$\sim 10^{44}$ J）（例如，H.-T. Janka 2001年）。在核心坍缩超新星的中微子加热机制中，少量中微子能量沉积在激波之后，从而推动爆炸动力学。

约六十年来，计算建模在核心坍缩超新星理论的发展中一直发挥着独特而重要的作用，并将继续如此。开创性的计算研究包括 S. A. Colgate & R. H. White (1966) 的工作，他们首次提出超新星爆炸由中微子能量沉积驱动；以及 J. M. Le Blanc & J. R. Wilson(1970) 的工作，他们证明旋转放大的磁场原则上可以引发喷流状爆炸。现代的激波停滞、延迟中微子再加热范式，是由 H. A. Bethe & J. R. Wilson (1985) 的球对称模拟确立的。此后，一系列计算研究的发现深刻塑造了我们对爆炸机制的当代理解，其中包括发现中微子驱动对流（M. Herant et al. 1994; A. Burrows et al. 1995），认识到停滞的激波会受到非径向扰动而变得不稳定（J. M. Blondin et al. 2003），确认通常情况下球对称模型不会产生爆炸（M. Rampp & H.-T. Janka 2000; M. Liebend¨orfer et al. 2001; T. A. Thompson et al. 2003），以及随后在二维（例如，A. Marek & H.-T. Janka 2009; S. W. Bruenn et al. 2013）和三维（例如，E. J. Lentz et al. 2015; T. Melson et al. 2015b,a; A. Burrows et al. 2020）空间维度中成功开展的中微子驱动爆炸模拟（综述见例如 B. M¨uller 2020; A. Mezzacappa et al. 2020; A. Burrows & D. Vartanyan 2021; S. Yamada et al. 2024; H.-T. Janka 2025; B. M¨uller 2025; A. Mezzacappa & M. Zanolin 2025）。持续开展建模对于通过核心坍缩超新星的引力波和中微子信号，将理论与观测联系起来至关重要。

在核心坍缩超新星中模拟中微子输运尤其具有挑战性，因为它发生在多物理、多尺度环境中：在三维空间里，反应性自引力流体动力学或磁流体力学与中微子输运之间存在强耦合。从爆炸动力学到核合成产额、引力波和中微子发射等可观测信号所涉及的空间尺度，范围从不足一公里到 $\mathcal{O}(10^5$ 公里)，相应的时间尺度则从微秒延伸至数秒。中微子弱相互作用的特性进一步加剧了计算和数值方面的挑战——其平均自由程从原中子星中的 $\mathcal{O}(1$ 米) 到中微子加热区中的 $\mathcal{O}(10^3$ 公里) 不等，因此需要采用动力学描述。现实的超新星中微子动力学需要纳入多种中微子-物质弱相互作用，其中一些相互作用会在动量空间中全局耦合，并跨越不同中微子种类（例如，S. W. Bruenn 1985年； A. Burrows 等人 2006年； T. Fischer 等人 2024），还需考虑狭义和广义相对论效应（S. W. Bruenn 等人 2001年）。此外，为纳入缪子效应，还必须演化六种不同的中微子（R. Bollig 等，2017年； T. Fischer 等人 2020年）。在数值层面，同时守恒轻子数和能量（C. Y. Cardall & A. Mezzacappa2003； M. Liebend¨orfer 等人 2004）、维持相空间分布的界限（E. Endeve 等人 2015年），并构造

渐近保持格式（S. Jin 2022年），使其从扩散极限到自由流极限都保持准确且稳定，这给开发复杂模型数值方法的研究者带来了挑战。

玻尔兹曼中微子辐射流体力学已在多个采用球对称演化的核心坍缩超新星代码中实现（M. Liebend¨orfer 等，2001年；M. Rampp 与 H. T. Janka，2002年；T. A. Thompson 等，2003年；K. Sumiyoshi 等，2005年）。其中，M. Liebend¨orfer 等（2004年）对广义相对论 AGILE-BOLTZTRAN 代码与加兴团队代码进行了严格比较（M. Liebend¨orfer 等，2005年）。在轴对称情形下，C. D. Ott 等（2008年）率先开展了多角度、多群中微子输运的应用研究，随后 H. Nagakura 等（2018年）和 A. Harada 等（2019年）开展了更近期的工作。研究人员也在三维空间中进行了采用玻尔兹曼中微子输运的模拟（W. Iwakami 等，2020年），不过迄今仅限于较短时间（约 10 毫秒）的反弹后演化，涵盖即时对流。与此同时，纳入并评估中微子味转换物理作用的研究也日益增多（例如，I. Tamborra 与 S. Shalgar，2021年；S. Richers 与 M. Sen，2022年；M. C. Volpe，2024年；L. Johns 等，2025）。然而，由于计算成本极高，玻尔兹曼中微子输运在多维空间中的应用仍然有限。

thornado 是一个开源 Fortran 模块集合，用于求解中微子辐射流体力学方程，并应用于核心坍缩超新星模型；它主要聚焦于计算内核，用来更新以逻辑笛卡尔数据结构组织的解表示。thornado 的开发强调专用求解器技术，以及在异构计算架构上的节点级性能和可移植性。其模块化设计使 thornado 能够相对轻松地集成到基于块结构自适应网格加密的大规模模拟框架中（例如 A. Dubey 等人，2014年）；本文展示了它与多物理软件 FLASH-X 的耦合（A. Dubey 等人（2022））。在核心坍缩超新星建模界中，thornado 独树一帜，采用间断伽辽金方法（例如 B. Cockburn 和 C.-W. Shu（2001））在相空间（位置空间和动量空间）中离散化中微子动力学方程。thornado 中的求解器开发致力于应对三类模型中保持物理界限和守恒性的挑战：（i）采用费米–狄拉克统计的模型（R. Chu 等（2019））；（ii）包含对 $\mathcal{O}(v/c)$ 的狭义相对论观测者修正的模型（M. P. Laiu 等，2025）；以及（iii）包含完整狭义相对论观测者修正的模型（J. Hunter 等，2025）。M. P. Laiu 等人（2021）引入了用于时间隐式中微子–物质耦合的非线性求解器，同时也评估了采用 OpenMP 卸载或 OpenACC 的面向 GPU 的实现（M. P. Laiu 等人，2020年；M. Thavappiragasam 等人，2024年；M. P. Laiu 等，2025）。风味转化物理目前尚未纳入 thornado 的功能范围，但随着物理上和数值上稳健的模型不断成熟，未来可能会将其纳入。

为兼顾物理保真度与计算可行性，`thornado` 采用谱双矩近似来描述中微子动力学，演化中微子分布函数的零阶和一阶角矩，分别表示谱能量密度与动量密度，或者等价地，表示谱数密度与数通量密度。本文所考虑的模型是在取平直时空极限和M. Shibata 等人（2011年）以及C. Y. Cardall 等人（2013a）提出的广义相对论矩公式基础上推导而来。该模型因此保留了与速度有关的（观测者）修正，以描述空间平流、多普勒频移和角像差，同时忽略引力红移。矩方程通过代数闭合关系封闭，文献中存在多种闭合方案（例如，G. N. Minerbo，1978；C. D. Levermore 1984年；J. Cernohorsky 与 S. A. Bludman，1994）；本文主要采用 Minerbo 闭合。关于中微子动力学中常用双矩闭合方案的比较，参见例如J. M. Smit 等人（2000年）、E. M. Murchikova 等人（2017年）以及T. Wang 与 A. Burrows（2023年）。M. P. Laiu 等人（M. P. Laiu et al. （2025）详细介绍并分析了该模型及其在笛卡尔坐标下结合理想化不透明度的实现。本文将其扩展至更一般的正交曲线坐标，演化六种中微子，纳入表格化微观物理和一套全面的中微子–物质相互作用，并使其与牛顿自引力流体动力学实现动态耦合。

基于谱矩的中微子输运如今已成为核心坍缩超新星建模界的主流模型。CHIMERA （S. W. Bruenn 等，2020）采用多群通量限制扩散，而 PROMETHEUS–VERTEX（M. Rampp & H. T. Janka 2002年）采用结合可变爱丁顿因子闭合的双矩公式。在多维模拟中，这两个代码都采用逐射线方法（M. Rampp & H. T. Janka 2002年；R. Buras 等 2006年）。AENUS–ALCAR（O. Just 等人，2015 年）、FLASH（E. P. O’Connor & S. M. Couch 2018年）和 FORNAX （M. A. Skinner 等，2019）采用完全多维的、带代数闭合的双矩输运，其输运公式与本文采用的公式最为相似。上述所有代码都包含精度达到 $\mathcal{O}(v/c)$ 的速度相关项，并考虑引力红移效应；同时通过修正牛顿势的单极分量来近似相对论引力（A. Marek 等 2006年）。在全广义相对论模型中，NADA–FLD（N. Rahman 等 2019年）采用多维多群通量限制扩散；CoCoNut–VERTEX（B. M¨uller et al. 2010年）在多维模拟中结合逐射线方法采用可变爱丁顿因子方法；GR1D（E. O’Connor 2015年）和 T. Kuroda 等 （2016年）分别在一维和多维空间中采用带代数闭合的谱双矩输运。

thornado 中的当前实现与上述核心坍缩超新星模拟框架不同；后者基于有限体积方法或有限差分方法，而本实现则在相空间中采用间断伽辽金离散。间断伽辽金方法基于分段多项式表示，兼具有限体积方法和谱方法的特征（例如参见C.-W. Shu 2016年的综述）。它们能够在紧致模板上实现高阶精度——无论精度阶数如何，数据仅在最近邻之间交换，以更高的算术强度换取更少的内存访问，从而提升异构架构上的并行可扩展性（A. Kl¨ockner et al. 2009年）。间断伽辽金方法能够自然地在曲线坐标中表述，这对数值相对论和广义相对论天体物理学而言是一项优势（S. A. Teukolsky 2016年）。变分表述以及检验函数选择的灵活性，使间断伽辽金框架特别适合设计保结构方法，以较低的计算成本近似连续模型。这对于中微子动力学尤为有利，因为间断伽辽金格式能够在粗网格上捕捉渐近扩散极限——其特征是与背景介质频繁发生散射（E. W. Larsen & J. E. Morel 1989年；M. L. Adams 2001年；R. B. Lowrie & J. Morel 2002年；J.-L. Guermond & G. Kanschat 2010年），且无需修改数值通量（例如参见E. Audit 等 2002年）。在扩散和流动态中保持稳定性的同时，更加自由地指定数值通量的灵活性，有助于构造适用于双矩模型的守恒且保界方法（R. Chu 等（2019）；M. P. Laiu 等，2025；J. Hunter 2025年）。最后，检验函数方面的灵活性使间断伽辽金方法适合开发能够守恒粒子数、动量和能量的格式（例如B. Ayuso 等 2011年；Y. Cheng 等 2013年），而有限体积方法较难实现这一点。对于核心坍缩超新星应用而言，这一点尤为重要，因为同时实现轻子数守恒和能量守恒能够增强人们对模拟物理保真度的信心。

与上述许多框架类似，`thornado` 采用隐式和显式方法相结合的方式，对半离散中微子动力学方程进行时间积分，具体使用隐式显式（IMEX）龙格–库塔（RK）方法（U. Ascher 等 1997年； L. Pareschi & G. Russo 2005年）。中微子–物质耦合（碰撞）项采用隐式积分，以避免必须解析原中子星中碰撞所引入的短时间尺度；而由光速决定的中微子相空间平流项则采用显式推进。在相对论系统中，声速、流体速度和引力波传播速度等其他特征速度都与光速相当，因此，与其他辐射流体力学应用（例如，Y.-F. Jiang 等 2012年； M. Gonz´alez 等 2007年）不同，对光速输运采用显式处理所带来的稳定性约束不会构成显著的额外限制。通过显式处理空间耦合散度算子，而不是采用全隐式方法，我们避免了在每个时间步长求解大型、稀疏且分布式的代数系统。碰撞项在动量空间中全局耦合，但在位置空间中仍是局部的。因此，将位置空间分配到各 MPI 进程，可使与计算密集型中微子–物质耦合相关的计算局部化，从而提高并行可扩展性。

采用对角隐式 IMEX-RK 格式时，每个阶段的隐式部分都可以解释为一次后向欧拉求解。由于非线性中微子–物质耦合的计算成本很高——其中涉及众多中微子弱相互作用通道，而表格化中微子不透明度的计算尤其昂贵——因此，设计一种高效、稳健、可扩展且易于并行化的迭代求解器至关重要。为此，我们将 M. P. Laiu 等人（2021）提出的嵌套不动点算法扩展到了 $\mathcal{O}(v/c)$情形，其中包含六种中微子。该嵌套方法在外层迭代物质变量，同时在固定物质状态下，于内层将辐射矩迭代至收敛。不透明度仅在外层进行计算，即物质状态更新的地方。与牛顿法相比，不动点方法无需使用雅可比矩阵，因而具有优势；对于表格化不透明度而言，雅可比矩阵的计算成本高昂且难以准确估计，同时还可避免相关的稠密线性方程求解。无雅可比牛顿–克rylov方法（D. A. Knoll 与 D. E. Keyes，2004年）在此背景下同样并不理想，因为不透明度计算占据了主要的计算成本。遵循 M. P. Laiu 等人（2021）的做法，我们在内层和外层均采用安德森加速（D. G. Anderson，1965年；H. Walker 与 P. Ni，2011年），利用前几次迭代的信息，相比简单的皮卡迭代加速收敛。扩展到 $\mathcal{O}(v/c)$后，外层需要引入流体速度分量的附加方程。与 M. P. Laiu 等人（2021）所研究的零速度情形相比，内层复杂得多，这是因为待迭代的原始矩与通过输运方程演化的守恒矩之间存在非线性关系。用于更新原始矩的不动点映射并不唯一，因此需要格外谨慎，以维持内层迭代的稳健性。我们采用了 M. P. Laiu 等人（2025）针对理想化不透明度开发的不动点迭代，其中引入了依赖速度的步长参数，以促进内层迭代过程中生成可实现矩。该算法已在 thornado 中实现，并通过 OpenMP 卸载或 OpenACC 支持 GPU。

为使所提出的中微子辐射输运方法能够应用于大规模核心坍缩超新星模拟，我们将 thornado 集成到多物理场模拟框架 FLASH-X 中（A.Dubey etal. 2022）。此次集成通过 GitHub 子模块分发，将 thornado 的间断伽辽金中微子输运与 FLASH-X 成熟的大规模

科学计算基础设施结合起来，该基础设施提供基于 MPI 的分布式内存并行、自适应网格细化、并行输入/输出以及有限体积自引力流体动力学。在 FLASH-X 中，物理数据结构（包括辐射矩）被组织为一组逻辑笛卡尔网格块，并由与物理无关的基础设施管理；而 thornado 核函数则用于推进物理场的时间演化。在 Fthornado的求解器集成到 FLASH-X 中面临两项主要挑战。首先，FLASH-X 中采用有限体积方法演化的物质量以单元平均值的形式存储，而 thornado 则采用单元局部多项式表示。在所提出的算法中，thornado 依赖流体三速度来计算 $\mathcal{O}(v/c)$ 观测者修正，并通过中微子–物质耦合直接更新流体量。因此，物质量需要采用混合间断伽辽金/有限体积表示。我们借鉴 M. Dumbser et al. （2014年）子单元限制过程中的一种方法，将有限体积网格视为间断伽辽金网格的子单元离散；每个间断伽辽金单元内的有限体积网格单元数与 thornado 所用张量积多项式基的自由度数相匹配。通过重构算子和投影算子，在单元平均值与多项式表示之间转换流体量。其次，为推进中微子辐射流体力学系统的时间演化，我们采用李–特罗特算子分裂技术：先使用显式 RK 方法演化自引力流体动力学，再对中微子输运进行隐显式更新。通过与 CHIMERA 进行代码间比较，利用球对称的引力坍缩和反弹后早期演化模拟验证了耦合算法；此外，还进行了轴对称模拟，以展示其多维输运能力。

本文其余部分的组织如下。第2 节介绍中微子辐射流体动力学模型，第3节详细介绍thornado中的中微子输运间断伽辽金方法。第4 节介绍与 FLASH-X 的耦合。第5、6和7节分别介绍多保真度层级的验证案例：采用理想化不透明度的基础测试、采用表格化微观物理的测试，以及球对称和轴对称的核心坍缩超新星应用，后两节尤其着重评估非线性中微子–物质耦合求解器的稳健性。

我们采用这样的单位制： $c = G = k_{\rm B} = 1$，其中 c、 G 和 $k_{\rm B}$ 分别为光速、引力常数和玻尔兹曼常数。本文采用爱因斯坦求和约定，即重复出现的拉丁指标表示从1到3求和。

2. 物理模型

本节给出非相对论、自引力中微子辐射流体力学的方程。这些方程采用位置空间坐标基来表述（例如，L. Rezzolla 和 O. Zanotti, 2013年），以适用于正交曲线空间坐标，足以求解笛卡尔、柱面和球极空间坐标中的问题。正交坐标系由对角空间度规 $\gamma_{ij} = \mathrm{diag}[\,h_1 h_1, h_2 h_2, h_3 h_3\,]$表示，我们假设该度规与时间无关。这里， h_1， h_2和 h_3 是尺度因子（拉梅´系数），用于关联坐标距离与固有距离。空间度规的行列式记作 $\gamma = (h_1 h_2 h_3)^2$, , 其逆度规为 γ^{ij}。各种坐标系中的度规量可参见D. Pochik 等人(2021年）中的表 1。空间度规及其逆度规分别用于降低和升高向量与张量的指标。我们有时用记号 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{ij})$ 表示空间度规。

2.1. 含自引力和中微子耦合的流体动力学方程

恒星流体采用增强版的非相对论欧拉–泊松系统建模，并辅以核物质状态方程（EoS），其形式如下：质量守恒方程

$$\partial_t \rho + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\partial_i\big(\sqrt{\gamma}\,\rho\,v^i\big) = 0, \tag{1}$$

动量方程

$$\partial_t(\rho\,v_j) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\partial_i\big(\sqrt{\gamma}\,\Pi^i{}_j\big) = \frac{1}{2}\,\Pi^{ik}\,\partial_j\gamma_{ik} - \rho\,\partial_j\Phi - Q_{{\rm M}j}, \tag{2}$$

流体能量方程

$$\partial_t E_{\rm f} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\partial_i\big(\sqrt{\gamma}\,[\,E_{\rm f} + p\,]\,v^i\big) = -\rho\,v^i\,\partial_i\Phi - Q_{\rm E}, \tag{3}$$

以及电子数方程

$$\partial_t(\rho Y_{\rm e}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\partial_i\big(\sqrt{\gamma}\,\rho Y_{\rm e}\,v^i\big) = -m_{\rm B}\,Q_{\rm L}, \tag{4}$$

其中， ρ表示质量密度， v^i 表示流体三速度的分量， $\Pi^i{}_j = \rho\,v^i\,v_j + p\,\delta^i{}_j$表示流体应力张量，$p$表示流体压力， $Y_{\rm e}$表示电子丰度， $E_{\rm f} = \rho\,(\epsilon + \frac{1}{2}\,v^2)$ 表示流体总能量密度 -(内能与动能之和)， ϵ表示

比内能。电子数密度与电子丰度的关系为 $n_{\rm e} = \rho Y_{\rm e}/m_{\rm B}$，其中 $m_{\rm B}$ 为平均重子质量。流体方程通过核物质状态方程闭合，其中压力和比内能等热力学量是质量密度、温度 T和电子丰度的函数；例如， $p = p(\rho, T, Y_{\rm e})$。方程（2）右端项的第二项和方程（3）右端项的第一项是由牛顿引力势引起的引力源 Φ，该引力势通过求解泊松方程

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\big(\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ij}\partial_j\Phi\big) = 4\pi\,\rho. \tag{5}$$

方程（2）、（3）和（4）右端项中的各项 $Q_{{\rm M}j}$、 $Q_{\rm E}$ 和 $Q_{\rm L}$ 分别描述流体与中微子之间的动量、能量和轻子数交换。这些项取决于中微子分布函数，详见下一节。

2.2. 中微子动力学方程

我们采用谱双矩近似，在 $\mathcal{O}(v/c)$极限下（例如，D. Mihalas & B. W. Mihalas 1999）对中微子动力学进行建模。更具体地说，我们的模型基于 M. Shibata et al.(2011)；C. Y. Cardall et al. (2013a) 提出的广义相对论矩形式，该形式使用实验室系时空坐标（$\boldsymbol{x}$ 和 t），并采用共动系球极动量空间坐标（ε、 ϑ和 φ）以便于中微子–物质耦合。这里，$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ 表示与流体共动的观测者测得的中微子能量， $\vartheta \in [0,\pi]$、 $\varphi \in [0, 2\pi)$用于参数化单位球面上共动系传播方向 $\boldsymbol{\ell}(\vartheta、\ \varphi)$。

$$\mathbb{S}^2 = \{\,\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^3 \ :\ |\boldsymbol{\ell}| = 1\,\}. \tag{6}$$

我们定义原始 矩（共动系）分布函数的角矩 f_s，对应中微子种类 s as

$$\big\{\,\mathcal{D}_s,\,\mathcal{I}_s{}^i,\,\mathcal{K}_s{}^{ij},\,\mathcal{L}_s{}^{ijk}\,\big\}(\varepsilon,\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} f_s(\omega,\varepsilon,\boldsymbol{x},t)\big\{\,1,\ell^i,\ell^i\ell^j,\ell^i\ell^j\ell^k\,\big\}\,d\omega, \tag{7}$$

其中 $\omega = (\vartheta,\ \varphi)$、 $d\omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$，而 $\ell^i(\omega)$ 是坐标基单位矢量（$\ell_i\ell^i = 1$）。零阶矩和一阶矩 $\mathcal{D}_s$和 $\mathcal{I}_s{}^i$分别对应谱数密度和数通量密度； $\mathcal{K}_s{}^{ij}$ 是对称二阶张量，其与 ε 的乘积给出谱应力张量；而 $\mathcal{L}_s{}^{ijk}$ 是完全对称三阶矩张量。因此，上述定义的原始矩是实验室系时空坐标（$\boldsymbol{x}$，t）和共动系粒子能量 ε的函数。

我们强调，辐射矩的下标 $s \in \{\nu_{\rm e}, \bar{\nu}_{\rm e}, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau\}$——例如式（7）中的下标——用于表示中微子种类。绝不能将其解释为张量上的空间指标。

为获得角矩的演化方程，我们考虑如下谱矩系统：该系统是对 C. Y. Cardall 和 A. Mezzacappa (2003年) 提出的广义相对论粒子动力学四动量守恒形式取角矩后推导得到的，并由此得到 M. Shibata 等 (2011年) 和 C. Y. Cardall 等 (2013a) 中讨论的双矩系统（分别参见其方程 (3.18) 和 (40)）。随后，将时空分解为类空超曲面，按照这些切片分解双矩系统，并取平直时空极限，同时保留对 $\mathcal{O}(v/c)$的狭义相对论修正，由此得到 `thornado`所求解的双矩系统。具体而言，我们考虑 $\mathcal{O}(v/c)$ 极限下的数目守恒广义相对论双矩模型，该模型由 A. Mezzacappa 等(2020年) 推导得到；参见其方程 (123) 和 (125)。在此极限下，描述谱中微子数密度的“零阶矩”方程为

$$\partial_t\big(\mathcal{D}_s + v^i\,\mathcal{I}_{si}\big) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\big(\sqrt{\gamma}\,\big[\mathcal{I}_s{}^i + \mathcal{D}_s\,v^i\big]\big) - \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\varepsilon\big(\varepsilon^3\,\big[\mathcal{I}_{si}\,\partial_t v^i + \mathcal{K}_s{}^i{}_k\,\nabla_i v^k\big]\big) = \langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\rangle, \tag{8}$$

其中我们引入了记号 $\langle\ldots\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}\ldots d\omega$，而 $\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})$ 表示描述中微子–物质（以及中微子–中微子）相互作用的碰撞项。我们在碰撞项的自变量中使用 $\boldsymbol{f} = \{f_s\}_{s=1}^{N_{\rm s}}$，其中 $N_{\rm s}$ 表示模型中包含的中微子种类总数（本文中为六种），以指明中微子种类 s的相互作用可能涉及其他中微子种类 $s' \neq s$。与空间度量 γ_{ik} 相关的协变导数记为 ∇_i，对称张量 $\mathcal{T}^{ik}$ 与三速度的协变导数的缩并可显式写为

$$\mathcal{T}^i{}_k\nabla_i v^k = \mathcal{T}^i{}_k\,\partial_i v^k + \frac{1}{2}\,\mathcal{T}^{ik}\,v^l\,\partial_l\gamma_{ik}. \tag{9}$$

（注意，$\nabla_i \gamma_{jk} = 0$。因此，$\mathcal{T}^i_{\ k} \nabla_i v^k = \mathcal{T}^{ik} \nabla_i v_k$。）

方程（8）演化 $\mathcal{O}(v/c)$ 谱欧拉数密度的近似值，

$$\mathcal{N}_s = \mathcal{D}_s + v^i \, \mathcal{I}_{si}, \tag{10}$$

在没有中微子–物质相互作用的情况下，对能量积分（权重为 $4\pi\varepsilon^2/h^3$）后，该方程表示欧拉（实验室）参考系中粒子的精确守恒。这一守恒性质有助于实现总轻子数守恒，也是 thornado 求解数守恒双矩模型的重要原因。

控制谱中微子数通量密度的“第一矩”方程为

$$\begin{aligned} &\partial_t \left(\mathcal{I}_{sj} + v^i \, \mathcal{K}_{sij} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i \left(\sqrt{\gamma} \left[\mathcal{K}_s^{\ i}{}_j + \mathcal{I}_{sj} \, v^i \right] \right) - \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_\varepsilon \left(\varepsilon^3 \left[\mathcal{K}_{sjk} \, \partial_t v^k + \mathcal{L}_s^{\ i}{}_{kj} \, \nabla_i v^k \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{K}_s^{\ ik} + \mathcal{I}_s^{\ i} \, v^k + v^i \, \mathcal{I}_s^{\ k} \right) \partial_j \gamma_{ik} + \left(\mathcal{K}_{sjk} \, \partial_t v^k + \mathcal{L}_s^{\ i}{}_{kj} \, \nabla_i v^k \right) - \left(\mathcal{D}_s \, \partial_t v_j + \mathcal{I}_s^{\ i} \, \partial_i v_j \right) + \langle \mathcal{C}_s(\boldsymbol{f}) \ell_j \rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

注释1. 在没有碰撞的情况下，方程（8）和（11）描述了中微子在运动流体中的相空间平流。空间导数和能量导数中的速度相关项，以及方程（11）右端项中的附加项，共同表示相邻共动观测者之间的空间平流、多普勒频移和角像差（例如，参见*M. Liebend¨orfer 等人 2004年*）。这些“观测者修正”源于共动系动量坐标的选择；该坐标简化了中微子–物质相互作用的运动学（例如，*J. I. Castor 1972*；*J. R. Buchler 1979*、*1983*；*D. Mihalas&B. W. Mihalas 1999*），并有助于为基于矩的模型构造闭合关系（例如，*J. R. Buchler 1983*），但也使相空间离散化更为复杂——尤其是在力求同时实现能量-动量守恒和轻子数守恒时（深入讨论参见*C. Y. Cardall & A. Mezzacappa 2003*；*C. Y. Cardall 等人 2005年*、*2013a*、*b*）。

方程8）和（11）给出的系统包含高阶角矩 $\mathcal{K}_s^{\ ij}$ 和 $\mathcal{L}_s^{\ ijk}$，因此并未闭合。为了闭合方程组，必须通过闭合过程将这些矩与低阶矩联系起来。正如基于双矩中微子动力学的核心坍缩超新星代码通常所采用的那样（例如，O. Just 等人，2015 年；E. O’Connor 2015年；M. A. Skinner 等，2019），我们在thornado中采用代数矩闭合方案族。为此，矩的二阶张量通过下式与数密度相关联：$\mathcal{K}_s^{\ ij} = \mathsf{k}_s^{\ ij} \, \mathcal{D}_s$，其中近似埃丁顿张量为（C. D. Levermore 1984年）

$$\mathsf{k}_s^{\ ij} = \frac{1}{2} \left[(1 - \psi_s) \, \gamma^{ij} + (3\psi_s - 1) \, \hat{n}_s^{\ i} \, \hat{n}_s^{\ j} \right], \tag{12}$$

其中，$\hat{n}_s^{\ i} = \mathcal{I}_s^{\ i} / \mathcal{I}_s$ 是与共动系数通量密度平行的单位向量，$\mathcal{I}_s = \sqrt{\gamma_{ij} \mathcal{I}_s^{\ i} \mathcal{I}_s^{\ j}}$，而埃丁顿因子定义为

$$\psi_s = \hat{n}_{si} \, \hat{n}_{sj} \, \mathsf{k}_s^{\ ij} = \langle f_s (\hat{n}_{si} \ell^i)^2 \rangle / \langle f_s \rangle. \tag{13}$$

方程（12）中的埃丁顿张量满足迹条件 $\gamma_{ij} \mathsf{k}_s^{\ ij} = 1$。类似地，三阶矩张量通过归一化“热流”张量与数密度相关联，其中归一化热流张量近似为（S. Pennisi 1992；O. Just 等人，2015 年）

$$\mathsf{q}_s^{\ ijk} = \frac{1}{2} \left[(h_s - \zeta_s) \left(\hat{n}_s^{\ i} \gamma^{jk} + \hat{n}_s^{\ j} \gamma^{ik} + \hat{n}_s^{\ k} \gamma^{ij} \right) + (5\zeta_s - 3h_s) \, \hat{n}_s^{\ i} \, \hat{n}_s^{\ j} \, \hat{n}_s^{\ k} \right], \tag{14}$$

其中，$h_s = \mathcal{I}_s / \mathcal{D}_s$ 是通量因子，“热流因子”定义为

$$\zeta_s = \hat{n}_{si} \, \hat{n}_{sj} \, \hat{n}_{sk} \, \mathsf{q}_s^{\ ijk} = \langle f_s (\hat{n}_{si} \ell^i)^3 \rangle / \langle f_s \rangle. \tag{15}$$

方程（14）中的三阶张量满足迹条件 $\gamma_{ij} \, \mathsf{q}_s^{\ ijk} = h_s \, \hat{n}_s^{\ k}$。

随后，通过将爱丁顿因子和热流因子表示为 $\mathcal{D}_s$ 和 $\mathcal{I}_s{}^i$的函数，便可闭合双矩模型。迄今已发展出多种闭合策略，其中应用最广泛的可归为两类：最大熵闭合（例如，G. N. Minerbo，1978；B. Dubroca 与 J.-L. Feugeas，1999；J. Cernohorsky 与 S. A. Bludman，1994；S. Richers，2020）和 Kershaw 型闭合（例如，D. Kershaw，1976；F. Schneider，2016；Z. Banach 与 W. Larecki，2017）。所引述的最大熵闭合在所采用的熵泛函上有所不同。对于中微子动力学，适当的选择是费米–狄拉克熵；当中微子占据数接近 1 时（即，当 $\mathcal{D}_s \lesssim 1$），它可能会显著偏离经典（麦克斯韦–玻尔兹曼）或光子（玻色–爱因斯坦）行为。在核心坍缩超新星环境中，这种情况会出现在坍缩后的简并

核心中电子中微子的情形；然而，由于该区域的中微子平均自由程很短，爱丁顿近似通常相当准确。在更外侧的中微子加热区，$\mathcal{D}_s \ll 1$通常对所有中微子种类都成立，因此，经典最大熵闭合（即基于麦克斯韦–玻尔兹曼统计的闭合）或可为核心坍缩超新星中的中微子双矩输运提供合理近似（例如，O. Just 等人，2015 年；E. M. Murchikova 等，2017；T. Wang 与 A. Burrows，2023），从而在精度与模型和算法的复杂性之间取得平衡。尽管如此，输运行为在从扩散态向自由流态转变的过程中对熵泛函选择的敏感程度，尤其是是否需要采用基于费米–狄拉克统计的闭合，仍有待进一步研究。相较于麦克斯韦–玻尔兹曼情形，在费米–狄拉克统计框架下开发稳健的数值方法也困难得多（例如，R. Chu 等（2019））。因此，我们主要采用 Minerbo 闭合（基于麦克斯韦–玻尔兹曼统计的最大熵闭合；G. N. Minerbo，1978），并将方程（13）和（15）中的函数近似为通量因子的多项式，如下所示（例如，J. Cernohorsky 与 S. A. Bludman，1994；O. Just 等人，2015 年）

$$\psi_s(h) := \psi_s^{\mathrm{Mi}}(h) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}\left(3 - h + 3h^2\right)h^2, \tag{16}$$

$$\zeta_s(h) := \zeta_s^{\mathrm{Mi}}(h) = \frac{1}{75}\left(45 + 10\,h - 12\,h^2 - 12\,h^3 + 38\,h^4 - 12\,h^5 + 18\,h^6\right)h. \tag{17}$$

在第7 节中与 CHIMERA 进行代码间比较时，我们纳入了采用 Levermore 和 Kershaw 闭合方案的模型结果。为完整起见，我们在附录A中列出了相应的 Eddington 因子和热流因子。

方程（8）和（11）与 AENUS–ALCAR（O. Just 等人，2015年）和 Fornax （M. A. Skinner 等，2019）所求解的双矩系统相关。不过，它们求解的是与共动观测者相关的能量密度和动量密度。（数目输运的矩方程与我们的方程（8）和（11）类似，列于 O. Just 等人（2015年）的第 2.2.2 节。）将能量矩定义为方程（7）中的角矩，如下所示：

$$\left\{\mathcal{J}_s,\, \mathcal{H}_s{}^i,\, \widehat{\mathcal{K}}_s{}^{ij},\, \widehat{\mathcal{L}}_s{}^{ijk}\right\} = \varepsilon\left\{\mathcal{D}_s,\, \mathcal{I}_s{}^i,\, \mathcal{K}_s{}^{ij},\, \mathcal{L}_s{}^{ijk}\right\}, \tag{18}$$

将方程（8）和（11）乘以中微子能量ε （使用乘积法则，将 ε 移入能量导数内部），即可得到能量–动量输运的双矩模型，其谱能量方程为

$$\begin{aligned}&\partial_t\left(\mathcal{J}_s + v^i\,\mathcal{H}_{si}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\left[\mathcal{H}_s{}^i + \mathcal{J}_s\,v^i\right]\right) - \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\varepsilon\left(\varepsilon^3\left[\mathcal{H}_{si}\,\partial_t v^i + \widehat{\mathcal{K}}_s{}^i{}_k\,\nabla_i v^k\right]\right)\\ &= -\left(\mathcal{H}_{si}\,\partial_t v^i + \widehat{\mathcal{K}}_s{}^i{}_k\,\nabla_i v^k\right) + \varepsilon\,\langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\rangle\end{aligned} \tag{19}$$

和谱动量方程

$$\begin{aligned}&\partial_t\left(\mathcal{H}_{sj} + v^i\,\widehat{\mathcal{K}}_{sij}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\left[\widehat{\mathcal{K}}_s{}^i{}_j + \mathcal{H}_{sj}\,v^i\right]\right) - \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\varepsilon\left(\varepsilon^3\left[\widehat{\mathcal{K}}_{sjk}\,\partial_t v^k + \widehat{\mathcal{L}}_s{}^i{}_{kj}\,\nabla_i v^k\right]\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathcal{K}}_s{}^{ik} + \mathcal{H}_s{}^i\,v^k + v^i\,\mathcal{H}_s{}^k\right)\partial_j\gamma_{ik} - \left(\mathcal{J}_s\,\partial_t v_j + \mathcal{H}_s{}^i\,\partial_i v_j\right) + \varepsilon\,\langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\ell_j\rangle,\end{aligned} \tag{20}$$

分别为。（O. Just 等人（2015）和 M. A. Skinner 等（2019）根据比强度定义角矩$\propto \varepsilon^3 f_s$。）方程（19）和（20）与 O. Just 等人（2015）和 M. A. Skinner 等（2019）列出的方程有所不同。首先，O. Just 等人（2015）和 M. A. Skinner 等（2019）忽略了能量导数算子中与流体三速度时间导数成正比的项——即方程（19）和（20）左端的最后一项——以及方程（20）右端的相应项。对于非相对论速度，这种处理是合理的（R. B. Lowrie 等，2001）。其次，这些研究没有包含时间导数算子中涉及流体三速度的项——即方程（19）和（20）左端的第一项——因此 $\mathcal{J}_s$ 和 $\mathcal{H}_{sj}$ 由各自的矩方程直接演化。这相当于将辐射量的时间变化视为发生在流体时间尺度上（R. B. Lowrie 等，2001）；然而，由此得到的双矩系统所支持的波速可能超过光速，这不符合物理实际。对于一维空间中的所有 $v < 1$，以及多维情况下的 $v \lesssim 0.25$，方程（19）和（20）（或等价地，方程（8）和（11））所支持的波速均不超过光速（M. P. Laiu 等，2025）。忽略时间导数中的速度相关项还会导致无法得到正确的、针对 $\mathcal{O}(v/c)$的欧拉参考系动量、能量和数目方程，并影响模型的动量、能量和轻子数守恒性质（R. B. Lowrie 等，2001；A. Mezzacappa 等，2020；M. P. Laiu 等，2025）。我们将在下文再次强调这一点。保留这些项会增加数值求解双矩模型的算法复杂度，因为需要使用非线性反演算法来求得 $\mathcal{J}_s$ 和 $\mathcal{H}_{sj}$

根据演化量（$\mathcal{J}_s + v^i\,\mathcal{H}_{si}$）和（$\mathcal{H}_{sj} + v^i\,\widehat{\mathcal{K}}_{sij}$），以及流体三速度 v^i。这一问题与相对论流体力学与磁流体力学中遇到的问题类似（例如，S. C. Noble 等，2006）。我们在第8和第11节中，结合方程（3）介绍处理这一守恒变量到原始变量转换问题的方法。

方程（8）和（11）与正确的欧拉中微子能量和动量密度方程一致，具体而言是 $\mathcal{O}(v/c)$。为说明这一点，首先将方程（8）乘以 ε，再将方程（11）与 v^j 收缩后乘以 ε，并舍去 $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ 项，即可得到欧拉中微子能量方程

$$\partial_t \mathcal{E}_s + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\,\mathcal{F}_s{}^i\right) - \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\varepsilon\left(\varepsilon^3\left[\mathcal{H}_{si}\,\partial_t v^i + \widehat{\mathcal{K}}_s{}^i{}_k\,\nabla_i v^k\right]\right) = \varepsilon\left(\langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\rangle + v^j\,\langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\ell_j\rangle\right). \tag{21}$$

接下来，将方程（ε 乘以 11），再将方程（v_j 乘以 ε 后与方程（8）相乘，并舍去 $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ 项，即可得到欧拉中微子动量方程

$$\partial_t \mathcal{F}_{sj} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\,\mathcal{S}_s{}^i{}_j\right) - \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\varepsilon\left(\varepsilon^3\left[\widehat{\mathcal{K}}_{sjk}\,\partial_t v^k + \widehat{\mathcal{L}}_s{}^i{}_{kj}\,\nabla_i v^k\right]\right) = \frac{1}{2}\,\mathcal{S}_s{}^{ik}\,\partial_j\gamma_{ik} + \varepsilon\left(\langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\ell_j\rangle + v_j\,\langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\rangle\right). \tag{22}$$

这里，“欧拉”矩 $\{\mathcal{E}_s, \mathcal{F}_s{}^i, \mathcal{S}_s{}^{ij}\}$ 已用拉格朗日矩 $\{\mathcal{J}_s, \mathcal{H}_s{}^i, \widehat{\mathcal{K}}_s{}^{ij}\}$ 表示为

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{J}_s + 2\,v^i\,\mathcal{H}_{si}, \tag{23}$$

$$\mathcal{F}_s{}^i = \mathcal{H}_s{}^i + v^i\,\mathcal{J}_s + v^j\widehat{\mathcal{K}}_s{}^i{}_j, \tag{24}$$

$$\mathcal{S}_s{}^{ij} = \widehat{\mathcal{K}}_s{}^{ij} + \mathcal{H}_s{}^i\,v^j + v^i\,\mathcal{H}_s{}^j, \tag{25}$$

其中 $\mathcal{E}_s$，$\mathcal{F}_s{}^i$和 $\mathcal{S}_s{}^{ij}$ 分别表示谱欧拉中微子能量密度、动量密度和应力。“欧拉”一词表示这些矩是谱应力-能量张量欧拉分解分量的 $\mathcal{O}(v/c)$ 极限（C. Y. Cardall 等，2013a）。对中微子能量进行积分（采用适当的权重 $4\pi\varepsilon^2/h^3$）后，这些矩即为欧拉观测者测得的量。此外，对方程（21）和（22）在能量上积分得到相应的演化方程，这些方程成为位置空间平衡方程；将其与方程（3）和（2）结合后，分别表达总能量（物质加中微子）和总动量的守恒。

接下来，我们利用动量、能量和轻子数的守恒原理，来确定方程（$Q_{\mathrm{M}j}$、Q_{E}和 Q_{L}）右端项中的源项，其中各方程分别为（2）、（3）和（4）。我们将中微子轻子数密度和通量定义为

$$\left\{N_\nu,\, F_{N_\nu}{}^i\right\} = \sum_{s=1}^{N_{\mathrm{s}}} \mathrm{g}_s \int_{\mathbb{R}^+} \left\{\mathcal{N}_s,\, \mathcal{I}_s{}^i + \mathcal{D}_s\,v^i\right\} dV_\varepsilon, \tag{26}$$

其中 $dV_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^2 d\varepsilon/h^3$，且$\mathrm{g}_s$ 表示中微子种类 s的轻子数。在我们的模型中，只有电子味中微子会与物质发生轻子交换，因此我们取$\mathrm{g}_{\nu_e} = 1$、$\mathrm{g}_{\bar{\nu}_e} = -1$和$\mathrm{g}_s = 0$ 对应于 $s \notin \{\nu_e, \bar{\nu}_e\}$。然后，将方程（8）中的中微子数方程对能量积分，并将结果与方程（4）结合，可得总轻子数密度的守恒定律

$$\partial_t\left(n_{\mathrm{e}} + N_\nu\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\left[n_{\mathrm{e}}\,v^i + F_{N_\nu}{}^i\right]\right) = 0, \tag{27}$$

前提是将方程（4）右端项中的轻子数交换率定义为

$$Q_{\mathrm{L}} = \sum_{s=1}^{N_{\mathrm{s}}} \mathrm{g}_s \int_{\mathbb{R}^+} \langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\rangle\, dV_\varepsilon. \tag{28}$$

类似地，我们将欧拉中微子能量、动量和应力定义为

$$\left\{E_\nu,\, F_\nu{}^i,\, S_\nu{}^{ij}\right\} = \sum_{s=1}^{N_{\mathrm{s}}} \int_{\mathbb{R}^+} \left\{\mathcal{E}_s,\, \mathcal{F}_s{}^i,\, \mathcal{S}_s{}^{ij}\right\} dV_\varepsilon. \tag{29}$$

然后，将方程（22）对能量积分，并与方程（2）结合，得到总（物质加中微子）动量方程

$$\partial_t\left(\rho v_j + F_{\nu j}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\left[\Pi^i{}_j + S_\nu{}^i{}_j\right]\right) = \frac{1}{2}\left(\Pi^{ik} + S_\nu{}^{ik}\right)\partial_j\gamma_{ik} - \rho\partial_j\Phi, \tag{30}$$

同时，将方程（21）对能量积分，并与方程（3）结合，得到总（物质加中微子）能量方程

$$\partial_t\left(E_{\rm f}+E_\nu\right)+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\left[\left(E_{\rm f}+p\right)v^i+{F_\nu}^i\right]\right)=-\rho v^i\partial_i\Phi, \tag{31}$$

如果方程（2）和（3）中的中微子–物质相互作用导致的动量和能量交换速率分别定义为

$$Q_{{\rm M}j}=\sum_{s=1}^{N_{\rm s}}\int_{\mathbb{R}^+}\left(\left\langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\ell_j\right\rangle+v_j\left\langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\right\rangle\right)\varepsilon\,dV_\varepsilon, \tag{32}$$

$$Q_{\rm E}=\sum_{s=1}^{N_{\rm s}}\int_{\mathbb{R}^+}\left(\left\langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\right\rangle+v^j\left\langle\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\ell_j\right\rangle\right)\varepsilon\,dV_\varepsilon. \tag{33}$$

方程（28）、（32）和（33）中的交换速率在 $\mathcal{O}(v/c)$ 意义下，与中微子–物质相互作用导致的轻子数、动量和能量守恒相一致。我们在第3节所述的中微子–物质耦合模型算法中强制施加这些守恒定律。需要指出的是，借助方程（31）和方程（5），可以将方程（31）转化为物质、中微子和引力势能的一个精确守恒定律，但此处不再详述。

2.3. 弱相互作用与碰撞项

接下来，我们介绍模型中包含的、并纳入第3节所述中微子–物质耦合算法的不透明度。表1 总结了完整的不透明度集，提供了相关参考文献，并指出进入方程（8）和（11）右端项的相应碰撞项表达式。对于数值计算，不透明度表和状态方程表，以及实时插值所需的基础设施，均由 WeakLib 提供。

表 1。 thornado 的中微子-物质耦合算法所采用的不透明度包括中微子（$\nu\in\{\nu_{\rm e},\nu_\mu,\nu_\tau\}$）和/或反中微子（$\bar{\nu}\in\{\bar{\nu}_{\rm e},\bar{\nu}_\mu,\bar{\nu}_\tau\}$）与电子（$e^-$）、正电子（$e^+$）、中子（$n$）、质子（$p$）、重原子核（$A$）和核子（$N$）之间相互作用的不透明度。

	过程	引用文献	方程
I	$e^-+p\rightleftharpoons n+\nu_{\rm e}$	S. Reddy 等人 (1998年); C. J. Horowitz (2002年)	方程 (36)
II	$e^++n\rightleftharpoons p+\bar{\nu}_{\rm e}$	S. Reddy 等人 (1998年); C. J. Horowitz (2002年)	方程 (36)
III	$\nu_{\rm e}+A'\rightleftharpoons e^-+A$	K. Langanke 等人 (2003年); W. R. Hix 等人 (2003年)	方程 (36)
IV	$\nu+\{n,p\}\rightleftharpoons\nu+\{n,p\}$	S. W. Bruenn (1985年); C. J. Horowitz (2002年)	方程 (37)
V	$\nu+A\rightleftharpoons\nu+A$	S. W. Bruenn (1985年)； S. W. Bruenn & A. Mezzacappa (1997年)； C. J. Horowitz (1997年)	方程 (37)
VI	$\nu+e^\pm\rightleftharpoons\nu'+e^{\pm\,\prime}$	S. W. Bruenn(1985年); A. Mezzacappa & S. W. Bruenn(1993a)	方程式 (39), (40)
VII	$e^-+e^+\rightleftharpoons\nu+\bar{\nu}$	S. W. Bruenn (1985年)	方程式 (43), (44)
VIII	$\nu_{\rm e}+\bar{\nu}_{\rm e}\Rightarrow\nu_{\mu,\tau}+\bar{\nu}_{\mu,\tau}$	R. Buras 等人（2003年）	方程式（43）、（44）
IX	$N+N\rightleftharpoons N'+N'+\nu+\bar{\nu}$	S. Hannestad & G. Raffelt (1998年)	方程式（43）、（44）

表 1 所列的不透明度集包括主要的弱相互作用，例如发射与吸收（I–III）、散射（IV–VI）以及成对过程（VII–IX）。该不透明度集并不代表当前核心坍缩超新星理论的最高水平（例如参见 A. Burrows 等，2006年；H.-T. Janka 等，2007年；H.-T. Janka，2012年；A. Mezzacappa 等，2020；T. Fischer 等，2023年所作的综述），但涵盖了当代模型中所使用的主要不透明度；而且，我们用于纳入该不透明度集的形式体系具有足够的通用性，只需更新截面和/或改进特定过程的处理方式，即可适应更加现代的不透明度集。例如，可将中微子–核子散射视为非弹性的（例如 B. M¨uller 等，2012年），而不是等能的（正如本文所采用的处理）。此外，我们没有纳入 μ子及其相关的弱相互作用（R. Bollig 等，2017年；T. Fischer 等，2020年）；也没有纳入由 C. J. Horowitz 等（2017年）推导出的针对 IV 的多体修正。对于核子上的发射与吸收（I 和 II），S. Reddy 等（1998年）给出的截面包含核子反冲修正，因此我们遵循 R. Buras 等（2006年）的做法，将弱磁性修正和反冲修正与 C. J. Horowitz（2002年）的结果分离开来（另见 S. W. Bruenn 等，2020年）。对于重原子核上的电子俘获（III），我们存储了 K. Langanke 等（2003年）提供的完整核统计平衡（NSE）折叠表格数据；

W. R. Hix 等人 （2003年），并在将发射中微子的谱插值到 thornado 中的 DG 谱网格后，将其重新归一化至原始表格值。我们确实纳入了中性流中微子-核子相互作用中的奇异夸克贡献（C. J.Horowitz 2002），其中奇异性贡献的轴矢量耦合常数取值为 $g_{\mathrm{A}}^{\mathrm{s}} = -0.1$ （T. J. Hobbs 等，2016年）。$\nu_e + \bar{\nu}_e \Rightarrow \nu_{\mu,\,\tau} + \bar{\nu}_{\mu,\,\tau}$（VIII）的湮灭率采用与 VII 相同的不透明度核进行近似，但在表格插值中使用$\eta_{\nu_{\mathrm{e}}} = \mu_{\nu_{\mathrm{e}}}/T$而非 $\eta_{\mathrm{e}} = \mu_{\mathrm{e}}/T$作为输入，其中 $\mu_{\nu_{\mathrm{e}}}$和 μ_{e}分别为电子中微子和电子化学势，并使用弱耦合常数 $C_{\mathrm{V}} = C_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}$。与 R. Buras 等人 （2003年）一样，我们仅将 VIII 用作$\nu_{\mu,\,\tau}$和$\bar{\nu}_{\mu,\,\tau}$的产生机制，并且仅在 $\rho \geq 10^{12}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ 的区域内使用，以确保 ν_{e}和 $\bar{\nu}_{\mathrm{e}}$ 处于局部热平衡这一假设成立。未来的研究中，我们将报告 thornado 中不透明度集及其数值处理方面的改进。

为适应表 1 中的不透明度集，我们将碰撞项写为

$$\mathcal{C}_s(\boldsymbol{f}) = \mathcal{C}_s^{\mathrm{EA}}(f_s) + \mathcal{C}_s^{\mathrm{Iso}}(f_s) + \mathcal{C}_s^{\mathrm{NES}}(f_s) + \mathcal{C}_s^{\mathrm{Pair}}(f_s, \bar{f}_s), \tag{34}$$

其中，$\mathcal{C}_s^{\mathrm{EA}}$、$\mathcal{C}_s^{\mathrm{Iso}}$、$\mathcal{C}_s^{\mathrm{NES}}$和 $\mathcal{C}_s^{\mathrm{Pair}}$分别表示发射与吸收（I–III）、核子（IV）和原子核（V）上的等能散射、中微子-电子散射（NES；VI）以及成对过程（VII–IX）的贡献。成对过程包括正负电子湮灭产生中微子对（VII）、电子中微子对湮灭（VIII）以及核子-核子¯轫致辐射（IX）。这里，f_s 是中微子种类 s 的反粒子的分布函数，其分布函数为 f_s；例如，对于¯电子中微子，有 $s = \nu_{\mathrm{e}}$、$f_{\nu_{\mathrm{e}}} = f_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}}$。

右端项中各项的 方程（34）表达式见附录 B。对于双矩模型，需要对 方程（34）中的碰撞项取角矩。具体而言，对于方程（8）和（11）右端的碰撞项，我们写为

$$\langle \mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\{1, \ell_j\}\rangle = \langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{EA}}(f_s)\{1, \ell_j\}\rangle + \langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{Iso}}(f_s)\{1, \ell_j\}\rangle + \langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{NES}}(f_s)\{1, \ell_j\}\rangle + \langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{Pair}}(f_s, \bar{f}_s)\{1, \ell_j\}\rangle, \tag{35}$$

其中发射与吸收的贡献为

$$\langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{EA}}(f_s)\rangle = \eta_s^{\mathrm{EA}} - \chi_s^{\mathrm{EA}}\,\mathcal{D}_s \quad \text{and} \quad \langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{EA}}(f_s)\,\ell_j\rangle = -\chi_s^{\mathrm{EA}}\,\mathcal{I}_{sj}, \tag{36}$$

其中 η_s^{EA}为发射率，χ_s^{EA}为吸收不透明度，并已针对“受激吸收”进行修正（例如，A. Mezzacappa & R.A.Matzner1989）。等能散射的贡献为

$$\langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{Iso}}(f_s)\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{Iso}}(f_s)\,\ell_j\rangle = -\sigma_s^{\mathrm{Iso}}\,\mathcal{I}_{sj}, \tag{37}$$

其中，我们将总等能散射不透明度定义为

$$\sigma_s^{\mathrm{Iso}} = \frac{4\pi\varepsilon^2}{h^3}\left[\,\Phi_{s,0}^{\mathrm{Iso}} - \frac{1}{3}\,\Phi_{s,1}^{\mathrm{Iso}}\,\right], \tag{38}$$

并且$\Phi_{s,\,0}^{\mathrm{Iso}}$和$\Phi_{s,\,1}^{\mathrm{Iso}}$是散射核对散射角作线性勒让德展开后得到的展开系数（参见方程（B9）。

中微子弹性散射的贡献可写为

$$\langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{NES}}(f_s)\rangle = \eta_s^{\mathrm{NES}} - \chi_s^{\mathrm{NES}}\,\mathcal{D}_s - \left[\,\langle \Phi_{s,1}^{\mathrm{In}}\,\mathcal{I}_s{}^{i}\rangle_{\mathbb{R}^+} - \langle \Phi_{s,1}^{\mathrm{Out}}\,\mathcal{I}_s{}^{i}\rangle_{\mathbb{R}^+}\,\right]\mathcal{I}_{si}, \tag{39}$$

$$\langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{NES}}(f_s)\,\ell_j\rangle = -\chi_s^{\mathrm{NES}}\,\mathcal{I}_{sj} + \frac{1}{3}\left(\gamma_{ij} - 3\mathcal{K}_{sij}\right)\langle \Phi_{s,1}^{\mathrm{In}}\,\mathcal{I}_s{}^{i}\rangle_{\mathbb{R}^+} + \mathcal{K}_{sij}\,\langle \Phi_{s,1}^{\mathrm{Out}}\,\mathcal{I}_s{}^{i}\rangle_{\mathbb{R}^+}, \tag{40}$$

其中发射率和 不透明度以零阶展开系数定义（见方程（B11））a s

$$\eta_s^{\mathrm{NES}} = \int_{\mathbb{R}^+} \Phi_{s,0}^{\mathrm{In}}(\varepsilon, \varepsilon')\,\mathcal{D}_s(\varepsilon')\,dV_{\varepsilon'} \quad \text{and} \quad \chi_s^{\mathrm{NES}} = \eta_s^{\mathrm{NES}} + \int_{\mathbb{R}^+} \Phi_{s,0}^{\mathrm{Out}}(\varepsilon, \varepsilon')\,(1 - \mathcal{D}(\varepsilon'))\,dV_{\varepsilon'}, \tag{41}$$

分别为，一阶修正如下

$$\langle \Phi_{s,1}^{\mathrm{In/Out}}\,\mathcal{I}_s{}^{i}\rangle_{\mathbb{R}^+} = \int_{\mathbb{R}^+} \Phi_{s,1}^{\mathrm{In/Out}}(\varepsilon, \varepsilon')\,\mathcal{I}_s{}^{i}(\varepsilon')\,dV_{\varepsilon'}. \tag{42}$$

成对过程的贡献也可以类似地写为

$$\langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{Pair}}(f_s, \bar{f}_s)\rangle = \eta_s^{\mathrm{Pair}} - \chi_s^{\mathrm{Pair}}\,\mathcal{D}_s + \left[\,\langle \Phi_{s,1}^{\mathrm{Pro}}\,\bar{\mathcal{I}}_s{}^{i}\rangle_{\mathbb{R}^+} - \langle \Phi_{s,1}^{\mathrm{Ann}}\,\bar{\mathcal{I}}_s{}^{i}\rangle_{\mathbb{R}^+}\,\right]\mathcal{I}_{si}, \tag{43}$$

$$\langle \mathcal{C}_s^{\mathrm{Pair}}(f_s, \bar{f}_s)\,\ell_j\rangle = -\chi_s^{\mathrm{Pair}}\,\mathcal{I}_{sj} - \frac{1}{3}\left(\gamma_{ij} - 3\mathcal{K}_{sij}\right)\langle \Phi_{s,1}^{\mathrm{Pro}}\,\bar{\mathcal{I}}_s{}^{i}\rangle_{\mathbb{R}^+} - \mathcal{K}_{sij}\,\langle \Phi_{s,1}^{\mathrm{Ann}}\,\bar{\mathcal{I}}_s{}^{i}\rangle_{\mathbb{R}^+}, \tag{44}$$

wh其中，成对发射率和不透明度由零阶展开系数定义 nts

$$\eta_s^{\text{Pair}} = \int_{\mathbb{R}^+} \Phi_{s,0}^{\text{Pro}}(\varepsilon,\varepsilon')\,(1-\bar{\mathcal{D}}_s(\varepsilon'))\,dV_{\varepsilon'} \quad \text{and} \quad \chi_s^{\text{Pair}} = \eta_s^{\text{Pair}} + \int_{\mathbb{R}^+} \Phi_{s,0}^{\text{Ann}}(\varepsilon,\varepsilon')\,\bar{\mathcal{D}}_s(\varepsilon')\,dV_{\varepsilon'}, \tag{45}$$

分别为，一阶修正为

$$\langle \Phi_{s,1}^{\text{Pro/Ann}}\,\bar{\mathcal{I}}_s{}^i \rangle_{\mathbb{R}^+} = \int_{\mathbb{R}^+} \Phi_{s,1}^{\text{Pro/Ann}}(\varepsilon,\varepsilon')\,\bar{\mathcal{I}}_s{}^i(\varepsilon')\,dV_{\varepsilon'}. \tag{46}$$

对于表 1 中的相互作用，WeakLib 提供了通过插值计算的表格化不透明度和核函数。对于带电流反应 I 和 II，$\chi_s^{\text{EA}}(\varepsilon,\rho,T,Y_e)$以表格形式给出，并通过四线性插值计算。重原子核上的电子俘获（III）所产生的发射率，则由完整的 NSE 折叠表格数据获得。对于核子（IV）和原子核（V）上的等能散射，核函数 $\Phi_s^{\text{Iso}}{}_{,0}(\varepsilon,\rho,T,Y_e)$ 和 $\Phi_s^{\text{Iso}}{}_{,1}(\varepsilon,\rho,T,Y_e)$以表格形式给出，并通过四线性插值计算。VI、VII 和 VIII 的核函数由以 $(\varepsilon,\varepsilon',\eta,T)$ 为自变量的表格化结构函数构造而成（参见 S. W. Bruenn 1985年，附录 C；具体而言，VI 对应方程 (C50)，VII 和 VIII 对应方程 (C63)）。模拟开始时，首先将这些结构函数在 $(\varepsilon,\varepsilon')$ 上进行双线性插值，映射到 thornado 的能量网格；随后在运行时，根据简并参数和温度 (η,T) 进行双线性插值，以获得核函数 $\Phi_{s\,\ell}^{\text{In/Out}}$, 和 $\Phi_{s\,\ell}^{\text{Pro/Ann}}$, , 其中 $\ell \in \{0,1\}$。对于过程 IX，我们将 S. Hannestad 和 G. Raffelt（1998年）给出的核函数 $S_\sigma(\varepsilon,\varepsilon',\rho,T)$制成表格，并像处理 VI–VIII 一样，先将其插值到 thornado 的能量网格上。模拟过程中，对 S_σ 进行三次双线性插值，并将结果组合为 $S_\sigma = S_\sigma(\rho\,X_n,T) + S_\sigma(\rho\,X_p,T) + (28/3)\;S_\sigma\left(\rho\,\sqrt{X_n\,X_p},T\right)$ (R. P. Brinkmann 和 M. S. Turner 1988 年；T. A. Thompson 等人 2000 年；M. Rampp 和 H. T. Janka 2002年)，其中 X_n 和 X_p 分别是中子和质子的质量分数。随后使用S_σ 获得核函数 $\Phi_{s\,\ell}^{\text{Pro/Ann}}$, 。

注 2. 碰撞项包含若干特点，使中微子–物质耦合成为核心坍缩超新星中微子输运中计算开销最大的组成部分。中微子弹性散射和成对过程通过积分算子将不同能量下的矩耦合起来；成对过程还会耦合不同中微子种类，例如方程 (41) 和 (45)所示。费米阻塞因子 $(1-\mathcal{D}_s)$会引入非线性，此外，不透明度和核函数还会随流体局部热力学状态发生非线性变化。

2.4. 中微子辐射流体动力学方程

此处我们概述中微子辐射流体动力学方程，并引入简洁的记号，以便在第 3 节介绍数值方法时使用。我们将方程 (1)–(4) 中的流体动力学方程简写为

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i(\sqrt{\gamma}\,\boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u},\Phi) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\mathcal{U}}), \tag{47}$$

其中，解向量、通量向量，以及由曲线坐标、引力和中微子–物质相互作用产生的源项为

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_j \\ E_{\text{f}} \\ \rho Y_{\text{e}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}^i = \begin{bmatrix} \rho v^i \\ \Pi^i{}_j \\ (E_{\text{f}}+p)v^i \\ \rho Y_{\text{e}} v^i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\,\Pi^{ik}\,\partial_j\gamma_{ik} - \rho\,\partial_j\Phi \\ -\rho\,v^i\,\partial_i\Phi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{C} = -\begin{bmatrix} 0 \\ Q_{\text{M}j} \\ Q_{\text{E}} \\ m_{\text{B}}\,Q_{\text{L}} \end{bmatrix}, \tag{48}$$

分别。（$\boldsymbol{\mathcal{U}}$表示中微子矩，定义如下。）我们将方程（5）中的泊松方程简写为约束方程

$$\mathsf{F}(\Phi,\boldsymbol{u}) = 0. \tag{49}$$

中微子动理学方程 由方程（8）和（11）中的双矩模型给出，简写为

$$\partial_t \boldsymbol{\mathcal{U}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i(\sqrt{\gamma}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}^i(\boldsymbol{\mathcal{U}},\boldsymbol{v})) + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\varepsilon(\varepsilon^3\,\boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon(\boldsymbol{\mathcal{U}},\boldsymbol{v})) = \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\mathcal{U}},\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\mathcal{U}},\boldsymbol{u}), \tag{50}$$

其中，解向量以及位置空间和能量空间通量包含所有中微子种类；也就是说，我们令 $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \{\boldsymbol{\mathcal{U}}_s\}_{s=1}^{N_{\text{s}}}$、$\boldsymbol{\mathcal{F}}^i = \{\boldsymbol{\mathcal{F}}_s{}^i\}_{s=1}^{N_{\text{s}}}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon = \{\boldsymbol{\mathcal{F}}_s{}^\varepsilon\}_{s=1}^{N_{\text{s}}}$，其中

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_s = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_s + v^i\,\mathcal{I}_{si} \\ \mathcal{I}_{sj} + v^i\,\mathcal{K}_{sij} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_s{}^i = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_s{}^i + \mathcal{D}_s\,v^i \\ \mathcal{K}_s{}^i{}_j + \mathcal{I}_{sj}\,v^i \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_s{}^\varepsilon = -\begin{bmatrix} \mathcal{K}_s{}^i{}_k \\ \mathcal{L}_s{}^i{}_{kj} \end{bmatrix}\nabla_i v^k. \tag{51}$$

同样，th 方程右端项中的源为50）$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\boldsymbol{\mathcal{S}}_s\}_{s=1}^{N_s}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{C}} = \{\boldsymbol{\mathcal{C}}_s\}_{s=1}^{N_s}$，其中

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}_s{}^{ik} + \mathcal{I}_s{}^{i}\, v^k + v^i\, \mathcal{I}_s{}^{k}\right)\partial_j \gamma_{ik} + \left(\mathcal{L}_s{}^{i}{}_{kj}\,\nabla_i v^k - \mathcal{I}_s{}^{i}\,\partial_i v_j\right) \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}_s = \begin{bmatrix} \langle \mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\rangle \\ \langle \mathcal{C}_s(\boldsymbol{f})\ell_j\rangle \end{bmatrix}. \tag{52}$$

在方程（50）中，与方程（8）和（11）相比，我们省略了包含流体三速度时间导数的项，这与O. Just 等人（2015年）以及M. A. Skinner 等人（2019年）的处理相同。方程（$\boldsymbol{50}^i$、$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\varepsilon}$和$\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 对三速度 $\boldsymbol{v}$ 的依赖关系已在方程（50）中明确给出，并且可以由 $\boldsymbol{v}$ 的分量得到 $\boldsymbol{u}$的分量（即 $v^i = \gamma^{ij}\left(\rho v_j\right)/\rho$）。

最后，我们引入原始矩向量 $\boldsymbol{\mathcal{M}}_s = \left[\mathcal{D}_s, \mathcal{I}_s{}^{i}\right]^{\mathsf{T}}$ 和流体三速度向量 $\boldsymbol{v} = \mathcal{K}_s{}^{ij}$。
然后，在采用矩闭合关系给出（$\boldsymbol{\mathcal{M}}$）后，解向量可以表示为原始矩和流体三速度的函数，即$\boldsymbol{\mathcal{U}}_s = \boldsymbol{\mathcal{U}}_s(\boldsymbol{\mathcal{M}}_s, \boldsymbol{v})$，它们之间的显式关系可写为

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_s = \mathcal{A}_s(\boldsymbol{\mathcal{M}}_s, \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{\mathcal{M}}_s, \quad \text{where} \quad \mathcal{A}_s(\boldsymbol{\mathcal{M}}_s, \boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} 1 & v^k\gamma_{kj} \\ v^k \mathsf{k}_{skj}(\boldsymbol{\mathcal{M}}_s) & \gamma_{ij} \end{bmatrix}. \tag{53}$$

给定 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_s$ 和 $\boldsymbol{v}$，方程 (53) 定义了一个可用于求解 $\boldsymbol{\mathcal{M}}_s$的非线性方程组。在双矩模型的数值积分过程中，必须反复求解这个问题；例如，为了计算方程 (51) 中的通量。

3. 数值方法

第 2.4 节概述的中微子辐射流体动力学方程支撑着跨越广泛时空尺度的动力学。为应对这种多尺度结构，我们结合显式和隐式时间积分：流体流动和中微子相空间平流采用显式方法积分，而中微子–物质耦合采用隐式方法积分。在 Lie–Trotter 分裂框架下，将欧拉–泊松系统的显式 RK 方法与中微子输运的 IMEX-RK 方法相结合时，可将方程 (47)、(49) 和 (50) 给出的耦合问题拆分为以下三个子问题：

- **子问题 1：** 含自引力流体力学（Euler–Poisson）

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\,\boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{u})\right) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \Phi), \tag{54a}$$

$$\mathsf{F}(\Phi, \boldsymbol{u}) = 0. \tag{54b}$$

- **子问题 2：** 中微子相空间平流

$$\partial_t \boldsymbol{\mathcal{U}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}^i(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{v})\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\varepsilon\left(\varepsilon^3\,\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{v})\right) = \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{v}). \tag{55}$$

- **子问题 3：** 中微子–物质耦合

$$\partial_t \boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{u}), \tag{56a}$$

$$\partial_t \mathbf{U} = 0, \tag{56b}$$

其中，在方程（56b）中，我们引入了“碰撞不变量”向量

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{u}) = \left(\rho,\, \mathsf{M}_j,\, \mathsf{E},\, \mathsf{N}\right)^{\mathsf{T}}, \tag{57}$$

其中，$\mathsf{M}_j = \rho v_j + F_{\nu j}$ 为总动量密度，$\mathsf{E} = E_{\mathrm{f}} + E_\nu$ 为总能量密度，而$\mathsf{N} = n_{\mathrm{e}} + N_\nu$ 为总轻子数密度；分别参见方程（30）、（31）和（27）。

本文主要讨论如何求解方程（55）中的相空间平流问题（子问题 2），以及方程（56）中的中微子–物质耦合问题（子问题 3）。为求解方程（54）（子问题 1），我们使用 FLASH-X（A. Dubey 等人（2022））提供的流体动力学和引力求解器；具体而言，我们采用 `Spark`（S. M. Couch 等人（2021））及 S. M. Couch 等人（2013年）的多极引力求解器。我们将在第 3.2 节说明如何对整个系统进行时间积分。子问题 2 模拟中微子在相空间中的传播，并通过左侧的

散度算子耦合相邻网格。用于求解该显式部分的方法，是将 M. P. Laiu 等人 （2025）提出的方法扩展到曲线空间坐标和多个中微子种类。在子问题 3 中，我们求解空间均匀动力学方程及其对应的物质方程，并通过强制保持方程（57）中的碰撞不变量来更新物质。这部分在位置空间中是局部的，但会耦合不同的中微子能量和种类。用于求解该非线性问题的隐式方法，是对 M. P. Laiu 等人 （2021年，第 4.3 节）提出的嵌套不动点迭代方案的扩展。

3.1. *Phase-Space Discretization*

3.1.1. *Discontinuous Galerkin Method*

在thornado中，采用间断伽辽金方法（例如，B. Cockburn 和 C.-W. Shu（2001））对相空间中的中微子矩方程进行离散化（另见 R. Chu 等人（2019年）；M. P. Laiu 等人（2021年）、2025）。本文所述方法是将M. P. Laiu 等人（2025）提出的方法扩展到正交曲线坐标和更一般的碰撞算子，并且在很大程度上沿用其符号体系（另见D. Pochik 等（2021年））。$d_{\boldsymbol{x}}$维空间域 $D_{\boldsymbol{x}} \subset \mathbb{R}^{d_{\boldsymbol{x}}}$ 被划分为由 $\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}$ 互不重叠的空间单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$ 组成的集合 $D_{\boldsymbol{x}} = \cup_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$，使得 $D_{\boldsymbol{x}} = \cup_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$。每个单元都是一个逻辑上的笛卡尔盒

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}} = \left\{ \boldsymbol{x} : x^i \in K^i_{\boldsymbol{x}} := (x^i_{\mathrm{L}}, x^i_{\mathrm{H}}), i = 1, \ldots, d_{\boldsymbol{x}} \right\}, \tag{58}$$

其中，$x^i{}_{\mathrm{L}}$ 和 $x^i{}_{\mathrm{H}}$ 分别是该单元在第 i个空间维度上的低边界和高边界。类似地，中微子能量域 $D_\varepsilon = [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}] \subset \mathbb{R}^+$被划分为由 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 个 $\mathfrak{N}$能量单元（或能量区间） $K^{\mathfrak{e}}_\varepsilon = (\varepsilon_{\mathfrak{e}-\frac{1}{2}}, \varepsilon_{\mathfrak{e}+\frac{1}{2}})$ 组成的集合，其中

$$\varepsilon_{\min} = \varepsilon_{\frac{1}{2}} < \ldots < \varepsilon_{\mathfrak{e}-\frac{1}{2}} < \varepsilon_{\mathfrak{e}+\frac{1}{2}} < \ldots < \varepsilon_{\mathfrak{N}+\frac{1}{2}} = \varepsilon_{\max}. \tag{59}$$

因此，$D_\varepsilon = \cup_{\mathfrak{e}=1}^{\mathfrak{N}} K^{\mathfrak{e}}_\varepsilon$。（我们保留花体索引 $\mathfrak{e}$，专门表示第 $\mathfrak{e}$ 个能量单元。）我们强调，索引 i（例如在 $K^i_{\boldsymbol{x}}$ 中使用的索引）表示空间维度，而索引 $\mathfrak{e}$ 表示特定的能量单元。能量单元上的索引 $\mathfrak{e}$ 在稍后描述碰撞算子的离散化时会用到，因为碰撞算子会耦合所有 $K^{\mathfrak{e}}_\varepsilon \in D_\varepsilon$；而表示特定空间单元的对应索引则没有必要。我们将相空间坐标定义为 $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \varepsilon)$，并将相空间单元记为

$$\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}} \times K^{\mathfrak{e}}_\varepsilon, \quad \mathfrak{e} \in \{1, \ldots, \mathfrak{N}\}. \tag{60}$$

令 $D_{\boldsymbol{z}} = D_{\boldsymbol{x}} \times D_\varepsilon$ 表示 $d_{\boldsymbol{z}}$ 维相空间域，其中 $d_{\boldsymbol{z}} = 1 + d_{\boldsymbol{x}}$。我们进一步定义表面单元$\boldsymbol{A}^i_{\boldsymbol{x}} = \times_{j \neq i} K^j_{\boldsymbol{x}}$和 $\boldsymbol{A}^i{}_{\boldsymbol{z}}{}^{\mathfrak{e}} = \boldsymbol{A}^i_{\boldsymbol{x}} \times K^{\mathfrak{e}}_\varepsilon$，并注意，对于任意 $i \in \{1, \ldots, d_{\boldsymbol{x}}\}$，$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^i_{\boldsymbol{x}} \times K^i_{\boldsymbol{x}}$ 和 $\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}^i{}_{\boldsymbol{z}}{}^{\mathfrak{e}} \times K^i_{\boldsymbol{x}}$。

我们还令 $\boldsymbol{x} = \{x^i, \tilde{\boldsymbol{x}}^i\}$ 和 $\boldsymbol{z} = \{x^i, \tilde{\boldsymbol{z}}^i\}$分别表示沿第 i 个空间维度方向（x^i）及其横向（$\tilde{\boldsymbol{x}}^i$和 $\tilde{\boldsymbol{z}}^i$）的空间和相空间坐标；例如，对于 $i = 1$，有 $\tilde{\boldsymbol{x}}^1 = \{x^2, x^3\}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{z}}^1 = \{x^2, x^3, \varepsilon\}$。我们分别用以下符号表示空间和相空间体积元：

$$V_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} = \int_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} dV^{\boldsymbol{x}}_h, \quad \text{where} \quad dV^{\boldsymbol{x}}_h = \sqrt{\gamma_h} d\boldsymbol{x}, \tag{61}$$

and

$$V_{\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}} = \int_{\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}} dV^{\boldsymbol{z}}_h, \quad \text{where} \quad dV^{\boldsymbol{z}}_h = \sqrt{\gamma_h} \varepsilon^2 d\boldsymbol{z} = dV^{\boldsymbol{x}}_h \varepsilon^2 d\varepsilon. \tag{62}$$

此处与 D. Pochik 等（2021）一样，γ_h 是空间度规 γ 行列式的一个近似（下标 h 表示这一点）。具体而言，我们采用尺度因子的多项式近似，分别记为 h_1、$_h$、h_2、$_h$ 和 h_3、$_h$，并由此得到空间度规的分量（γ_h）$_{ij}$ 和 $\gamma_h = \det[(\gamma_h)_{ij}]$。空间度规分量的空间导数——例如方程（2）和（11）的源项中出现的导数——按 D. Pochik 等（2021，第 3.1.1 节）所述方法计算。

接下来，我们定义间断伽辽金方法的近似空间，该空间由平方可积函数 ψ_h 构成。为了近似物质量（取决于位置空间坐标 $\boldsymbol{x}$），我们设定

$$\mathbb{V}^k_{\boldsymbol{x}} = \{ \psi_h \in L^2(D_{\boldsymbol{x}}) \,:\, \psi_h|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} \in \mathbb{Q}^k(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}), \forall \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{x}} \}, \tag{63}$$

其中，在每个单元上，$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}\, \mathbb{Q}^k(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}})$ 是由最高次数为 k 的一维多项式构成的张量积空间。类似地，为近似依赖于相空间坐标 $\boldsymbol{z}$ 的中微子量，我们设

$$\mathbb{V}^k_{\boldsymbol{z}} = \{ \psi_h \in L^2(D_{\boldsymbol{z}}) \,:\, \psi_h|_{\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}} \in \mathbb{Q}^k(\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}), \forall \boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{z}} \}. \tag{64}$$

现在，我们可以给出中微子矩方程的半离散DG公式。为此，我们寻求 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_h \in \mathbb{V}_{\boldsymbol{z}}^k$，它是对方程（**50**）中 U 的近似，使得

$$\left(\partial_t \boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \psi_h\right)_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_h\left(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h, \psi_h\right)_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} + \left(\boldsymbol{\mathcal{C}}_h(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h), \psi_h\right)_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} \tag{65}$$

对于所有 $\psi_h \in \mathbb{V}_{\boldsymbol{z}}^k$ 以及所有 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{z}}$均成立，且其中 $\boldsymbol{u}_h \in \mathbb{V}_{\boldsymbol{x}}^k$ 是方程中流体动力学变量 $\boldsymbol{u}$ 的近似，方程（47）。这里理解为，方程（65）中的半离散 DG 问题对 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_h$的每个（矩和物种）分量均成立。方程（65）必须给定初始和边界条件，此处暂不作具体说明。

在方程 （65）中， $\left(\ldots\right)_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}$表示对相空间单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$按权重 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$积分；例如，

$$\left(\partial_t \boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \psi_h\right)_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} = \int_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} \partial_t \boldsymbol{\mathcal{U}}_h \, \psi_h \, dV_h^{\boldsymbol{z}}, \tag{66}$$

并且我们将 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$ 上相空间平流项的离散化定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{B}}_h\left(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h, \psi_h\right)_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} = &-\sum_{i=1}^{d_{\boldsymbol{x}}} \int_{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{z}}^{i,\mathfrak{e}}} \left(\sqrt{\gamma_h}\, \widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^i}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h)\, \psi_h\big|_{x_{\mathrm{H}}^i} - \sqrt{\gamma_h}\, \widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^i}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h)\, \psi_h\big|_{x_{\mathrm{L}}^i}\right) \varepsilon^2 d\tilde{\boldsymbol{z}}^i + \sum_{i=1}^{d_{\boldsymbol{x}}} \left(\boldsymbol{\mathcal{F}}^i(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h), \partial_i \psi_h\right)_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} \\ &- \int_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} \left(\varepsilon^3\, \widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h)\, \psi_h\big|_{\varepsilon_{\mathfrak{e}+\frac{1}{2}}} - \varepsilon^3\, \widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h)\, \psi_h\big|_{\varepsilon_{\mathfrak{e}-\frac{1}{2}}}\right) dV_h^{\boldsymbol{x}} + \left(\varepsilon\, \boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h), \partial_\varepsilon \psi_h\right)_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} + \left(\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h), \psi_h\right)_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}. \end{aligned} \tag{67}$$

此处，$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^i}$和 $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon}$分别是数值通量，用于近似表面单元 $\boldsymbol{A}_{,\boldsymbol{z}}^{i,\mathfrak{e}}$和 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$ 上的 $\boldsymbol{\mathcal{F}}^i$和 $\boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon$。对于方程（67）中的空间散度，令 $x^{i,\pm} = \lim_{\delta\to 0^+} x^i \pm \delta$，数值通量为，

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^i}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h; x^i, \tilde{\boldsymbol{z}}^i) := \mathscr{F}_{\mathrm{LF}}^i(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h(x^{i,-}, \tilde{\boldsymbol{z}}^i), \boldsymbol{\mathcal{U}}_h(x^{i,+}, \tilde{\boldsymbol{z}}^i), \hat{\boldsymbol{v}}(x^i, \tilde{\boldsymbol{x}}^i)), \tag{68}$$

使用全局 Lax–Friedrichs（LF）通量进行计算

$$\mathscr{F}_{\mathrm{LF}}^i(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a, \boldsymbol{\mathcal{U}}_b, \hat{\boldsymbol{v}}) = \frac{1}{2}\Big\{ \boldsymbol{\mathcal{F}}^i(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a, \hat{\boldsymbol{v}}) + \boldsymbol{\mathcal{F}}^i(\boldsymbol{\mathcal{U}}_b, \hat{\boldsymbol{v}}) - \alpha^i \left(\boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\mathcal{M}}_b, \hat{\boldsymbol{v}}^i) - \boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\mathcal{M}}_a, \hat{\boldsymbol{v}}^i)\right) \Big\}, \tag{69}$$

其中， α^i是通量雅可比矩阵 $\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}^i / \partial \boldsymbol{\mathcal{U}}$的最大绝对特征值。（为简便起见，由于我们考虑以光速传播的中微子，因此设定 $\alpha^i = 1$。）单元界面处的流体三速度分量，$\hat{}\boldsymbol{v}$，取左右状态的平均值；即，

$$\hat{\boldsymbol{v}}(x^i, \tilde{\boldsymbol{x}}^i) := \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}(x^{i,-}, \tilde{\boldsymbol{x}}^i) + \boldsymbol{v}(x^{i,+}, \tilde{\boldsymbol{x}}^i)\right). \tag{70}$$

对于方程（69）数值通量中的耗散项（与 α^i成正比），首先通过求解 $\mathrm{U}^{a/b} = \mathrm{U}(\mathrm{M}^{a/b}, \hat{}\boldsymbol{v})$ 得到原始矩 $\mathrm{M}^{a/b}$。然后，使用 $\hat{}\boldsymbol{v}^i = (\delta^{i1}\hat{}v^1, \delta^{i2}\hat{}v^2, \delta^{i3}\hat{}v^3)^{\intercal}$ 计算 $\mathrm{U}\,(\mathrm{M}^{a/b}, \hat{}\boldsymbol{v}^i)$。与耗散项中使用 $\mathrm{U}^{a/b}$ 的标准 LF 通量相比，我们发现方程（69）中的数值通量在维持物理可实现矩方面能带来更稳健的格式（M. P. Laiu 等，2025，备注 3）。

同样，对于能　　量散度，在方程（67）中，能量单元界面上的数值通量计算如下

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h; \varepsilon, \boldsymbol{x}) := \mathscr{F}_{\mathrm{LF}}^\varepsilon(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h(\varepsilon^-, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{\mathcal{U}}_h(\varepsilon^+, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x})), \tag{71}$$

其中，通量函数由 LF型表达式给出

$$\mathscr{F}_{\mathrm{LF}}^\varepsilon(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a, \boldsymbol{\mathcal{U}}_b, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\Big\{ \boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a, \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon(\boldsymbol{\mathcal{U}}_b, \boldsymbol{v}) - \alpha^\varepsilon \left(\boldsymbol{\mathcal{M}}_b - \boldsymbol{\mathcal{M}}_a\right) \Big\}, \tag{72}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{M}}^{a/b}$通过求解 $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{a/b} = \boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\mathcal{M}}^{a/b},\ \boldsymbol{v})$得到。在方程（72）中， α^ε是通量雅可比矩阵最大特征值的估计值 $\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon / \partial \boldsymbol{\mathcal{U}}$。我们设 $\alpha^\epsilon = \lambda_A$，其中 λ_A是对称矩阵的最大绝对特征值 $A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$。出于健性考虑，- 方程（72）数值通量耗散项中使用原始矩，而非守恒矩（M. P. Laiu 等，2025，注释 4）。

在方程（65）中的半离散格式里，通过 $\boldsymbol{u}_h$ 明确体现了对流体场的依赖——这是由于相空间散度中的速度相关项，以及弱相互作用率对流体热力学状态的依赖。FLASH-X 使用有限体积表示在子问题 1 中对流体进行部分更新，并在

子问题 3 中使用 DG 表示进行部分更新。这里，为了进行相空间平流更新（子问题 2），我们假设 $\boldsymbol{u}_h \in \mathbb{V}^k_{\boldsymbol{x}}$ 已知，并将子问题 3 的详细 DG 形式推迟到第3.5节讨论。我们将在第 4节介绍在有限体积表示与 DG 表示之间进行映射的重构和投影步骤。

能量空间通量 $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\varepsilon}$ 取决于三速度的空间导数。为此，对于给定的 $v_{j,\ h} \in \mathbb{V}^k_{\boldsymbol{x}}$，我们通过在弱意义下求得每个单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$ 中的空间导数近似值 $(\partial_i v_j)_h \in \mathbb{V}^k_{\boldsymbol{x}}$，使其满足

$$\int_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} (\partial_i v_j)_h \psi_h d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{A}^i_{\boldsymbol{x}}} \left[\hat{v}_j(x^i_{\mathrm{H}}, \tilde{\boldsymbol{x}}^i)\, \psi_h(x^{i,-}_{\mathrm{H}}, \tilde{\boldsymbol{x}}^i) - \hat{v}_j(x^i_{\mathrm{L}}, \tilde{\boldsymbol{x}}^i)\, \psi_h(x^{i,+}_{\mathrm{L}}, \tilde{\boldsymbol{x}}^i) \right] d\tilde{\boldsymbol{x}}^i - \int_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} v_{j,h}\, \partial_i \psi_h \, d\boldsymbol{x} \tag{73}$$

对所有 $\psi_h \in \mathbb{V}^k_{\boldsymbol{x}}$均成立。在方程（73）中，空间单元各面的速度采用方程（70）中的平均值计算。

3.1.2. *Nodal Collocation DG Scheme*

我们采用谱型节点配置 DG 方法（例如 F. Bassi 等人，2013年）来求解thornado中的矩方程。为方便起见，我们引入多重指标记法。定义 $d_{\boldsymbol{z}}$元组

$$\boldsymbol{i} = \{i^{\varepsilon}, \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}\} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{N} = \{N, \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}\}, \tag{74}$$

其中 $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}} = \{i^1, \ldots, i^{d_{\boldsymbol{x}}}\}$和 $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}} = \{N, \ldots, N\}$是 $d_{\boldsymbol{x}}$元组，而 $N = k+1$（k为多项式次数）。多重指标记法具有通用性：除 $\boldsymbol{i}$（和 $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}$）之外，我们还将使用 $\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{p}$和 $\boldsymbol{q}$，以及与之对应的空间分量 $\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{x}}$、$\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}$、$\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}$和 $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{x}}$。此外，我们定义 $\tilde{\boldsymbol{i}}^j_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}} - \{i^j\}$ 以书写 $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}} = \{\tilde{\boldsymbol{i}}^j_{\boldsymbol{x}}, i^j\}\ \forall j \in \{1, \ldots, d_{\boldsymbol{x}}\}$；例如，当 $d_{\boldsymbol{x}} = 3$和 $j = 1$时，$\tilde{\boldsymbol{i}}^1_{\boldsymbol{x}} = \{i^2, i^3\}$。

在每个相空间单元上，矩通过多项式展开近似表示为

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_h(\boldsymbol{z}, t)|_{\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}} = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{i}}(t)\, \phi_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{z}), \tag{75}$$

其中，节点基函数

$$\phi_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{\xi})) = \ell_{i^{\varepsilon}}(\varepsilon(\xi^{\varepsilon})) \times \ell_{i^1}(x^1(\xi^1)) \times \ldots \times \ell_{i^{d_{\boldsymbol{x}}}}(x^{d_{\boldsymbol{x}}}(\xi^{d_{\boldsymbol{x}}})), \tag{76}$$

由次数为 k 的拉格朗日多项式给出，这些多项式根据插值点（节点）集合 $S = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ 构造而成，

$$\ell_p(\xi) = \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{N} \frac{\xi - \xi_q}{\xi_p - \xi_q}, \tag{77}$$

定义在单位参考区间 $I = \{\xi$ 上：$\xi \in (-0.5, 0.5)\}$。在相空间的每个维度上，我们选取勒让德-高斯（LG）求积点作为参考区间上构造拉格朗日多项式的插值点。在相空间单元$\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}$中，我们分别用 $S^{\mathfrak{e}}_{\varepsilon} = \{\varepsilon^{\mathfrak{e}}_q\}_{q=1}^N$ 和 $S^i_{\boldsymbol{x}} = \{x^i_q\}_{q=1}^N$表示 $K^{\mathfrak{e}}_{\varepsilon}$和 $K^i_{\boldsymbol{x}}$ 上的 N 点 LG 求积点集合。空间单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$ 上的 LG 插值点集合记为 $S_{\boldsymbol{x}} = \otimes_{i=1}^{d_{\boldsymbol{x}}} S^i_{\boldsymbol{x}}$，而相空间单元 $\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}$ 上的 LG 插值点集合记为 $S^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}} = S^{\mathfrak{e}}_{\varepsilon} \otimes S_{\boldsymbol{x}}$。此外，我们用$\tilde{S}^i_{\boldsymbol{x}} = \otimes_{j \neq i} S^j_{\boldsymbol{x}}$ 和 $\tilde{S}^i$分别表示表面单元 $\boldsymbol{A}^i_{\boldsymbol{x}}$ 和 $\boldsymbol{A}^i_{,\boldsymbol{z}^{\mathfrak{e}}}$中的 LG 点。具体而言，$\tilde{S}^{i}_{,\boldsymbol{x}^{\mathrm{L/H}}}$表示位于 $x^i\,\mathrm{L/H}$,$\tilde{S}_{\boldsymbol{x}} = \{\tilde{S}^{i,\mathrm{L}}_{\boldsymbol{x}}, \tilde{S}^{i,\mathrm{H}}_{\boldsymbol{x}}\}_{i=1}^{d_{\boldsymbol{x}}}$和 $\mathrm{S}_{\boldsymbol{x}} = \{S_{\boldsymbol{x}}, \tilde{S}_{\boldsymbol{x}}\}$处的表面单元中的求积点。同理，$\tilde{S}^{\mathfrak{e}}_{\varepsilon} = \{\varepsilon_{\mathfrak{e}-\frac{1}{2}}, \varepsilon_{\mathfrak{e}+\frac{1}{2}}\}$和 $\mathrm{S}^{\mathfrak{e}}_{\varepsilon} = \{S^{\mathfrak{e}}_{\varepsilon}, \tilde{S}^{\mathfrak{e}}_{\varepsilon}\}$，以及 $\mathrm{S}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}} = \mathrm{S}_{\boldsymbol{x}} \otimes \mathrm{S}^{\mathfrak{e}}_{\varepsilon}$。图 1 展示了 thornado 中实现的节点配置 DG 格式的关键点集。

由于拉格朗日多项式满足 $\ell_p(\xi_q) = \delta_{pq}$ 对于任意 $\xi_q \in S$，因此公式（75）中的展开所使用的基函数满足$\phi_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{j}}) = \delta_{\boldsymbol{ij}}$对于任意 $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{j}} \in S^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}} \subset \boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}$，且 $\mathrm{U}_h(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{j}}) = \mathrm{U}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{j}}$。也就是说，公式（75）中的展开系数表示在勒让德-高斯点 $S^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}$处计算的矩。$K^{\mathfrak{e}}_{\varepsilon}$上的中微子能量坐标通过 $\varepsilon(\xi^{\varepsilon}) = \varepsilon_{\mathfrak{e}} + \Delta\varepsilon_{\mathfrak{e}}\, \xi^{\varepsilon}$与局部坐标相关，其中 $\varepsilon_{\mathfrak{e}} = 0.5 \times (\varepsilon_{\mathfrak{e}-\frac{1}{2}} + \varepsilon_{\mathfrak{e}+\frac{1}{2}})$和 $\Delta\varepsilon_{\mathfrak{e}} = \varepsilon_{\mathfrak{e}+\frac{1}{2}} - \varepsilon_{\mathfrak{e}-\frac{1}{2}}$。具体而言，我们记作 $\varepsilon^{\mathfrak{e}}_q = \varepsilon(\xi^{\varepsilon}_q) = \varepsilon_{\mathfrak{e}} + \Delta\varepsilon_{\mathfrak{e}}\, \xi^{\varepsilon}_q$。类似地，在 $K^i_{\boldsymbol{x}}$上，$x^i(\xi^i) = x^i\mathrm{C} + \Delta x^i\, \xi^i$，其中 $x^i\mathrm{C} = 0.5 \times (x^i\mathrm{L} + x^i\mathrm{H})$，且 $\Delta x^i = x^i\mathrm{H} - x^i\mathrm{L}$。

方程（65）中的积分通过求积公式计算。为此，我们将单位区间 N上的 I点高斯求积对应的权重记为 $\{w_1, \ldots, w_N\}$，其归一化方式满足 $\sum_{i=1}^N w_i = 1$。多重积分通过一维求积的张量化计算；例如，使用权重 $w_{\boldsymbol{i}} = w_{i^{\varepsilon}} \times w_{i^1} \times \ldots \times w_{i^{d_{\boldsymbol{x}}}}$计算相空间体积积分。在 thornado 采用的谱型节点配置 DG 方法中，插值thornado，插值

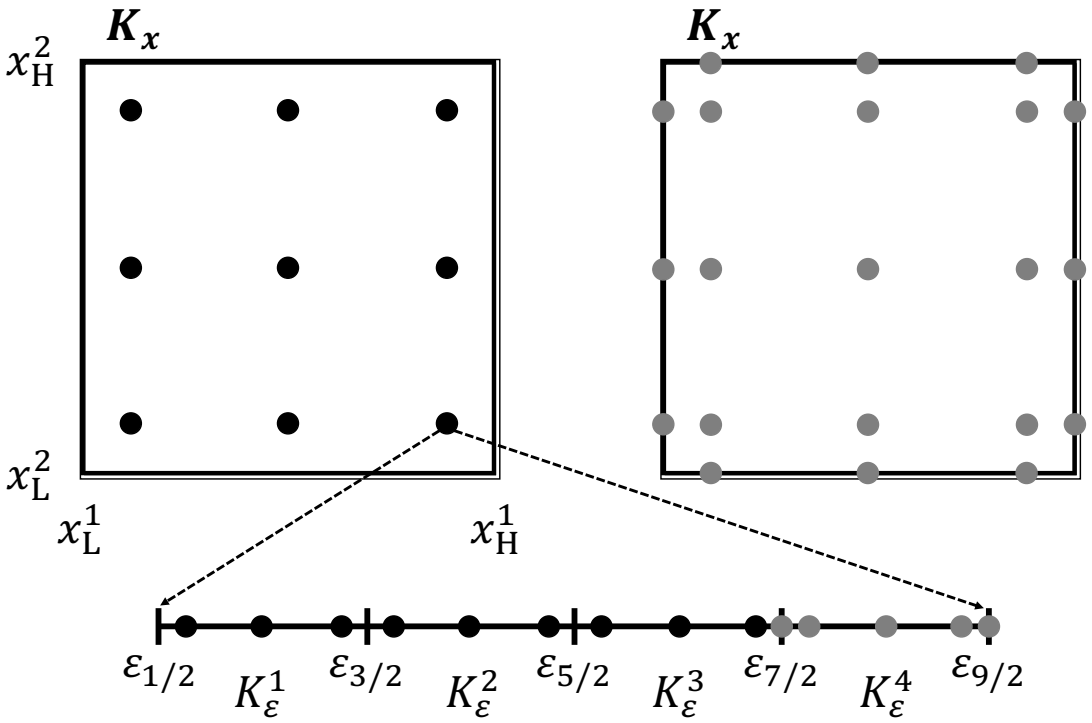


图 1. $d_{\boldsymbol{x}} = 2$ 二次单元情况下，节点配置 DG 格式关键点集的示意图： $N = k + 1 = 3$。左侧空间单元显示 LG空间节点集 $S_{\boldsymbol{x}}$（黑点）。右侧空间单元显示空间节点集 $\mathrm{S}_{\boldsymbol{x}}$（灰点）。每个空间节点 $\boldsymbol{x} \in S_{\boldsymbol{x}}$都关联一个能量网格 $\mathcal{T}_\varepsilon$，如空间单元下方所示的 $\mathfrak{N} = 4$情形。对于前三个单元，显示了 LG节点集 $S_\varepsilon^{\mathfrak{e}}$（$\mathfrak{e} \in \{1,2,3\}$）（黑点）；对于最后一个单元，则显示了节点集 $\mathrm{S}_\varepsilon^{\mathfrak{e}}$（$\mathfrak{e} = 4$）（灰点）。点集 $S_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}} = S_{\boldsymbol{x}} \otimes S_\varepsilon^{\mathfrak{e}}$ 用于构造公式（75）中的多项式表示；对于每个单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$，则在点集 $\mathrm{S}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}} = \mathrm{S}_\varepsilon^{\mathfrak{e}} \otimes \mathrm{S}_\varepsilon^{\mathfrak{e}}$ 上对该多项式表示求值，以便通过节点配置 DG 格式更新公式（75）中的展开系数。

点 $S_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$ 也用作计算积分的求积点（D. Pochik 等（2021））。此时，可以利用 δ函数性质$\phi_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{j}}) = \delta_{\boldsymbol{ij}}$，提高间断伽辽金方法的计算效率。例如，使用曲线坐标时，方程（65）中的 DG 格式弱形式采用 $\varepsilon^2\sqrt{\gamma_h}$ 权重。要对所有检验函数 ψ_h 进行精确积分，通常需要每个维度的求积点数量超过 N，此时必须求逆的质量矩阵将变为非对角且依赖于空间。通过使插值点与积分点重合，虽然会产生一些积分误差，但质量矩阵会变为对角矩阵，且可直接求逆。这种求积点的“解耦”也有利于中微子–物质碰撞求解，因为空间节点彼此解耦，从而可以实现更多并行计算。我们使用 LG 求积点来定义方程（75）中的展开，这是因为 N点高斯求积对于次数不超过 $2N - 1$的多项式是精确的，而勒让德–高斯–洛巴托求积公式只能精确到 $2N - 3$，因此前者精度更高（例如，参见 F. Bassi 等（2013年）；J. Chan 等（2019年）；A. M. Rueda-Ram´ırez 等（2023年））。

使用 N点勒让德-高斯求积计算积分，展开系数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}}$ 的方程（65）中的半离散DG格式可写为

$$\partial_t \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h)_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}} + \boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h)_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}}, \tag{78}$$

其中相空间平流项为

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h)_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h)_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_\varepsilon(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h)_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}} + \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h, \boldsymbol{u}_h; \varepsilon_{p_\varepsilon}^{\mathfrak{e}}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}}), \tag{79}$$

其中位置空间和能量空间散度分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\boldsymbol{u}_h)^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{p}} = &-\sum_{i=1}^{d_{\boldsymbol{x}}}\frac{1}{\sqrt{\gamma_h(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}})}\,\Delta x^i\,w_{p_i}}\\ &\times\Big\{\Big(\sqrt{\gamma_h(x^i_{\mathrm{H}},\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{\tilde{\boldsymbol{p}}^i_{\boldsymbol{x}}})}\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^i}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\boldsymbol{u}_h;\varepsilon^{\mathfrak{e}}_{p_\varepsilon},x^i_{\mathrm{H}},\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{\tilde{\boldsymbol{p}}^i_{\boldsymbol{x}}})\,\ell_{p_i}(x^{i,-}_{\mathrm{H}})\\ &\quad-\sqrt{\gamma_h(x^i_{\mathrm{L}},\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{\tilde{\boldsymbol{p}}^i_{\boldsymbol{x}}})}\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^i}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\boldsymbol{u}_h;\varepsilon^{\mathfrak{e}}_{p_\varepsilon},x^i_{\mathrm{L}},\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{\tilde{\boldsymbol{p}}^i_{\boldsymbol{x}}})\,\ell_{p_i}(x^{i,+}_{\mathrm{L}})\Big)\\ &\quad-\sum_{q_i=1}^{N}w_{q_i}\sqrt{\gamma_h(x^i_{q_i},\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{\tilde{\boldsymbol{p}}^i_{\boldsymbol{x}}})}\,\boldsymbol{\mathcal{F}}^i(\varepsilon^{\mathfrak{e}}_{p_\varepsilon},x^i_{q_i},\tilde{\boldsymbol{x}}^i_{\tilde{\boldsymbol{p}}^i_{\boldsymbol{x}}})\,\frac{\partial\ell_{p_i}}{\partial\xi^i}(\xi^i_{q_i})\Big\}\end{aligned}\tag{80}$$

and

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\varepsilon}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\boldsymbol{u}_h)^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{p}} = &-\frac{1}{(\varepsilon^{\mathfrak{e}}_{p_\varepsilon})^2\,\Delta\varepsilon_{\mathfrak{e}}\,w_{p_\varepsilon}}\\ &\times\Big\{\Big(\varepsilon^3_{\mathfrak{e}+\frac12}\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\boldsymbol{u}_h;\varepsilon_{\mathfrak{e}+\frac12},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}})\,\ell_{p_\varepsilon}(\varepsilon^-_{\mathfrak{e}+\frac12})\\ &\quad-\varepsilon^3_{\mathfrak{e}-\frac12}\,\widehat{\boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\boldsymbol{u}_h;\varepsilon_{\mathfrak{e}-\frac12},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}})\,\ell_{p_\varepsilon}(\varepsilon^+_{\mathfrak{e}-\frac12})\Big)\\ &\quad-\sum_{q_\varepsilon=1}^{N}w_{q_\varepsilon}\,(\varepsilon^{\mathfrak{e}}_{q_\varepsilon})^3\,\boldsymbol{\mathcal{F}}^\varepsilon(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\boldsymbol{u}_h;\varepsilon^{\mathfrak{e}}_{q_\varepsilon},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}})\,\frac{\partial\ell_{p_\varepsilon}}{\partial\xi^\varepsilon}(\xi^\varepsilon_{q_\varepsilon})\Big\},\end{aligned}\tag{81}$$

分别。

随后通过求解以下方程来近似求得子问题 2 的解

$$\partial_t\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\boldsymbol{u}_h)^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{p}}\tag{82}$$

对所有 $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{p}}\in S^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}\subset\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}$ 以及所有 $\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}\in\mathcal{T}_{\boldsymbol{z}}=\mathcal{T}_{\boldsymbol{x}}\otimes\mathcal{T}_{\varepsilon}$。

节点碰撞项的细节将留待第 $\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\ \boldsymbol{u}_h)^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{p}}$3.5 节讨论。不过，我们注意到，在耦合流体和中微子矩时，对每个 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}}\in\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$，都逐点施加碰撞不变量；也就是说，通过求解以下方程来近似求得子问题 3 的解

$$\partial_t\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\boldsymbol{u}_h)^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{p}},\tag{83a}$$

$$\partial_t\mathbf{U}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h,\boldsymbol{u}_h)_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}} = 0,\tag{83b}$$

对所有 $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{p}}=\{\varepsilon_{p^\varepsilon},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}}\}\in S^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}$ 以及所有 $\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}\in\mathcal{T}_{\boldsymbol{z}}$。

在节点 DG 格式中计算碰撞算子时，单独考察一个空间点会很有帮助。对75式进行计算 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}}\in S_{\boldsymbol{x}}$ 可得

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_h(\varepsilon,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}})|_{\boldsymbol{K}^{\mathfrak{e}}_{\boldsymbol{z}}} = \sum_{q^\varepsilon=1}^{N}\sum_{\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathfrak{e}}_{\{q^\varepsilon,\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{x}}\}}\phi_{\{q^\varepsilon,\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{x}}\}}(\varepsilon,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}}) = \sum_{q^\varepsilon=1}^{N}\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathfrak{e}}_{\{q^\varepsilon,\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}\}}\ell_{q^\varepsilon}(\varepsilon).\tag{84}$$

也就是说，在每个空间插值点处，75式中的展开简化为仅关于能量维度的多项式。对整个能量域 D_ε 积分后得到

$$\int_{D_\varepsilon}\boldsymbol{\mathcal{U}}_h(\varepsilon,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}})\,dV_\varepsilon = \frac{4\pi}{h^3}\sum_{\mathfrak{e}=1}^{\mathfrak{N}}\sum_{q^\varepsilon=1}^{N}w_{q^\varepsilon}\,(\varepsilon^{\mathfrak{e}}_{q^\varepsilon})^2\,\Delta\varepsilon_{\mathfrak{e}}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathfrak{e}}_{\{q^\varepsilon,\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}\}} = \sum_{\mathfrak{q}=1}^{N^\varepsilon}W^{(2)}_{\mathfrak{q}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\{\mathfrak{q},\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}\}},\tag{85}$$

其中，我们定义了全局能量积分权重

$$W^{(2)}_{\mathfrak{q}} = 4\pi\,w_{q^\varepsilon}\,(\varepsilon^{\mathfrak{e}}_{q^\varepsilon})^2\,\Delta\varepsilon_{\mathfrak{e}}/h^3,\tag{86}$$

展开系数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\{\mathfrak{q},\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}\}}:=\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathfrak{e}}_{\{q^\varepsilon,\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}\}}$，其中全局能量索引由 $\mathfrak{q}=(\mathfrak{e}-1)\times N+q^\varepsilon$ 给出，对于 $\mathfrak{e}\in\{1,\dots,\mathfrak{N}\}$ 和 $q^\varepsilon\in\{1,\dots,N\}$，其取值范围为 1 到 $N^\varepsilon=\mathfrak{N}\times N$。离散化碰撞算子时，这种全局能量索引记法会很有用。采用 $N=(k+1)$ 点勒让德-高斯求积时，方程 (85) 中的积分对次数为 $k+2$ 的多项式而言，在 $k\geq1$ 时是精确的。我们还将使用 N 点勒让德-高斯求积，对中微子能量的更高次幂加权的函数进行积分。为此，我们定义积分权重 $W^{(2+p)}_{\mathfrak{q}}=W_{(2)\mathfrak{q}}\times(\varepsilon_{\mathfrak{q}})^p$。使用这些权重时，对次数为 k 的多项式进行积分可能不再精确。

3.2. 时间积分

我们使用隐显式方法（例如，U. Ascher 等 1997年；L. Pareschi 和 G. Russo 2005年）以耦合方式对子问题 2 和子问题 3 进行积分，分别采用方程（82）和方程（83）给出的半离散近似。随后，在一个时间步长 $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ 内，解从 $\{\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e},n}, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}_x}^{n}\}$ 推进至 $\{\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e},n+1}, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}_x}^{n+1}\}$，具体采用如下的 s 阶隐式-显式龙格-库塔方法：对所有 $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{p}} = \{\varepsilon_{p^\varepsilon}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}_x}\} \in S_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}} \subset \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$ 和所有 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{z}}$:

1. 对于 $i = 1, \ldots, s$，求解关于 $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h^{(i)}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{(i)}$ 的耦合非线性系统

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e},(i)} = \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e},(i\star)} + \alpha_{ii}\,\Delta t\,\boldsymbol{\mathcal{C}}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h^{(i)}, \widetilde{\boldsymbol{u}}_h^{(i)})_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}}, \tag{87a}$$

$$\mathbf{U}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h^{(i)}, \widetilde{\boldsymbol{u}}_h^{(i)})_{\boldsymbol{p}_x} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h^{(i\star)}, \boldsymbol{u}_h^{(i\star)})_{\boldsymbol{p}_x}, \tag{87b}$$

设置 $\big[\delta\boldsymbol{u}/\delta t\big]_{\boldsymbol{p}_x}^{(i)} := (\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{p}_x}^{(i)} - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}_x}^{(i\star)})/(\alpha_{ii}\Delta t)$，并应用限制器[13]

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_h^{(i)} := \Lambda^{\boldsymbol{\mathcal{U}}}\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h^{(i)}\} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{u}_h^{(i)} := \Lambda^{\boldsymbol{u}}\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_h^{(i)}\}. \tag{88}$$

在方程 (87) 中，我们定义了 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_h^{(i\star)} := \Lambda^{\boldsymbol{\mathcal{U}}}\{\tilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_{(i\star)_h}\}$ 和 $\boldsymbol{u}_h^{(i\star)} := \Lambda^{\boldsymbol{u}}\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_h^{(i\star)}\}$，其中

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e},(i\star)} = \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e},n} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} \Big\{ \tilde{\alpha}_{ij}\,\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h^{(j)}, \boldsymbol{u}_h^{(j)})_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}} + \alpha_{ij}\,\boldsymbol{\mathcal{C}}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h^{(j)}, \widetilde{\boldsymbol{u}}_h^{(j)})_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}} \Big\}, \tag{89a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{p}_x}^{(i\star)} = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}_x}^{n} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \big[\delta\boldsymbol{u}/\delta t\big]_{\boldsymbol{p}_x}^{(j)}. \tag{89b}$$

2. 组装

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e},n+1} = \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e},n} + \Delta t \sum_{i=1}^{s} \Big\{ \tilde{\beta}_i\,\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_h^{(i)}, \boldsymbol{u}_h^{(i)})_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}} + \beta_i\,\boldsymbol{\mathcal{C}}(\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h^{(i)}, \widetilde{\boldsymbol{u}}_h^{(i)})_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}} \Big\}, \tag{90a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{p}_x}^{n+1} = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}_x}^{n} + \Delta t \sum_{i=1}^{s} \beta_i \big[\delta\boldsymbol{u}/\delta t\big]_{\boldsymbol{p}_x}^{(i)}, \tag{90b}$$

并应用限制器 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_h^{n+1} := \Lambda^{\boldsymbol{\mathcal{U}}}\{\tilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h^{n+1}\}$ 和 $\boldsymbol{u}_h^{n+1} := \Lambda^{\boldsymbol{u}}\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+1}\}$。

这里，$\tilde{\alpha}_{ij}$ 和 α_{ij} 分别是矩阵 $s \times s$ $\tilde{A} = (\tilde{\alpha}_{ij})$ 和 $A = (\alpha_{ij})$ 的系数，而 $\tilde{\boldsymbol{b}} = (\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_s)^\intercal$ 和 $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)^\intercal$ 是向量。系数矩阵 A 是严格下三角矩阵，$\tilde{\alpha}_{ij} = 0$ 对于 $i \geq j$ 成立；因此，相空间平流项采用显式处理。矩阵 A 是下三角矩阵，$\alpha_{ij} = 0$ 对于 $i > j$ 成立；因此，碰撞算子采用隐式处理。A 的下三角结构产生了对角隐式龙格-库塔格式族，并使隐式求解能够写成修正的后向欧拉更新，如方程（87a）所示，其初始状态为 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e},(i\star)}$，时间步长为 $\alpha_{ii}\Delta t$。

算子 $\Lambda^{\boldsymbol{\mathcal{U}}}\{\ldots\}$ 和 $\Lambda^{\boldsymbol{u}}\{\ldots\}$ 分别表示应用于辐射矩和流体场的限制器。对于流体场，可以应用 D. Pochik 等人(2021年) 中描述的限制器，以防止振荡和非物理状态。对于辐射矩，也可以应用类似的限制器；我们将在下一小节中详细概述这些限制器。

在 IMEX格式中，为避免在迭代求解过程中应用限制器，隐式算子 $\boldsymbol{\mathcal{C}}()_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}}$ 使用未限制的阶段值进行计算，而显式算子 $\boldsymbol{\mathcal{B}}()_{\boldsymbol{p}}^{\mathfrak{e}}$ 则使用受限制的阶段值进行计算。

IMEX 格式的时间步长由显式部分的稳定性条件确定（例如，B. Cockburn 和 C.-W. Shu（2001））

$$\Delta t = \frac{1}{d_{\boldsymbol{x}}(2k+1)} \min_{i \in \{1,\ldots,d_{\boldsymbol{x}}\}} (\Delta x^i\, h_i) \quad (\text{no summation over } i). \tag{91}$$

（$c = 1$ 为我们的单位；h_i 为空间尺度因子。）

[13] 波浪号表示 IMEX 格式中的限制前状态。

˜ ˜构成矩阵的系数 A/A 和向量 $\boldsymbol{b}/\boldsymbol{b}$ 必须满足特定的阶数条件，才能达到所需的精度阶数。关于用于动理学方程的隐显式方法，已有大量文献（例如参见 G. Dimarco 和 L. Pareschi 2014年及其中的参考文献）。基于 R. Chu 等人 (2019年中阐述的理由，我们采用一种称为 PD-ARS 的两阶段 IMEX 格式，其 Butcher表为

$$\begin{array}{c|c} \tilde{\boldsymbol{c}} & \tilde{A} \\ \hline & \tilde{\boldsymbol{b}}^{\intercal} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{c|c} \boldsymbol{c} & A \\ \hline & \boldsymbol{b}^{\intercal} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}, \tag{92}$$

其中，系数 $\tilde{c}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\alpha}_{ij}$ 和 $c_i = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}$ 仅用于非自治系统。该 IMEX格式具有˜两个阶段（每个时间步长需进行两次隐式求解），且具有全局刚性精确性，$\beta_i = \tilde{\alpha}_{si}$ 并且 $\beta_i = \alpha_{si}$；因此，无需执行方程（90）中的组装步骤。

在第 5 节的部分测试中，我们采用 C.-W. Shu 和 S. Osher （1988年）提出的最优二阶或三阶强稳定保持（SSP）龙格－库塔方法。在这种情况下，隐式 Butcher表的所有分量（A、 $\boldsymbol{c}$和 $\boldsymbol{b}$）均设为零，而显式 Butcher表则设为

$$\begin{array}{c|c} \tilde{\boldsymbol{c}} & \tilde{A} \\ \hline & \tilde{\boldsymbol{b}}^{\intercal} \end{array} = \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{c|c} \tilde{\boldsymbol{c}} & \tilde{A} \\ \hline & \tilde{\boldsymbol{b}}^{\intercal} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{array}, \tag{93}$$

分别对应 SSP-RK2 和 SSP-RK3。

3.3. *Limiters*

可以调用限制器来修正辐射矩的多项式表示，以减小不连续处附近的振荡并防止出现非物理状态。在`thornado`中，我们实现了简单的 minmod型限制器（B. Cockburn 和 C.-W. Shu（2001））以减小振荡，并实现了可实现性强制限制器（R. Chu 等（2019）），以确保辐射矩在每个单元的一组离散点上满足某些约束。下面简要介绍这些过程。

3.3.1. *Slope Limiter*

在`thornado`中，辐射矩的斜率限制仅应用于空间维度。计算方程（75）在$\varepsilon_{i^\varepsilon}^{\mathfrak{e}} \in S_{\varepsilon}^{\mathfrak{e}}$ 上可得 $\mathcal{U}_h$ （$\boldsymbol{\mathcal{U}}_h$的一个分量）在空间单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$上的多项式表示

$$\mathcal{U}_h(\varepsilon_{i^\varepsilon}, \boldsymbol{x}, t)|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} = \sum_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}} \mathcal{U}^{\mathfrak{e}}_{\{i^\varepsilon, \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}\}}(t)\, \phi_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}). \tag{94}$$

由于与不同能量节点相关的多项式表示是独立进行限制的，因此在本小节的其余部分中省略能量指标；即，$\mathcal{U}_h(\varepsilon_{i^\varepsilon}$、$\boldsymbol{x}$、 $t)|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} \to \mathcal{U}_h(\boldsymbol{x}$、 $t)|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}}$和 $\mathcal{U}^{\mathfrak{e}}_{\{i^\varepsilon, \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}\}} \to \mathcal{U}_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}$。

我们对演化矩采用标准的minmod型限制器（例如，B.Cockburn& C.-W.Shu 1998年）。为此，我们定义线性近似 $\mathcal{U}_h^1 \in \mathbb{P}^1$（$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$），

$$\mathcal{U}_h^1(\boldsymbol{x}, t)|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} := \sum_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}}^{|\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}|\leq 1} \mathcal{C}_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}(t)\, P_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}), \tag{95}$$

其中，$P_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})) = P_{i^1}(\xi^1) \times \ldots \times P_{i^{d_{\boldsymbol{x}}}}(\xi^{d_{\boldsymbol{x}}})$，且 $P_0(\xi) = 1$和 $P_1(\xi) = \xi$定义在单位参考区间 I上，该区间在下文的方程 (77) 中定义。这里，$\mathbb{P}^1(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}})$ 是总次数小于或等于 1 的多项式空间。方程 (95) 中的展开系数通过将 $\mathcal{U}_h$ 投影到 $\mathbb{P}^1$上获得，

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}} = \frac{\int_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} \mathcal{U}_h(\boldsymbol{x})\, P_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}}{\int_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} P_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\, P_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}}. \tag{96}$$

注意，$\mathcal{C}_{\mathbf{0}}$ 是 $\mathcal{U}_h$的单元平均值，而 $\mathcal{C}_{\{1,0,0\}}$、$\mathcal{C}_{\{0,1,0\}}$和 $\mathcal{C}_{\{0,0,1\}}$ 是 $\mathcal{U}_h^1$分别关于 x^1、x^2和 x^3的单元平均一阶导数（斜率）。受限斜率通过 minmod 函数计算；例如，在 x^1维中

$$\widetilde{\mathcal{C}}_{\{1,0,0\}} = \text{minmod}\big(\mathcal{C}_{\{1,0,0\}},\, \beta_{\text{TVD}}\,(\mathcal{C}_{\mathbf{0}}^{+} - \mathcal{C}_{\mathbf{0}}),\, \beta_{\text{TVD}}\,(\mathcal{C}_{\mathbf{0}} - \mathcal{C}_{\mathbf{0}}^{-})\big), \tag{97}$$

其中

$$\text{minmod}(a,b,c) = \begin{cases} s \times \min(|a|,|b|,|c|), & \text{if } s = \text{sign}(a) = \text{sign}(b) = \text{sign}(c) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{98}$$

且 $\beta_{\text{TVD}} \in [1,2]$，并且其中 $\mathcal{C}_{\mathbf{0}}^{+}$且 $\mathcal{C}_{\mathbf{0}}^{-}$分别是相对于 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$ 在 x^1维度上，位于下一个和前一个单元中的单元平均值。于是，若最大值$_{i_{\boldsymbol{x}}|=1}(|\widetilde{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}} - \mathcal{C}_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}|)$ > 容差 $|\mathcal{C}_{\mathbf{0}}|$[14]，则方程（94）中的展开系数替换为

$$\widetilde{\mathcal{U}}^1_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}} = \sum_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}}^{|\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}|\leq 1} \widetilde{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}}\, P_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}), \tag{99}$$

其中 $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{0}} = \mathcal{C}_{\mathbf{0}}$。最后，若进行限制，则多项式按因子 $\alpha = \mathcal{U}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}}/\widetilde{\mathcal{U}}^1_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}}$缩放，其中 $\mathcal{U}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}}$ 和 $\widetilde{\mathcal{U}}^1_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}}$ 分别是原始多项式和受限多项式相对于权重 $\sqrt{\gamma_h}$的单元平均值。使用曲线坐标时，缩放因子 α 用于在限制过程中保持守恒性（D. Pochik 等（2021））。默认情况下，我们将触发限制的容差设为容差 $= 10^{-6}$。

为简单起见，方程（97）中的限制分别应用于 U_h 的各个分量（逐分量处理），而非优先作用于特征场（例如 B. Cockburn 等，1989年）。众所周知，minmod 限制器会使光滑极值处的精度降至一阶。为避免过度限制，我们采用 G. Fu 和 C.-W. Shu（2017年）提出的疑难单元指示器（TCI），用于标记所选变量中陡峭梯度附近的网格单元。（关于在 thornado 的流体动力学中使用该 TCI，参见 D. Pochik 等（2021年）。）对于双矩求解器，仅使用欧拉坐标系数密度来检测疑难网格单元。我们指出，在方程（97）中使用 $\beta_{\text{TVD}} = 2$ 会得到双重 minmod 限制器；R. McClarren 和 R. Lowrie（2008年）在一维情形下对此进行了分析，并证明其能够保持渐近扩散极限。对于多维情形，M. L. Adams（2001年）指出，局部近似必须至少属于 $\mathbb{Q}^1(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}})$，而不能属于 $\mathbb{P}^1(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}})$，才能保持扩散极限。因此，TCI 对于在此区域保持精度至关重要；根据我们的经验，它能有效避免在扩散极限下进行限制。第5节和第6节中的大多数测试案例，以及第7节中的核心坍缩超新星模拟，均未使用斜率限制，而仅使用下一节介绍的可实现性强制限制器。

3.3.2. 可实现性强制限制器

此处介绍的可实现性强制限制器（另见 R. Chu 等（2019）；M. P. Laiu 等，2025）对于维持双矩模型时间积分过程中的稳定性至关重要。使用高阶单元（即 $k \geq 1$）时，方程（75中的多项式表示可能会在某些单元内得到不可实现（即非物理）的矩 $\boldsymbol{K}^{\mathfrak{c}}_{\boldsymbol{z}}$；具体而言，对于 $\boldsymbol{z} \in \mathbf{S}^{\mathfrak{c}}_{\boldsymbol{z}} \subset \boldsymbol{K}^{\mathfrak{c}}_{\boldsymbol{z}}$（图 1）。发生这种情况时，双矩闭合问题将变得不适定，最终导致整个求解算法失效。可实现性强制限制器旨在避免这种情况。由于我们考虑的是基于麦克斯韦–玻尔兹曼统计的 Minerbo 闭合，因此将可容许动理学分布的集合取为[15]

$$\mathfrak{R} = \big\{ f \mid f \geq 0 \text{ and } \langle f \rangle > 0 \big\}. \tag{100}$$

于是，若矩 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$（定义见方程（53））可以由动理学分布 $f \in \mathfrak{R}$导出，则称其为可实现矩。所有可实现矩构成的集合定义为以下凸域

$$\mathcal{R} = \big\{ \boldsymbol{\mathcal{U}} = (\mathcal{N}, \boldsymbol{\mathcal{G}})^{\intercal} \mid \mathcal{N} > 0 \text{ and } \Gamma(\boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\gamma}) \geq 0 \big\}, \tag{101}$$

其中 $\Gamma(\mathrm{U}\ \boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{N} - |\mathrm{G}|, \mathcal{N} = \mathcal{D} + v^i \mathcal{I}_i$ 和 $\mathcal{G}_j = \mathcal{I}_j + v^i \mathcal{K}_{ij}$，并且使用空间度规 $\boldsymbol{\gamma}$ 计算范数，即 $|\mathrm{G}| = \sqrt{\gamma_{ij}\mathcal{G}^i\mathcal{G}^j}$。（为简化记号，本节省略物种下标 s。）我们强调，对于遵循玻色–爱因斯坦统计的粒子，方程 (100) 中的允许分布集合以及方程 (101) 中的可实现集合均保持不变，可实现性强制限制器仍然适用。对于遵循费米–狄拉克统计的粒子，$\mathfrak{R}$ 和 $\mathcal{R}$ 均会变化（例如，W. Larecki 和 Z. Banach，2011年），因此必须考虑沿用 R. Chu 等人（2019年）针对静态情形提出的修改。基于第2节所述的原因，我们仅考虑方程 (100) 中定义的 $\mathfrak{R}$ 分布。

[14] 引入较小的容差，以避免在受限斜率与未受限斜率几乎相同时不必要地重新计算展开系数。[15] $\mathfrak{R}$ 这也是附录中列出的 Levermore 和 Kershaw 闭合方案所适用的可容许集合A

由于可实现性强制限制器完全局部作用于每个相空间单元，因此我们针对特定单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$ 进行说明。目标是确保多项式表示 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_h|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}$ 在每个点 $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{q}} \in \mathbf{S}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$ 处均可实现。设 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_h = (\mathcal{N}_h, \boldsymbol{\mathcal{G}}_h)^{\intercal}$ 在 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$ 上的单元平均值记为 $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} = (\boldsymbol{\mathcal{U}}_h)_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}/V_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} = (\mathcal{N}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}, \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}})^{\intercal}$。假设 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} \in \mathcal{R}$；即，$\mathcal{N}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} > 0$ 并且

$$\Gamma\big(\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}, \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})\big) \geq 0 \tag{102}$$

对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{S}_{\boldsymbol{x}}$ 均成立。然后，限制器包含以下两个步骤：

- **步骤 1：** 确保谱数密度为正，方法是

$$\widetilde{\mathcal{N}}_h := (1-\vartheta_1)\,\mathcal{N}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} + \vartheta_1\,\mathcal{N}_h, \tag{103}$$

其中

$$\vartheta_1 = \min\Big\{1,\ \frac{\mathcal{N}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}}{\mathcal{N}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} - \min_{\boldsymbol{z}\in\mathbf{S}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} \mathcal{N}_h(\boldsymbol{z})}\Big\}. \tag{104}$$

设置 $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h := (\widetilde{\mathcal{N}}_h, \boldsymbol{\mathcal{G}}_h)^{\intercal}$。

- **步骤 2：** 确保数通量密度有界，方法是

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h := (1-\vartheta_2)\,\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} + \vartheta_2\,\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h, \tag{105}$$

其中

$$\vartheta_2 = \arg\min_{\vartheta}\Big\{\vartheta\in[0,1]\ :\ \Gamma\big((1-\vartheta)\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} + \vartheta\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})\big) \geq 0,\ \forall \boldsymbol{z} = (\varepsilon, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{S}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}\Big\}. \tag{106}$$

令 $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_h := \boldsymbol{\mathcal{U}}_h$。

在方程（103）和（105）中，限制器参数 ϑ_1、$\vartheta_2 \in [0,1]$。因此，如果原始多项式在所有点 $\boldsymbol{z} \in \mathbf{S}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$，$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$上均具有可实现性，则限制器步骤不起作用，并且 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_h = \boldsymbol{\mathcal{U}}_h$。在最坏情况下，$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$，单元中的多项式表示 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}$ 将被单元平均值替代；即 $\boldsymbol{\mathcal{U}}_h = \boldsymbol{\mathcal{U}}^{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}$。需要注意的是，这两个限制器步骤都保持单元平均值不变。

可实现性强制限制器假设单元平均值具有可实现性。然而，对于 thornado 中实现的节点配置 DG 格式，这一点通常并不能得到保证。M. P. Laiu 等人（2025）针对笛卡尔坐标和理想化碰撞项的情形，设计了一种可实现性保持方法。对于具有曲线空间坐标和完整中微子–物质耦合的更一般情形，要构造相应的、可证明具有可实现性的保持方法，超出了本文的范围。尽管如此，受 M. P. Laiu 等人（2025）分析启发的方程（69）和（72）中的数值通量等组件，在应用于这一更一般情形时，经验证据表明能够提高格式的稳健性。如果 $\mathcal{N}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} \leq 0$，我们设置 $\mathcal{N}_h|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} = \delta_{\mathcal{N}}$（一个小的正数）并令 $\mathrm{G}_h|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} = \mathbf{0}$。如果 $\mathcal{N}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} > 0$，但对于所有 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{S}_{\boldsymbol{x}}$，方程（102）均不满足，我们设置 $\mathcal{N}_h|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} = \mathcal{N}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}$ 并令 $\mathrm{G}_h|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}} = (1-\delta_{\boldsymbol{\mathcal{G}}})\,\mathcal{N}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}(\mathrm{G}_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}/\max_{\boldsymbol{z}\in\mathbf{S}_{\boldsymbol{z}}^{\mathfrak{e}}}|\mathrm{G}_h(\boldsymbol{z})|)$，其中 $\delta_{\boldsymbol{\mathcal{G}}} > 0$ 是一个较小的、由用户指定的数值。在这两种情况下，单元内的多项式表示均被常数替代。在第一种情况下，向系统中添加粒子；而在第二种情况下，相对于数密度，数通量的大小会减小。重要的是，在第 5、6 和 7 节所展示的数值算例中，我们没有发现需要调用这些临时处理方法。

若未采用上述临时处理方法中的第一种，则可实现性强制限制器能够保持欧拉坐标系数密度不变。然而，欧拉坐标系能量 $\mathcal{E} = \varepsilon(\mathcal{N} + v^i\mathcal{G}_i) + \mathcal{O}(v^2)$ 会发生变化。为使可实现性强制限制器同时满足欧拉坐标系数密度和能量守恒，我们在第二步完成后采用M. P. Laiu 等人(2025) 提出的谱再分配算法。

3.4. 原始矩恢复

数守恒双矩模型演化守恒矩 $\mathrm{U} = (\mathcal{N}, \mathcal{G}_j)^{\intercal}$，它们与原始矩 $\mathrm{M} = (\mathcal{D}, \mathcal{I}_j)^{\intercal}$ 的关系如方程（53）所述。（为简化记号，本节省略物种下标 s。）给定 U、三速度和空间度规分量 v^i 与 γ_{ij}后，恢复 M 需要求解一个非线性方程组。为此，我们采用 M. P. Laiu 等人（2025）提出并分析的方法，将方程（53）写为

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N} - v^i\mathcal{I}_i \\ \mathcal{G}_j - v^i\mathcal{K}_{ij}(\boldsymbol{\mathcal{M}}) \end{bmatrix}. \tag{107}$$

乘以 $\lambda \in (0,1]$ 并重新整理后，可将其写为

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = (1-\lambda)\,\boldsymbol{\mathcal{M}} + \lambda \begin{bmatrix} \mathcal{N} - v^i \mathcal{I}_i \\ \mathcal{G}_j - v^i \mathcal{K}_{ij}(\boldsymbol{\mathcal{M}}) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{g}(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{v}). \tag{108}$$

我们使用此映射，通过以下不动点迭代序列求解原始矩

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{[k+1]} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\mathcal{M}}^{[k]}, \boldsymbol{v}), \quad k = 0, \ldots, \tag{109}$$

其中初始猜测取为$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{[0]} = \boldsymbol{\mathcal{U}}$。方程（109）中的序列迭代进行，直到连续两次迭代之间的差满足

$$\|\boldsymbol{\mathcal{M}}^{[k+1]} - \boldsymbol{\mathcal{M}}^{[k]}\| \leq \texttt{tol}\,\|\boldsymbol{\mathcal{U}}\|, \tag{110}$$

其中，$\|\cdot\|$ 为欧几里得范数，tol 为相对容差。（默认情况下，我们设置 tol $= 10^{-8}$。）

方程（109）中的序列可视为一种步长为 λ的伪时间步进方法。通常，较小的 λ 值需要更多迭代次数才能达到收敛，但能够提高稳定性和稳健性。事实上，M. P. Laiu 等，2025(2025）的分析表明，选择 $\lambda = 1/(1+|\boldsymbol{v}|)$时，连续迭代的可实现性得以保持，这正是我们采用的值。此外，当 $|\boldsymbol{v}| < \sqrt{2}-1 \approx 0.41$时，$\mathbf{g}$ 是一个压缩算子，从而保证了方程（109）的收敛。在考虑 $\mathcal{O}(v)$ 双矩模型的适用性时，这一限制是可以接受的。我们对方程（109）采用安德森加速，以提高收敛速率（详见M. P. Laiu 等，2025）。

3.5. 中微子–物质耦合

本节将介绍针对方程（87）所给非线性耦合问题的 IMEX-RK 格式求解过程。节点配置 DG 格式使单元内各空间节点完全解耦，因此只需说明单个空间节点上的算法。为简化方程（87）中的记号，我们省略波浪号以及对空间节点和 IMEX 阶段的引用，并采用方程（85）中引入的全局能量索引；即$\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_{\mathfrak{e},(i)\boldsymbol{p}}, \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_{\mathfrak{e},(i\star)\boldsymbol{p}}\} \to \{\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}, \boldsymbol{\mathcal{U}}_{(\mathfrak{q}^\star)}\}$和$\{\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(i)}_{\boldsymbol{p}_x}, \widetilde{\boldsymbol{u}}^{(i\star)}_{\boldsymbol{p}_x}\} \to \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{(\star)}\}$。我们还将 $\alpha_{ii}\Delta t$替换为通用时间步长 $\Delta\tau$。

为清晰起见，我们仅考虑中微子弹性散射（NES）和成对核函数的各向同性部分来介绍该算法（即$\Phi_{s\,0}^{\mathrm{In/Out}}$,和$\Phi_{s\,0}^{\mathrm{Pro/Ann}}$,）。将线性修正纳入这些过程只需直接扩展即可。

3.5.1. *Neutrino Equations*

对于 $\{\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}\}_{\mathfrak{q}=1}^{N^\varepsilon} = \{\,\{[\mathcal{N}_s]_{\mathfrak{q}}, [\mathcal{G}_{sj}]_{\mathfrak{q}}\}_{s=1}^{N_s}\,\}_{\mathfrak{q}=1}^{N^\varepsilon}$ 在方程（87a）中的隐式系统，数方程和数通量方程分别可写为

$$\left([\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}} + v^i\,[\mathcal{I}_{si}]_{\mathfrak{q}}\right) = [\mathcal{N}]_{\mathfrak{q}}^{(\star)} + \Delta\tau\left([\eta_s]_{\mathfrak{q}} - [\chi_s]_{\mathfrak{q}}\,[\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}}\right) \tag{111}$$

and

$$\left([\mathcal{I}_{sj}]_{\mathfrak{q}} + v^i\,[\mathcal{K}_{sij}]_{\mathfrak{q}}\right) = [\mathcal{G}_{sj}]_{\mathfrak{q}}^{(\star)} - \Delta\tau\,[\kappa_s]_{\mathfrak{q}}\,[\mathcal{I}_{sj}]_{\mathfrak{q}}. \tag{112}$$

这里，我们将新时间步的数通量密度 $[\mathcal{N}_s]_{\mathfrak{q}}$ 和 $[\mathcal{G}_{sj}]_{\mathfrak{q}}$表示为原始矩 $[\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}}$ 和 $[\mathcal{I}_{sj}]_{\mathfrak{q}}$的形式，并将其作为求解过程中满足方程（111）和（112）的未知量。（我们在矩变量上使用方括号，以便将物种和张量分量指标与全局能量节点索引 $\mathfrak{q}$ 以及稍后引入的不动点迭代计数器分隔开。）

在方程（111）和（112）中，我们将根据全局能量节点坐标$\varepsilon_{\mathfrak{q}}$定义的广义发射率和不透明度定义为

$$[\eta_s]_{\mathfrak{q}} = [\eta_s^{\mathrm{EA}}]_{\mathfrak{q}} + [\eta_s^{\mathrm{NES}}]_{\mathfrak{q}} + [\eta_s^{\mathrm{Pair}}]_{\mathfrak{q}} \tag{113}$$

and

$$[\chi_s]_{\mathfrak{q}} = [\chi_s^{\mathrm{EA}}]_{\mathfrak{q}} + [\chi_s^{\mathrm{NES}}]_{\mathfrak{q}} + [\chi_s^{\mathrm{Pair}}]_{\mathfrak{q}}, \tag{114}$$

分别为以下各项贡献之和 这些贡献来自发射与吸收、中微子弹性散射（NES）以及成对过程。输运不透明度 ，

$$[\kappa_s]_{\mathfrak{q}} = [\chi_s]_{\mathfrak{q}} + [\sigma_s^{\mathrm{Iso}}]_{\mathfrak{q}}, \tag{115}$$

见方程（112），其中包含等能散射带来的额外贡献。

For 发射与吸收中，发射率通过详细平衡关系与不透明度相关 n

$$[\eta_s^{\mathrm{EA}}]_{\mathfrak{q}} := [\chi_s^{\mathrm{EA}}]_{\mathfrak{q}}\,[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}}, \tag{116}$$

其中 $[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}}$ 是对方程（B6）中中微子能量 $\varepsilon_{\mathfrak{q}}$处各向同性平衡费米–狄拉克分布的近似。NES 和成对过程所产生的发射率与不透明度涉及对所有能量的积分，这些积分通过勒让德-高斯求积进行近似，使用方程（86）中定义的权重；即，

$$[\eta_s^{\mathrm{NES}}]_{\mathfrak{q}} := \sum_{\mathfrak{q}'=1}^{N^{\varepsilon}} W_{\mathfrak{q}'}^{(2)} \, [\Phi_{s,0}^{\mathrm{In}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} \, [\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}'} \quad \text{and} \quad [\chi_s^{\mathrm{NES}}]_{\mathfrak{q}} := [\eta_s^{\mathrm{NES}}]_{\mathfrak{q}} + \sum_{\mathfrak{q}'=1}^{N^{\varepsilon}} W_{\mathfrak{q}'}^{(2)} \, [\Phi_{s,0}^{\mathrm{Out}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} \, (1 - [\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}'}), \tag{117}$$

and

$$[\eta_s^{\mathrm{Pair}}]_{\mathfrak{q}} := \sum_{\mathfrak{q}'=1}^{N^{\varepsilon}} W_{\mathfrak{q}'}^{(2)} \, [\Phi_{s,0}^{\mathrm{Pro}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} \, (1 - [\bar{\mathcal{D}}_s]_{\mathfrak{q}'}) \quad \text{and} \quad [\chi_s^{\mathrm{Pair}}]_{\mathfrak{q}} := [\eta_s^{\mathrm{Pair}}]_{\mathfrak{q}} + \sum_{\mathfrak{q}'=1}^{N^{\varepsilon}} W_{\mathfrak{q}'}^{(2)} \, [\Phi_{s,0}^{\mathrm{Ann}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} \, [\bar{\mathcal{D}}_s]_{\mathfrak{q}'}. \tag{118}$$

如第2.3节所述，发射率和不透明度取决于流体的热力学状态，并通过对 WeakLib 提供的列表数据进行插值得到（另见D. Pochik 等（2021）；M. P. Laiu 等（2021））。

近似平衡分布 $\mathcal{D}_{s,h}^{\mathrm{Eq}}|_{K_{\varepsilon}^{\mathfrak{e}}}$，通过加权 L^2 投影得到。也就是说，对于每个能量单元$\sim K_{\varepsilon}^{\mathfrak{e}}$ 以及每个基函数 $\ell_{q^{\varepsilon}}$，我们首先求得$\mathcal{D}_{s,h}^{\mathrm{Eq}}$，使得

$$\int_{K_{\varepsilon}^{\mathfrak{e}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{s,h}^{\mathrm{Eq}}(\varepsilon) \ell_{q^{\varepsilon}}(\varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon = \int_{K_{\varepsilon}^{\mathfrak{e}}} f_s^{\mathrm{Eq}}(\varepsilon) \ell_{q^{\varepsilon}}(\varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon. \tag{119}$$

接着，$\mathcal{D}_{s,h}^{\mathrm{Eq}}(\varepsilon) := \Lambda^{\mathcal{D}}\{\widetilde{\mathcal{D}}_{s,h}^{\mathrm{Eq}}(\varepsilon)\}$，其中 $\Lambda^{\mathcal{D}}\{\ldots\}$ 表示一个界限保持限制器（例如，参见 X. D. Liu 和 S. Osher 1996年；X. Zhang 和 C.-W. Shu 2010），它确保对于所有 $\varepsilon \in \mathsf{S}_{\varepsilon}^{\mathfrak{e}}(\mathfrak{e} = 1, \ldots, \mathfrak{N})$，$\mathcal{D}_{s,h}^{\mathrm{Eq}}(\varepsilon) \in [\mathcal{D}^{\mathrm{Eq}}\min \mathcal{D}^{\mathrm{Eq}}\max]$，同时不改变单元平均值；即，$\int_{K_{\varepsilon}^{\mathfrak{e}}} \mathcal{D}_{s,h}^{\mathrm{Eq}} \varepsilon^2 d\varepsilon = \int_{K_{\varepsilon}^{\mathfrak{e}}} f_s^{\mathrm{Eq}} \varepsilon^2 d\varepsilon$。这里，$\mathcal{D}^{\mathrm{Eq}}\min > 0$ 和 $\mathcal{D}^{\mathrm{Eq}}\max < 1$ 是指定的数值界限。最后，费米–狄拉克分布的节点值近似为 $[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}} := \mathcal{D}_{s,h}^{\mathrm{Eq}}(\varepsilon_{q^{\varepsilon}})|_{K_{\varepsilon}^{\mathfrak{e}}}(\mathfrak{q} = (\mathfrak{e}-1) \times N + q^{\varepsilon})$。

我们发现，当中微子与流体强耦合时，对费米–狄拉克分布采用这一限制处理至关重要。原因在于，相空间平流更新要求在扩展的求积点集合（包括能量维度上的单元界面处的点）上，矩满足可实现性；即 $\{\varepsilon_{\mathfrak{e}-\frac{1}{2}}, \varepsilon_{\mathfrak{e}+\frac{1}{2}}\}$。当中微子–物质耦合较强时，碰撞项会驱动共动系数密度趋近平衡 $\mathcal{D}_{s,h}^{\mathrm{Eq}}$。此时，在费米–狄拉克分布陡峭的指数尾部，由于能量空间分辨率有限，方程（119）中的投影可能产生违反费米–狄拉克分布界限的近似，包括可实现性强制限制器在第 3.3 节中检查的那些点。若不对 $\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}$ 施加h界限保持限制器，隐式碰撞求解可能使分布弛豫至局部不可实现的平衡状态。发生这种情况时，必须应用可实现性强制限制器，而这反过来又可能使解偏离平衡。通过对平衡分布施加界限，我们确保碰撞求解器使解弛豫至可实现的平衡状态，避免这种不良相互作用导致中微子与流体之间发生人为的能量和轻子交换。界限保持限制器有助于在碰撞求解过程中保持 $\mathcal{D}_{s,h}^{\mathrm{Eq}} \in [\mathcal{D}^{\mathrm{Eq}}{}_{\min} \mathcal{D}^{\mathrm{Eq}}{}_{\max}]$，并确保系统能够弛豫至稳态平衡。界限保持限制器不会破坏 $\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}$ 的h 高阶精度（例如，参见X. Zhang & C.-W.Shu 2011中的引理 2.3）。

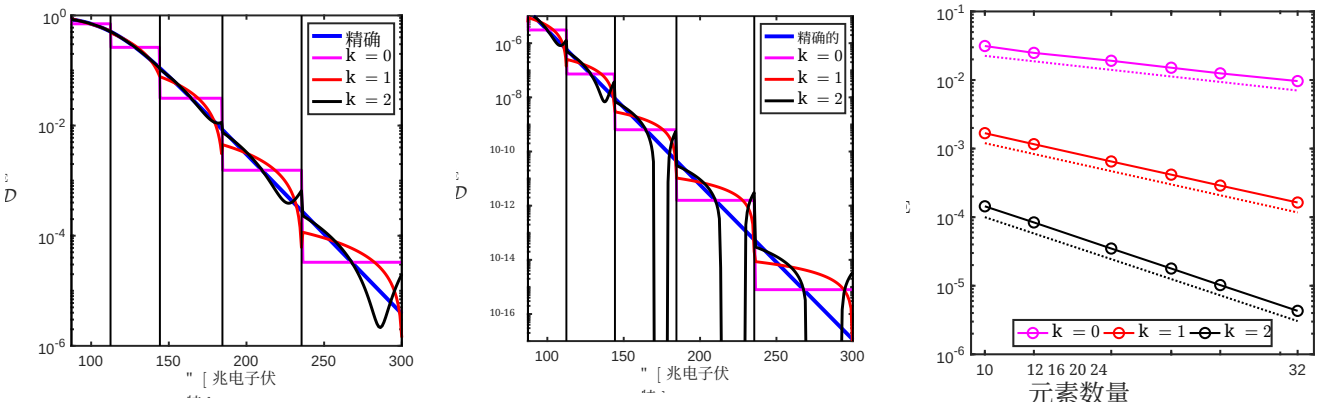
图 2 展示了指数尾部（$\varepsilon \in [87, 300]$ 兆电子伏特）中电子中微子的近似费米–狄拉克分布 $\mathcal{D}_{\nu_e,h}^{\mathrm{Eq}}$（即应用界限保持限制器后），并与精确分布 $f_{\nu_e}^{\mathrm{Eq}}$进行了比较。此处，能量域采用几何递增网格 $\Delta\varepsilon_{\mathfrak{e}+1} = \alpha \, \Delta\varepsilon_{\mathfrak{e}}$进行离散，其中 α 是一个恒定的“缩放因子”（本文使用的能量网格汇总见表 2）。所选热力学条件取自 M. Liebend¨orfer 等人（2005年）的研究，代表核心反弹后约 100 毫秒时坍缩恒星核心中的条件：一种为高密度（$\rho \sim 10^{14}$ g cm^{-3}；左图），另一种为较低密度（$\rho \sim 10^{12}$ g cm^{-3}；中图）。对于 $k = 0$（常数单元）和 $k = 1$（线性单元），近似平衡分布在每个单元内部处处非负。对于 $k = 2$（二次单元），近似平衡分布在最后几个能量区间的部分区域为负，但在勒让德-高斯求积点或单元界面处并非如此（见中图中的黑色实线）。左图和中图使用了表 2 中的网格 C。右图绘制了相对于精确平衡分布的均方根误差随能量单元数量的变化，使用了表 2 所列的所有能量网格。尽管采用了非均匀能量网格，我们仍观察到，对于 $k = 0$、1 和 2，近似分别保持一阶、二阶和三阶精度；此外，高阶多项式能提高整体精度。

对于粒子数 c　　为使 NES 满足守恒，需施加通常的流入-流出不变性（J. Cernohorsky 1994）；即，

$$[\Phi_{s,0}^{\mathrm{In}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} = [\Phi_{s,0}^{\mathrm{Out}}]_{\mathfrak{q}'\mathfrak{q}}. \tag{120}$$

表 2. 网格名称，数量 单元数、缩放因子、几何递增能量网格的内外能量箱宽度 ds.

Grid	$\mathfrak{N}$	缩放因子	$\Delta\varepsilon_1$ [兆电子伏特]	$\Delta\varepsilon_{\mathfrak{N}}$ [兆电子伏特]
A	10	1.473936813452146	3.0	98.5
B	12	1.386077933697496	2.35	85.3
C	16	1.266038160710160	1.875	64.5
D	20	1.205682366195175	1.5	52.4
E	24	1.167614387258235	1.25	44.1
F	32	1.119237083677839	1.0	32.9



(a) 高碰撞性 (b) 低碰撞性 (c) 误差

图 2. 在核心反弹后约 100 毫秒的坍缩恒星核心环境中，对电子中微子平衡费米–狄拉克分布应用界限保持限制器后的 DG 表示。左图展示了 $T = 15$ 兆电子伏特和 $\mu_{\nu_e} = 113$ 兆电子伏特时的结果，这代表了高密度条件下电子中微子的典型环境（$\rho \sim 10^{14}$ 克 厘米$^{-3}$ 和 $Y_e \sim 0.27$）。中图展示了 $T = 7.6$ 兆电子伏特和 $\mu_{\nu_e} = 3.5$ 兆电子伏特时的结果，这代表了较低密度条件下的典型环境（$\rho \sim 10^{12}$ 克 厘米$^{-3}$ 和 $Y_e \sim 0.13$）。右图展示了中图中低密度情形下，该近似相对于精确费米–狄拉克分布的均方根误差随能量单元数 $\mathfrak{N}$ 的变化，其中采用了不同的多项式次数 k，并使用表 2中指定的能量网格。

此外，当中微子分布等于平衡费米–狄拉克分布时，NES 碰撞算子必须为零；也就是说，当 $[\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}} = [\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}}$。若满足以下条件，这一点便成立（参见 J. Cernohorsky 1994中的公式（2.5））

$$[\Phi_{s,0}^{\mathrm{In}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} = \frac{[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}}\,(1-[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}'})}{[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}'}\,(1-[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}})}\,[\Phi_{s,0}^{\mathrm{Out}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'}. \tag{121}$$

当 $[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}} := f_s^{\mathrm{Eq}}(\varepsilon_{\mathfrak{q}})$ 时，$[\Phi_{s,0}^{\mathrm{Out}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'}$ 前面的因子会化简为 $e^{-(\varepsilon_{\mathfrak{q}}-\varepsilon_{\mathfrak{q}'})/T}$。然而，经过方程（119中的投影以及界限保持限制器处理后，通常有 $[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}} \neq f_s^{\mathrm{Eq}}(\varepsilon_{\mathfrak{q}})$（等式仅在弱意义上成立，而非逐点成立），因此必须改为满足方程（121）中的详细平衡关系。

类似地，为了保证成对过程中的轻子数守恒，必须满足

$$[\Phi_{s,0}^{\mathrm{Pro/Ann}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} = [\bar{\Phi}_{s,0}^{\mathrm{Pro/Ann}}]_{\mathfrak{q}'\mathfrak{q}}, \tag{122}$$

其中 $\bar{\Phi}_{s\,0}^{\mathrm{Pro/Ann}}$，是中微子种类 s 的反中微子成对速率（例如 $\bar{\Phi}_{\nu_e}^{\mathrm{Pro/Ann}}{}_{,\,0} = \Phi_{\bar{\nu}_e\,0}^{\mathrm{Pro/Ann}}{}_{,}$）。为了使平衡时的成对过程碰撞项为零，必须满足以下详细平衡关系

$$[\Phi_{s,0}^{\mathrm{Pro}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} = \frac{[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}}\,[\bar{\mathcal{D}}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}'}}{(1-[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}})\,(1-[\bar{\mathcal{D}}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}'})}\,[\Phi_{0,s}^{\mathrm{Ann}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'}. \tag{123}$$

这里，当 $[\mathcal{D}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}} := f_s^{\mathrm{Eq}}(\varepsilon_{\mathfrak{q}})$ 和 $[\bar{\mathcal{D}}_s^{\mathrm{Eq}}]_{\mathfrak{q}} := \bar{f}^{\text{方程}s}(\varepsilon_{\mathfrak{q}})$，$[\Phi_{0,s}^{\mathrm{Ann}}]_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'}$ 前面的因子简化为 $e^{-(\varepsilon_{\mathfrak{q}}+\varepsilon_{\mathfrak{q}'})/T}$.

接下来，我们尝试将方程（111）和（112）改写成适用于不动点迭代的形式。为此，我们遵循 M. P. Laiu 等人 （2025）的做法，对于某个 $\lambda > 0$，方程（111）和（112）可以写成

$$[\boldsymbol{\mathcal{M}}_s]_{\mathfrak{q}} = \begin{pmatrix} [\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}} \\ [\mathcal{I}_{sj}]_{\mathfrak{q}} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} (1-\lambda)\,[\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}} + \lambda\left([\mathcal{N}]_{\mathfrak{q}}^{(\star)} - v^i[\mathcal{I}_{si}]_{\mathfrak{q}} + \Delta\tau\,[\eta_s]_{\mathfrak{q}}\right) \\ (1-\lambda)\,[\mathcal{I}_{sj}]_{\mathfrak{q}} + \lambda\left([\mathcal{G}_{sj}]_{\mathfrak{q}}^{(\star)} - v^i[\mathcal{K}_{sij}]_{\mathfrak{q}}\right) \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \mathbf{y})_{s,\mathfrak{q}}, \tag{124}$$

其中 $\Lambda = \mathrm{diag}\big((1+\lambda\Delta\tau[\chi_s]_{\mathfrak{q}})^{-1},\ (1+\lambda\Delta\tau[\kappa_s]_{\mathfrak{q}})^{-1}\big)$。在 Q 的参数中（Q 定义为方程 (124) 的右端项），我们定义了 $\mathrm{M} = \{\{[\mathrm{M}_s]_{\mathfrak{q}}\}_{s=1}^{N_s}\}_{\mathfrak{q}=1}^{N^\varepsilon}$，这表示碰撞项可以耦合所有能量和所有物种的矩。我们还明确纳入了对原始流体变量 $\mathrm{y} = (v_j, \epsilon_{\mathrm{f}}, Y_{\mathrm{e}})^{\intercal}$ 的依赖关系。（映射 Q 也依赖于质量密度 ρ，但我们将其排除在流体状态向量 y 之外，因为 ρ 在碰撞更新期间保持不变。）

通过定义 $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{\mathcal{M}},\ \mathbf{y}) := \{\{\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{\mathcal{M}},\ \mathbf{y})_{s,\ \mathfrak{q}}\}_{s=1}^{N_s}\}_{\mathfrak{q}=1}^{N^\varepsilon}$，我们将所有物种和能量对应的方程 (124) 简写为

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \mathbf{y}). \tag{125}$$

备注 3。 在方程 (124)中，我们将参数 λ 设为 $1/(1+|v|)$，其中 $|v| = \sqrt{\gamma_{ij}v^iv^j}$。M. P. Laiu 等人 *(2025)* 在简化不透明度的情形下，使用方程 (124) 中的映射进行隐式求解，并证明了这一 λ 选择在皮卡迭代中保持矩可实现性。此外，对于 $|v| < \sqrt{2}-1 \approx 0.41$，$\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ 是一个压缩算子，这是保证收敛的充分条件。本文也采用相同的 λ 选择。然而，对于采用真实不透明度的完整非线性求解器，目前尚无类似的收敛性证明，本文也不对此进行分析。相反，我们通过第 *6* 节和第 *7*节中的数值算例，研究所提出算法在核心坍缩超新星场景下的收敛性质。

3.5.2. *Matter Equations*

物质量的更新通过对质量（在碰撞更新过程中显然守恒；即 $\rho = \rho^{(\star)}$）、动量、能量和轻子数施加守恒定律来实现；即

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} v_j \\ \epsilon_{\mathrm{f}} \\ Y_{\mathrm{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_j^{(\star)} - \left(F_{\nu j} - F_{\nu j}^{(\star)}\right)/\rho^{(\star)} \\ \epsilon_{\mathrm{f}}^{(\star)} - \left(E_\nu - E_\nu^{(\star)}\right)/\rho^{(\star)} \\ Y_{\mathrm{e}}^{(\star)} - m_{\mathrm{B}}\left(N_\nu - N_\nu^{(\star)}\right)/\rho^{(\star)} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{q}(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \mathbf{y}), \tag{126}$$

其中，比内能由 $\epsilon = \epsilon_{\mathrm{f}} - \frac{1}{2}v_iv^i$ 得到，而欧拉中微子动量密度、能量密度和轻子数密度则通过勒让德-高斯求积规则计算，具体如下：

$$F_{\nu j} := \sum_{s=1}^{N_s}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{N^\varepsilon} W_{\mathfrak{q}}^{(3)}\left([\mathcal{I}_{sj}]_{\mathfrak{q}} + v_j[\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}} + v^k[\mathcal{K}_{sjk}]_{\mathfrak{q}}\right), \tag{127}$$

$$E_\nu := \sum_{s=1}^{N_s}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{N^\varepsilon} W_{\mathfrak{q}}^{(3)}\left([\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}} + 2v^j[\mathcal{I}_{sj}]_{\mathfrak{q}}\right), \tag{128}$$

$$N_\nu := \sum_{s=1}^{N_s}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{N^\varepsilon} W_{\mathfrak{q}}^{(2)}\mathrm{g}_s\left([\mathcal{D}_s]_{\mathfrak{q}} + v^i[\mathcal{I}_{sj}]_{\mathfrak{q}}\right), \tag{129}$$

其中，$W_{(2)\mathfrak{q}}$ 定义见方程（86），而 $W_{(3}{}_{\mathfrak{q}} = W_{\mathfrak{q}}^{(2)}{}_{\times})(\varepsilon_{\mathfrak{q}})$。

计算中微子不透明度所需的热力学量（例如化学势和组分）由 WeakLib 根据 ρ、T 和 Y_{e} 列成表格，并通过表格插值获取。更新 ϵ 和 Y_{e} 后，使用状态方程表通过求根得到相应的温度。

3.5.3. 嵌套定点迭代算法

遵循我们先前的工作（M. P. Laiu 等（2021）），我们将方程（125）和（126）给出的耦合非线性系统表述为一个具有两个层级的嵌套定点问题，如算法1中的伪代码所示。给定时间步长 $\Delta\tau$ 和旧状态$\mathbf{y}^{(\star)}$ 以及$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(\star)}$，它们在第 4 行被设为初始猜测值；随后，在外循环（从第 8 行开始）中迭代物质量，并使用内循环（从第 15 行开始）中得到的收敛矩，此时物质状态保持固定。采用这种嵌套结构，是为了减少计算开销较大的不透明度计算次数；这类计算涉及

多维表查找和插值，并且在全隐式求解中，每次更新物质状态后（第 12 行）都会进行。根据我们的经验，尽管所用模型较简单，仅包含电子味中微子且不含速度相关项，但在固定物质状态下于内循环中使矩充分收敛，相较于在单一层级上求解方程（125）和（126）（如 M. P. Laiu 等（2021）第 4.1 节所述），所需的不透明度计算总次数更少。跳过第 12 行的不透明度计算后，该算法很容易修改为半隐式算法，即在第 5 行使用旧状态计算一次不透明度。

与牛顿法相比，采用不动点迭代求解中微子–物质耦合问题还有其他优点：无需计算雅可比矩阵，也无需对相应的稠密线性方程组求逆。构造雅可比矩阵需要计算表列不透明度核对热力学状态的导数，这一过程既繁琐又容易出错。因此，采用不动点迭代法更容易纳入额外的中微子弱相互作用道。

除了不透明度的计算之外，算法 1 中其他计算密集型部分还包括第 18 行的速率计算、第 19 行的矩方程右端项计算，以及在较小程度上第 25 行的物质方程右端项计算。速率计算相当于稠密矩阵-向量乘法，例如由方程（117）和（118）可知。计算物质方程右端项的大部分开销来自方程（128）–（129）中的矩积分（标量积）。由于不动点迭代的收敛速度比牛顿法慢，内循环和外循环都采用安德森加速（D. G. Anderson，1965年；H. Walker 与 P. Ni，2011年），利用由记忆参数 `M outer`和 `M inner`所确定的先前迭代中的残差和右端项计算结果，以提高收敛速度。如第 20 行和第 26 行所示，通过求解最小二乘问题，确定使残差组合最小化的系数 $\{\alpha_j\}$ 和 $\{\beta_j\}$，随后分别用于第 21 行和第 27 行的更新。将记忆参数设为 1 时，即得到皮卡迭代。根据我们的经验，将记忆参数设为大于 1 的值可显著减少迭代次数，但将其增大到几个以上并不会带来明显收益。我们在第 6 节考察内外循环记忆参数变化的影响。内外循环分别按照算法 2 和 3迭代，直至收敛。

4. 集成 入 FLASH-X 并与有限体积流体力学耦合

本文介绍如何将 `thornado` 中双矩谱中微子输运算法集成到多物理软件系统 FLASH-X（A. Dubey 等人（2022））中，以实现中微子辐射流体动力学模拟。（thornado 可作为 Git 子模块导入 FLASH-X，托管的 FLASH-X 代码默认已配置为支持这一操作。）FLASH-X 是一个性能可移植框架，为大规模科学计算提供成熟的基础设施，其中包括基于 MPI 的分布式并行、用于协调设备间数据移动的可移植性层、GPU 计算编译器指令、可扩展输入/输出以及自适应网格细化（AMR）功能；这些功能对于核心坍缩超新星的三维模拟要么必不可少，要么十分有用。此外，FLASH-X 提供可压缩流体力学和磁流体力学求解器，我们已将其与 thornado 中的双矩求解器耦合。耦合方法不依赖于 FLASH-X 中任何特定的有限体积流体力学求解器，但本文仅使用 Spark（S. M. Couch 等人（2021））。我们扩展了 Spark，使其采用L. Ji（2023年）所述自定义九阶 WENO-Z9 重构的五阶变体；该重构采用了D. S. Balsara 等人（2016年）、M. Castro 等人（2011年）和A. Tchekhovskoy 等人（2007）中的构造模块。我们使用 HLLC 黎曼求解器（E. F. Toro 等人（1994））。在激波附近，我们采用 HLLE 黎曼求解器（B. Einfeldt（1988）；A. Harten（1983a）），并使用耗散性更强、鲁棒性更高的线性重构及 minmod 斜率限制器（例如参见B. van Leer（1979）；A. Harten（1983b）；B. Cockburn 与 C.-W. Shu（1998）；A. Kurganov 与 E. Tadmor（2000））。为确保耦合一致，我们通过 Git 子模块将 WeakLib 集成为可导入模块，并在 FLASH-X 中创建了封装器，使模拟能够使用与 thornado 相同的表格化核物质状态方程。

我们使用 Lie–Trotter 算子分裂，将 Euler–Poisson 模型与谱双矩模型耦合。给定时间 t^n, $\{\boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{\mathcal{U}}^n, \Phi^n\}$处流体、中微子和引力势的初始状态，以及一个时间步长 Δt，则 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$,$\{\boldsymbol{u}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{U}}^{n+1}, \Phi^{n+1}\}$处的更新量按以下示意步骤求得

1. 使用显式龙格–库塔方法求解子问题 1（Euler–Poisson）：

$$\{\boldsymbol{u}^n, \Phi^n\} \to \{\boldsymbol{u}^\star, \Phi^{n+1}\}. \tag{130}$$

2. 求解子问题 问题2和3（相空间平流和中微子–物质耦合）采用隐显式方法：

$$\{\,\boldsymbol{u}^\star, \boldsymbol{\mathcal{U}}^n\,\} \to \{\,\boldsymbol{u}^{n+1}, \boldsymbol{\mathcal{U}}^{n+1}\,\}. \tag{131}$$

算法1： $[\,\boldsymbol{\mathcal{M}},\ \mathbf{y}\,]=$ 求解中微子物质耦合($\Delta\tau,\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{(\star)},\ \mathbf{y}^{(\star)}$)

输入： 时间步长 $\Delta\tau$，旧状态 $\boldsymbol{\mathcal{M}}^{(\star)}$ 和 $\mathbf{y}^{(\star)}$,
输出： 新状态 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$和$\mathbf{y}$
参数： 外层容差 _ , 内层容差 , 外层 M , M 内层
$\mathbf{y}^{[1]} \leftarrow \mathbf{y}^{(\star)}$;$\boldsymbol{\mathcal{M}}^{[1,1]} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{M}}^{(\star)}$
计算不透明度($\mathbf{y}^{[1]}$)
外层收敛 := .false.; 内层收敛 := .false.
$k = 0$
当(*.NOT.* 外层收敛 **)执行**
  $k \mathrel{+}= 1$
  $M_k = \min($ k, M 外层 $)$
  如果($k > 1$ **)那么**
    计算不透明度($\mathbf{y}^{[k]}$)
    $\boldsymbol{M}^{[k,1]} \leftarrow \boldsymbol{M}^{[k-1,*]}$
  $\ell = 0$
  当(*.NOT.* 内层收敛 **)执行**
    $\ell \mathrel{+}= 1$
    $M_\ell = \min(\ell,$ M 内部 $)$
    计算速率($\boldsymbol{\mathcal{M}}^{[k,\ell]}$)
    /* 计算矩方程右端项和残差 */
    $\boldsymbol{Q}^{[\ell]} := \boldsymbol{Q}\ (\boldsymbol{M}^{[k,\ell]},\ \mathbf{y}^{[k]})\ ;\ \boldsymbol{F}^{[\ell]} := \boldsymbol{Q}^{[\ell]} - \boldsymbol{M}^{[k,\ell]}$
    /* 求解内层最小二乘问题 */

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \| \sum_{j=1}^{M_\ell} \alpha_j \boldsymbol{F}^{[\ell - M_\ell + j]} \|^2 \quad \text{满足} \quad \sum_{j=1}^{M_\ell} \alpha_j = 1$$

    /* 更新矩 */
    $\boldsymbol{M}^{[k,\ell+1]} = \sum_{j=1}^{M_\ell} \alpha_j \boldsymbol{Q}^{[\ell - M_\ell + j]}$
    /* 检查内循环是否收敛 */
    内层收敛 =内部收敛检查($\boldsymbol{\mathcal{M}}^{[k,\ell+1]} - \boldsymbol{\mathcal{M}}^{[k,\ell]}$, $\|\boldsymbol{\mathcal{D}}^{[k,1]}\|_{W^{(2)}}$, 内部容差)
    如果 (内层收敛 **)则**
      $\boldsymbol{M}^{[k,*]} \leftarrow \boldsymbol{M}^{[k,\ell+1]}$
  /* 计算物质方程右端项和残差 */ $- \mathbf{y}^{[k]}$
  $\mathbf{q}^{[k]} := \mathbf{q}(\boldsymbol{\mathcal{M}}^{[k,*]}, \mathbf{y}^{[k]})$; $\mathbf{f}^{[k]} := \mathbf{q}^{[k]}$
  /* 求解外层最小二乘问题 */

$$\min_{\beta_j} \frac{1}{2} \| \sum_{j=1}^{M_k} \beta_j \mathbf{f}^{[k - M_k + j]} \|^2 \quad \text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{M_k} \beta_j = 1$$

  /* 更新物质量 */
  $\mathbf{y}^{[k+1]} = \sum_{j=1}^{M_k} \beta_j \mathbf{q}^{[k - M_k + j]}$
  /* 检查外循环收敛 */
  外层收敛 =外部收敛检查($\mathbf{y}^{[k+1]} - \mathbf{y}^{[k]}$,$\mathbf{y}^{(\star)}$,外循环容差)
  如果(外层收敛 **)那么**
    $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{[k,*]}$ 和$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{[k+1]}$

算法 2: [收敛] = 内部收敛检查($\delta\mathcal{M}$ $\|\mathcal{D}\|$, 容差)

1 输入：变化量 δM $= \{\{[\delta \mathrm{M}_s]_q\}_{s=1}^{N^s}\}_{q=1}^{N^\varepsilon}$，数密度范数 $\|\mathrm{D}\| = \{\|\mathcal{D}_s\|\}_{s=1}^{N_s}$，以及相对容差 tol 2 输出：查询结果 Converged 3 Converged := .true. 4 对于 ($s = 1, N_s$) 执行 /* 计算物种 s 的所有矩的加权范数 */5 $\|\delta$M $\| = 06$ 对于 ($q = 1, N^\varepsilon$) 执行7 $\|\delta\mathrm{M}\| \mathrel{+}= W_q^{(2)}([\delta \mathrm{M}_s]_q)^2$/* 选取所有矩中的最大值 */8 $\|\delta\mathrm{M}\| := \sqrt{}$ max($\|\delta$M$\|$) 9 Converged $=$ Converged.and.$\|\delta\mathrm{M}\| \leq$ tol $\|\mathcal{D}_s\|$

算法 3: [收敛] = 外部收敛检查(δ**y**, **y**, 容差)

1 **输入：** 变化量 δ**y**、参考物质状态**y**和相对容差 tol2 **输出：** 查询结果 收敛3 收敛：= 所有(abs(δ**y**) $\leq$ tol $*$ abs(**y**))

时间步长由矩更新的显式部分决定，如方程（91）所示。使用自适应网格细化时，时间步长取整个计算域所有层级中的最小时间步长；也就是说，我们不采用时间子循环，即网格层级结构中的不同层级以不同的时间步长演化（例如，A. S. Almgren 等人，2010 年）。

在方程 (130) 中，欧拉–泊松系统由 FLASH-X 演化，采用 SSP-RK2 或 SSP-RK3。为避免在龙格–库塔积分器的中间阶段求解引力势，使用 t^{n-1} 和 t^n 时刻的引力势外推到中间时刻，以计算引力源项。在方程 (131) 中，流体和中微子矩由`thornado` 采用第 3.2 节中的 IMEX 格式演化，并使用方程 (92) 中的 Butcher表。由于牛顿引力势仅取决于质量密度，而质量密度在方程 (131) 的更新过程中保持不变，因此引力势通过方程 (130) 完全更新。此处采用的李–特罗特算子分裂法会引入一阶时间分裂误差，该误差独立于方程 (130) 和 (131) 中各自采用的时间步进方法的时间精度。由于方程 (131) 中采用的 IMEX 格式形式上仅具有一阶精度，因此我们在此接受这一分裂误差，但计划在未来研究更先进积分策略的用途，例如多速率方法（A. Sandu 2019年；C. Rujeko & D. Reynolds 2021年）。

将 thornado 中的双矩求解器与 FLASH-X 中的欧拉–泊松求解器耦合，仍有两个挑战：（1）流体变量需要采用有限体积网格和有限元网格上的混合表示，因为这些变量由 FLASH-X 和 thornado 共同更新；（2）需要延拓和限制算子，以便在自适应加密网格上演化中微子辐射场。下面简要介绍我们应对这些挑战的方法。

4.1. 流体变量的有限体积表示与间断伽辽金表示

在 FLASH-X 中，三维计算域由网格离散化，该网格由一系列逻辑笛卡尔块组成，每个块的尺寸为 `nxb` ×`nyb` × `nzb`，其中 `nxb` 表示每个块在 x维方向上的网格单元数，其他方向依此类推。同样，在`thornado`中，计算空间域由逻辑笛卡尔网格离散化，该网格包含 `nX`(1) ×`nX`(2) × `nX`(3)个单元。原生情况下，`thornado` 只能在单层网格上演化，但所有计算内核均编写为可更新逻辑笛卡尔块，从而便于将其求解器集成到块结构自适应网格加密框架中。FLASH-X 中的可压缩流体力学求解器基于有限体积法，流体变量以单元平均值表示。在 `thornado`中，每个空间单元内的流体变量以多项式表示 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$（类似于辐射矩的方程（75））

$$\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, t)|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} = \sum_{i=1}^{|\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}|} \boldsymbol{u}_i(t)\phi_i(\boldsymbol{x}), \tag{132}$$

其中我们使用张量积基；即 $\phi_i|_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} \in \mathbb{Q}^k(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}})$ 和 $|\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}| = (k+1)^{d_{\boldsymbol{x}}}$。（在方程（132）中，基函数和展开系数的排序方式使得从多重索引 $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}} = \{i^1, i^2, i^3\}$ 到标量索引 i 的映射形式为$i(\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}) = (i^3-1) \times N^2 + (i^2-1) \times N + i^1$。）当 $k > 0$ 时，每个单元的 DG 表示所包含的自由度多于每个网格单元的有限体积表示。因此，我们让每个间断Galerkin单元覆盖多个有限体积单元，使每个块的自由度总数保持不变；即，我们满足关系 nX(1) $\times(k+1)$ = nxb（其他空间维度也同理）。这种方法与 M. Dumbser 等人（2014）为间断伽辽金方法提出的有限体积子单元限制器技术有关。图 3 展示了二维空间中的 FLASH-X 网格块所包含的有限体积网格和间断伽辽金网格（$d_{\boldsymbol{x}} = 2$），其中采用线性单元（$k = 1$）。

我们对笛卡尔坐标的处理方法已在 J. A. Harris 等人 （2022年）中阐述。这里我们介绍该方法的基本要素，并将其推广到曲线坐标。我们将间断Galerkin单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}} \subset \mathbb{R}^{d_{\boldsymbol{x}}}$ 细分为子网格 S，其中包含$|\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}|$ 个互不重叠的有限体积单元 S_j，$S = \cup_{j=1}^{|\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}|} S_j = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$（即 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}} \setminus S = \emptyset$）。在每个子单元 S_j上，解由有限体积表示（单元平均值）给出 $\bar{\boldsymbol{u}}_j$。随后，我们通过要求以下条件成立，求出方程（132）中的展开系数：

$$\int_{S_j} \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) \sqrt{\gamma_h}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = |S_j|\, \bar{\boldsymbol{u}}_j \tag{133}$$

对所有子单元 S_j均成立。这里，$|S_j|$ 是子单元 S_j的本征体积。在 thornado 中，度量行列式的平方根由尺度因子计算得出（$h_{1,\,h}$、 $h_{2,\,h}$和$h_{3,\,h}$），这些尺度因子由方程（132）所示形式的多项式展开近似。将这些近似代入方程（133）可得

$$|S|^{-1}\, P\, \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}, \tag{134}$$

其中，$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_{|\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}|})^{\intercal}$、$\bar{\boldsymbol{u}} = (\bar{\boldsymbol{u}}_1,\ \ldots,\ \bar{\boldsymbol{u}}_{|\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}|})^{\intercal}$、$|S| = \mathrm{diag}(|S|_1,\ \ldots,\ |S|_{|\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}|})$，以及 $P = (P_{ij})$ 是分量为 $|\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}| \times |\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}|$投影矩阵 的

$$P_{ij} = \int_{S_i} \phi_j(\boldsymbol{x})\, \sqrt{\gamma_h}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{135}$$

定义重构矩阵 $R = P^{-1}$后，方程（132中的展开系数可由单元平均值通过以下重构得到

$$\boldsymbol{u} = R\, |S|\, \bar{\boldsymbol{u}}. \tag{136}$$

总而言之，使用 FLASH-X 中基于有限体积的求解器，根据方程（130）通过欧拉–泊松系统演化流体后，在根据方程（136）重构 DG 表示之后，再执行方程（131）中的耦合双矩更新。此步骤之后，通过方程（134）中的投影步骤恢复流体变量的有限体积表示。每次调用 thornado 双矩求解器时，都会构造投影矩阵及其逆矩阵（每个单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$ 各一组）。进行这种即时计算是为了避免在每个 FLASH-X 网格块中存储 nX(1) $\times$nX(2) $\times$nX(3) R 个矩阵，因为这些矩阵取决于空间位置变化的度量行列式。流体变量在 thornado 演化的自由度总数中所占比例相对较小，再加上双矩更新的成本相对较高，因此，流体变量在有限体积表示与 DG 表示之间映射所增加的计算量不会显著影响总体运行时间。双矩变量始终以 DG 表示的形式保存在 FLASH-X 数据结构中。

在 FLASH-X（默认使用 CGS单位）与thornado（使用自然单位 $c = G = k_{\mathrm{B}} = 1$）之间传递变量时，需要进行单位转换。此外，FLASH-X 中的向量和张量以局部正交归一基表示，而在 thornado 中则以坐标基表示。对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，其在坐标基下的分量 a^i与在局部正交归一基下的分量 $a^{\bar{\imath}}$之间满足如下变换关系：$a^i = e^i_{\bar{\imath}}\, a^{\bar{\imath}}$，其中 $e^i_{\bar{\imath}}$将空间度规 γ_{ij}变换为欧几里得度规：$\delta_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} = e^i_{\bar{\imath}}\, e^j_{\bar{\jmath}}\, \gamma_{ij}$。逆变换给出的 $a^{\bar{\imath}} = e^{\bar{\imath}}_i\, a^i$满足 $e^i_{\bar{\imath}}\, e^{\bar{\imath}}_j = \delta^i_j$。对于第 2节中引入的对角空间度规，我们只需令 $e^i_{\bar{\imath}} = \mathrm{diag}[h_1^{-1}, h_2^{-1}, h_3^{-1}]$ 和 $e^{\bar{\imath}}_i = \mathrm{diag}[h_1, h_2, h_3]$。

4.2. 辐射变量的延拓与限制

FLASH-X 在位置空间中提供自适应网格细化能力（h细化），以便在需要的地方提供空间分辨率；例如，捕捉引力坍缩期间的物质分布，以及在反弹后的中微子再加热阶段，为原中子星表面周围提供所需的分辨率。当一个区域被细化时，需要利用覆盖该区域的较粗网格中的数据对变量进行插值，以适应细化后的区域（延拓）。反之，当一个区域被粗化时，来自较细网格的变量

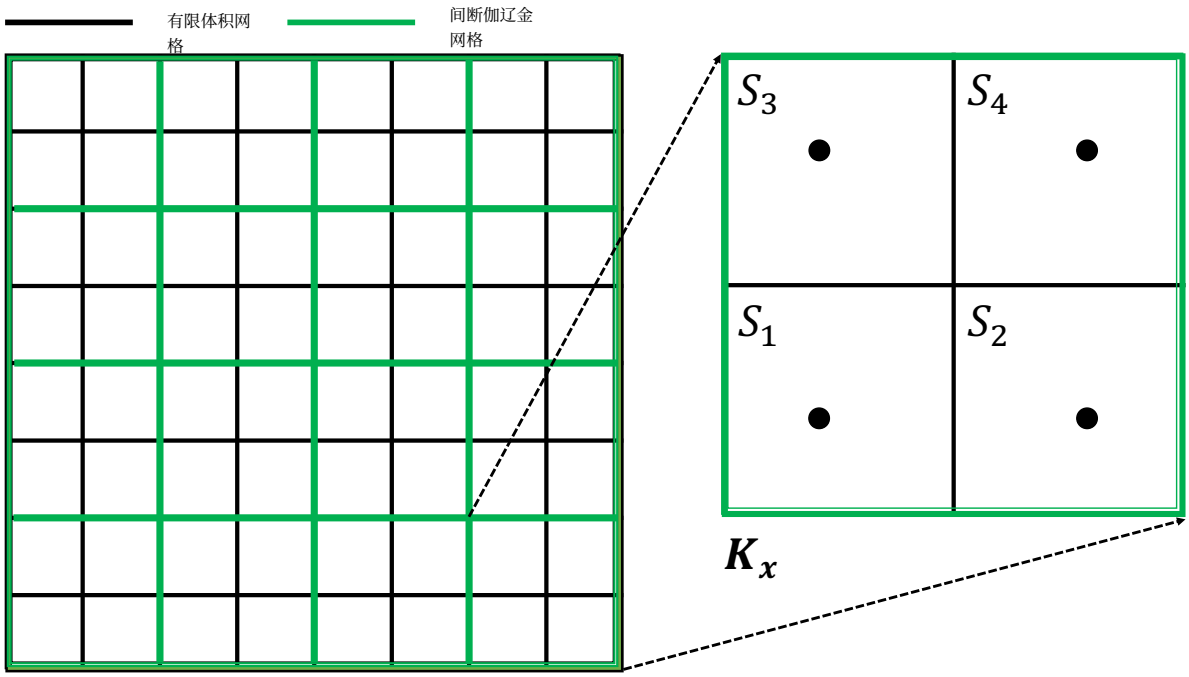


图 3。 二维 ($d_x = 2$) FLASH-X 有限体积网格块，包含 nxb $=$ nyb $= 8$ （黑色），与由线性单元 ($k = 1$) 构成的间断伽辽金网格（绿色）相结合的示意图。在此情形下，一个具有高斯-勒让德空间节点 ($\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S_x}$；黑点) 的空间单元 $\boldsymbol{K_x}$ 覆盖四个子单元 $S = \cup_{j=1}^{4} S_j$。

通过平均来为较粗网格提供数据（限制）。延拓和限制也用于在粗细网格边界上提供幽灵单元数据。FLASH-X 已经提供了处理这些操作的例程，适用于采用有限体积表示的变量。下面简要介绍如何在位置空间中细化和粗化采用 DG 表示的中微子矩变量；这一方法与 K. Schaal 等人（2015年）求解欧拉方程的方法类似，但这里将其推广到正交曲线空间坐标。我们只考虑相邻细化层级之间分辨率相差两倍的情况。此外，发生细化（粗化）时，每个空间维度均细化（粗化）两倍。只需考虑单个单元的细化，以及将 个单元粗化为一个单元的情形。图4展示了二次单元二维情形下的延拓/限制过程。

令 $\boldsymbol{K_x}$ 表示一个粗单元，并令 $\{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}\}$ 表示一组互不重叠的细化单元，使得 $\boldsymbol{K_x} = \cup_{j=1}^{2^{d_x}} \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}$。对于粗单元，我们回顾方程（132）中辐射矩 $\mathcal{U}$ 的展开；即

$$\mathcal{U}_h(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{K_x}} = \sum_{\boldsymbol{i_x}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{N_x}} \mathcal{U}_{\boldsymbol{i_x}}\, \phi_{\boldsymbol{i_x}}(\boldsymbol{x}), \tag{137}$$

其中 $\phi_{\boldsymbol{i_x}}|_{\boldsymbol{K_x}} \in \mathbb{Q}^k(\boldsymbol{K_x})$。类似地，在细单元上，我们令相应的中微子矩表示为 b y

$$u_h(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}} = \sum_{\boldsymbol{i_x}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{N_x}} u_{\boldsymbol{i_x}}^{(j)}\, \phi_{\boldsymbol{i_x}}^{(j)}(\boldsymbol{x}), \tag{138}$$

其中 $\phi_{\boldsymbol{i_x}}^{(j)}|_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}} \in \mathbb{Q}^k(\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)})$。（在本小节中，符号 u 不应与守恒流体变量混淆；此处它表示限制在细化单元上的辐射矩 $\mathcal{U}$。）由于细化和粗化仅应用于空间，为便于记号，我们省略能量和种类指标，并注意到对所有中微子矩、物种和能量均执行相同的操作。在粗单元上，细化数据提供了分段多项式表示

$$u_h(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{K_x}} = \sum_{j=1}^{2^{d_x}} u_h(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}}. \tag{139}$$

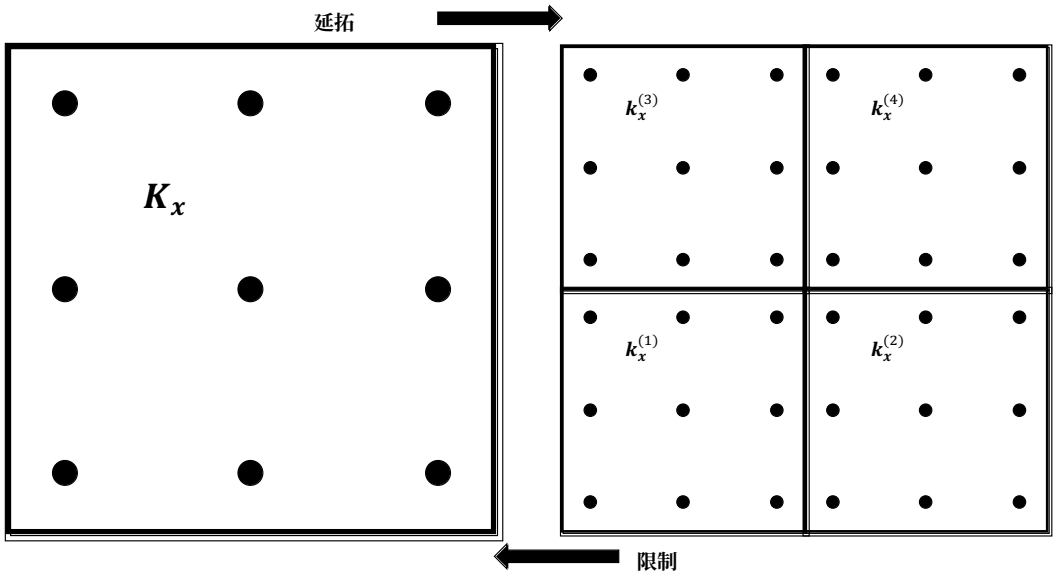


图 4. 对于多项式次数为 $k=2$、空间维数为 $d_{\boldsymbol{x}}=2$ 的情形，将一个单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$ 细化为多个更细的单元 $\{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}\}$（延拓；从左到右），以及将多个单元粗化为一个单元（限制；从右到左）的示意图。

细化单元 $\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}$上的辐射矩通过对粗单元 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$ 上的多项式表示进行加权 L^2 投影到定义在细化单元上的基上获得；即，我们求取 $u_h \in \mathbb{Q}^k(\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)})$，使得

$$\int_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}} u_h(\boldsymbol{x})\,\phi_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)}(\boldsymbol{x})\,\sqrt{\gamma_h^{(j)}}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}} \mathcal{U}_h(\boldsymbol{x})\,\phi_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)}(\boldsymbol{x})\,\sqrt{\gamma_h^{(j)}}\,d\boldsymbol{x} \tag{140}$$

对所有 $\phi_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{Q}^k(\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)})$均成立，其中$\sqrt{\gamma_h^{(j)}}$ 是通过在 $\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}$上对尺度因子进行多项式近似求值得到的。类似地，在粗化时，粗单元上的多项式通过将方程（139）中的分段多项式投影到粗单元上定义的基，进行加权 L^2 得到；也就是说，我们求得 $\mathcal{U}_h \in \mathbb{Q}^k(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}})$ 使得

$$\int_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} \mathcal{U}_h(\boldsymbol{x})\,\phi_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\,\sqrt{\gamma_h}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{2^{d_{\boldsymbol{x}}}} \int_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}} u_h(\boldsymbol{x})\,\phi_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\,\sqrt{\gamma_h^{(j)}}\,d\boldsymbol{x} \tag{141}$$

对所有 $\phi_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}} \in \mathbb{Q}^k(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}})$均成立。

方程（140）和（141）定义的延拓和限制运算可以用基本的线性代数运算表示。为此，定义向量 $\boldsymbol{u}^{(j)} = (u_{\boldsymbol{1}}^{(j)}, \ldots, u_{\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)})^{\intercal}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \mathcal{U}_{\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{x}}})^{\intercal}$。然后，将方程（137）和（138）代入方程（140）可得

$$\boldsymbol{u}^{(j)} = (m^{(j)})^{-1}\,\mathcal{P}^{(j)}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}, \tag{142}$$

其中 $m^{(j)} = (m_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)})$ 是质量矩阵，而 $\mathcal{P}^{(j)} = (\mathcal{P}_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)})$ 是延拓矩阵，其分量 ts

$$m_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)} = \int_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}} \phi_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)}(\boldsymbol{x})\,\phi_{\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)}(\boldsymbol{x})\,\sqrt{\gamma_h^{(j)}}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \quad \text{and} \quad \mathcal{P}_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)} = \int_{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}} \phi_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{x}}}^{(j)}(\boldsymbol{x})\,\phi_{\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\,\sqrt{\gamma_h^{(j)}}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \tag{143}$$

分别。质量矩阵 $m^{(j)}$ 通常是稠密矩阵，因为权重 $\sqrt{\gamma_h^{(j)}}$ 的缘故；计算（非对称）延拓矩阵 $\mathcal{P}^{(j)}$ 时还需格外注意，因为 $\phi_{\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{x}}}$ 的支撑位于 $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}$，其范围延伸到了细化单元$\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{x}}^{(j)}$之外。类似地，将方程（137）和（138）代入方程（141）可得

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \mathcal{M}^{-1} \sum_{j=1}^{2^{d_{\boldsymbol{x}}}} \mathcal{R}^{(j)}\,\boldsymbol{u}^{(j)}, \tag{144}$$

其中 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{i_{\boldsymbol{x}} j_{\boldsymbol{x}}})$ 是质量矩阵，其分量为

$$\mathcal{M}_{i_{\boldsymbol{x}} j_{\boldsymbol{x}}} = \int_{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{x}}} \phi_{i_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\, \phi_{j_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\, \sqrt{\gamma_h}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \tag{145}$$

而限制矩阵则为简单的 $\mathcal{R}^{(j)} = (\mathcal{P}^{(j)})^{\intercal}$。

5. 基础验证测试的结果

本节展示结果，以说明 thornado 中实现的双矩模型在一些具有已知解特征的基础测试问题上的间断伽辽金方法性能。为此，我们考虑单一物种，并采用由发射与吸收以及各向同性、等能散射产生的简化解析不透明度；即，设定

$$\langle \mathcal{C}(\boldsymbol{f}) \rangle := \chi \left(\mathcal{D}^{\text{Eq}} - \mathcal{D} \right) \quad \text{and} \quad \langle \mathcal{C}(\boldsymbol{f})\, \ell_j \rangle := -\left(\chi + \sigma \right) \mathcal{I}_j, \tag{146}$$

其中 χ 为吸收不透明度， $\mathcal{D}^{\text{Eq}}$ 为平衡分布，且 σ 为散射不透明度。M. P. Laiu 等人M. P. Laiu 等人(2025) 已展示了笛卡尔空间坐标下此类测试的一些结果。因此，我们重点讨论采用球极坐标和柱面空间坐标的相关测试；但第5.6节的测试除外，该测试使用笛卡尔坐标和 FLASHFLASH-X 的自适应网格细化。对于所有涉及不透明度的测试，我们采用 M. P. Laiu 等人M. P. Laiu 等人(2025) 提出的基于不动点迭代的隐式碰撞求解器。除第5.6节的测试外，所有数值测试均使用无量纲单位。

5.1. *Diffusion limit*

这里我们考虑一个球对称扩散问题，其中包含具有恒定散射不透明度的静态背景 σ。（吸收不透明度设为零。）该问题改编自J. A. Pons 等人(2000年)（另见E. O'Connor 2015年）。当散射不透明度足够高时，矩方程将趋于数密度的扩散方程。对于高斯初始分布 $\mathcal{D}_0(r) = \exp(-3\,\sigma\, r^2/(4\, t_0))$，极限扩散方程的解析解为

$$\mathcal{D}(r,t) = \left(\frac{\sigma}{t_0 + t} \right)^{3/2} \exp\left\{ -\frac{3\,\sigma\, r^2}{4\,(t_0 + t)} \right\}, \tag{147}$$

数通量密度的径向分量则由 $\mathcal{I}^r = -\partial_r \mathcal{D}/(3\,\sigma)$ 得到。

我们考虑两种散射不透明度：一种为 $\sigma = 10^2$ （薄测试），另一种为 $\sigma = 10^5$ （厚测试）。在薄测试中，计算域范围为 $r \in [0, 5/3]$, $t_0 = 1$，并运行至 $t + t_0 = 5$。在厚测试中，计算域范围为 $r \in [0, 5/6]$ 和 $t_0 = 200$，并运行至 $t + t_0 = 400$。两项测试均使用 50 个二次单元（$k = 2$）和 PD-ARS IMEX 格式。将平均自由程定义为 $\lambda = 1/\sigma$ 后，平均自由程与单元宽度 Δr 的比值（克努森数 Kn）在薄测试中为 3×10^{-1}，在厚测试中为 6×10^{-4}。

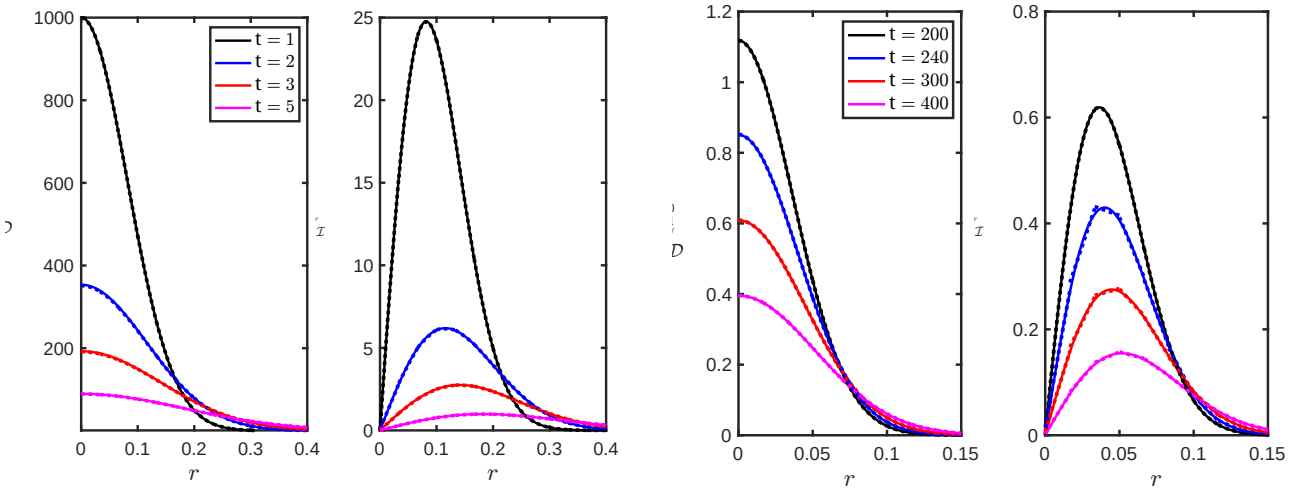
结果绘于图5中。无论是薄情形（最左侧两个面板）还是厚情形（最右侧两个面板），数值解与解析解都吻合良好。我们强调，在扩散区间（$\text{Kn} \ll 1$）使用有限体积方法时，需要修改数值通量以降低数值耗散，才能在此测试中取得良好表现。对于 $k \geq 1$，间断伽辽金方法无需修改数值通量便能捕捉扩散极限（例如，E. W. Larsen & J. E. Morel1989年；M.L. Adams 2001年）。

5.2. 辐射球

此测试改编自B. M¨uller 等人（2010），考察自由流辐射在空间变化的速度场中传播的情形。吸收和散射不透明度均设为零。我们考虑一维（球对称）空间域 $D_{\boldsymbol{x}} = [10^1, 10^4]$，并令速度分布如下：

$$v^r = \begin{cases} 0, & r \leq 135 \\ -v^r_{\text{max}} \times (r - 135)/15, & r \in (135, 150] \\ -v^r_{\text{max}} \times (150/r)^2, & r > 150 \end{cases}, \tag{148}$$

其中我们设定 $v^r_{\text{max}} = 0.2$。我们将能量域设定为 $D_\varepsilon = [0, 300]$。在该测试中，我们分别将空间域和能量域离散为 200 个和 32 个单元，并使用线性单元（$k = 1$）和二阶强稳定保持龙格–库塔方法时间步进。在两个相空间维度上，我们都使用几何递增的单元。对于空间网格，第一个径向单元的宽度为 $(\Delta r)_1 = 1$，并以约 1.0287 的恒定因子递增，因此最后一个单元的宽度为 $(\Delta r)_{200} = 280$。类似地，



(a) $\sigma = 10^2$ (b) $\sigma = 10^5$

图 5。 薄层（$\sigma = 10^2$；最左侧两个面板）和厚层（$\sigma = 10^2$；最右侧两个面板）构型的扩散极限问题结果。对于每种构型，图中展示了若干时刻下数密度和数通量密度随半径的变化。数值解以点线表示，解析解以实线表示。

对于能量网格，第一个单元的宽度为 $\Delta\varepsilon_1 = 1$，并以 1.1192 的恒定因子递增，最终得到$\Delta\varepsilon_{32} = 32.9$。在计算域中，对于所有（$r$， ε） $\in D_{\boldsymbol{x}} \times D_\varepsilon$，矩初始设定为 $\mathcal{D} = 1 \times 10^{-40}$ 和 $\mathcal{I}^r = 0$。在内空间边界处，我们施加具有费米–狄拉克谱的入射前向峰化辐射场；即设定$\mathcal{D}$（ε， $r = 10$） $= 1/[\exp$（$\varepsilon/3 - 3$） $+ 1]$ 以及 $\mathcal{I}^r$（ε， $r = 10$） $= 0.999 \times \mathcal{D}$（$\varepsilon$， $r = 10$），使得通量因子 $h \approx 1$。（我们在外部空间边界处施加流出边界条件。）随后，对于 $t > 0$，一个辐射前沿穿过计算域，并且对于 $t \gtrsim 10^4$，系统达到稳态，此时谱根据速度场发生多普勒频移。根据狭义相对论考量，在假设辐射为前向峰化且自由流的情况下，稳态下的解析谱数密度可写为（参见 O. Just 等人，2015 年）

$$\mathcal{D}_{\mathrm{A}}(\varepsilon, r) = \left(\frac{10}{r}\right)^2 \times \frac{s^2}{\exp(s\varepsilon/3 - 3) + 1}, \tag{149}$$

其中 $s = \sqrt{(1 + v^r)/(1 - v^r)}$。我们将所有模拟运行至 $t = 2 \times 10^4$，此时已达到近似稳态，并使用方程（149）中的表达式与数值解进行比较。

图 6 展示了辐射球测试所得解的特征。左侧各图绘出了能量积分共动系数密度（上图）和能量密度（下图）乘以 r^2 并以外部空间边界处的数值进行归一化。由于辐射场呈前向峰化并处于自由流状态（$I^r_\nu \approx D_\nu$），这些量也分别对应数密度光度和能量光度。数值所得结果（黑色点线）与通过对方程（149）按适当权重对能量积分得到的解析解（黑色实线）吻合良好。我们还绘出了相应的欧拉参考系数密度和能量密度乘以 r^2（各图中的蓝色点线）。这些量应不受速度场影响，并随半径保持不变。如图所示，数值解很好地保持了这一性质。

图 6 的右图显示了不同半径处计算得到的共动系谱粒子分布（符号），并与根据方程（149）得到的解析谱（实线）进行了比较。黑色圆圈显示了 $r = 10^1$处入射辐射场的谱，其中每个圆圈代表一个单元中的单元平均值。正如预期，数值结果与解析谱（黑色实线）吻合良好。在 $r = 1.5 \times 10^2$处，即速度峰值大小为（$v^r = 0.2$）时，共动系谱发生了显著蓝移（见蓝色实线和圆圈）。在此位置，数值谱与解析谱仍然吻合良好，但在谱峰之后，数值解略高于解析解。在外边界处，速度几乎恢复为零，数值谱也移回原位（红色叉号），并与入射谱吻合良好。

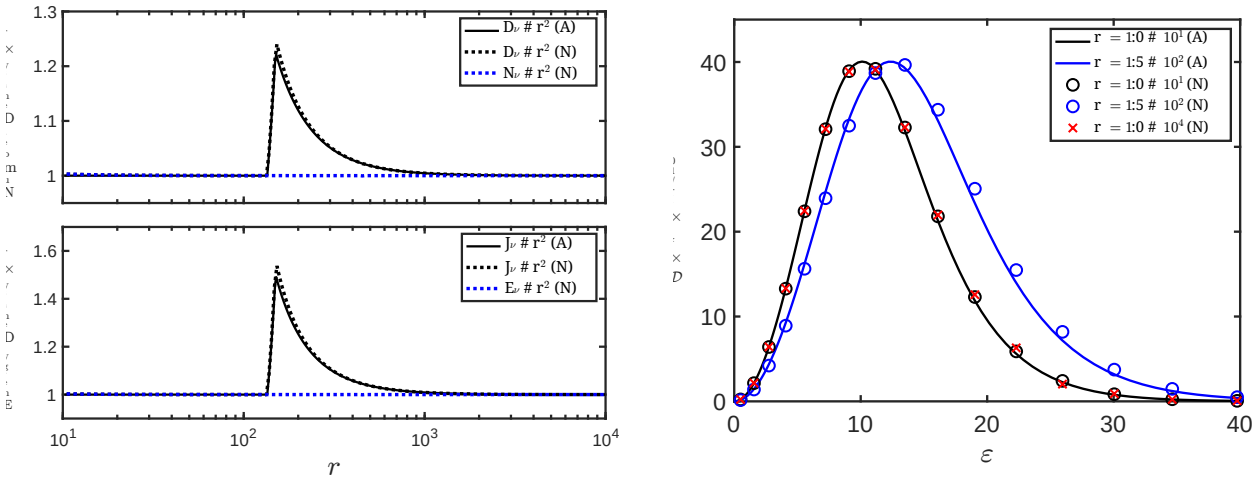


图 6. $t = 10^4$时辐射球测试的结果。左侧各面板显示对能量积分后的数密度（上方面板）和能量密度（下方面板）乘以 r^2 后随半径的变化。在这两个面板中，我们展示了共动系和欧拉参考系中的数密度与能量密度，结果均按外径向边界处的数值进行缩放。左上方面板中，我们绘出了共动系数密度 $[D_\nu(r)/D_\nu(r=10^4)]\times(r/10^4)^2$（黑色点线）和欧拉参考系数密度 $[N_\nu(r)/N_\nu(r=10^4)]\times(r/10^4)^2$（蓝色点线）。左下方面板中，我们绘出了共动系能量密度 $[J_\nu(r)/J_\nu(r=10^4)]\times(r/10^4)^2$（黑色点线）和欧拉坐标系能量密度 $[E_\nu(r)/E_\nu(r=10^4)]\times(r/10^4)^2$（蓝色点线）。这两个面板中，共动系物理量的解析解由公式（149）求得，并以实黑线表示。右侧面板展示了不同半径处的粒子谱分布。$r=10^1$ 和 $r=1.5\times10^2$ 的解析谱分别以实黑线和实蓝线表示。数值计算得到的谱分别以 $r=10^1$（黑色圆圈）、$r=1.5\times10^2$（蓝色圆圈）和 $r=10^4$（红色叉号）表示。

5.3. 差分膨胀的等温大气

该问题由 D. Mihalas （1980年）利用狭义相对论辐射输运模型进行了研究，随后 M.Rampp & H. T. Janka （2002年）和 O. Just et al. （2015年）使用 $\mathcal{O}(v)$ 模型对其进行了研究。该问题考虑了中性粒子（光子）在膨胀大气中的输运，其中光子通过发射与吸收与背景介质相互作用。我们考虑一维（球对称）空间域，并令 $D_{\boldsymbol{x}}\times D_\varepsilon=[0,15]\times[0,12]$。我们将空间域和能量域分别离散为 200 和 50 个线性单元（$k=1$），并采用 PD-ARS IMEX 时间推进格式。对于$r\in[0,R)$，吸收不透明度指定为

$$\chi(\varepsilon,r)=\begin{cases}\alpha\times\left\{10\times\exp\left[-(\varepsilon-\varepsilon_0)^2/\Delta^2\right]+\left(1-\exp\left[-(\varepsilon-\varepsilon_0)^2/\Delta^2\right]\right)\right\}/r^2 & \varepsilon\le\varepsilon_0\\ 10\times\alpha/r^2 & \varepsilon>\varepsilon_0\end{cases}, \tag{150}$$

当 $\chi=0$ 时，$r\ge R$。在相互作用区域（$r<R$），不透明度按 r^{-2}的规律衰减。在给定半径处，不透明度与能量无关，但宽度为 $\sim\Delta$、中心位于 ε_0的过渡区域除外；在该区域内，不透明度约增加一个数量级。平衡分布取温度为单位值的玻色–爱因斯坦分布，即 $\mathcal{D}^{\mathrm{Eq}}=1/(e^\varepsilon-1)$。在方程（150）中，$\alpha=10.9989$，$\Delta=0.2$，$\varepsilon_0=3$，以及 $R=11$。在$r=R$之外还设置了一层真空层，以便处理外边界；该处采用流出边界条件（O. Just 等人，2015 年）。在 $r=0$处采用反射边界条件。径向速度剖面为

$$v^r=\begin{cases}0, & r<r_{\min}\\ v^r_{\max}\times\frac{r-r_{\min}}{(r_{\max}-r_{\min})}, & r\in[r_{\min},r_{\max}]\\ v^r_{\max}, & r>r_{\max}\end{cases}, \tag{151}$$

其中 $r_{\min}=1$ 且 $r_{\max}=R$。也就是说，径向速度从零线性增加至 $v^r_{\max}$，适用于 $r\in[r_{\min},r_{\max}]$，并在 $r>r_{\max}$时保持为常数 $v^r_{\max}$。初始时，对于所有（r，ε）$\in D_{\boldsymbol{x}}\times D_\varepsilon$，矩设为 $\mathcal{D}=1\times10^{-10}$ 和 $\mathcal{I}^r=0$；随后演化至 $t=15$，此时得到近似稳态。我们计算了 $v^r_{\max}\in\{0.0,0.1,0.3\}$的解。

图 7 绘出了共动系能量密度随半径的变化（左图），以及在 $r=5.5$和$r=11$ 处的谱能量分布（右图）。该图与O. Just 等人 (2015年) 的图 2 在定性上吻合良好，呈现出相同的

两个面板中定性解的特征。左图中的符号（方框、星形和菱形）取自D. Mihalas (1980年) 的图 5，并由 Oliver Just 慷慨提供（私人通信），与狭义相对论辐射传输方程的解吻合良好。在 $r \approx 5$内部，背景介质相对不透明，且所有模型的速度均为非相对论性，此时与输运解吻合得非常好。对于较大的半径，双矩和$\mathcal{O}(v)$ 近似会导致结果偏离相对论输运解，但仍能很好地捕捉总体趋势。

5.4. *Shadow Casting – Cylindrical Coordinates*

接下来，我们考虑一项阴影投射测试，该测试常用于凸显双矩模型相较于通量限制扩散模型在捕捉阴影区域方面的优势（例如，J. C. Hayes & M. L. Norman 2003；M. A. Skinner & E. C.Ostriker 2013；O. Just 等人，2015 年；T.Kuroda et al. 2016；E. P. O'Connor & S. M. Couch 2018）。T. Kuroda et al. (2016年) 也使用了这一测试的一个变体，以强调向自由流辐射过渡所面临的挑战；在这一过程中，粒子通量趋近于密度（即，可实现域的边界）。为检验在 (R, z) 坐标系中实现双矩模型的效果，`thornado` 采用了 E. P. O'Connor & S. M. Couch (2018 年) 的设置。

我们考虑一个二维空间域 $D_{\boldsymbol{x}} = (R, z)$ {v4}，该空间域离散为 168×140 个二次单元（$k = 2$）。由于背景处于静止状态（即不存在相对论观测者修正），我们针对单一粒子能量进行此项测试。数值设置包括一个以原点为中心的源区域 $\mathcal{S} = \{(R, z) \mid r^2 = R^2 + z^2 \leq R_{\mathcal{S}}^2\}$，以及一个以 $(R_{\mathcal{A}}$,0, 0) 为中心的吸收区域 $\mathcal{A} = \{(R, z) \mid (R - R_{\mathcal{A}}$,0) $^2 + z^2 \leq R_{\mathcal{A}}^2\}$，其中我们设定 $R_{\mathcal{S}} = 1.5$、$R_{\mathcal{A}}$、$_0 = 8$ 和 $R_{\mathcal{A}} = 2$。在源区域内部，吸收不透明度设为 $\chi = 10 \times \exp[-2\,(r/\mathcal{R}_{\mathcal{S}})^2\,]$，并设为 $\mathcal{D}^{\text{Eq}} = 0.1$。在吸收区域内部，$\chi = 10$ 和 $\mathcal{D}^{\text{Eq}} = 0$。散射不透明度在任何位置均设为零。为避免源半径处不连续不透明度所引起的数值伪影，我们对源区域进行少量平滑处理，平滑范围约为两个单元。初始时，我们在计算域中设定 $\mathcal{D} = 10^{-10}$ 和 $\mathcal{I}^R = \mathcal{I}^z = 0$。我们沿对称轴（$R = 0$）采用反射边界，在其他位置采用流出边界条件。我们使用 PD-ARS IMEX 时间推进格式，并积分至达到近似稳态（$t = 15$）。

图 8 展示了 $2\pi r^2 |\boldsymbol{I}|$（参见 E. P. O'Connor 和 S. M. Couch 2018年）在 $t = 15$处的色彩图。在稳态下，远离源和吸收区域时，该量应为常数，我们的数值结果也符合这一预期。在吸收区域后方、与源区域相对的位置，可以清楚地看到阴影。阴影与自由流区域之间存在逐渐过渡。这部分是由数值扩散造成的，同时也是因为源具有一定范围（并非点源）。

5.5. 透明涡旋 – 球极坐标

该测试改编自 O. Just 等人（2015），考察自由流辐射穿过速度涡旋的传播。另请参阅 M. P. Laiu 等人（2025），了解使用 thornado 和笛卡尔坐标获得的结果。此处，我们在两个空间维度中采用球极（r, θ）坐标，并考虑空间域 $D_{\boldsymbol{x}} = (r, \theta) \in [2, 10] \times [0, \pi/2]$，该空间域离散为 48×48 个二次单元（$k = 2$）。我们将能量域设为 $D_\varepsilon = [0, 50]$，并将其离散为 32 个二次单元。在计算域中，对所有 $(r, \theta, \varepsilon) \in D_{\boldsymbol{x}} \times D_\varepsilon$，矩的初始值设为 $\mathcal{D} = 1 \times 10^{-8}$ 和 $\mathcal{I}^r = \mathcal{I}^\theta = 0$。与辐射球测试一样，我们在内空间边界施加具有费米-狄拉克谱的入射前向峰化辐射场；即，设定 $\mathcal{D}(\varepsilon, r = 2, \theta) = 1/[\exp(\varepsilon/3 - 3) + 1]$, $\mathcal{I}^r(\varepsilon, r = 2, \theta) = 0.999 \times \mathcal{D}(\varepsilon, r = 2, \theta)$，以及 $\mathcal{I}^\theta(\varepsilon, r = 2, \theta) = 0$。我们在外径向边界施加流出边界条件，并在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/2$处施加反射边界条件。

对于 $t > 0$，一些从内边界发出的辐射会朝着以 $(x_0,\ y_0)^\intercal = (6,\ 6)^\intercal/\sqrt{2}$ 为中心的速度涡旋传播，并穿过该涡旋。速度场的笛卡尔分量为

$$v^x = -\frac{(y - y_0)}{R_0} \times V \quad \text{and} \quad v^y = \frac{(x - x_0)}{R_0} \times V, \tag{152}$$

分别为，其中

$$V = v_{\max} \times \exp\left[-\left(\frac{R_0 - 1}{0.4}\right)^2\right] \tag{153}$$

且 $R_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$。给定方程（152）中的速度分量，球极分量为$v^r = (v^x$ 正弦 $\theta + v^y$ 余弦 $\theta)$ 和 $rv^\theta = (v^x$ 余弦 $\theta - v^y$ 正弦 $\theta)$。图 9（左图）展示了一个具有以下条件的模型的速度场：$v_{\max} = 0.1$。对于 $t \gtrsim 8$，系统会达到稳态，此时内边界的流入与外边界的流出相平衡。

对于 $v_{\max} \neq 0$，共动系辐射矩会受到空间变化的速度场的影响。例如，一个瞬时朝内边界运动的共动观测者，由于相对论

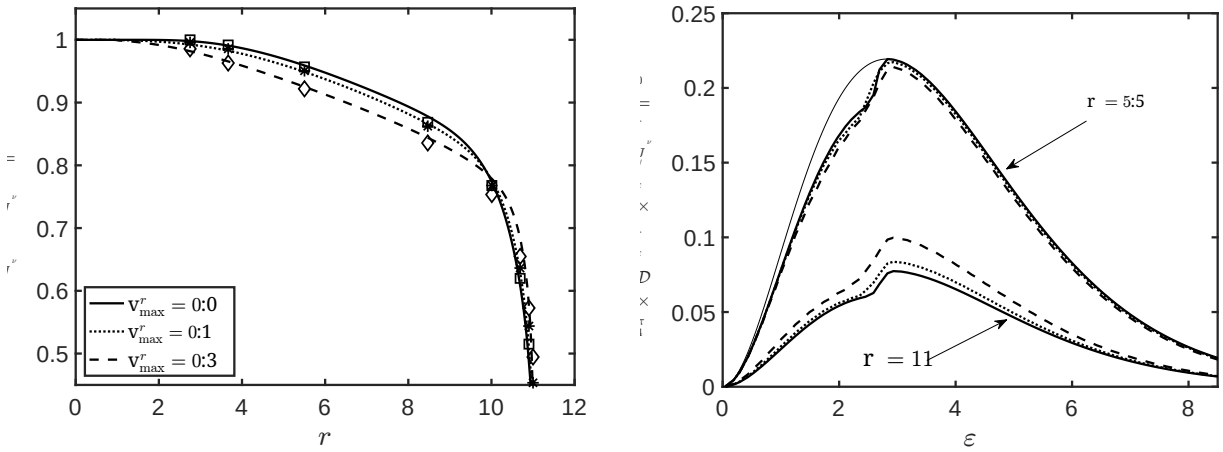


图7。 差分膨胀等温大气测试的结果。左图展示了共动系能量密度随半径的变化，并以 $r = 0$处的值为基准进行缩放；图中给出了方程（151）中 0。0 （实线）、0。1 （点线）和 0。3 （虚线）这三个取值。符号——方框（$v^r_{\max} = 0.0$）、星号（$v^r_{\max} = 0.1$）和菱形（$v^r_{\max} = 0.3$）——对应于取自 D. Mihalas （1980年）的狭义相对论解，由 O. Just 等人 （2015年，私人通信）提供。右图展示了左图所绘模型在两个选定半径处的缩放能谱（线型对应）： $r = 5.5$ 和 $r = 11$。此图中，黑色细实线表示平衡能谱。

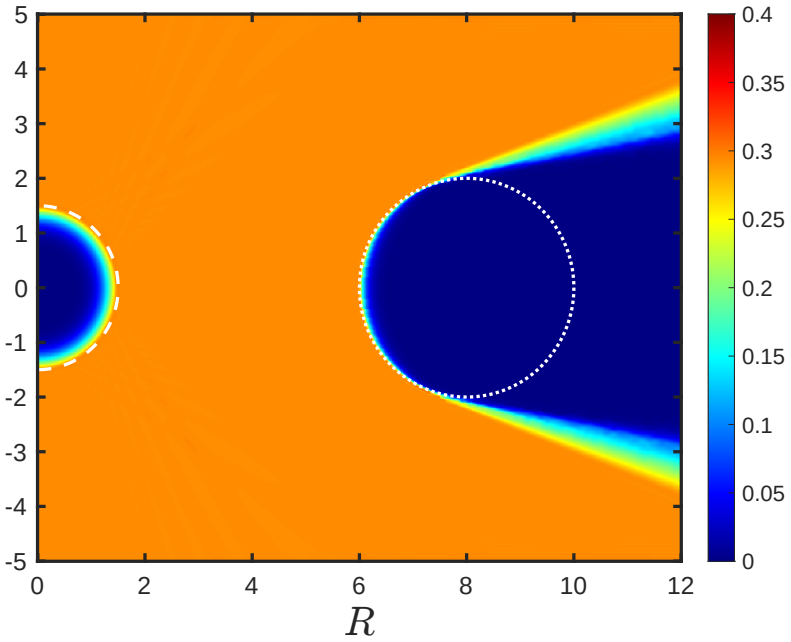


图 8。 柱坐标下阴影投射测试的结果。色彩图显示 $2\pi r^2 |\boldsymbol{I}|$，其中 $|\boldsymbol{I}|$ 为粒子通量密度的大小，且 $r^2 = R^2 + z^2$。白色虚线表示源区域的半径，白色点线描绘吸收区域的边界。

多普勒效应。图9 的中间面板展示了均方根（RMS）能量的色彩图，

$$\varepsilon_{\rm RMS} = \sqrt{\int_{D_\varepsilon} \mathcal{D}(\varepsilon)\varepsilon^5 d\varepsilon \Big/ \int_{D_\varepsilon} \mathcal{D}(\varepsilon)\varepsilon^3 d\varepsilon}, \tag{154}$$

从内边界的均方根能量中减去 $\varepsilon_{\rm RMS,\ 0}$ 对于一个具有 $v_{\max} = 0.1$ 的模型（即绘制了 $\varepsilon_{\rm RMS,\ 0} - \varepsilon_{\rm RMS}$ ）。涡旋中的谱移（即蓝移与红移）在定性上与左图所示速度场所预示的情况一致。在涡旋尾流中（$r \gtrsim 7.5$），速度再次接近零，均方根能量与入射谱非常接近

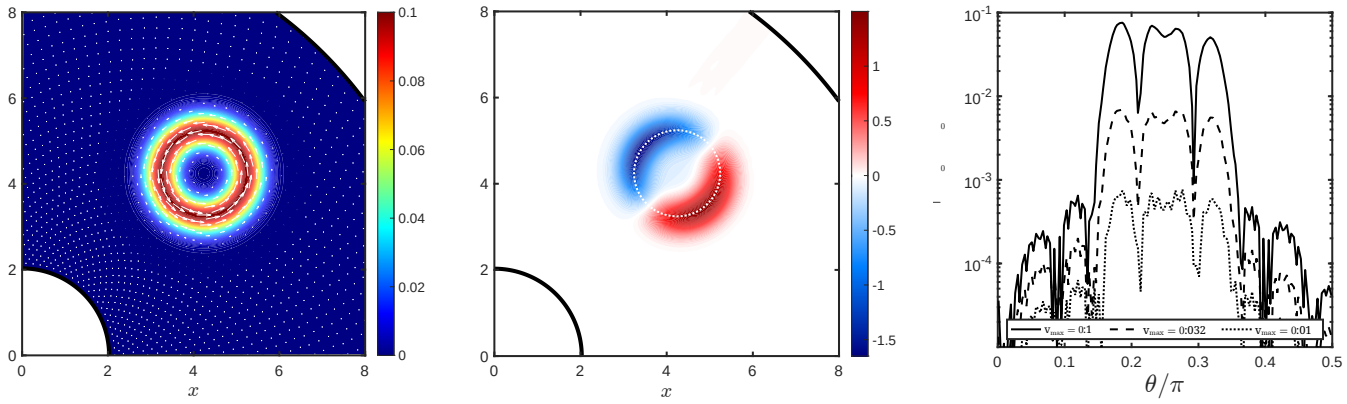


图 9. 透明涡旋问题的结果。左图中的色彩图显示了$v_{\max}=0.1$模型的速度场大小，并叠加了速度矢量（白色）。中图中的色彩图显示了均方根能量，$\varepsilon_{\mathrm{RMS},\ 0}-\varepsilon_{\mathrm{RMS}}$，其中$\varepsilon_{\mathrm{RMS},\ 0}\approx 15.6$是内边界（$r=2$）处的值。在此图中，白色虚线描绘了$v=v_{\max}=0.1$所在的圆。右图绘出了不同$v_{\max}$取值的模型中，能量积分数通量径向分量的相对差异（相对于$v_{\max}=0$模型）随极角的变化：0.1（实线）、0.032（虚线）和0.01（点线）。

吻合。与 O. Just 等人（2015）类似，我们在图 9 右图中绘制了不同 $v_{\max}$ 取值模型在 $r=10$ 处能量积分数通量密度相对于极角 θ 的相对差异。相对差异以 $v_{\max}=0$ 的模型为参照计算。尽管该差异理论上应恒为零，但有若干因素可能导致差异非零。O. Just 等人（2015）指出，离散化误差和模型误差都会产生影响；模型误差源于忽略了 $\mathcal{O}(v^2)$ 及更高阶的速度相关项。M. P. Laiu 等人（2025）提出，双矩模型无法充分捕捉角向像差效应，这也会造成影响。我们在图 10 右图中绘制了图 9 右图所示量的 L^2 范数（带圆圈的黑色实线），并将其表示为 $v_{\max}$ 的函数。误差随 $v_{\max}^2$ 增大（参见黑色点线），由此我们推断已计入所有相关的 $\mathcal{O}(v)$ 项。

图 10（左上和左下图分别）绘出了欧拉参考系粒子数和能量的相对变化——分别为方程 (10) 和 (23) 在相空间域上的积分——随时间的变化，所示模型采用了不同的 $v_{\max}$ 值。计算粒子数和能量变化时，已计入穿过计算域边界的通量（与 M. P. Laiu 等，2025 的处理相同）。由于初始数密度几乎为零，因此相对变化是相对于 $t=15$ 时的数值计算的。由于 thornado 以守恒形式求解欧拉坐标系数密度方程，对于所有 $v_{\max}$ 值，相关粒子数都能以机器精度守恒。然而，正如第2节以及 M. P. Laiu 等人（2025）更详细讨论的那样，即使在连续层面，由于我们忽略了 $\mathcal{O}(v^2)$ 及更高阶项，欧拉坐标系能量也只能近似守恒。由图 10 左下图可见，欧拉坐标系能量的相对变化随 $v_{\max}$ 增大；对于给定的 $v_{\max}$ 值，当内边界条件驱动的初始辐射脉冲穿过速度涡旋时，相对变化达到峰值。图 10 右图（带圆圈的黑色虚线）绘出了从 $t=0$ 到 $t=15$ 积分得到的欧拉坐标系能量相对变化的 L^2 误差随 $v_{\max}$ 的变化。L^2 误差也随 $v_{\max}^2$ 增大，这进一步表明所有相关的 $\mathcal{O}(v)$ 项均已纳入，并以一致的方式离散，从而在 $\mathcal{O}(v)$ 下实现欧拉坐标系能量守恒性质；这是因为我们求解的是一个粒子数守恒的 $\mathcal{O}(v)$ 双矩模型。

5.6. 采用自适应网格细化的流动正弦波

此测试改编自 M. P. Laiu 等人 (2025)，模拟自由流辐射沿 x^1 方向传播，并穿过速度场在空间和时间上均保持恒定的背景。散射和吸收不透明度设为零，背景速度规定为 $\boldsymbol{v}=[v,0,0]^\intercal$，其中 $v=0.1c$。我们在笛卡尔坐标中考虑周期空间域 $D_{\boldsymbol{x}}=[0,L]^3$，其中$L=100$ 厘米。（为兼容 FLASH-X 使用的 CGS 单位，本问题的距离和时间分别以厘米和秒为单位。）初始数密度和通量为

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{x},0)=\mathcal{D}_0(\boldsymbol{x})=0.5+0.49\times\sin(2\pi x^1),\quad \mathcal{I}^1(\boldsymbol{x},0)=\mathcal{D}_0(\boldsymbol{x}),\quad \mathcal{I}^2(\boldsymbol{x},0)=\mathcal{I}^3(\boldsymbol{x},0)=0. \tag{155}$$

在此条件下 初始化时，通量因子为 1，解析解的非平凡分量为 e

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{x},t)=\mathcal{I}^1(\boldsymbol{x},t)=\mathcal{D}_0(x^1-t); \tag{156}$$

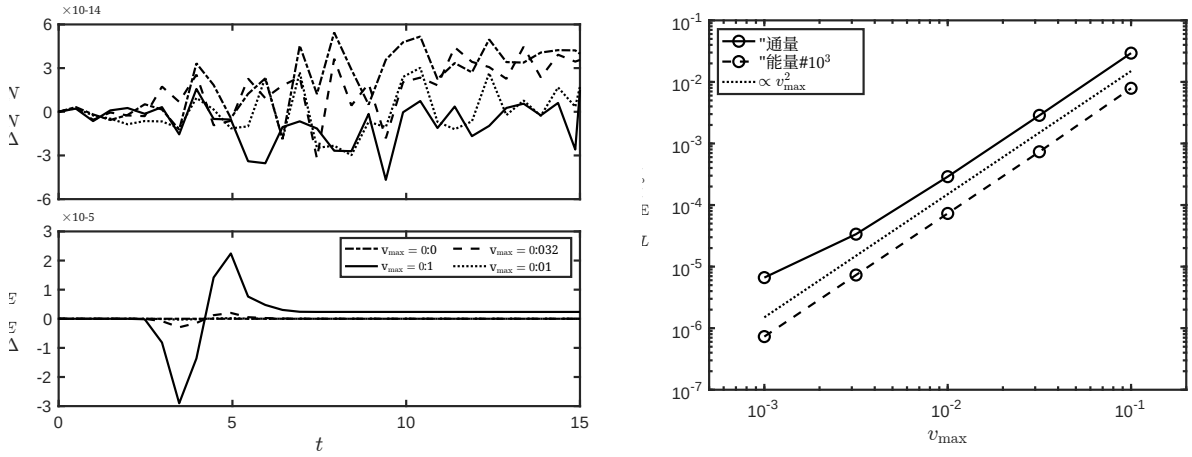


图10. 左侧面板展示了透明涡旋测试中的欧拉参考系粒子数和能量守恒性。左上面板显示欧拉参考系粒子数相对于 $t = 15$ 处对应值的相对变化量随时间的变化（详情见正文），左下面板则显示欧拉参考系粒子能量相对于 $t = 15$ 处对应值的相对变化量随时间的变化。在这两个面板中，绘制了不同 $v_{\max}$值的模型结果：0.0（点划线）、0.1（实线）、0.032（虚线）和0.01（点线）。右侧面板绘制了粒子通量在外边界处的 L^2 误差范数（实线带圆圈），以及欧拉坐标系能量的相对变化量（虚线带符号），两者均随 $v_{\max}$ 变化。（为便于绘图，能量变化量乘以因子 10^3，使数值与实线对应的数值相近。）点状参考线与 $v_{\max}^2$成正比。

也就是说，初始剖面沿 x^1 方向以（单位）光速传播。为研究自适应网格细化对辐射矩演化的影响，我们在 x^1 方向上将背景质量密度初始化为顶帽剖面。网格的配置用于追踪密度间断的演化，不受辐射场影响。模拟运行至 $t = L/(0.1\ c) \approx 3.34 \times 10^{-8}$ s，对应于密度剖面完整穿过计算域一次、辐射剖面穿过十次。

图 11 对不同的自适应网格细化和均匀网格（UG）配置下演化的波形进行了定量分析。对于均匀网格（UG），粗网格和细网格模拟采用的有限体积分辨率分别为 $\Delta x^1 = L/256 \approx 3.91 \times 10^{-1}$ 厘米和$\Delta x^1 = L/512 \approx 1.95 \times 10^{-1}$ 厘米。对于自适应网格细化配置，我们将最粗细化层级设为与粗网格 UG 配置相同，并使每个更高的细化层级将分辨率提高两倍。间断伽辽金方法采用线性多项式，因此单元宽度是有限体积网格单元宽度的两倍。我们通过考察每个时间步长欧拉数密度的空间傅里叶变换的前几个分量，确定波形相对于预期解的相对漂移、振幅变化和相位变化：

$$F_k(t) = \int_{D_{x^1}} [\mathcal{N}(\boldsymbol{x}, t) - 0.5] \exp\left[-2\pi i k (x^1 - t)\right] dx^1. \tag{157}$$

零阶分量的模（$k = 0$）量化了解相对于其初始偏移的漂移，而第一分量的模和辐角（$k = 1$）则分别用于量化相对于平流后的初始剖面的振幅和相位变化。在所有情况下，我们发现代码都能够使辐射剖面平流通过网格细化跃迁处。采用两个细化层级的一维和三维模拟结果相当，但需注意，解的精度受限于与最粗自适应网格细化层级分辨率相同的均匀网格。增加细化层级数会略微降低解的整体精度，我们认为这是由于粗细网格边界处需要进行更多插值，也可能是因为未对粗细网格边界处演化的辐射矩的空间通量应用通量修正（例如，参见M. J. Berger 和 P. Colella，1989年，第 3 节）。

6. 使用表格化微观物理的理想化测试结果

本节将展示 thornado 中实现的中微子输运算法的应用结果，这些算法使用了 WeakLib 表格化微观物理。

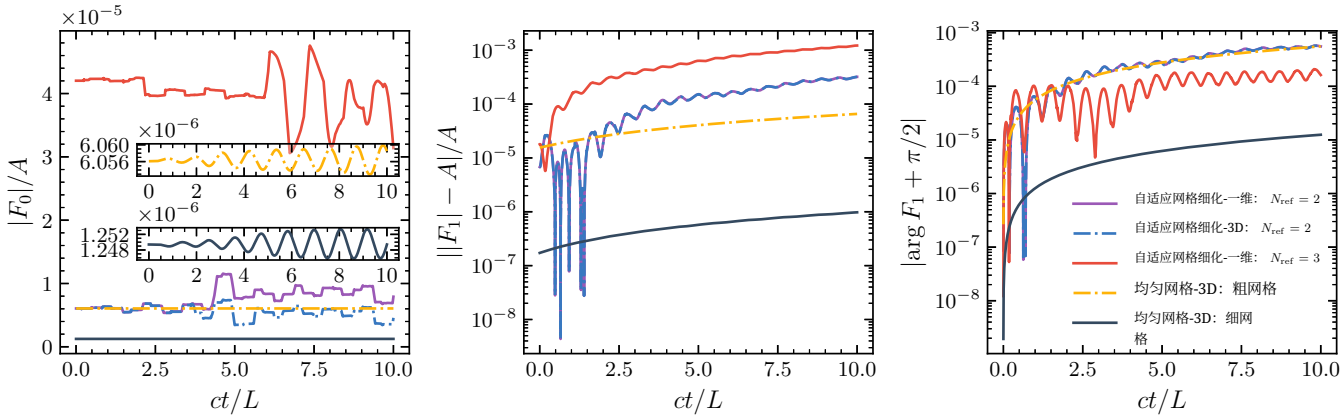


图 11. 采用自适应网格细化的流动正弦波测试结果。每个面板分别显示波相对于预期解的漂移（左）、振幅变化（中）和相位变化（右）。结果展示了波的空间傅里叶变换前几个分量的模和辐角 [参见方程（157）]，并以初始振幅（A）和相位为基准进行缩放。将三种自适应网格细化模拟与均匀网格进行比较：两层细化（$N_{\rm ref}=2$）的一维（紫色实线）和三维（蓝色点划线）模拟，以及三层细化（$N_{\rm ref}=3$）的一维模拟（红色实线）；均匀网格分别与最粗层级（黄色点划线）和第二细化层级（深灰色实线）相匹配（对于 $N_{\rm ref}=2$ 情形，最大细化层级）。左图中的插图放大显示了两种均匀网格模拟的漂移变化。

6.1. 弛豫问题

我们首先介绍 M. P. Laiu 等人(2021年提出的弛豫问题的一种变体，该变体针对 $\mathcal{O}(v)$ 模型进行了修改，并纳入全部六种中微子（电子、μ子和τ子中微子及其反中微子）。此测试求解方程（56）所给出的空间均匀问题（子问题 3），并考虑初始时不与物质处于平衡状态的中微子。对于初始物质构型，我们设定 $\{\rho,T,Y_{\rm e}\}=\{10^{12}$ 克每立方厘米$^{-3}$，7.6 兆电子伏特 $0.135\}$，对应于坍缩恒星核心中半径约为 40 千米、反弹后约 100 毫秒时的条件（M. Liebendörfer 等人 2005年），并设定 $\boldsymbol{v}=(0.1,0,0)^{\intercal}$。所有中微子种类的初始分布均设为相同，

$$f_0(\varepsilon,\mu)=0.99\times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\sigma_\varepsilon}\right)^2\right]\times H(\mu-\mu_0), \tag{158}$$

其中 $\varepsilon_0=2\,T,\sigma_\varepsilon=10$ 兆电子伏特，H 是海维赛德阶跃函数，且 $\mu_0=0$。随后，我们将初始共动系矩设为

$$\{\mathcal{D},\mathcal{I}^1\}(\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f_0(\varepsilon,\mu)\{1,\mu\}d\mu \tag{159}$$

和 $\mathcal{I}^2=\mathcal{I}^3=0$。这一初始分布在能量上呈高斯分布，在角度上呈各向异性，与平衡费米–狄拉克分布相去甚远。能量域 $D_\varepsilon=[0,300]$ 兆电子伏特被划分为 16 个线性单元，并采用几何递增网格，$\Delta\varepsilon_{\mathfrak{e}+1}/\Delta\varepsilon_{\mathfrak{e}}=1.266$，其中 $\Delta\varepsilon_1=1.875$ 兆电子伏特（表 2中的网格 C）。方程组采用后向欧拉法积分；本节所有测试均设定 外层容差 $=$ 内层容差 $=10^{-8}$。

图12展示了使用清单1中的嵌套不动点算法得到的结果，其中 M 外层 $=$ M 内层 $=_2$。模拟运行至 $t=100$ ms，初始时间步长为 $\Delta t=10^{-4}$ ms，每个时间步长按 1.04 倍递增，直至达到 $\Delta t=10$ ms 的最大值。左图展示了电子中微子、反中微子以及缪子中微子趋近平衡的过程。图中省略了缪子反中微子以及 τ子中微子和反中微子的演化，但需要指出，缪子中微子与 τ子中微子的演化相同，缪子反中微子与 τ子反中微子的演化也相同，且它们的演化都与缪子中微子的演化非常接近。最终，所有物种都达到稳态，此时分布由局域费米–狄拉克分布给出。电子中微子最先达到平衡，约在 $t=0.1$ ms，随后是电子反中微子，最后是缪子中微子，约在 $t=4$ms。这种先后顺序符合预期，因为不同中微子种类与物质的耦合强度不同。图12右上图展示了电子丰度 $\Delta Y_{\rm e}=Y_{\rm e}(t)-Y_{\rm e}(t=0)$、中微子轻子丰度 $\Delta Y_\nu=Y_\nu(t)-Y_\nu(t=0)$（其中 $Y_\nu=m_{\rm B}N_\nu/\rho$）以及总轻子丰度随时间的变化。类似地，图12右下图展示了比内能、动能（$\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2$）、欧拉中微子能量（$E_\nu/\rho$）和总能量随时间的变化。图中显示了弛豫过程中流体与中微子之间的轻子与能量交换，并表明总量相对保持恒定。对于这次模拟，总轻子数和

能量的相对变化量均约为 10^{-6}。由于物质更新是通过强制满足总轻子数、动量和能量守恒来实现的，因此它们的相对变化对求解器容差十分敏感。

接下来，我们重复上述模拟，但在整个过程中固定时间步长，并展示采用不同时间步长的模拟结果：$\Delta t \in \{10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1\}$ 毫秒。再次令M 外层 = M 内层 = 2。我们研究改变时间步长对算法收敛性质的影响，即每个时间步长的迭代次数以及最终稳态解。图13 绘制了外层迭代次数（上图）以及每个时间步长中每次外层迭代的平均内层迭代次数（下图）随时间的变化。我们观察到，外层迭代次数随时间步长增大而有所增加：当 $\Delta t = 10^{-3}$ 毫秒时，外层迭代次数最多为5；而当 $\Delta t = 1$ 毫秒时，则为10。当 $\Delta t \leq 0.1$ 毫秒时，内层迭代的平均次数低于10；而当 $\Delta t = 1$ 毫秒时，最多为27。我们发现，尽管由于时间步长不同，各模拟经历了不同（但相似）的演化轨迹，它们最终都达到相同的稳态（在 $\sim 10^{-6}$ 内的 Y_e，T和均方根能量方面）。由此我们得出结论，该算法对步长具有稳健性。

最后，我们研究了改变安德森加速记忆参数 M 外层和 M 内层对嵌套不动点迭代算法收敛性质的影响。我们令 $\Delta t = 0.1$ 毫秒，运行至 $t = 10$ 毫秒，并分别改变外层和内层记忆参数。图 14 的顶部面板显示了不同 M 外层和 M 内层 $= 5$下，每个时间步的外层迭代次数随时间的变化。与皮卡德迭代（M 外层=1）相比，将 M 外层设为 $= 2$ 或 3 会显著影响早期的迭代次数。将 M 外层从 2 增加到 3 会进一步减少迭代次数，但从 1 增加到 2 时的收益最大。对于每次模拟（从 $t = 0$ 到 $t = 10$ 毫秒），M 外层分别为 $= 1$、2 和 3 时，外层迭代总次数为 1662、556 和 384。进一步增加 M 外层并不会减少外层迭代次数，其中一个原因是，对于这个问题，外循环中求解的流体系统仅包含三个未知量。中间面板显示了 M 外层为 $= 2$时，每个时间步的内层迭代总次数随时间的变化。同样地，从皮卡德迭代（M 内层 $= 1$）变为 M 内层 $= 2$时，迭代次数的减少幅度最大。在这种情况下，对于每次模拟，M 内层为 $= 1$、2 和 3 时，内层迭代总次数分别为 4314、3459 和 3183。将 M 外层增加到 3 确实会减少内层迭代总次数。在这种情况下，M 内层为 $= 1$、2 和 3 时，内层迭代总次数分别为 3519、2739 和 2485。对于 M 外层为 $= 2$ 或 3 的情况，进一步增加 M 内层不会减少内层迭代总次数。这些观察结果与 M. P. Laiu 等人（2021）的结论一致。

6.2. 轻子数减少问题

接下来，我们考虑 M. P. Laiu 等人（2021）提出的去轻子化问题，并将其扩展到包含六种中微子。我们考虑空间域 $D_{\boldsymbol{x}} = [0, 512]$ 千米，将其划分为 256 个均匀单元；能量域为 $D_\varepsilon = [0, 300]$ 兆电子伏特，采用与弛豫问题相同的方式，使用表 2 中的网格 C 进行离散。为初始化物质量，我们采用 M. Liebendörfer 等人（2005）给出的质量密度、温度和电子丰度剖面；这些剖面由 VERTEX 代码使用 S. E. Woosley 和 T. A. Weaver（1995）的 $15\,M_\odot$ 前身星模型，在核心反弹后 100 毫秒时获得。我们将初始速度设为零，并在求解过程中保持不变，具体做法是将方程（126）右端项的前三个分量设为零，因此只演化比内能和电子丰度。电子中微子和反中微子的初始化方式如 M. P. Laiu 等人（2021）所述，采用均匀球解的元素（例如 J. M. Smit 等人，1997年）。μ子和 τ 子中微子及反中微子的零阶矩和一阶矩初始化为 $\mathcal{D} = 1.49 \times 10^{-154}$ 和 $\mathcal{I} = 0$。我们使用线性单元（$k = 1$），并采用 Butcher 表见方程（92）的 PD-ARS IMEX 格式对方程组进行积分。令 M outer $=$ M inner $= 2$，将求解器容差设为 tol outer $=$ tol inner $= 10^{-8}$，并演化至 $t = 100$毫秒，时间步长为 $\Delta t = 10^{-3}$ 毫秒。

图 15 展示了轻子数减少问题的演化概况。高质量密度下产生的电子型中微子被输运出核心，导致电子丰度逐渐降低；这就是去轻子化（左侧面板）。中间上方面板显示了外层迭代次数随质量密度和时间的变化。在 $\rho = 10^{14}$ g cm^{-3}附近，早期出现了外层迭代的热点，收敛需要六次外层迭代。除此之外，需要两到四次迭代；通常质量密度越高，所需迭代次数越多。中间下方面板绘出了外层迭代次数的时间平均值（对 $t = 0$ 至 $t = 100$ ms 的数据取平均）随质量密度的变化。与中间面板类似，右侧面板显示了每次外层迭代的内层迭代平均次数随质量密度和时间的变化。由于中微子平均自由程随密度升高而减小，且系统变得愈发刚性，内层迭代次数随质量密度稳步增加（中心处略有下降除外）：在$\rho \in [10^8, 10^{10}]$ g cm^{-3}时平均约为一次，在达到 $\rho = 10^{12}$ g cm^{-3}之前低于两次，而在 $\rho \geq 10^{14}$ g cm^{-3}时超过十次。在高密度下，内层迭代次数会有一些波动（± 少量）；而在较低密度下，迭代次数保持不变，或随时间略有下降。此处观察到的迭代次数在定性上与相关报告一致

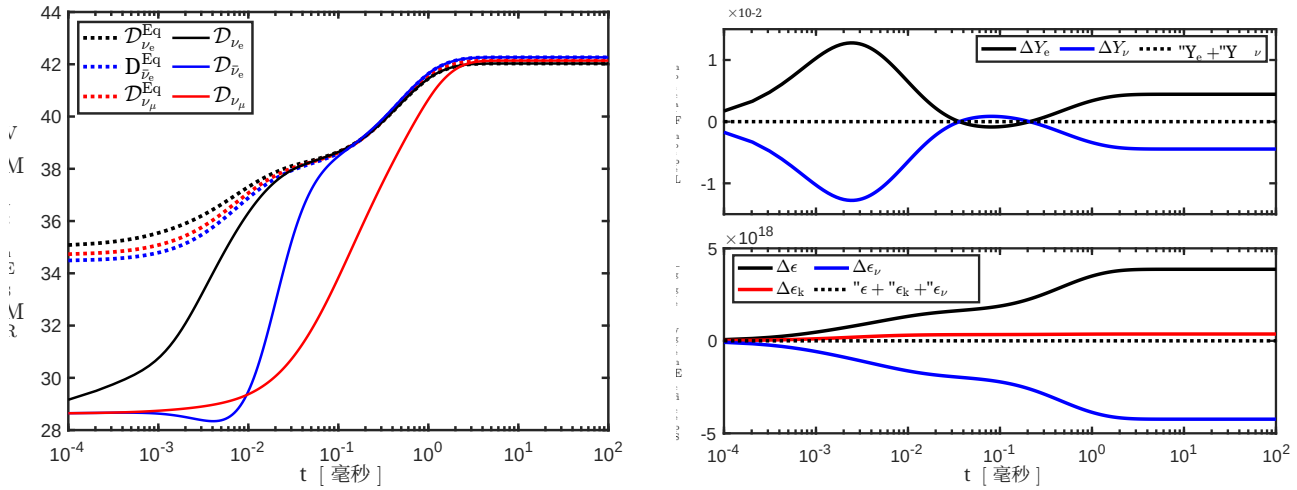


图 12. 弛豫问题的结果。左图绘制了电子中微子（黑色实线）、电子反中微子（蓝色实线）和缪子中微子（红色实线）的均方根能量随时间的变化；均方根能量由方程（154）定义。黑色、蓝色和红色点线分别表示利用对应平衡分布计算出的均方根能量。右上图显示电子丰度（黑色实线）、中微子轻子丰度（蓝色实线）和总轻子分数（黑色点线）随时间的变化量。右下图显示比内能（黑色实线）、比动能（红色实线）、比欧拉中微子能（蓝色实线）和总比能（黑色点线）随时间的变化量。

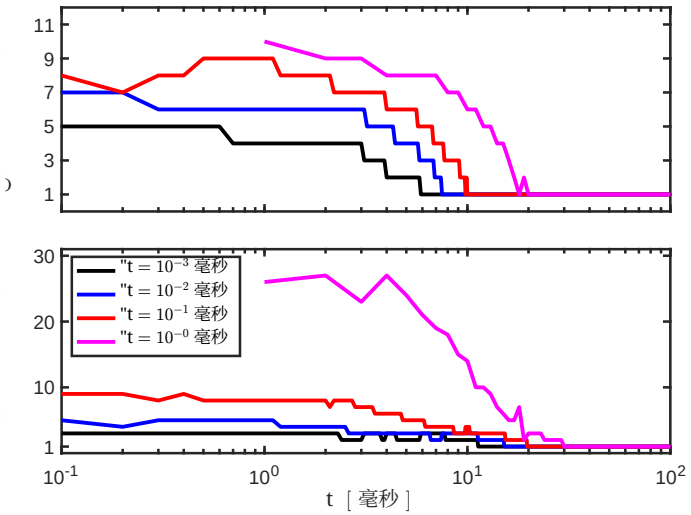


图 13. 采用不同时间步长 Δt 求解弛豫问题得到的结果。上图显示每个时间步长的外层迭代次数随时间的变化。下图显示每个时间步长中每次外层迭代的平均内层迭代次数随时间的变化。图中给出了 $\Delta t = 10^{-3}$ 毫秒（黑色）、 10^{-2} 毫秒（蓝色）、0.1 毫秒（红色）和 1 毫秒（洋红色）的结果。

嵌套 AA 算法的相关报告见 M. P. Laiu 等人 （2021年，参见其图 15），尽管我们采用了扩展不透明度集合、六种中微子（而非两种），且时间步长约大一倍，即 $\Delta t = 10^{-3}$ ms。

图16 概述了系统演化100 毫秒后（此时系统已达到准稳态），中微子均方根能量和通量因子随质量密度的变化情况。由于核心持续去轻子化，中微子量在较长时间尺度上演化。高密度下，电子中微子处于简并状态，其均方根能量超过100 兆电子伏特。核心中的电子反中微子和重味（即 μ 子和 τ 子）中微子具有较低且相近的均方根能量。对于所有物种，均方根能量在较低密度下随质量密度降低；随着中微子与物质脱耦，其能量趋于渐近值。渐近均方根能量约为20 兆电子伏特（对应 μ 子和 τ 子中微子及反中微子），14。8 兆电子伏特（对应电子反中微子），以及10。5 兆电子伏特

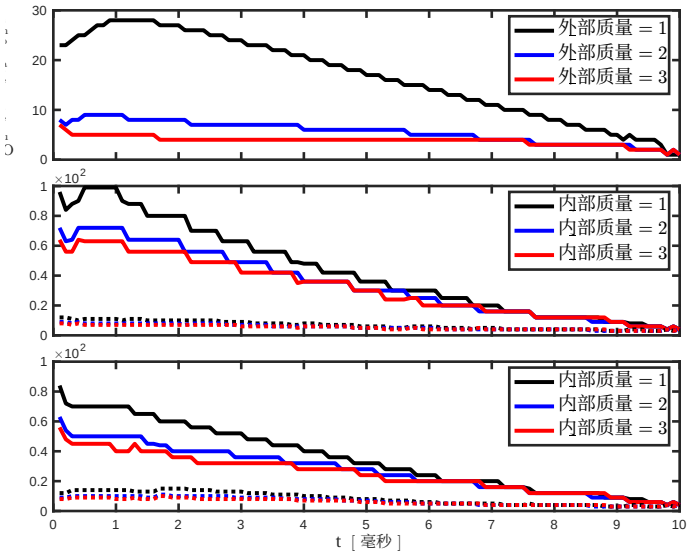


图 14. 针对 $\Delta t = 0.1$ 毫秒，运行不同 M 外层和 M 内层取值下的弛豫问题所得的结果。顶部面板显示了 M 内层为 $= 5$、M 外层分别为 $= 1$（黑色）、2（蓝色）和 3（红色）时，每个时间步的外层迭代次数随时间的变化。中间面板显示了 M 外层为 $= 2$、M 内层分别为 $= 1$（黑色）、2（蓝色）和 3（红色）时，每个时间步的内层迭代总次数（实线）和平均次数（虚线）随时间的变化。底部面板显示了与中间面板相同的量，但对应于 M 外层为 $= 3$ 时获得的结果。

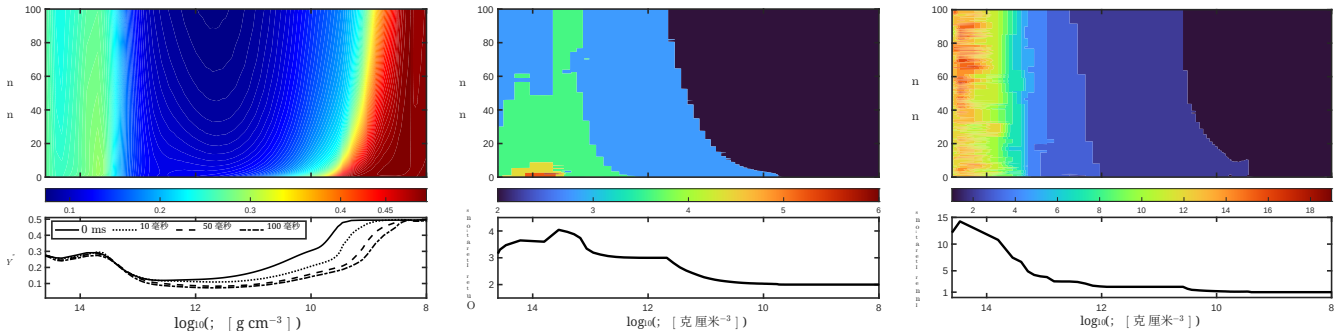


图 15. 去轻子化问题的结果。顶行的色彩图展示了 $\log_{10}(\rho)$-t 平面上的电子丰度（左）、外层迭代次数（中）以及每次外层迭代的内层迭代次数平均值（右）。底行的折线图展示了选定时刻的电子丰度（左）、外层迭代次数的时间平均值（中），以及每次外层迭代的内层迭代次数平均值的时间平均值（右）随 $\log_{10}(\rho)$ 的变化。

（对应电子中微子）。这种排序是因为 μ 子和 τ 子中微子在更深层、密度和温度更高的区域脱耦，而电子反中微子随后脱耦，电子中微子则在更外层脱耦。中微子与物质的脱耦也体现在通量因子上：在最高密度处，通量因子基本为零，此时中微子与物质处于平衡，其分布函数（近乎）各向同性。中微子沿径向传播并与物质脱耦，进而进入自由流状态时，其角分布会呈现前向峰化，导致通量因子趋近于 1。对于 μ 子和 τ 子中微子，这种转变发生在更深处（质量密度更高处），其次是电子反中微子和电子中微子。由于我们没有纳入任何能够区分 μ 子和 τ 子中微子的弱相互作用道（参见R. Bollig 等，2017年），我们发现 μ 子和 τ 子中微子的均方根能量和通量因子完全相同，μ 子和 τ 子反中微子也是如此。这是在演化六种不同中微子种类时进行的一项良好一致性检验。

在图 17中，我们绘出了 `thornado`中实现的算法在轻子数减少问题中的总轻子数和能量守恒特性。根据方程（27）和（31），对于静态背景，该模型中的总轻子数和能量严格守恒。然而，这些量的守恒性对中微子—物质求解器算法的容差十分敏感；对中微子矩施加的限制器也会影响能量守恒，而谱再分布

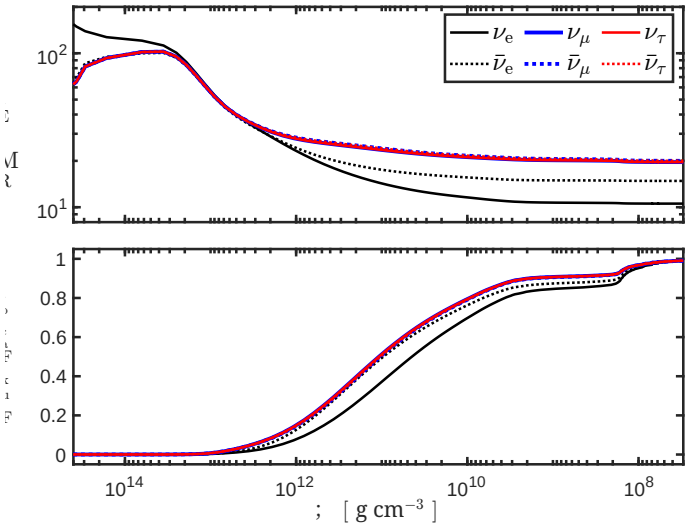


图 16. 轻子数减少问题演化 100 毫秒后的中微子均方根能量（上图，如方程（154）所定义）和能量平均通量因子（下图）随质量密度的变化。每幅图中均绘出了全部六种中微子的数值：ν_e（黑色实线）、$\bar{\nu}_e$（黑色点线）、ν_μ（蓝色实线）、$\bar{\nu}_\mu$（蓝色点线）、ν_τ（红色实线）和 $\bar{\nu}_\tau$（红色点线）。

算法（见第 3.3 节）旨在对此进行修正。上图显示，整个模拟过程中流体轻子数持续下降（黑线）。中微子轻子数在早期略有增加，随后随时间缓慢下降（蓝线）。流体轻子数的减少主要由穿过外边界的中微子轻子数通量补偿（红线）。下图所示的能量分量演化轨迹与相应轻子数分量的轨迹非常相似，但中微子能量初期骤增约 2.3 B（蓝线），并由流体能量相应下降（黑线）予以平衡。μ子和 τ子中微子及反中微子初始设为零，并在模拟开始后立即通过成对过程（例如正负电子湮灭和核子-核子轫致辐射）产生。上图未显示这一动力学过程，因为对产生不会影响总轻子数。总轻子数和能量（黑色虚线）在整个过程中都相对稳定，相对变化量约为。

7. 核心坍缩超新星模拟的应用

本节将 `thornado` 中实现的中微子输运算法应用于球对称和轴对称的核心坍缩超新星建模。这些模型与自引力流体流动态耦合，并按照第 3 节开头所述，使用自适应网格细化，通过 FLASH-X 演化。我们的主要目标是与成熟的核心坍缩超新星模拟代码 CHIMERA 进行代码间比较（S. W. Bruenn 等，2020）。为此，我们采用 15 $M_\odot$ 前身星S. E. Woosley 与 A. Heger （2007）作为坍缩前的初始条件，并使用 SFHo状态方程（A. W. Steiner 等人 2013年）以及表 1 中列出的中微子不透明度进行演化。我们演化全部六种中微子；即，$s \in \{\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau\}$。

空间域 $r \in [0, 8192]$ 千米采用基于网格块的自适应网格进行离散化，最多包含 8 个细化层级（$\ell = 0, \ldots, 7$）。固定网格块尺寸为 64。最粗层级（$\ell = 0$）由两个基础网格块组成，共有 128 个有限体积单元，每个单元的宽度为（Δr）$^{\ell=0} = 64$ 千米。相邻层级之间的细化比为 2，因此最细层级（$\ell = 7$）的分辨率为（Δr）$^{\ell=7} = 2^{-\ell} \times$（$\Delta r$）$^0 = 0.5$ 千米。对于间断伽辽金离散，我们采用线性基函数（多项式次数$k = 1$），使每个间断Galerkin单元跨越两个有限体积单元。因此，最细细化层级上的间断Galerkin空间单元宽 1 千米。坍缩期间，细化策略旨在捕捉中心密度增加时中心质量分布空间尺度的变化。在这一阶段，最大细化层级从 $\ell_{\max} = 3$ 逐步增加至 $\ell_{\max} = 7$；当中心密度满足 $\log_{10}(\rho_c/[\text{g cm}^{-3}]) = 11$、11.5、12 和 12.5 时，便启用额外层级。最内侧 600 千米始终保持最大细化（位于 $\ell_{\max}$）。这确保核心反弹及随后激波传播期间，内核中的有限体积分辨率为 0.5 千米。谱域 $\varepsilon \in [0, 300]$ 兆电子伏特划分为 16 个单元，采用参数对应于表 2 中网格 C 的几何递增网格。中微子演化（包括其与物质的耦合，即子问题 2 和 3）采用 PDARS IMEX 格式推进，而含自引力流体力学（子问题 1）则采用 SSP-RK2格式演化。时间步长由中微子演化的显式部分决定，并受以下条件约束：

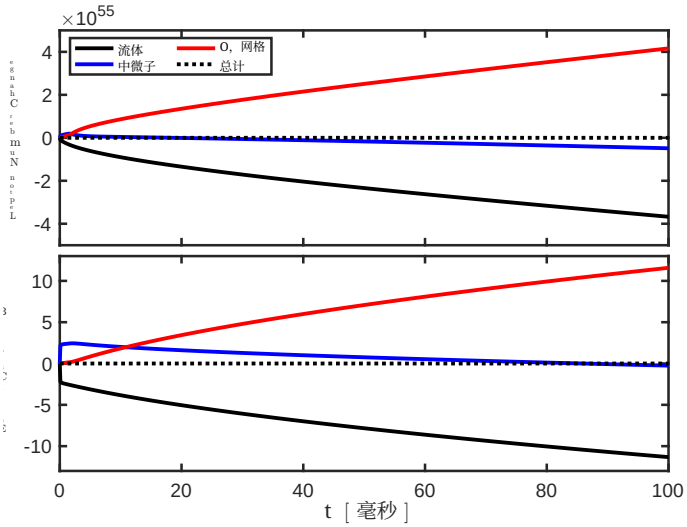


图17。 轻子数减少问题的总轻子数和能量平衡。上图绘制了流体轻子数的变化量（黑色实线）、中微子轻子数的变化量（蓝色）、经外边界流出计算网格的累积中微子轻子数（红色），以及总轻子数的变化量（包括网格外贡献；黑色虚线）。类似地，下图绘制了流体能量的变化量（黑色实线）、中微子能量的变化量（蓝色）、经外边界流出的累积中微子能量（红色），以及总能量的变化量（包括网格外贡献；黑色虚线），均随时间变化。

光速；即，

$$\Delta t = 2^{-\ell_{\max}}\,\Delta t^0, \qquad \text{where} \qquad \Delta t^0 = \frac{1}{2k+1}\frac{(\Delta r)^0}{c}. \tag{160}$$

使用上述自适应网格，时间步长会从坍缩开始时的约 8.9×10^{-6} s 减小到达到最大细化层级后的约5.6×10^{-7} s。除非另有说明，非线性中微子-物质耦合求解器采用 M 外层 $=$、M 内层 $=2$，容差为 tol 外层 $=$、tol 内层 $\equiv$、tol $=10^{-8}$。所有球对称模拟均在 NERSC 的 Perlmutter 上运行，每次运行使用一个计算节点，配备 4 个 GPU 和 40 个 MPI 进程（每个 GPU 10 个进程）。

图18 展示了使用 `thornado`+FLASH-X 进行的中微子辐射流体动力学模拟概况。该模型呈现出文献中报道的球对称核心坍缩模拟的典型特征（例如，M.Liebend¨orfer 等，2005年；E. O'Connor 等，2018年）。坍缩期间，内核中的电子丰度从约0。43 降至0。24。曲线起点向左移动，体现了网格自适应：随着坍缩推进，空间分辨率不断提高。中心电子中微子的均方根能量从 ~ 5 兆电子伏特升至反弹前的100 兆电子伏特以上；随着电子俘获中微子逸出并使核心退轻子化，光度稳步上升。对于该模型，核心反弹发生在 $t_{\rm bounce} \approx 260$毫秒。除非另有说明，以下所有时间均以 $t_{\rm bounce}$为基准。反弹时从内核发出的激波在速度分布中表现为一个间断，最初出现在约 $r = 50$千米处。约160 千米的激波半径在约75 毫秒后达到最大值，随后作为吸积激波缓慢回退（更多详情见下文图20 ）。激波向低密度物质传播时，该物质对中微子透明；激波经过的同时，电子中微子光度急剧上升。向外传播的电子中微子暴在光度和均方根能量分布中均清晰可见，并在 50 毫秒内到达计算域的外边界。在反弹激波和中微子暴的尾流中，$Y_{\rm e}$ 分布在 $r \approx 15$千米处至激波之间形成一个凹谷，这是中微子输运所致。初始中微子暴过后，激波前方的均方根能量和光度分布趋于相对平静，并都呈现逐渐上升的趋势。反弹后，在中微子仍被俘获的内核中，$Y_{\rm e}$ 分布在所绘制的时间区间内基本保持不变。关于该模型的更多细节，以及采用 Levermore 和 Kershaw 双矩闭合方案进行的相应模拟结果，将在下一节介绍；该节重点对比本代码与 CHIMERA。

注释 4. 在这项初步验证研究中，与CHIMERA 的比较仅限于球对称情形。核心坍缩超新星在反弹后的几毫秒内便会发生对流不稳定，因此几乎不可能清晰地分离中微子输运领域的差异，而这些差异可能以不同方式触发对流。CHIMERA 采用逐射线近似，而

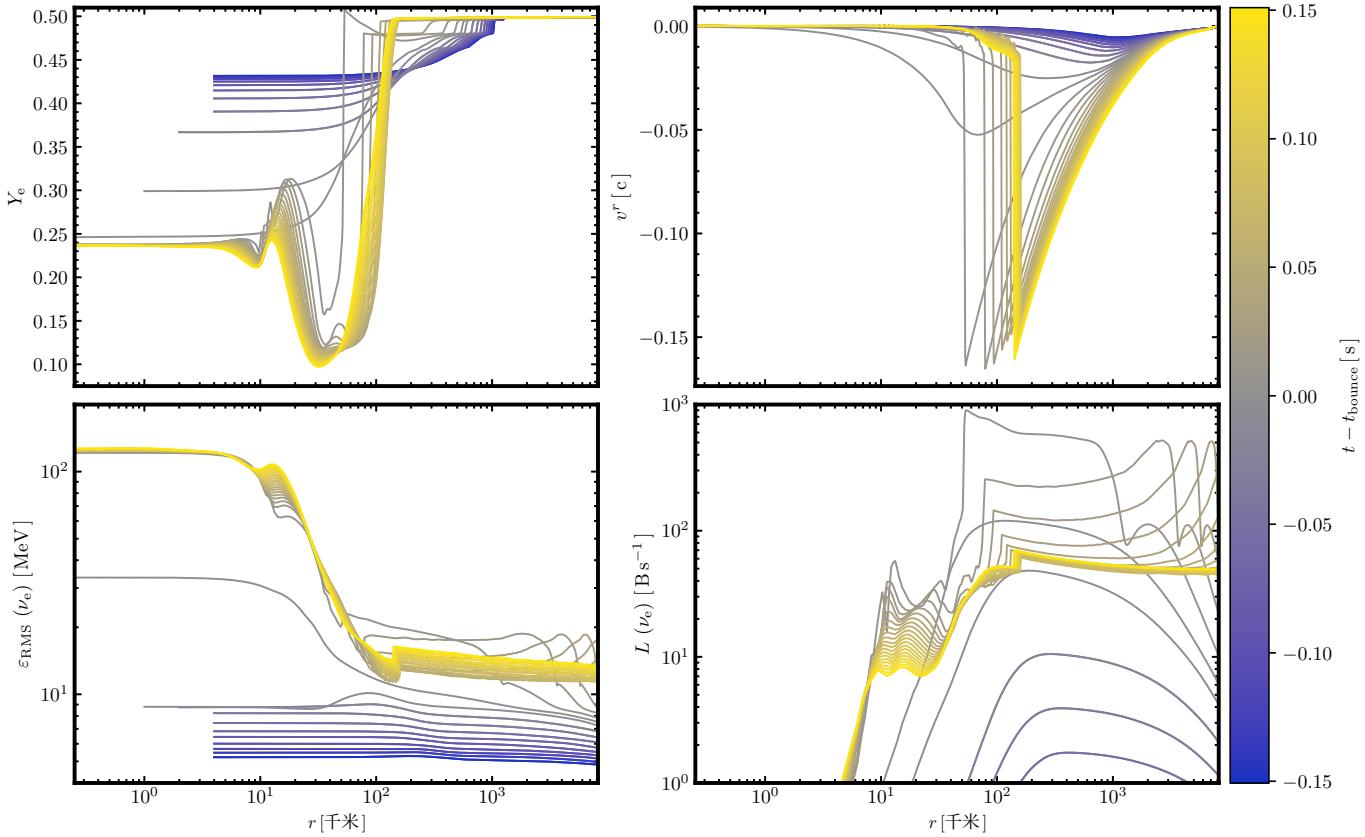


图18。 电子丰度（Y_e；左上）、径向速度（v^r；右上）、电子中微子均方根能量（$\varepsilon_{\rm RMS}(\nu_e)$；左下）和电子中微子光度（$L(\nu_e)$；右下）径向剖面随时间的演化（以颜色表示）。该图展示了核心反弹前后、以核心反弹为中心的 ±150 毫秒时间窗口内的坍缩及反弹后演化。每条曲线对应一个快照，相邻快照间隔 7.5 毫秒。

`thornado`+FLASH-X 求解多维双矩系统，因此非径向流形成后可能呈现不同的行为（*M. A. Skinner et al. 2016*）。这些代码在多维情况下还采用不同的坐标系——CHIMERA 使用球极坐标，而FLASH-X使用柱坐标或笛卡尔坐标；因此，在有限分辨率下，截断误差会以不同方式触发流体不稳定性，导致非线性演化可能出现分歧，而这与输运方案本身无关。关于多维代码比较研究，参见例如*R. M. Cabez´on et al. (2018年); R. Glas et al.(2019年); V.Varma et al.(2021年)*。

7.1. 球对称情况下与 CHIMERA 的比较

用于代码间比较的 CHIMERA 模拟基于该代码的“G 系列”版本。在可能的情况下，CHIMERA 的配置与 thornado+FLASH-X 在物理条件和相空间分辨率方面保持一致，但仍存在一些值得注意的差异，我们将在此说明。CHIMERA 采用移动径向网格，而非自适应网格细化，以解析核心坍缩超新星问题中的关键区域（见 S. W. Bruenn 等，2020，第 4.5 节）。因此，两种代码的空间离散化存在根本差异。此处所述的 CHIMERA 模拟使用 596 个径向网格单元，覆盖与 thornado+FLASH-X 相同的计算域。CHIMERA 网格大致按几何级数间隔布置，起始处的内侧网格单元宽度为 1 千米，同时经过调整，以确保内核（$\rho > 10^{14}$ g cm^{-3}）中约有 40 个网格单元，中微子加热区（10^{10} g cm$^{-3} \lesssim \rho \lesssim 10^{14}$ g cm^{-3}）中约有 100 个网格单元。由此得到的中微子球和原中子星表面附近的空间分辨率与 FLASH-X 网格相当（约 0.5 千米）。

谱域采用有限体积离散，能量网格（16个能量区间）的配置与`thornado`的单元完全一致。CHIMERA的流体动力学采用显式拉格朗日加重映射方案进行演化，并使用分段抛物重构（P. Colella 和 P. R. Woodward，1984年）；中微子输运则采用 S. W. Bruenn (1985年) 提出的全隐式多群通量限制扩散方法。中微子输运方程在逐射线近似下由单个 MPI 进程使用牛顿法局部求解。每次迭代中，都会利用通过线性插值对查表核函数进行数值计算得到的不透明度及其导数，计算中微子零阶矩和电子数密度对应的雅可比矩阵元素

。每次牛顿-拉夫森迭代所对应的线性系统，使用带有有效交替方向隐式法（ADI）类预条件器的双共轭梯度稳定法（BiCGSTAB）克rylov子空间迭代法求解；该预条件器改编自 AGILE-BOLTZRAN（E. F. D'Azevedo 等人，2005年）。物质能量密度方程与迭代求解器解耦，改为以算子分裂方式求解。与thornado不同，CHIMERA 只演化四种中微子种类（$s \in \{\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_{\mu\tau}, \bar{\nu}_{\mu\tau}\}$）。我们还给出了修改后的 CHIMERA 配置（G+）的结果：在该配置中，保留闭合关系（$\mathcal{O}(v/c)$ 中的所有项（S. W. Bruenn 等，2020，第6节）所导致的中微子一阶矩修正会应用于所有位置，而非像基准设置那样，仅在速度超过 $0.01\,c$ 且密度低于 10^{12} g cm^{-3}时应用。

CHIMERA 采用 Lie–Trotter 算子分裂（H. F. Trotter 1959）进行耦合时间步进。在每个计算步中，所有物理算子均按照一个全局时间步长推进；该步长取由数值稳定性（库朗–弗里德里希斯–刘维条件）以及演化物理量允许相对变化的约束所限定的最小值。对于基准 CHIMERA 模型，这使得核心反弹前后的最小时间步长为 $\approx 5 \times 10^{-8}$ s，随后逐渐放宽，到反弹后 $\approx 10^{-6}$ s 时达到 ~ 10 ms，并在此后保持这一水平（图19中的黑色实线）。当隐式中微子输运更新所允许的时间步长超过全局流体动力学时间步长时，CHIMERA 采用超循环策略，将输运求解次数最多减少至原来的十分之一（图 19中的黑色虚线）。因此，尽管 CHIMERA 模拟执行了$\approx 1.5 \times 10^5$ 个全局时间步长，但仅进行了 $\approx 3.6 \times 10^4$ 次中微子输运求解和 $\approx 1.4 \times 10^5$ 次累计牛顿迭代。反弹后，每次输运求解的平均牛顿迭代次数约为 6 次（$\lesssim 30$ ms），之后降至约 4 次（40 ms 后在 5 次到 3 次之间变化）；每次牛顿迭代的平均线性迭代次数则在 3 到 4 次之间。作为比较，图 thornado+FLASH-X 模拟所采用的基准时间步长受光速限定的库朗条件约束，在反弹后演化 150 ms 需要 $\approx 2.7 \times 10^5$ 个时间步长。

由于 CHIMERA的输运基于通量限制扩散，因此其与thornado的双矩方法之间存在一些差异，这源于模型本身的固有区别，因而是意料之中的。我们已验证，在采用与本文相同的状态方程和前身星模型进行绝热坍缩、反弹及激波传播模拟（即不包含中微子输运）时，CHIMERA 和 FLASH-X 的结果高度吻合。为进一步帮助理解中微子输运模拟中的差异，我们还进行了 thornado+FLASH-X 模拟；除基准 Minerbo 闭合外，还采用了 Levermore 和 Kershaw 闭合方案（见附录 A）。在这项比较中，所有模拟均运行至反弹后 150 ms。

图 20 左图展示了坍缩过程中若干中心物理量随中心密度（ρ_c）的变化。不同代码所得的中心 Y_e 以及总轻子分数 Y_l 的演化轨迹吻合良好。这两个量在 $\rho_c \approx 10^{12}$ g cm^{-3}之前数值接近，此时中微子俘获开始。在更高密度下，Y_l 基本保持不变，而 Y_e 则持续下降，因为中微子与物质逐渐达到平衡，直至 $\rho_c \approx 3 \times 10^{13}$ g cm^{-3}。对于 Y_e 和 Y_l，两个 CHIMERA 模型无法区分，而 thornado 模型在不同闭合方案之间存在适度差异。俘获发生后，所有模型中的 Y_l 变化均小于百分之一，范围为 0.274 至 0.276。中心熵的演化差异则更为显著。尽管各轨迹形状相似，CHIMERA 模型达到的中心熵（~ 0.98–0.99）高于 thornado 模型（~ 0.93–0.94）。以往的代码比较研究也报告过这一物理量存在相当或更大的差异（例如，E. O'Connor 2015年；T. Kuroda 等，2016年）。

图 20 的右侧面板展示了原中子星半径（$R_{\rm PNS}$）和激波半径（$R_{\rm Sh}$）随时间的演化。我们将 $R_{\rm PNS}$定义为质量密度等于 10^{11} g cm^{-3}处的半径。所有模型中 $R_{\rm PNS}$ 的演化几乎完全一致，在约 20 ms 时达到约 77 km 的最大值，并在模拟结束时收缩至 55–60 km。激波半径在早期时间也非常接近，但在 ~ 50ms 后开始逐渐分离，同时保持相似的总体轨迹，在演化过程中没有交叉。在 CHIMERA 模型中，CHIMERA G 的激波扩张幅度最大，达到 ~ 170 km 的最大值，并在 75 至 100 ms 之间基本保持不变。CHIMERA G+ 紧随其后，达到 ~ 166 km 的最大值。对于 thornado 模拟，Kershaw闭合产生最大的激波半径（~ 165km），其次是 Levermore 和 Minerbo 模型；二者的变化轨迹非常接近，并在 ~ 160 km 处达到峰值，其中 Levermore 情形略高于 Minerbo。双矩闭合之间的这一排序与 T. Wang 和 A. Burrows（2023年）的报告一致。

图21、22和23 分别比较了反弹后 3、25 和 75 ms 时各项选定流体动力学量和中微子辐射量随半径的变化。在 3 ms 时，激波位于约 $r = 50$km 处，各模拟的速度和质量密度分布高度吻合；这种一致性在 25 ms 和 75 ms 时依然存在。在内核（$r \lesssim 8$ km）内，CHIMERA 模型的电子丰度略高于 thornado+FLASH-X 模型。在更外侧、约$r = 40$ km 处，Y_e 谷值正在形成，此处 thornado+FLASH-X 模型的电子丰度最小值（$Y_e \approx 0.17$）低于 CHIMERA 模型（$Y_e \approx 0.21$）。我们还注意到，激波前方的电子丰度和熵分布存在轻微差异。在激波下方，各代码的电子中微子均方根能量和光度吻合良好，而电子反中微子均方根能量和光度的差异较大。在双矩

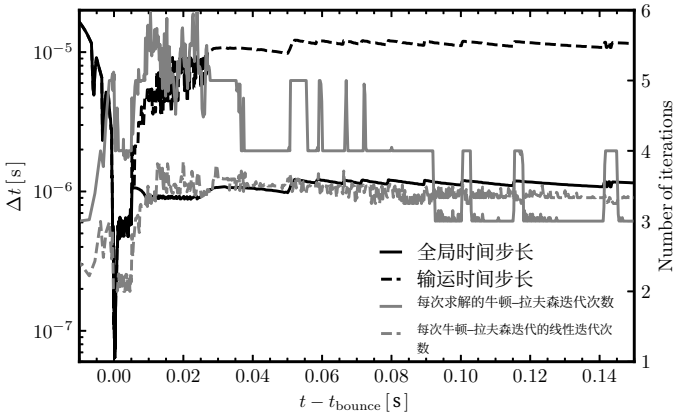


图 19. 基准 CHIMERA G 系列模拟在反弹前不久至反弹后 150 ms 期间的全局时间步长（黑色实线）和输运时间步长（黑色虚线）。图中还显示了每次输运求解的平均牛顿-拉夫森（NR）迭代次数（灰色实线），以及每次 NR 迭代的线性求解器迭代次数（灰色虚线）。

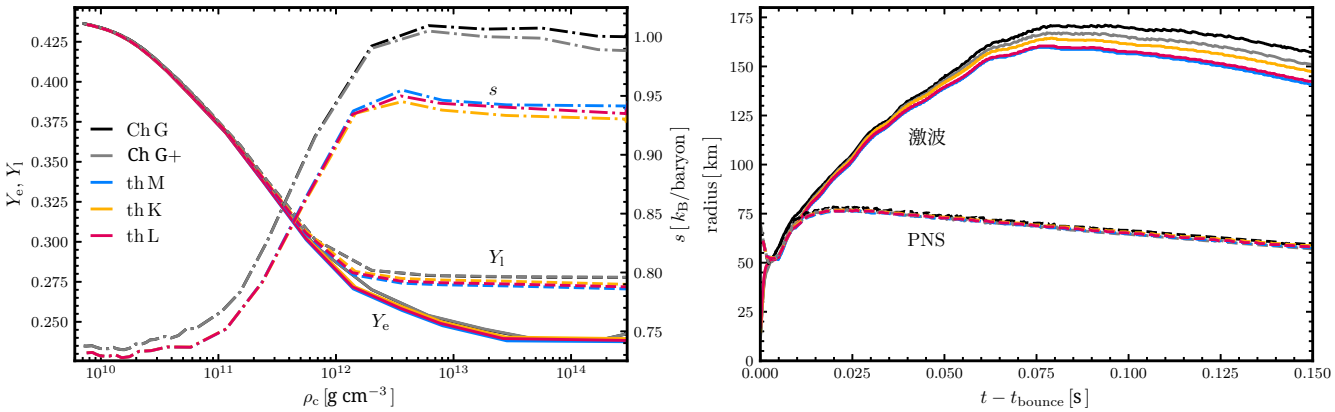


图 20. 核心坍缩期间中心电子丰度（$Y_{\rm e}$；实线）、轻子丰度（$Y_{\rm l}$；虚线）和每重子熵（s；点划线）随中心密度的变化（左图），以及反弹后激波（实线）和原中子星（虚线）半径的演化（右图）。不同颜色的线分别表示基准 CHIMERA G 系列模拟（Ch G；黑色）、采用修正通量限制器的 CHIMERA G 系列模拟（Ch G+；灰色），以及采用不同闭合方案的三组 thornado+FLASH-X 模拟：Minerbo（th M；蓝色）、Kershaw（th K；黄色）和 Levermore（th L；红色）。在左图中，由于各代码的网格结构不同，我们将中心量计算为最内侧 $0.01\,M_\odot$ 范围内的质量平均值。

闭合方案中，thornado+FLASH-X 的结果内部一致。thornado+FLASH-X 模型在约 $r = 20$ km 处的峰值 $\bar{\nu}_{\rm e}$ 均方根能量略高，在 $r = 30$ km 附近的峰值光度则约高出一倍。激波前方中微子辐射量的差异，部分可能源于通量限制扩散与双矩输运在传播电子中微子暴相关扰动时的差异。此外，这些差异也可能与反弹后早期演化的瞬态特性有关，而这可能影响激波上下方的各项量。

在25 毫秒和75 毫秒时，激波分别位于100 千米和160—170 千米附近，各代码中的电子丰度和熵分布进一步趋于收敛。在25 毫秒时，$Y_{\rm e}$ 凹槽底部附近仍存在细微差异，但到75 毫秒时，这些差异基本消失。此时的中微子辐射量也总体上吻合良好。尽管在某些区域可以分辨出均方根能量和光度分布的差异，但它们的整体形状和演化在所有模型之间仍保持一致，剩余差异可能反映了反弹后结构的持续演化。例如，位于10 至 20 千米之间的电子中微子均方根能量峰值，从25 毫秒时约62 兆电子伏特增加到75 毫秒时约80 兆电子伏特。在同一时间段内，激波下方电子反中微子光度的局部峰值从$\sim$ 30 B s^{-1} （1 贝特（B） = 10^{51} 尔格）上升至 $\sim$ 50 B s^{-1}，而激波处的电子中微子光度在轻子数退化爆发后下降，从100—120 B s^{-1} 降至约60 s^{-1}。到75 毫秒时，中微子分布总体上已趋于良好吻合；然而，激波下方 $\nu_{\rm e}$ 光度之间已出现明显差异（见插图）。CHIMERA

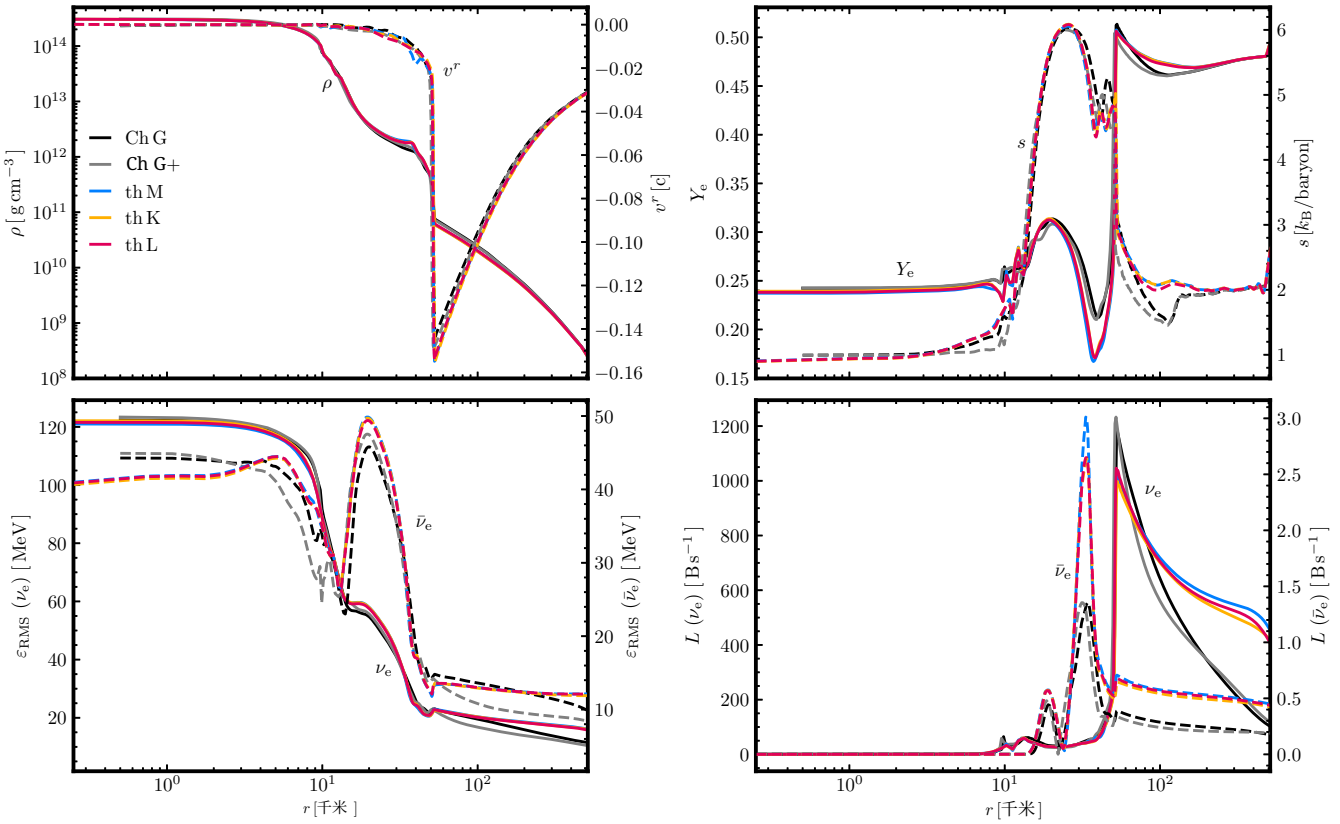


图 21. 核心反弹后 3 毫秒时 CHIMERA 与 thornado+FLASH-X 的径向剖面。图中显示：（左上）质量密度（实线）和径向速度（虚线）；（右上）电子丰度（实线）和每重子熵（虚线）；（左下）电子中微子与电子反中微子均方根能量（分别以实线和虚线表示）；（右下）电子中微子与电子反中微子光度（分别以实线和虚线表示）。

光度低于thornado+FLASH-X，并且模型的光度从低到高的排序，与图20中相应激波半径的排序相反。

图 24 比较了 $r = 500$ 千米处中微子光度和均方根能量随时间的演化。对于所有中微子种类，这些量在 thornado+FLASH-X 模型之间一致。总体而言，CHIMERA 与 thornado+FLASH-X 模型的电子中微子光度吻合得非常好。当爆发经过该半径时，Minerbo 和 Levermore 闭合关系模型的峰值光度约为 550 B s^{-1}（见左上面板中的插图）。Kershaw 和 CHIMERA G 模型达到的峰值略低，为 ~ 500 B s^{-1}，而 CHIMERA G+ 的峰值为 ~ 450 B s^{-1}。thornado+FLASH-X 模型之间的电子中微子均方根能量一致，但与 CHIMERA 的结果存在一定差异。在爆发经过期间，CHIMERA 模型产生的均方根能量峰值较低；而在后续时期，随着原中子星收缩期间谱硬化导致均方根能量逐渐增加，CHIMERA G 模型的数值仍比其他模型高约 1 兆电子伏特。鉴于激波下方的均方根能量吻合良好，这些差异可能源于各自输运方案在激波处实现观测者修正的方式不同。对于电子反中微子，所有模型的光度仍吻合良好，但在原中子星收缩期间，CHIMERA G 模型的均方根能量再次高出约 1 兆电子伏特。对于缪子中微子和反中微子，在原中子星收缩期间，CHIMERA 模型中的光度和均方根能量都略高于 thornado+FLASH-X 模型，其中 CHIMERA G 略高于 CHIMERA G+。在爆发短暂经过期间（持续 ~ 3 毫秒），CHIMERA G 中的峰值 ν_μ 和 $\bar{\nu}_\mu$ 均方根能量明显高于 thornado+FLASH-X，而 CHIMERA G+ 中的相应峰值则明显较低。

7.2. 对求解器参数的敏感性

接下来，在球对称核心坍缩模拟的背景下，我们以往一节采用 Minerbo 闭合关系的基准模型为参照，考察 thornado 中所实现的中微子输运方法的各组成部分和参数对结果的敏感性。图 25 和 26分别展示了与图 20 和 24相同的物理量，

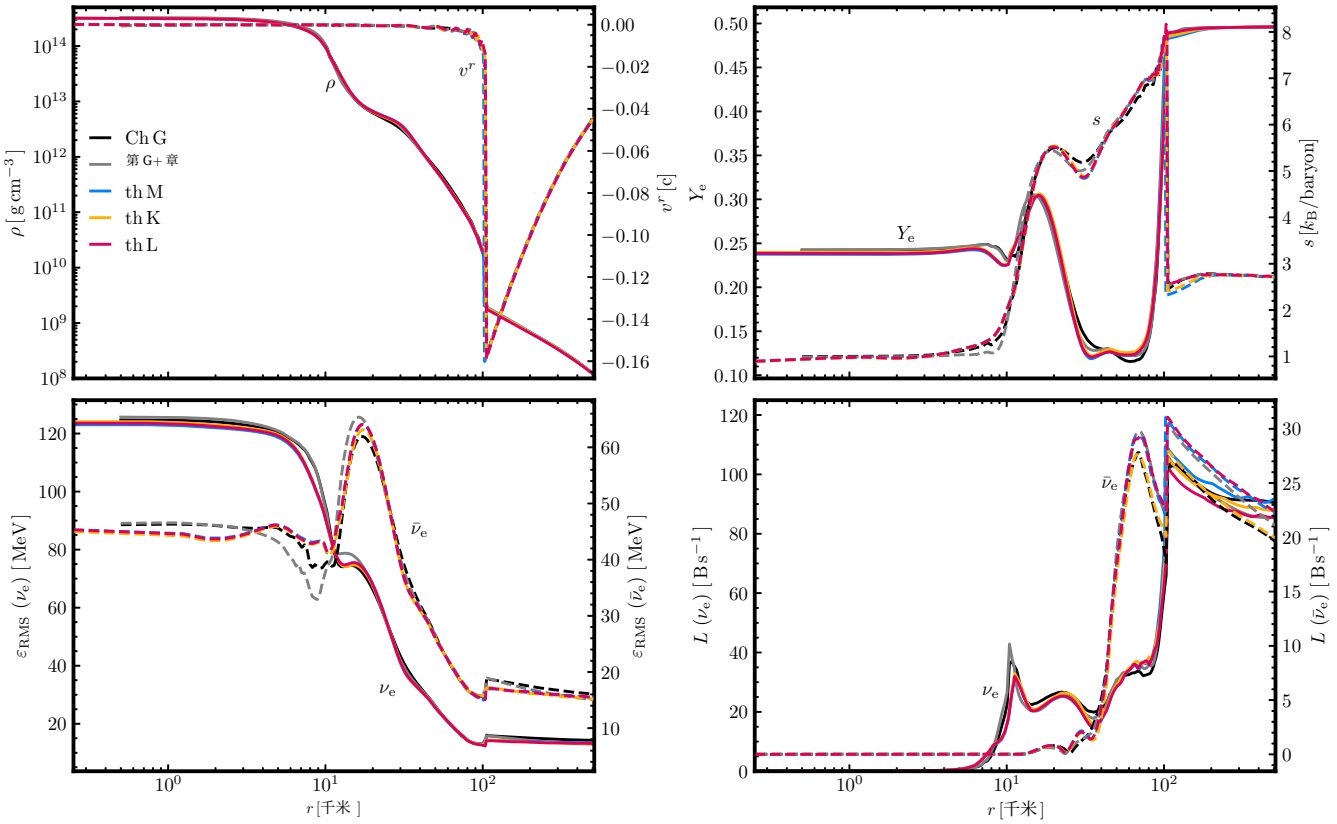


图 22. 核心反弹后 25 毫秒时 CHIMERA 与 thornado+FLASH-X 的径向剖面。图中显示：（左上）质量密度（实线）和径向速度（虚线）；（右上）电子丰度（实线）和每重子熵（虚线）；（左下）电子中微子和电子反中微子的均方根能量（分别以实线和虚线表示）；（右下）电子中微子和电子反中微子的光度（分别以实线和虚线表示）。

结果表明，将非线性求解器容差改变四个数量级，从 10^{-10} 到 10^{-6}，对流体动力学演化几乎没有影响。具体而言，坍缩期间的中心电子丰度、轻子分数和熵，以及反弹后的原中子星和激波半径，均基本保持不变。同样，在这一范围内，所有中微子种类的光度和均方根能量对求解器容差均未表现出可辨别的敏感性。禁用谱再分配算法后，尽管该算法原本会在应用可实现性强制限制器后恢复能量守恒，最显著的影响是在中微子俘获和平衡化期间，中心每重子熵逐渐增加。在这种情况下，中心熵约增加百分之三，从 $\sim 0.95\ k_B$ 每重子$^{-1}$ （$\rho_c = 6 \times 10^{12}$ g cm^{-3}）增加到 $\sim 0.98\ k_B$ 每重子$^{-1}$ （$\rho_c = 3 \times 10^{14}$ g cm^{-3}）。我们还观察到，在反弹后演化期间，缪子中微子和反中微子光度略有降低。我们将中心熵的这一行为归因于：在该阶段，随着电子中微子费米面向更高能量移动，为维持中微子数密度为正而反复应用可实现性强制限制器（例如，A. Mezzacappa & S.W.Bruenn 1993b）。在没有谱再分配的情况下，这些限制器操作实际上向中微子场中加入了能量，而这些能量随后通过平衡化与物质共享。关于缪子中微子光度，考虑到这些物种在更高密度下退耦，可推测在影响重轻子中微子的区域中，可实现性强制限制器会更频繁地触发。启用斜率限制器的模型在反弹前即刻表现出中心电子丰度和轻子分数约百分之三的降低，并且在 $r = 500$ km 处所有物种的均方根能量略有（∼1-2%） R_{Sh} 增加。然而， R_{PNS} 的演化不受影响，与基准模型相比没有可辨别的差异。

图27 展示了非线性求解器容差对内层和外层迭代次数的影响。数据对应于所选时间步长下 PDARS IMEX 格式的第二阶段，内层迭代次数按外层迭代取平均值，采用与图15相同的处理方法。质量密度低于 10^7 g cm^{-3}的区域中，中微子–物质耦合被禁用，因此由于跳过了非线性求解，迭代次数为零。在基准模拟（第二行）中，整个演化过程中内层迭代次数保持在 2 至 4 次之间，而在反弹前，外层迭代次数也在类似范围内变化。反弹时，

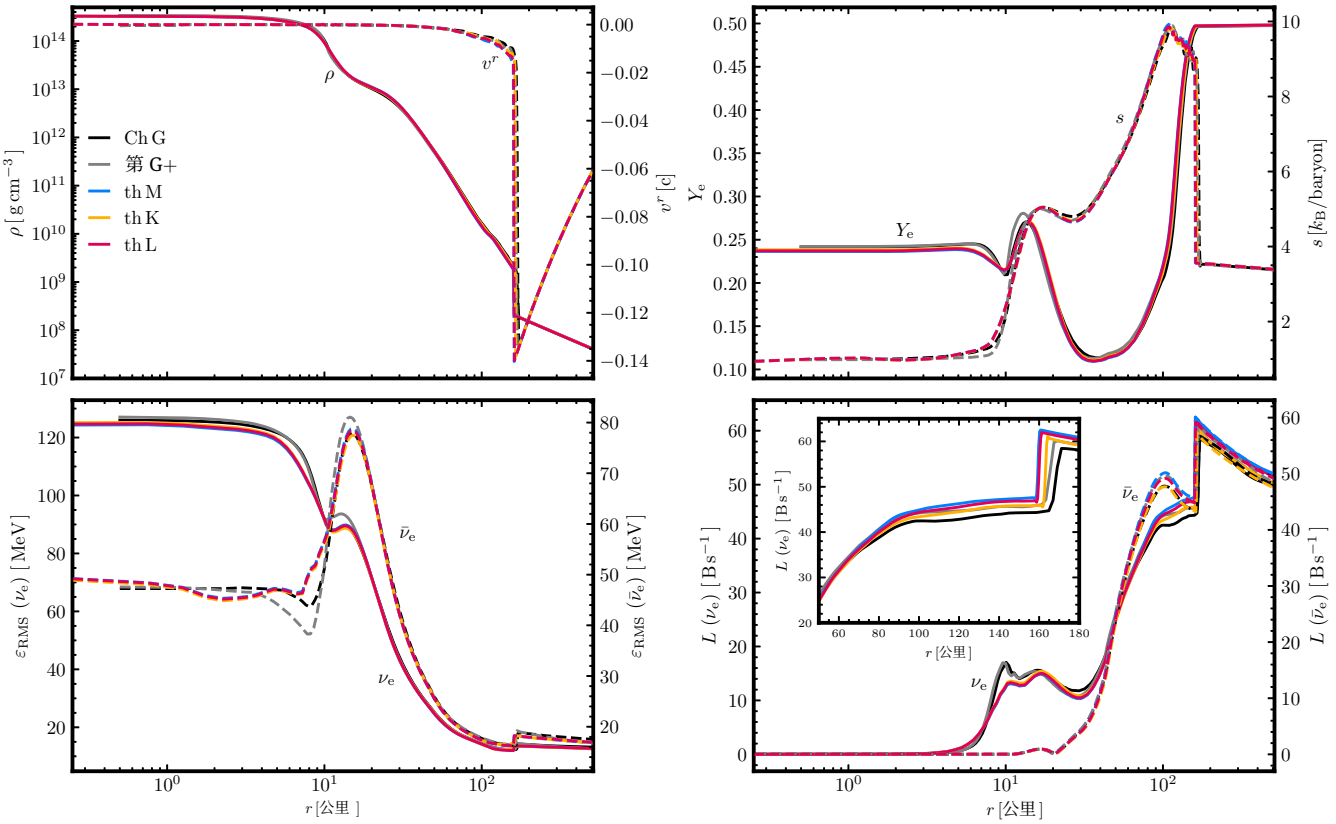


图 23. 核心反弹后 75 毫秒时 CHIMERA 和thornado+FLASH-X 的径向剖面。图中显示：（左上）质量密度（实线）和径向速度（虚线）；（右上）电子丰度（实线）和每重子熵（虚线）；（左下）电子中微子和电子反中微子均方根能量（分别以实线和虚线表示）；以及（右下）电子中微子和电子反中微子光度（分别以实线和虚线表示）。插图展示了激波下方电子中微子光度的放大视图。

密度高于 $10^{14}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ($r \lesssim 10$ km)时，外层迭代次数骤增至约 7 或 8 次；此后则相对稳定地保持在 10 次以下。对于低于 $10^{14}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$的密度，随着密度降低，外层迭代次数逐渐减少：在激波下方不远处，从约 5 次降至 2 或 3 次。随着激波向外扩展至最大范围，给定半径处的迭代次数随时间保持相对恒定。改变求解器容差时，整体迭代行为在定性上保持不变。将容差放宽两个数量级至 tol $= 10^{-6}$ 后，迭代次数略有减少：内层迭代通常为 1 至 2 次，而反弹前外层迭代为 1 至 3 次。反弹后，对于高于 $10^{14}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ 的密度，外层迭代次数增至 4 至 8 次；在激波下方，随着密度降低，迭代次数降至 2 至 3 次。相反，将容差收紧两个数量级至 tol $= 10^{-10}$ 会使迭代次数略有增加。此时，内层迭代通常为 3 至 5 次，而反弹前外层迭代大多为 3 至 4 次。反弹后，对于 $\rho \gtrsim 10^{14}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$，外层迭代次数升至 10 至 13 次；而在激波下方较低密度处，迭代次数则低于 ∼5 。在相同容差下，Anderson 加速求解器的收敛速度始终快于 Picard 迭代方案，尤其是在中微子–物质耦合较强的区域，这体现了加速方法效率的提升。总体而言，迭代热图证实，非线性求解器在很宽的容差范围内均能稳健收敛，且收敛行为基本不受参数变化的影响。

由于非线性中微子–物质耦合是算法中计算开销最大的部分，迭代次数的变化会明显反映在总体运行时间上。将从坍缩开始到反弹后 150ms 测得的总运行时间，按容差为 $= 10^{-8}$ 的基准 Minerbo 模型运行时间归一化后，容差为 $= 10^{-6}$ 的模拟、容差为 $= 10^{-8}$ 的皮卡迭代模拟以及容差为 $= 10^{-10}$ 的模拟，其归一化运行时间分别为 0.81 、1.29 和 1.27。对于相同的容差，与未加速的皮卡迭代相比，安德森加速可使总体运行时间减少约 22%。

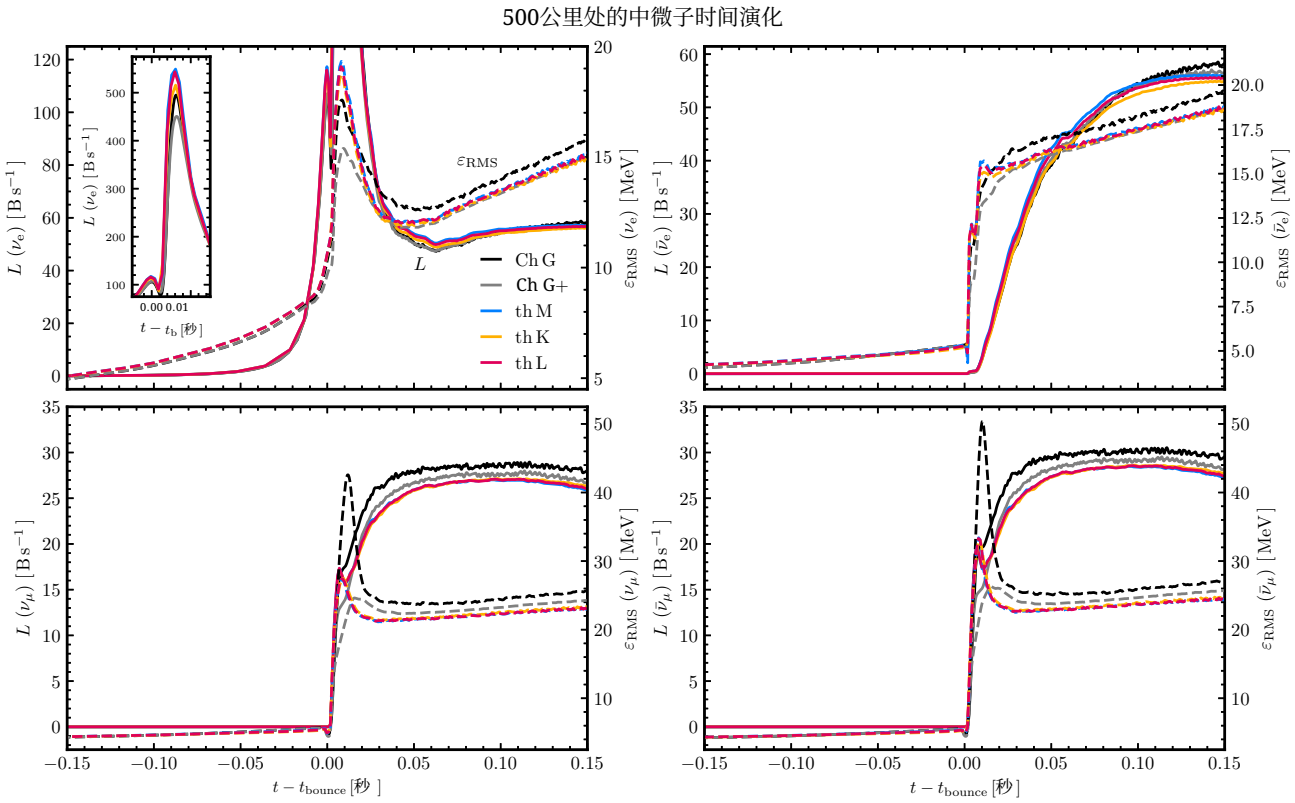


图 24。 CHIMERA 与 thornado+FLASH-X 中选定中微子量的时间演化，采样位置为 $r = 500$ 千米。每个面板显示光度（实线）和均方根能量（虚线）随反弹后时间的变化。结果分别展示了电子中微子（ν_e；左上）、电子反中微子（$\bar{\nu}_e$；右上）、缪子中微子（ν_μ；左下）和缪子反中微子（$\bar{\nu}_\mu$；右下）。

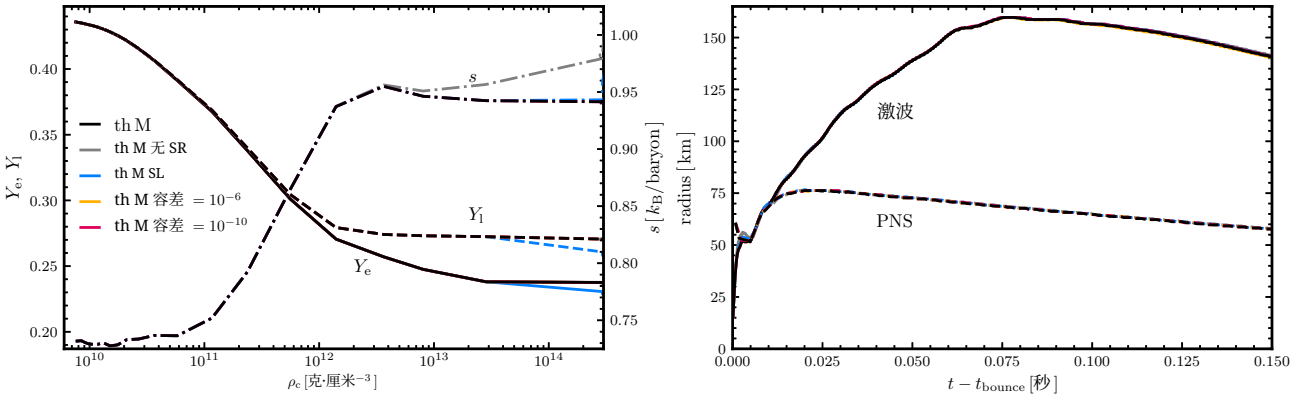


图 25。 核心电子丰度（Y_e；实线）、轻子丰度（Y_l；虚线）和每重子熵（s；点划线）随核心坍缩期间中心密度的变化（左面板），以及反弹后演化过程中激波（实线）和原中子星（虚线）半径的变化（右面板）。线条颜色对应以下 `thornado`+FLASH-X 算例：容差为 `tol` $= 10^{-8}$ 的基准 Minerbo 算例（Th M；黑色）；不包含 M. P. Laiu 等人 (2025) 所述谱再分布的模型（Th M no SR；灰色）；使用第 3.3 节所述斜率限制器的模型（$\beta_{\mathrm{TVD}} = 1.75$）（th M SL；蓝色）；非线性求解器容差增大的模型：`tol` $= 10^{-6}$（th M tol=10^{-6}；黄色）；以及容差减小的模型：`tol` $= 10^{-10}$（th M tol=10^{-10}；红色）。

7.3. 轴对称模拟示例

本节最后演示 thornado+FLASH-X 在多维核心坍缩超新星模拟中的应用，该模拟从坍缩开始演化至反弹后 150 ms。本节开头介绍的基准 Minerbo 闭合模型在此采用柱坐标系下的轴对称设置进行演化，空间域为 $R \in [0, 5120]$ km，且

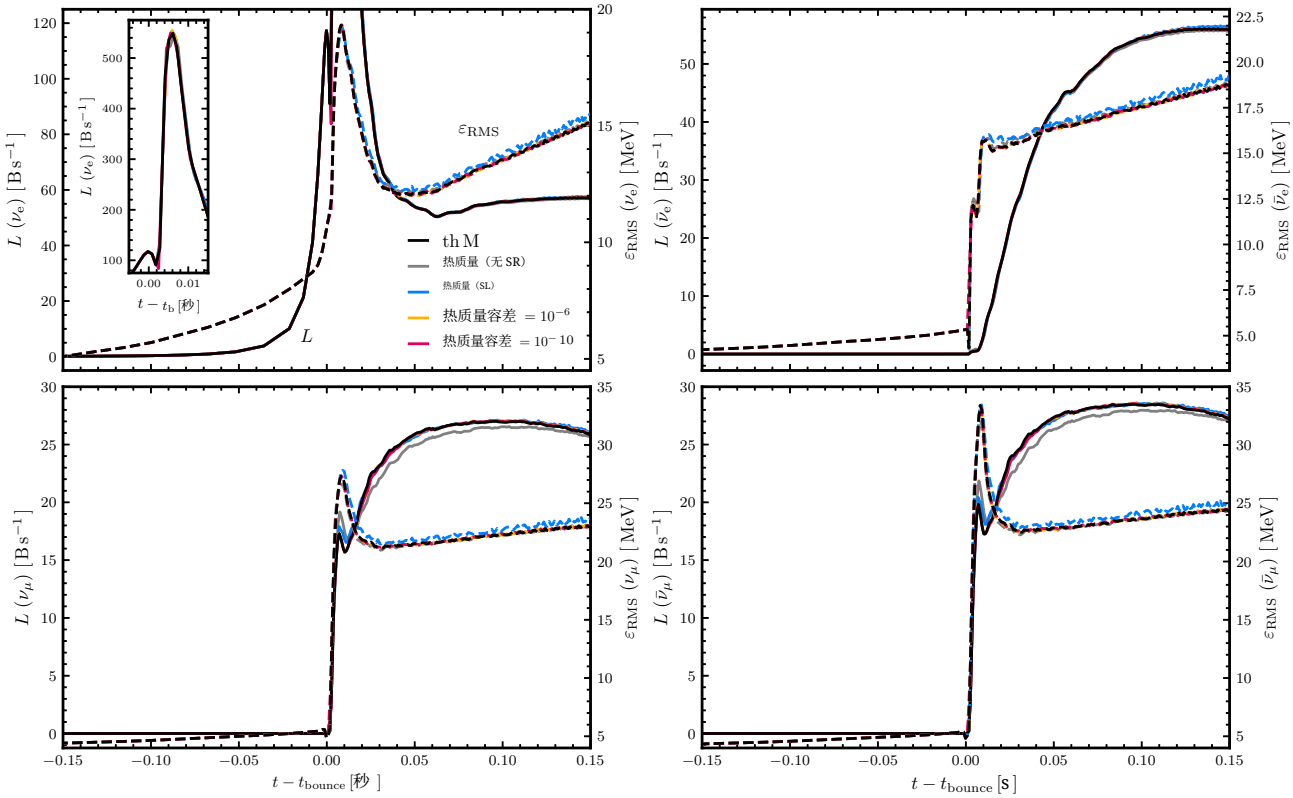


图 26。 在 $r = 500$ 千米处采样的中微子量随时间的演化，数据取自图 thornado+FLASH-X 模型。模型见图 25。各面板绘出了反弹后随时间变化的光度（实线）和均方根能量（虚线）。结果分别展示了电子中微子（ν_{e}；左上）、电子反中微子（$\bar{\nu}_{\mathrm{e}}$；右上）、缪子中微子（ν_μ；左下）和缪子反中微子（$\bar{\nu}_\mu$；右下）。

$z \in [-5120, 5120]$ 千米。该模型的空间分辨率低于球对称CHIMERA比较（关于一维情况下分辨率依赖性的讨论，参见附录 C）。我们采用固定的网格块尺寸，每个网格块包含 16×16 个有限体积单元；基网格在 R 方向上有5个块，在 z方向上有10个块，因此基网格的分辨率为 $\Delta R = \Delta z = 64$ 千米。自适应网格细化最高达到 $\ell_{\max} = 6$层级，使最精细层级的分辨率达到 $\Delta R = \Delta z = 1$ 千米。对于间断伽辽金离散，我们使用线性基函数（多项式次数为 $k = 1$），因此每个间断Galerkin单元覆盖四个有限体积单元（每个空间维度上两个）。在最大细化时，时间步长与一维模型相同（$\sim 5.6 \times 10^{-7}$ 秒），因为单元宽度增加两倍，恰好被方程（91）中的 $d_{\boldsymbol{x}} = 2$ 因子抵消。坍缩过程中，最大细化层级从 $\ell_{\max} = 2$ 逐步增加到$\ell_{\max} = 6$；当中心密度满足 $\log_{10}(\rho_{\mathrm{c}}/[\text{克·厘米}^{-3}]) = 11$、11.5、12 和 12.5 时，会启用额外层级。当 $\ell_{\max} \geq 3$时，半径 ~ 600 千米以内的区域至少细化至 $\ell = 3$。这是600千米范围内的最低细化层级；若触发细化准则，还可进行更高层级的细化。为构建能够大致维持恒定角分辨率（$\Delta r/r \sim$ const）的网格结构，我们遵循 E. P. O'Connor 和 S. M. Couch（2018年）的方法：若网格块中心的角分辨率低于 $\sim 1.4°$，则不将该块标记为待细化；若低于 $\sim 0.7°$，则主动将其标记为待粗化。

图 28 展示了一系列 Y_{e} 快照，说明了轴对称模型在反弹后早期的演化过程，时间范围为反弹后 3 至 150 ms。在 3 ms 时，激波仍近乎球形，半径约为 60 km。然而到了 25 ms，激波已明显偏离球形，呈长旋转椭球形，极向半径约为 175 km，赤道区域半径约为 115 km。这种形变及相关对流活动的出现时间早于采用球极坐标的 S. W. Bruenn 等人（2016年）的轴对称 CHIMERA 模型（2016年），但与 W. Zhang 等人（2012年）进行的柱坐标模拟时间尺度相近。激波后方的负熵梯度（见图 21中的一维剖面）形成了对流不稳定层。我们推测，较粗的笛卡尔分辨率放大了四极扰动，促使即时对流较早且剧烈地发展。到了较晚时刻（75 和 150 ms），激波趋于较为球形，但仍持续受到对流活动的扰动

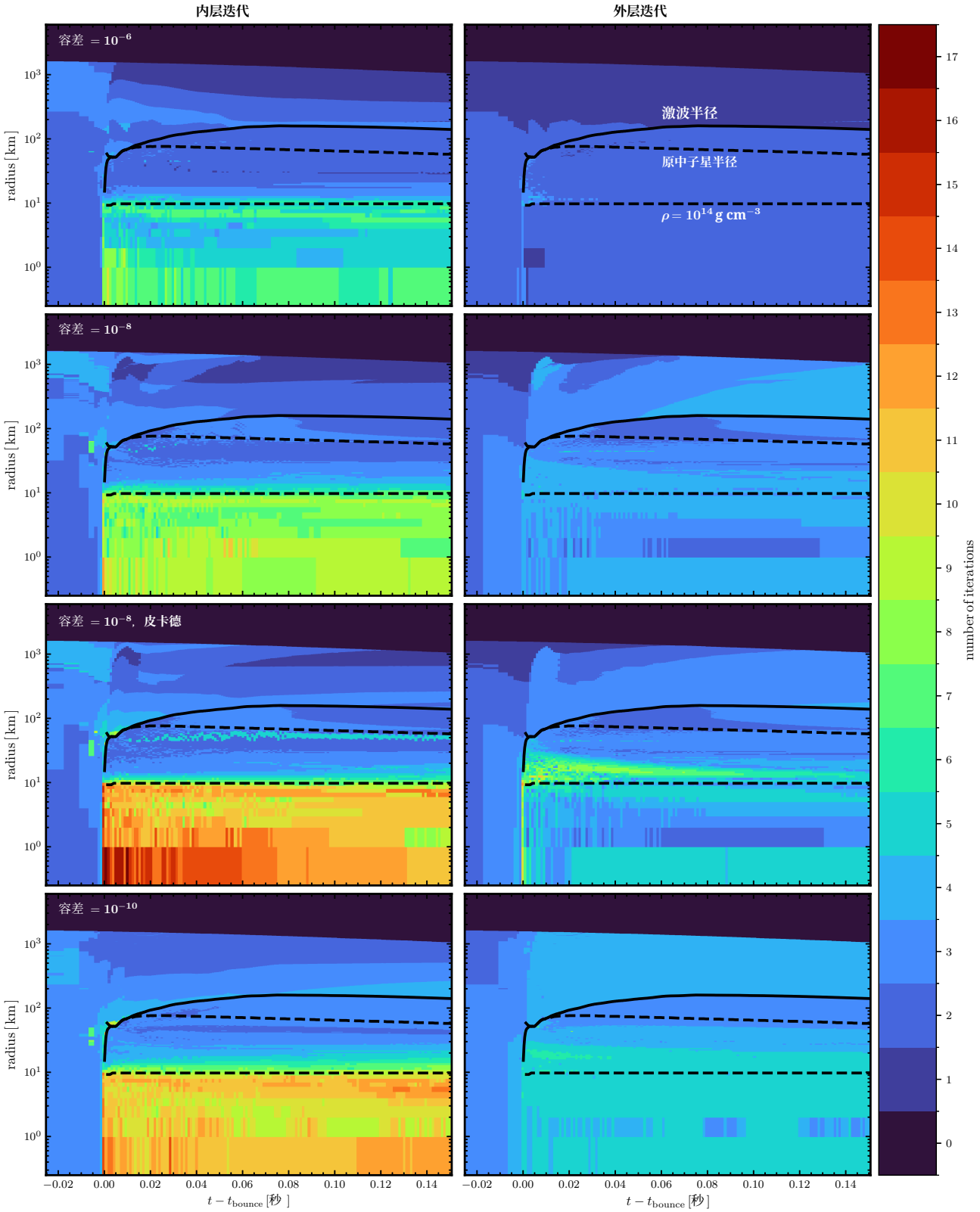


图 27. 球对称核心坍缩模拟中，内层迭代次数（左列）和外层迭代次数（右列）随半径和反弹后时间变化的热图。各行对应不同的非线性求解器容差和迭代策略：第一行显示使用安德森加速、容差为 tol $= 10^{-6}$（M outer $=$ M inner $= 2$）的结果；第二行显示使用安德森加速、容差为 tol $= 10^{-8}$（M outer $=$ M inner $= 2$）的结果；第三行显示使用皮卡迭代、容差为 tol $= 10^{-8}$（M outer $=$ M inner $= 1$）的结果；最后一行显示使用安德森加速、容差为 tol $= 10^{-10}$（M outer $=$ M inner $= 2$）的结果。每个面板中均标出了激波半径（黑色实线）、原中子星半径（黑色虚线）以及 $\rho = 10^{14}$ g cm^{-3} 等值线（黑色虚线）。

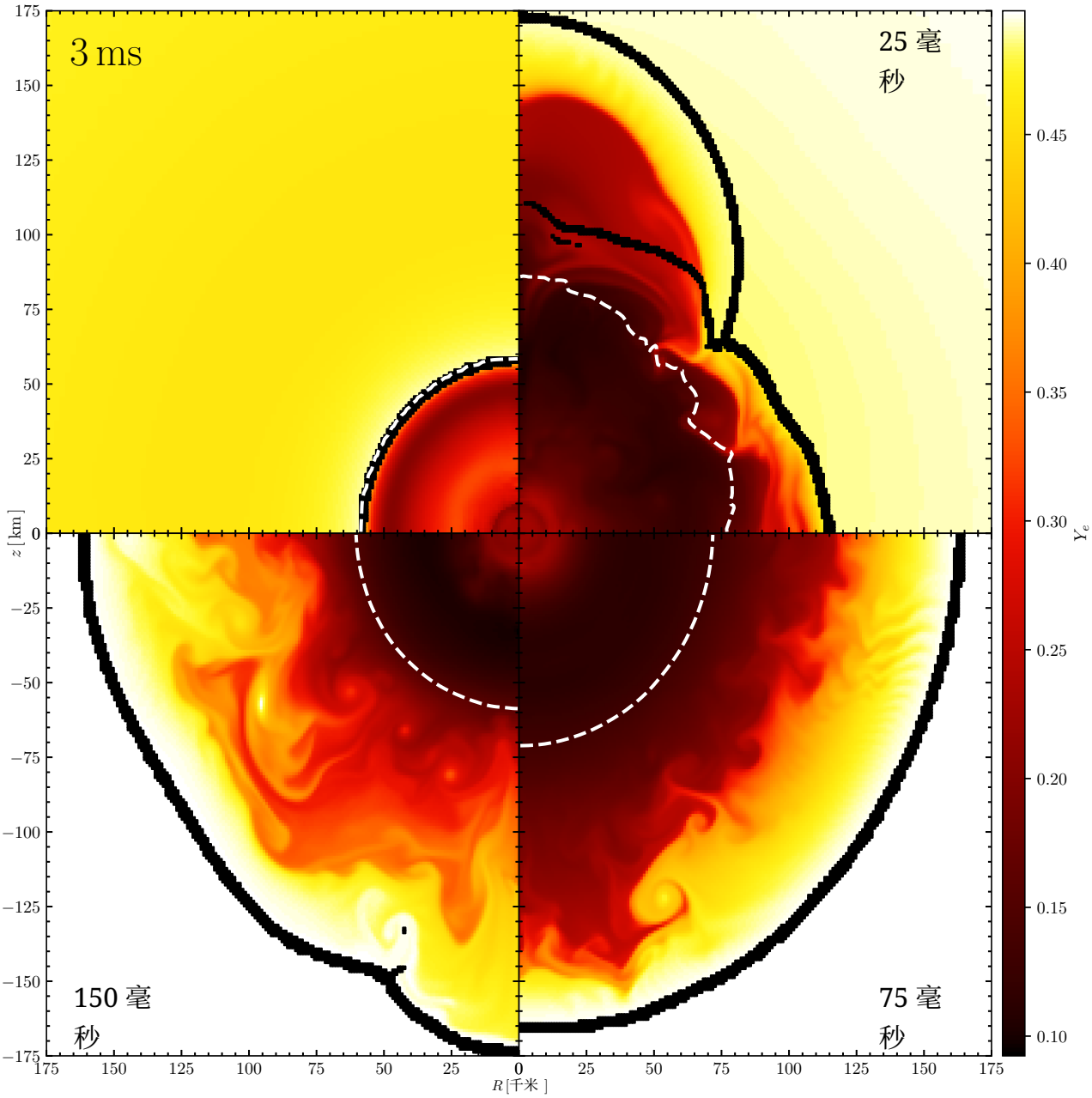


图 28。 轴对称 thornado+FLASH-X 模拟在选定反弹后时间的电子丰度色彩图。按顺时针方向，从左上方面板开始依次为：3 毫秒、25 毫秒、75 毫秒和 150 毫秒。在每个面板中，FLASH-X变量SHOK 的值等于 1 的网格单元以黑色绘制；该变量用于标记包含激波的有限体积单元。白色虚线等高线表示 $R_{\rm PNS}$，其定义为 $\rho = 10^{11}$ g cm^{-3}。

在中微子加热区。更深层的区域更接近球形，如 $\rho = 10^{11}$ g cm^{-3} 等值线（原中子星半径）所示；该半径从 75 ms 时约 70 km 显著收缩至 150 ms 时的 60 km。

图 29 对轴对称（二维）模型与相应的球对称（一维）模型进行了定量比较。总体而言，这两个模型表现出定性相似的行为。两种情况下，激波半径和原中子星半径（二维情况下取平均半径）的演化轨迹相近，电子中微子光度和均方根能量随时间的变化趋势也相似。不过，至少有两个因素导致了一维和二维结果之间的差异。首先，二维模型早期的对流活动影响了 $R_{\rm Sh}$ 和 $R_{\rm PNS}$的演化，它们的数值始终高于一维情况。在最初的 50 ms 内，二维模型的平均激波半径和 $R_{\rm PNS}$ 出现了若干次一维模型中没有的振荡。约 75 ms 后， $R_{\rm Sh}$ 在一维模型中开始回缩，而在二维模型中则稳定在 170 km 附近，仅伴有较小的振荡

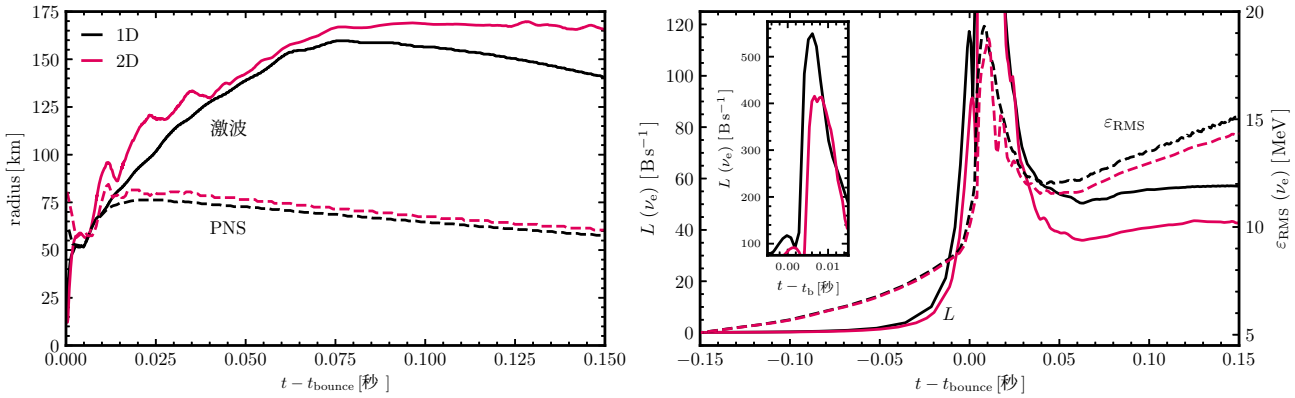


图 29. thornado+FLASH-X 球对称（黑色）与轴对称（红色）模拟的比较，展示了若干选定物理量随时间的变化。左图绘出了激波（实线）和原中子星（虚线）的半径，右图绘出了电子中微子光度（实线）和均方根能量（虚线），位置为 $r = 500$ km。

。与轻子数退化爆发相关的电子中微子光度峰值（见右侧面板中的插图）在二维模型中也显著偏低，约为 400 B s^{-1}，而一维模型中约为550 B s^{-1}。在较晚时刻，二维模型的光度和均方根能量分别比一维模型低约 25% 和 1 兆电子伏特。其次，二维模拟的空间分辨率比一维模型粗一倍。正如附录C所述，将一维模型的空间分辨率从0.5 km 降至1 km，所得趋势与一维和二维模拟之间观察到的差异一致，不过影响程度略小。

图30 展示了非线性中微子–物质求解器中内层和外层迭代次数的空间分布，其行为与图 27中的一维结果一致。这些数据对应于图 28所示时间步长的 PDARS IMEX 格式第二阶段，内层迭代次数取外层迭代的平均值。最高迭代次数出现在高密度区域，远在 $R_{\rm PNS}$内部，其中局部热点间歇性地达到八次内层迭代，但通常为两到四次。在 $R_{\rm PNS}$ 和 $R_{\rm Sh}$ 之间，内层迭代次数保持在两到三次。对于高于 $\sim 10^{14}$的密度，外层迭代次数始终保持在八到十次；对于较低密度，则降至两到三次。在较晚时刻（75 和 150 ms），我们观察到激波前方的内层迭代次数略有升高，通常为四次，而激波内侧则为两到三次。尽管尚未对此进行详细研究，这种现象可能与依赖速度的步长参数λ（注 3）有关。该参数以增加迭代次数为代价，提升了大流速区域的稳健性。最后，我们指出，目前尚未在并行执行的区域分解中考虑迭代次数的空间变化。鉴于中微子–物质耦合的相对计算成本，在未来的模拟中考虑这种变化或许能够改善负载均衡和整体效率。

8. 总结、结论与展望

我们详细介绍了`thornado`中谱双矩中微子输运的数值方法，包括 $\mathcal{O}(v/c)$速度相关的观测者修正、表格化微观物理以及六种中微子种类。我们的方法将 DG 相空间离散化与 IMEX 时间推进相结合，并对M. P. Laiu 等人(2021年)提出的嵌套不动点非线性求解器进行了扩展，使其能够在 IMEX 框架内对碰撞项进行全隐式积分。遵循J. A. Harris 等人(2022年)；M. Thavappiragasam 等人(2024)；M. P. Laiu 等人(2025)提出的策略，中微子输运求解器还已移植到 GPU，采用 OpenMP 卸载或 OpenACC 实现；本文介绍的所有超新星应用均采用这一支持 GPU 的实现。为支持大规模模拟，该求解器可导入 FLASH-X；FLASH-X 提供有限体积自引力流体力学、分布式内存并行和自适应网格细化。我们还介绍了在 DG 表示与有限体积表示之间转换所采用的策略。thornado 中中微子输运的实现，以及 thornadoFLASH-X 耦合框架，均已通过一系列测试问题和超新星应用进行了验证。

第5节中使用理想化不透明度开展的基础验证测试结果表明：在球极坐标、柱坐标和笛卡尔空间坐标下，即使网格相对于散射平均自由程较为粗糙，模型在扩散极限下仍具有准确性；对于与时间无关且空间变化的速度场，速度相关的观测者修正表现正确；同时，还能够使自由流辐射干净地穿过自适应网格。

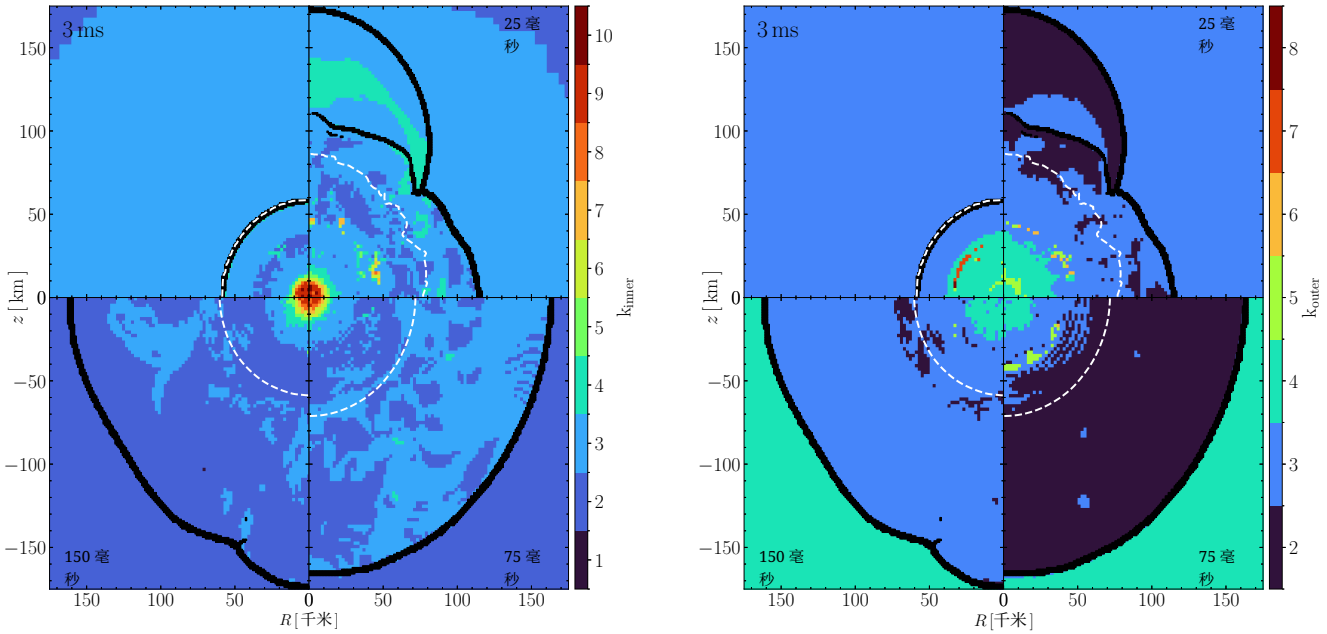


图30。 显示轴对称 thornado+FLASH-X 模拟在图 28中相同反弹后时间的内侧（左图）和外侧（右图）迭代次数空间分布的热图。按顺时针方向，从左上角开始：3 毫秒、25 毫秒、75 毫秒和 150 毫秒。

第6 节中的弛豫问题和减轻子化问题引入了表格化微观物理、六种中微子以及一组扩展的不透明度，包括中微子-电子散射和热成对过程。弛豫问题旨在使用后向欧拉时间步进评估非线性求解器的性能，其初始状态为偏离平衡的辐射矩；结果表明，系统收敛于正确的平衡费米–狄拉克分布，同时总轻子数和能量均在非线性求解器容差范围内守恒。将时间步长在三个数量级范围内变化，从 10^{-3} 毫秒到 1 毫秒，我们发现非线性求解器能够保持稳健收敛，而迭代次数并未相应增加；相较于皮卡迭代，安德森加速还能够持续改善收敛性。减轻子化问题使用 IMEX 时间推进，对静态物质背景中持续 100 毫秒的输运进行建模，表现出定性正确的多种类输运行为，并且总轻子数和能量均在非线性求解器容差所规定的范围内守恒。同样，求解器表现出稳健的收敛性：最大的迭代次数出现在内核（$\rho \gtrsim 10^{13}$ 克每立方厘米$^{-3}$），每次外层迭代大约需要 3–6 次外层迭代，并且最多需要 10–15 次内层迭代；随着质量密度降低，迭代次数也会减少。

第7 节中的核心坍缩超新星应用结果进一步证实了所提方法在完全动态条件下的稳健性。在球对称坍缩和反弹后演化过程中，尽管模型（通量限制扩散（FLD）与双矩）和方法存在关键差异，thornado+FLASH-X的结果在许多关键量上仍与CHIMERA参考模型呈现出显著接近的定性一致性，包括激波和原中子星半径的时间演化、中微子光度和均方根能量，以及选定反弹后时间的径向剖面。各模型的激波轨迹随时间逐渐分化，但在整个150 ms的反弹后比较期间仍高度同步。尽管难以确定这种差异的确切来源，我们的结果表明，输运处理的细节（例如闭合关系的选择）是主要影响因素。CHIMERA G+ 模型（在激波以下一致地应用速度相关的观测者修正）与采用Kershaw闭合的thornado+FLASH-X模型彼此偏差不超过 $\lesssim$ 2%。这种高度一致性值得注意，因为FLD和Kershaw闭合在概念上相似：二者都在扩散极限与自由流极限之间进行插值，其中FLD确定通量因子，而Kershaw确定爱丁顿因子。非线性中微子–物质耦合求解器在坍缩、反弹和早期反弹后演化期间始终保持收敛，其迭代次数变化趋势与理想化测试中的观测结果一致。该轴对称模拟首次采用间断伽辽金中微子输运，展示了耦合的中微子辐射流体动力学框架模拟多维核心坍缩超新星动力学的能力。该模型在物理上合理的时间尺度内形成即时对流和激波形变；考虑到维数和空间分辨率差异所导致的不同，中微子光度、均方根能量以及整体激波行为的演化总体上与相应的一维模型一致。迭代

二维中的迭代次数同样与一维中观察到的行为一致，并再次表明求解器在整个计算域内表现稳健。总之，这些核心坍缩超新星应用验证了中微子输运实现、现实条件下的非线性求解器策略，以及混合间断伽辽金–有限体积耦合。

thornado 中中微子输运的成功实现及其与 FLASH-X 的集成，为拓展该框架的物理和数值能力，以及提升性能以便为未来在核天体物理和多信使天体物理领域的应用做好准备，奠定了坚实基础。

从物理方面来看，纳入广义相对论效应对于实现真实的建模至关重要（例如，S. W. Bruenn 等人 2001年; E. J. Lentz 等人 2012年; B. M¨uller 等人 2012年; E. P. O'Connor 和 S. M. Couch 2018年）。近期，我们将采用有效势方法（例如，A. Marek 等人 2006年）来补充牛顿势，并在 thornado 的中微子输运中加入引力红移项。长期而言，我们将致力于构建完全相对论模型，并以 thornado 中基于间断伽辽金方法的相对论中微子输运近期进展为基础（J. Hunter 等 2025）。其他物理功能——例如非弹性中微子–核子散射（例如，B. M¨uller 等人 2012年）、缪子效应（例如，R. Bollig 等，2017年; T. Fischer 等人 2020年），以及在 FLASH-X 中耦合核反应网络（使计算域能够覆盖$\sim 10^5$ km，从而跟踪爆炸发展）——都是当前框架的自然扩展。

在数值计算方面，开发用于非线性中微子–物质耦合的稳健全隐式求解器，为推进核心坍缩超新星模型中的多物理时间步进策略奠定了基础。在当前实现中，`thornado`的隐显式格式使用由显式稳定性约束确定的单一时间步长推进显式和隐式分量。对于碰撞项而言，这种做法可能并非最优，因为在近似平衡区域，其动力学过程会变得刚性但缓慢。多速率方法（例如，A. Sandu 2019年；C. Rujeko & D. Reynolds 2021年）采用不同时间步长演化不同算子，并可设计为以低于计算成本较低的显式输运项的频率，执行计算成本较高的隐式碰撞更新。得益于本研究开发的求解器基础设施，这一颇具前景的研究方向已成为可能。

GPU加速的中微子输运求解器为开展保真度更高的大规模模拟创造了机会。如今，thornado 已与 FLASH-X 框架耦合，并通过了 CHIMERA 的验证，因此我们对该实现有足够信心，可以开始系统的数据驱动性能评估，以指导针对输运求解器的优化，例如整合核函数以减少启动开销、改进迭代求解器的初始猜测值，以及选择性地采用较低精度进行计算。这些改进有望降低中微子输运的总体成本，从而提升其他模型组件的物理保真度。尤其是需要演化大型核反应网络的应用，例如电子俘获超新星模型，将受益于 GPU 加速的输运求解器性能提升。

致谢

我们感谢 Margot Fitz Axen 仔细审阅稿件并提出宝贵意见。本研究部分得到百亿亿次计算项目（17-SC-20-SC）的支持。该项目由美国能源部科学办公室和国家核安全管理局合作开展。橡树岭国家实验室的工作由美国能源部（DOE）根据合同 DE-AC05-00OR22725 提供支持。劳伦斯伯克利国家实验室的工作由美国能源部根据合同编号 DE-AC02-05CH11231 提供支持。本研究还部分得到美国能源部科学办公室先进科学计算研究办公室和核物理办公室通过先进计算实现科学发现（SciDAC）计划的支持。E. Endeve 和 A. Mezzacappa 感谢美国国家科学基金会（NSF）引力物理计划根据资助编号 2409148 提供的支持，以及 NSF 持续科学创新网络基础设施计划根据资助编号 2535874 提供的支持。INCITE计划提供了计算时间。本研究还使用了橡树岭领导力计算设施的资源。该设施是美国能源部科学办公室用户设施，由合同 DE-AC05-00OR22725 提供支持。本研究还使用了国家能源研究科学计算中心（NERSC）的资源。NERSC 是美国能源部用户设施，本研究使用了 NERSC 资助编号 NP-ERCAP0032339。

附录

Levermore 和 Kershaw 闭合方案

用通量因子 h表示，Kershaw 型闭合关系的 Eddington 因子和热通量因子在thornado 中的实现形式为（D. Kershaw 1976；F. Schneider 2016；Z. Banach &W. Larecki 2017）

$$\psi_s^{\mathrm{Ke}}(h) = \frac{1}{3}\left(1+2h^2\right) \qquad \text{and} \qquad \zeta_s^{\mathrm{Ke}}(h) = \frac{h}{9}\left(4h^2+5\right), \tag{A1}$$

分别。 这些表达式是针对非负且无上界的分布函数推导得出的 d.

对于 Levermore 闭合关系，爱丁顿因子由下式给出（C. D. Levermore 1984年）

$$\psi_s^{\mathrm{Le}}(h) \equiv \frac{1}{3}\left(5-2\sqrt{4-3h^2}\right). \tag{A2}$$

Levermore 闭合关系的热流因子由 N. Vaytet 等人 （2011年）提出。在 thornado中，我们采用由T. Wang 和 A. Burrows（2023年）

$$\begin{aligned}\zeta(h) = \Bigg(&4h^3(286-89a)+576h(-2+a)+3h^5(-80+9a) \\ &-48\left[h^6+h^2(42-15a)+3h^4(-5+a)+16(-2+a)\right]\operatorname{arctanh}\left[\frac{-2+a}{h}\right]\Bigg)/(-2+a)^5,\end{aligned} \tag{A3}$$

其中 $a=\sqrt{4-3\,h^2}$。尽管 $\zeta(h)$ 在 $h\to 0$ 和 $h\to 1$ 处具有明确的极限值（分别为 0 和 1），但即使采用任意精度浮点运算，也无法直接在这些端点处进行数值计算。在双精度浮点运算中（这是我们在 thornado 中使用的运算方式），对于模拟中通常出现的较小 h，$\zeta(h)$ 会变得高度振荡并在数值上发散。为避免这些状态下的数值不稳定性，我们在 $h=0$附近对 $\zeta(h)$ 进行六阶泰勒展开，并将所得多项式用于 $h\le 0.2$；此外，当 h 接近 1 时，在计算中采用一个安全因子，从而得到以下 Levermore 热流因子的表达式

$$\zeta_s^{\mathrm{Le}}(h) = \begin{cases} \frac{3h\left(63h^4+144h^2+448\right)}{2240} & h\le 0.2, \\ \zeta(h) & 0.2<h<1-10^{-12}, \\ 1 & 1-10^{-12}\le h. \end{cases} \tag{A4}$$

B. 碰撞项

为完整起见，我们在本附录中给出方程 (34) 右端项中各个过程的显式表达式。

发射与吸收项可写为

$$\mathcal{C}_s^{\mathrm{EA}}(f_s) = \eta_s^{\mathrm{EA}} - \chi_s^{\mathrm{EA}} f_s, \tag{B5}$$

其中，$\chi_s^{\mathrm{EA}}(\varepsilon)$ 为吸收不透明度（已针对受激吸收进行修正），与角度 ω 无关；发射率通过详细平衡关系 $\eta_s^{\mathrm{EA}} = \chi_s^{\mathrm{EA}} f_s^{\mathrm{Eq}}$ 获得，其中平衡费米–狄拉克分布为

$$f_s^{\mathrm{Eq}} = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu_s)/T}+1}, \tag{B6}$$

其中，μ_s 是中微子种类 s 的化学势。

核子和原子核上的散射被视为等能的。这些过程的碰撞项写为（S. W. Bruenn 1985年）

$$\mathcal{C}_s^{\mathrm{Iso}}(f_s) = \frac{4\pi\varepsilon^2}{h^3}\left[\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} R_s^{\mathrm{Iso}}(\varepsilon,\cos\alpha) f_s(\omega',\varepsilon)d\omega' - f_s(\omega,\varepsilon)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} R_s^{\mathrm{Iso}}(\varepsilon,\cos\alpha)d\omega\right] \tag{B7}$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon^2}{h^3}\left[\Phi_{s,0}^{\mathrm{Iso}}(\varepsilon)\left(\mathcal{D}_s(\varepsilon) - f_s(\omega,\varepsilon)\right) + \Phi_{s,1}^{\mathrm{Iso}}(\varepsilon)\,\ell^i(\omega)\,\mathcal{I}_{si}\right], \tag{B8}$$

其中，方程（B8）中散射核的角度依赖性 R_s^{Iso}用散射角余弦的截断（至一阶）勒让德展开近似表示，$\cos\alpha = \ell^i(\omega)\ell_i(\omega')$,

$$R_s^{\mathrm{Iso}}(\varepsilon,\cos\alpha) := \Phi_{s,0}^{\mathrm{Iso}}(\varepsilon) + \Phi_{s,1}^{\mathrm{Iso}}(\varepsilon)\,\cos\alpha. \tag{B9}$$

中微子-电子散射（中微子弹性散射）包含中微子与电子之间的能量交换。中微子弹性散射碰撞项写作（S. W. Bruenn 1985年；A. Mezzacappa & S.W.Bruenn 1993a）

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_s^{\text{NES}}(f_s) &= (1-f_s(\omega,\varepsilon))\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} R_s^{\text{In}}(\varepsilon,\varepsilon',\cos\alpha)\, f_s(\varepsilon',\omega')\, d\omega' dV_{\varepsilon'} \\ &\quad - f_s(\omega,\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} R_s^{\text{Out}}(\varepsilon,\varepsilon',\cos\alpha)\,(1-f_s(\omega',\varepsilon'))\, d\omega'\, dV_{\varepsilon'} \qquad \text{(B10)} \\ &= (1-f_s(\omega,\varepsilon))\int_{\mathbb{R}^+}\Phi_{s,0}^{\text{In}}(\varepsilon,\varepsilon')\,\mathcal{D}_s(\varepsilon')\, dV_{\varepsilon'} - f_s(\omega,\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^+}\Phi_{s,0}^{\text{Out}}(\varepsilon,\varepsilon')\,(1-\mathcal{D}_s(\varepsilon'))\, dV_{\varepsilon'} \\ &\quad + (1-f_s(\omega,\varepsilon))\,\ell^i(\omega)\int_{\mathbb{R}^+}\Phi_{s,1}^{\text{In}}(\varepsilon,\varepsilon')\,\mathcal{I}_{si}(\varepsilon')\, dV_{\varepsilon'} + f_s(\omega,\varepsilon)\,\ell^i(\omega)\int_{\mathbb{R}^+}\Phi_{s,1}^{\text{Out}}(\varepsilon,\varepsilon')\,\mathcal{I}_{si}(\varepsilon')\, dV_{\varepsilon'}, \qquad \text{(B11)}\end{aligned}$$

其中在方程 (B11) 中，我们使用了散射核的线性阶勒让德展开 R_s^{In} 和 R_s^{Out}，

$$R_s^{\text{In/Out}}(\varepsilon,\varepsilon',\cos\alpha) := \Phi_{s,0}^{\text{In/Out}}(\varepsilon,\varepsilon') + \Phi_{s,1}^{\text{In/Out}}(\varepsilon,\varepsilon')\,\cos\alpha. \qquad \text{(B12)}$$

最后，由成对过程导致的碰撞项写为 (S. W. Bruenn 1985年)

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_s^{\text{Pair}}(f_s,\bar{f}_s) &= (1-f_s(\omega,\varepsilon))\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} R_s^{\text{Pro}}(\varepsilon,\varepsilon',\cos\alpha)\,(1-\bar{f}_s(\omega',\varepsilon'))\, d\omega'\, dV_{\varepsilon'} \\ &\quad - f_s(\omega,\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} R_s^{\text{Ann}}(\varepsilon,\varepsilon',\cos\alpha)\,\bar{f}_s(\omega',\varepsilon')\, d\omega'\, dV_{\varepsilon'} \qquad \text{(B13)} \\ &= (1-f_s(\omega,\varepsilon))\int_{\mathbb{R}^+}\Phi_{s,0}^{\text{Pro}}(\varepsilon,\varepsilon')\,(1-\bar{\mathcal{D}}_s(\varepsilon'))\, dV_{\varepsilon'} - f_s(\omega,\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^+}\Phi_{s,0}^{\text{Ann}}(\varepsilon,\varepsilon')\,\bar{\mathcal{D}}_s(\varepsilon')\, dV_{\varepsilon'} \\ &\quad - (1-f_s(\omega,\varepsilon))\,\ell^i(\omega)\int_{\mathbb{R}^+}\Phi_{s,1}^{\text{Pro}}(\varepsilon,\varepsilon')\,\bar{\mathcal{I}}_{si}(\varepsilon')\, dV_{\varepsilon'} - f_s(\omega,\varepsilon)\,\ell^i(\omega)\int_{\mathbb{R}^+}\Phi_{s,1}^{\text{Ann}}(\varepsilon,\varepsilon')\,\bar{\mathcal{I}}_{si}(\varepsilon')\, dV_{\varepsilon'}, \qquad \text{(B14)}\end{aligned}$$

其中，在方程 (B14) 中，我们使用了类似于方程 (B12) 的勒让德展开来近似产生与湮灭核的角度依赖性，R_s^{Pro}和 R_s^{Ann}，分别。

C. 球对称核心坍缩模拟的分辨率研究

在本附录中，我们展示第7节所述球对称条件下基准Minerbo闭合核心坍缩超新星模型的分辨率研究结果，并分别改变空间分辨率和谱分辨率。两项研究独立开展，以分离各自的影响：改变自适应网格细化结构可探究对位置空间中流体动力学与输运离散化的敏感性；而改变谱网格则可单独考察能量空间分辨率对中微子加热与冷却率，以及对速度相关的观测者修正（尤其是多普勒频移）离散化的影响。

在采用自适应网格细化的空间分辨率研究中，我们将谱分辨率固定为表 2 中的网格 C，将最粗层级的分辨率固定为 $(\Delta r)^{\ell=0} = 64$ 千米，并将最大细化层级从 $\ell_{\max} = 5$ 变至 $\ell_{\max} = 9$。这对应的最细层级分辨率范围为 $(\Delta r)^{\ell_{\max}} = 2$ 千米至 0.125 千米。坍缩期间采用与第 7 节所述相同的细化策略：当中心密度满足 $\log_{10}(\rho_c/[\text{克 厘米}^{-3}]) = 11$ 时，将 $\ell_{\max}$ 逐步从 $\ell_{\max} - 4$ 提高至 $\ell_{\max}$、11.5、12 和 12.5。与之前一样，最内侧600千米始终细化至最大层级。在此设置下，由于初始细化仅限于 $\ell_{\max} - 4$，不同模型在坍缩开始时的初始网格各不相同。间断伽辽金离散保持不变：我们使用线性单元，因此每个间断Galerkin单元跨越两个有限体积单元。

图31 显示，当最高层级的空间分辨率达到0.5 km 时，关键的全局量已基本收敛。在此分辨率下，激波和原中子星半径的主要特征与更高分辨率模拟的结果密切吻合。然而，较粗的网格会引入逐渐增大的偏差：早期激波偏移（反弹后$\lesssim$ 15 ms）存在明显差异，随后激波回退得更慢，原中子星收缩也有所减弱。在50 至 150 ms 期间，随着空间分辨率降低，电子中微子光度和均方根能量也会下降。

对于谱分辨率研究，我们采用第 7 节中的基准模型，$(\Delta r)^{\ell_{\max}} = 0.5$ km，并使用表 2中的所有选项改变谱网格。图 32显示，不同谱分辨率下，激波半径和原中子星半径仅有细微变化。去轻子化暴发的峰值光度同样对网格选择不敏感。在 $r = 500$km 处，电子中微子均方根能量在反弹前表现出一定的敏感性；反弹后，只有最粗的分辨率（网格 A）与其他分辨率存在明显差异。总体而言，采用网格 C 或更精细的谱网格时，解已基本收敛。

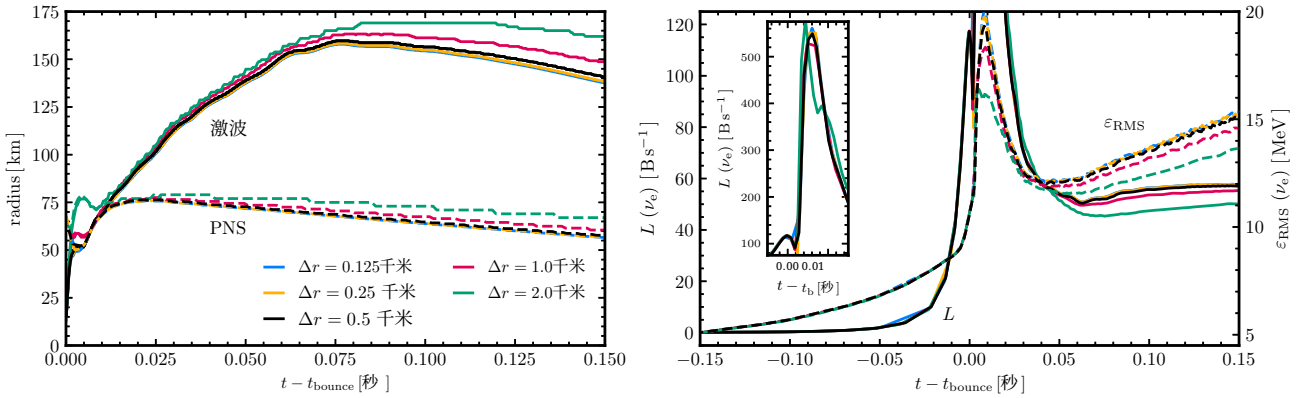


图 31. 空间分辨率研究的结果，展示了在改变有限体积网格单元最小宽度的模拟中，若干选定量随时间的变化；谱分辨率对应于表 2 中的网格 C。左图显示激波（实线）和原中子星（虚线）半径随时间的变化，右图显示 $r = 500$ 千米处电子中微子光度（实线）和均方根能量（虚线）随时间的变化。线条颜色表示最高自适应网格细化层级上的有限体积径向网格单元最小宽度：0.125 千米（蓝色）、0.25 千米（黄色）、0.5 千米（黑色）、1.0 千米（红色）和 2.0 千米（绿色）。

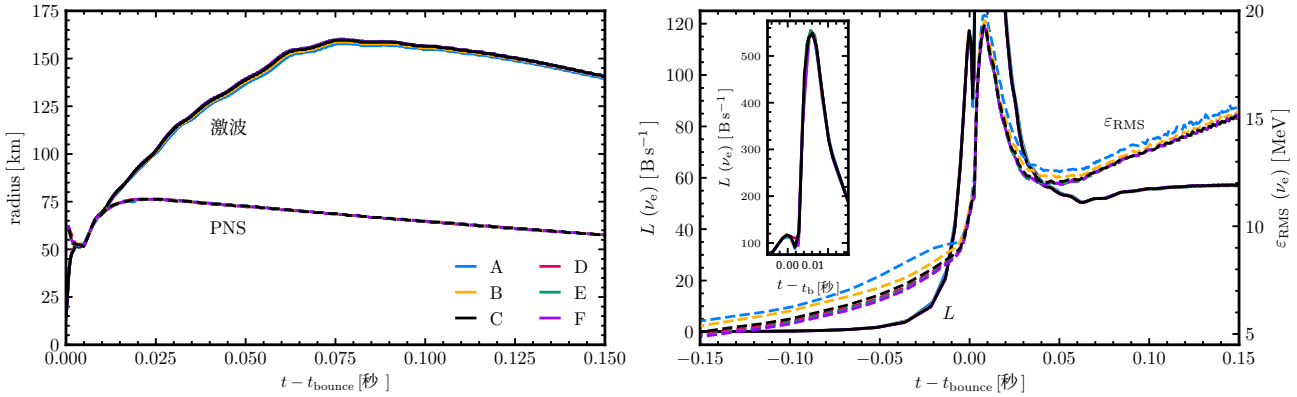


图32. 谱分辨率研究的结果，展示了在改变谱网格参数的模拟中，若干选定量随时间的变化；空间分辨率对应于最高自适应网格细化层级上有限体积径向网格单元最小宽度为 0.5 千米。左图显示激波（实线）和原中子星（虚线）半径随时间的变化，右图显示 $r = 500$ 千米处电子中微子光度（实线）和均方根能量（虚线）随时间的变化。线条颜色表示表 2 中列出的谱网格：网格 A（蓝色）、网格 B（黄色）、网格 C（黑色）、网格 D（红色）、网格 E（绿色）和网格 F（紫色）。

软件： Matplotlib（J. D. Hunter，2007年）、NumPy（C. R. Harris 等，2020年）、SciPy（P. Virtanen 等，2020年）、Weak- Lib [16]、`thornado` [17], FLASH-X [18]（A. Dubey 等人（2022））、CHIMERA（S. W. Bruenn 等，2020）

[16] github.com/starkiller-天体物理学/weaklib [17] github.com/endeve/thornado [18] flash-x.org

参考文献

Adams, M. L. 2001年，《核科学与工程》，137，298，doi: 10.13182/NSE00-41 Almgren,A. S.,Beckner, V. E., Bell, J. B., 等人 2010年，《天体物理学杂志》，715，1221，doi: 10.1088/0004-637X/715/2/1221 Anderson, D. G. 1965年，《ACM杂志》，12，547，doi: 10.1145/321296.321305 Ascher, U., Ruuth, S., & Spiteri, R. 1997年，《应用数值数学》，25，151，doi: 10.1016/S0168-9274(97)00056-1 Audit, E., Charrier, P., Chi`eze, J. P., & Dubroca, B. 2002年，arXiv电子预印本，天体物理学，doi: 10.48550/arXiv.astro-ph/0206281 Ayuso, B., Carrillo, J. A., & C.-W., S. 2011年，《动力学及相关模型》，4，955，doi: 10.3934/krm.2011.4.955 Balsara, D. S., Garain, S., & Shu, C.-W. 2016年，《计算物理学杂志》，326，780，doi: 10.1016/j.jcp.2016.09.009 Banach, Z., & Larecki, W. 2017年，Zeitschrift f¨ur angewandte Mathematik und Physik，68，100，doi: 10.1007/s00033-017-0847-z Bassi, F., Franchina, N., Ghidoni, A., & Rebay, S. 2013年，《国际流体数值方法杂志》，71，1322，doi: 10.1002/fld.3713 Berger, M. J., & Colella, P. 1989年，《计算物理学杂志》，82，64，doi: 10.1016/0021-9991(89)90035-1 贝特, H. A., & Wilson, J. R. 1985年，《天体物理学杂志》，295，14，doi: 10.1086/163343 Blondin, J. M., Mezzacappa, A., & DeMarino, C. 2003年，《天体物理学杂志》，584，971，doi: 10.1086/345812 Bollig, R., Janka, H.-T., Lohs, A., 等人 2017年，《物理评论快报》，119，242702，doi: 10.1103/PhysRevLett.119.242702 Brinkmann, R. P., & Turner, M. S. 1988年，《物理评论D》，38，2338，doi: 10.1103/PhysRevD.38.2338 Bruenn, S. W. 1985年，《天体物理学杂志增刊》，58，771，doi: 10.1086/191056 Bruenn, S. W., De Nisco, K. R., & Mezzacappa, A. 2001年，《天体物理学杂志》，560，326，doi: 10.1086/322319 Bruenn, S. W., & Mezzacappa, A. 1997年，《物理评论D》，56，7529，doi: 10.1103/PhysRevD.56.7529 Bruenn, S. W., Mezzacappa, A., Hix, W. R., 等人 2013年，《天体物理学杂志快报》，767，L6，doi: 10.1088/2041-8205/767/1/L6 Bruenn, S. W., Lentz, E. J., Hix, W. R., 等人 2016年，《天体物理学杂志》，818，123，doi: 10.3847/0004-637X/818/2/123 Bruenn, S. W., Blondin, J. M., Hix, W. R., 等人 2020年，《天体物理学杂志增刊》，248，11，doi: 10.3847/1538-4365/ab7aff Buchler, J. R. 1979年，《定量光谱学与辐射传输杂志》，22，293，doi: 10.1016/0022-4073(79)90119-5 Buchler, J. R. 1983年，《定量光谱学与辐射传输杂志》，30，395，doi: 10.1016/0022-4073(83)90102-4 Buras, R., Janka, H.-T., Keil, M. T., Raffelt, G. G., & Rampp, M. 2003年，《天体物理学杂志》，587，320，doi: 10.1086/368015 Buras, R., Rampp, M., Janka, H.-T., & Kifonidis, K. 2006年，《天文学与天体物理学》，447，1049，doi: 10.1051/0004-6361:20053783 Burrows, A., Hayes, J., & Fryxell, B. A. 1995，《天体物理学杂志》，450，830，doi: 10.1086/176188 Burrows, A., Radice, D., Vartanyan, D., et al. 2020年，《皇家天文学会月刊》，491，2715，doi: 10.1093/mnras/stz3223 Burrows, A., Reddy, S., & Thompson, T. A. 2006年，《核物理 A》，777，356，doi: 10.1016/j.nuclphysa.2004.06.012 Burrows, A., & Vartanyan, D. 2021年，《自然》，589，29，doi: 10.1038/s41586-020-03059-w Cabez´on, R. M., Pan, K.-C., Liebend¨orfer, M., et al. 2018年，《天文学与天体物理学》，619，A118，doi: 10.1051/0004-6361/201833705 Cardall, C. Y., Endeve, E., & Mezzacappa, A. 2013a，《物理评论D》，88，023011，doi: 10.1103/PhysRevD.88.023011 Cardall, C. Y., Endeve, E., & Mezzacappa, A. 2013b，《物理评论D》，87，103004，doi: 10.1103/PhysRevD.87.103004 Cardall, C. Y., Lentz, E. J., & Mezzacappa, A. 2005，《物理评论D》，72，043007，doi: 10.1103/PhysRevD.72.043007 Cardall, C. Y., & Mezzacappa, A. 2003，《物理评论D》，68，023006，doi: 10.1103/PhysRevD.68.023006 Castor, J. I. 1972，《天体物理学杂志》，178，779，doi: 10.1086/151834 Castro, M., Costa, B., & Don, W. S. 2011年，《计算物理学杂志》，230，1766，doi: 10.1016/j.jcp.2010.11.028 Cernohorsky, J. 1994，《天体物理学杂志》，433，247，doi: 10.1086/174639 Cernohorsky, J., & Bludman, S. A. 1994，《天体物理学杂志》，433，450，doi: 10.1086/174640 Chan, J., Del Rey Fern´andez, D. C., & Carpenter, M. H. 2019年，《SIAM 科学计算杂志》，41，A2938，doi: 10.1137/18M1209234 Cheng, Y., Gamba, I. M., & Morrison, P. J. 2013年，《科学计算杂志》，56，319，doi: 10.1007/s10915-012-9680-x Chu, R., Endeve, E., Hauck, C., & Mezzacappa, A. 2019年，《计算物理学杂志》，389，62，doi: 10.1016/j.jcp.2019.03.037 Cockburn, B., Lin, S.-Y., & Shu, C.-W. 1989年，《计算物理学杂志》，84，90，doi: 10.1016/0021-9991(89)90183-6 Cockburn, B., & Shu, C.-W. 1998年，《计算物理学杂志》，141，199，doi: 10.1006/jcph.1998.5892 Cockburn,B., &Shu, C.-W.2001，《科学计算杂志》，16，173，doi: 10.1023/A:1012873910884 Colella, P., & Woodward, P. R. 1984年，《计算物理学杂志》，54，174，doi: 10.1016/0021-9991(84)90143-8 Colgate, S. A., & White, R. H. 1966，《天体物理学杂志》，143，626，doi: 10.1086/148549 Couch, S. M., Carlson, J., Pajkos, M., et al. 2021年，《并行计算》，108，102830，doi: https://doi.org/10.1016/j.parco.2021.102830

Couch, S. M., Graziani, C., & Flocke, N. 2013, 《天体物理学杂志》, 778, 181, doi: 10.1088/0004-637X/778/2/181 D'Azevedo, E. F., Messer, B., Mezzacappa, A., & Liebend¨orfer, M. 2005, 《SIAM 科学计算杂志》, 26, 810, doi: 10.1137/S1064827503424013 Dimarco, G., & Pareschi, L. 2014年, 《数值学报》, 23, 369–520, doi: 10.1017/S0962492914000063 Dubey, A., Almgren, A., Bell, J., et al. 2014年, 《并行与分布式计算杂志》, 74, 3217, doi: https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2014.07.001 Dubey, A., Weide, K., O'Neal, J., et al. 2022年, SoftwareX, 19, 101168, doi: 10.1016/j.softx.2022.101168 Dubroca, B., & Feugeas, J.-L. 1999, 《科学报告——数学系列 I》, 329, 915, doi: 10.1016/S0764-4442(00)87499-6 Dumbser, M., Zanotti, O., Loub`ere, R., & Diot, S. 2014年, 《计算物理学杂志》, 278, 47, doi: 10.1016/j.jcp.2014.08.009 Einfeldt, B. 1988年, 《SIAM数值分析杂志》, 25, 294, doi: 10.1137/0725021 Endeve, E., Hauck, C. D., Xing, Y., & Mezzacappa, A. 2015年, 《计算物理学杂志》, 287, 151, doi: 10.1016/j.jcp.2015.02.005 Fischer, T., Guo, G., Langanke, K., et al. 2023年, arXiv电子预印本, arXiv:2308.03962, doi: 10.48550/arXiv.2308.03962 Fischer, T., Guo, G., Langanke, K., et al. 2024年, 《粒子与核物理进展》, 137, 104107, doi: 10.1016/j.ppnp.2024.104107 Fischer, T., Guo, G., Mart´ınez-Pinedo, G., Liebend¨orfer, M., & Mezzacappa, A. 2020年, 《物理评论D》, 102, 123001, doi: 10.1103/PhysRevD.102.123001 Fu, G., & Shu, C.-W. 2017年, 《计算物理学杂志》, 347, 305, doi: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.06.046 Glas, R., Just, O., Janka, H.-T., & Obergaulinger, M. 2019年, 《天体物理学杂志》, 873, 45, doi: 10.3847/1538-4357/ab0423 Gonz´alez, M., Audit, E., & Huynh, P. 2007年, 《天文学与天体物理学》, 464, 429, doi: 10.1051/0004-6361:20065486 Guermond, J.-L., & Kanschat, G. 2010, 《工业与应用数学学会数值分析杂志》, 48, 53, doi: 10.1137/090746938 Hannestad, S., & Raffelt, G. 1998, 《天体物理学杂志》, 507, 339, doi: 10.1086/306303 Harada, A., Nagakura, H., Iwakami, W., et al. 2019年, 《天体物理学杂志》, 872, 181, doi: 10.3847/1538-4357/ab0203 Harris, C.R., Millman,K. J., van der Walt,S. J., et al. 2020年, 《自然》, 585, 357, doi: 10.1038/s41586-020-2649-2 Harris, J. A., Chu, R., Couch, S. M., et al. 2022年, 《高性能计算应用国际期刊》, 36, 59, doi: 10.1177/10943420211027937 Harten, A. 1983a, 《计算物理学杂志》, 49, 357, doi: 10.1016/0021-9991(83)90136-5 Harten, A. 1983b, 《计算物理学杂志》, 49, 357, doi: 10.1016/0021-9991(83)90136-5 Hayes, J. C., & Norman, M. L. 2003, 《天体物理学杂志增刊》, 147, 197, doi: 10.1086/374658 Herant, M., Benz, W., Hix, W. R., Fryer, C. L., & Colgate, S. A. 1994, 《天体物理学杂志》, 435, 339, doi: 10.1086/174817 Hix, W. R., Messer, O. E., Mezzacappa, A., et al. 2003, 《物理评论快报》, 91, 201102, doi: 10.1103/PhysRevLett.91.201102 Hobbs, T. J., Alberg, M., & Miller, G. A. 2016, 《物理评论C》, 93, 052801, doi: 10.1103/PhysRevC.93.052801 Horowitz, C. J. 1997, 《物理评论D》, 55, 4577, doi: 10.1103/PhysRevD.55.4577 Horowitz, C. J. 2002, 《物理评论D》, 65, 043001, doi: 10.1103/PhysRev D.65.043001 Horowitz, C. J., Caballero, O.L.,Lin, Z., O' Connor, E., &Schwenk, A. 2017, 《物理评论C》, 95, 025801, doi: 10.1103/PhysRevC.95.025801 Hunter, J., Endeve, E., Laiu, M. P., & Xing, Y. 2025, 《物理评论D》, 111, 043001, doi: 10.1103/PhysRevD.111.043001 Hunter, J. D. 2007, 《科学与工程计算》, 9, 90, doi: 10.1109/MCSE.2007.55 Iwakami, W., Okawa, H., Nagakura, H., et al. 2020, 《天体物理学杂志》, 903, 82, doi: 10.3847/1538-4357/abb8cf Janka, H.-T. 2001, 《天文学与天体物理学》, 368, 527, doi: 10.1051/0004-6361:20010012 Janka, H.-T. 2012, 《核与粒子科学年度评论》, 62, 407, doi: 10.1146/annurev-nucl-102711-094901 Janka, H.-T. 2025, 《核与粒子科学年度评论》, 75, 425, doi: https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-121423-100945 Janka, H.-T., Langanke, K., Marek, A., Mart´ınez-Pinedo, G., & M¨uller, B. 2007, 《物理学报告》, 442, 38, doi: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2007.02.002 Ji, L., Mewes, V., Zlochower, Y., et al. 2023, 《物理评论D》, 108, 104005, doi: 10.1103/PhysRevD.108.104005 Jiang, Y.-F., Stone, J. M., & Davis, S. W. 2012, 《天体物理学杂志增刊》, 199, 14, doi: 10.1088/0067-0049/199/1/14 Jin, S. 2022, 《数值学报》, 31, 415–489, doi: 10.1017/S0962492922000010 Johns, L., Richers, S., & Wu, M.-R. 2025, 《核与粒子科学年度评论》, 75, 399, doi: 10.1146/annurev-nucl-121423-100853 Just, O., Obergaulinger, M., & Janka, H.-T. 2015, 《皇家天文学会月刊》, 453, 3386, doi: 10.1093/mnras/stv1892 Kershaw, D. 1976, 《通量限制：自然之道——输运方程数值求解的新方法》, 技术报告 UCRL-78378, 劳伦斯利弗莫尔实验室 Kl¨ockner, A., Warburton, T., Bridge, J., & Hesthaven, J. S. 2009, 《计算物理学杂志》, 228, 7863, doi: 10.1016/j.jcp.2009.06.041

Knoll, D. A., & Keyes, D. E. 2004, 《计算物理学杂志》, 193, 357, doi: 10.1016/j.jcp.2003.08.010 Kurganov, A., & Tadmor, E. 2000, 《计算物理学杂志》, 160, 241, doi: 10.1006/jcph.2000.6459 Kuroda, T., Takiwaki, T., & Kotake, K. 2016, 《天体物理学杂志增刊》, 222, 20, doi: 10.3847/0067-0049/222/2/20 Laiu, M. P., Endeve, E., Chu, R., Harris, J. A., & Messer, O. E. B. 2021, 《天体物理学杂志增刊》, 253, 52, doi: 10.3847/1538-4365/abe2a8 Laiu, M. P., Endeve, E., Harris, J. A., Elledge, Z., & Mezzacappa, A. 2025, 《计算物理学杂志》, 520, 113477, doi: 10.1016/j.jcp.2024.113477 Laiu, M. P., Harris, J. A., Chu, R., & Endeve, E. 2020, 《物理学杂志：会议系列》, 1623, 012013, doi: 10.1088/1742-6596/1623/1/012013 Langanke, K., Mart´ınez-Pinedo, G., Sampaio, J. M., et al. 2003, 《物理评论快报》, 90, 241102, doi: 10.1103/PhysRevLett.90.241102 Larecki, W., & Banach, Z. 2011, 《定量光谱学与辐射传输杂志》, 112, 2486, doi: 10.1016/j.jqsrt.2011.06.011 Larsen, E. W., & Morel, J. E. 1989, 《计算物理学杂志》, 83, 212, doi: 10.1016/0021-9991(89)90229-5 LeBlanc, J. M., & Wilson, J. R. 1970, 《天体物理学杂志》, 161, 541, doi: 10.1086/150558 Lentz, E. J., Mezzacappa, A., Messer, O. E. B., et al. 2012, 《天体物理学杂志》, 747, 73, doi: 10.1088/0004-637X/747/1/73 Lentz, E. J., Bruenn, S. W., Hix, W. R., et al. 2015, 《天体物理学杂志快报》, 807, L31, doi: 10.1088/2041-8205/807/2/L31 Levermore, C. D. 1984, 《定量光谱学与辐射传输杂志》, 31, 149, doi: 10.1016/0022-4073(84)90112-2 Liebend¨orfer, M., Messer, O. E. B., Mezzacappa, A., et al. 2004, 《天体物理学杂志增刊》, 150, 263, doi: 10.1086/380191 Liebend¨orfer, M., Mezzacappa, A., Thielemann, F.-K., et al. 2001, 《物理评论D》, 63, 103004, doi: 10.1103/PhysRevD.63.103004 Liebend¨orfer, M., Rampp, M., Janka, H.-T., & Mezzacappa, A. 2005, 《天体物理学杂志》, 620, 840, doi: 10.1086/427203 Liu, X. D., & Osher, S. 1996, 《工业与应用数学学会数值分析杂志》, 33, 760, doi: 10.1137/0733038 Lowrie, R. B., Mihalas, D., & Morel, J. 2001, 《定量光谱学与辐射传输杂志》, 69, 291, doi: 10.1016/S0022-4073(00)00085-6 Lowrie,R.B.,& Morel,J. 2002, 《流体数值方法国际期刊》, 40, 413, doi: 10.1002/fld.321 Marek, A., Dimmelmeier, H., J anka, H.-T., M¨uller, E., & Buras, R. 2006, 《天文学与天体物理学》, 445, 273, doi: 10.1051/0004-6361:20052840 Marek, A., & Janka, H.-T. 2009, 《天体物理学杂志》, 694, 664, doi: 10.1088/0004-637X/694/1/664 McClarren, R., & Lowrie, R. 2008, 《计算物理学杂志》, 227, 9711, doi: 10.1016/j.jcp.2008.07.012 Melson, T., Janka, H.-T., Bollig, R., 等. 2015a, 《天体物理学快报》, 808, L42, doi: 10.1088/2041-8205/808/2/L42 Melson, T., Janka, H.-T., & Marek, A. 2015b, 《天体物理学快报》, 801, L24, doi: 10.1088/2041-8205/801/2/L24 Mezzacappa, A., & Bruenn, S. W. 1993a, 《天体物理学杂志》, 410, 740, doi: 10.1086/172791 Mezzacappa, A., & Bruenn, S. W. 1993b, 《天体物理学杂志》, 405, 637, doi: 10.1086/172394 Mezzacappa, A., Endeve, E., Messer, O. E. B., & Bruenn, S. W. 2020, 《计算天体物理学综述》, 6, 4, doi: 10.1007/s41115-020-00010-8 Mezzacappa, A., & Matzner, R. A. 1989, 《天体物理学杂志》, 343, 853, doi: 10.1086/167756 Mezzacappa, A., & Zanolin,M. 2025, Rev.Mod. Phys., 97, 041002, doi: 10.1103/pv6p-dtr2 Mihalas, D. 1980, 《天体物理学杂志》, 237, 574, doi: 10.1086/157902 Mihalas, D., & Mihalas, B. W. 1999, 辐射流体力学基础 (Dover（纽约）) Minerbo, G. N. 1978, 《定量光谱学与辐射传输杂志》, 20, 541, doi: 10.1016/0022-4073(78)90024-9 M¨uller, B. 2020, 《计算天体物理学综述》, 6, 3, doi: 10.1007/s41115-020-0008-5 M¨uller, B. 2025, 超新星模拟 (新加坡：Springer Nature Singapore), 663–698, doi: 10.1007/978-981-97-8522-3 19 M¨uller, B., Janka, H.-T., & Dimmelmeier, H. 2010, 《天体物理学杂志增刊》, 189, 104, doi: 10.1088/0067-0049/189/1/104 M¨uller, B., Janka, H.-T., & Marek, A. 2012, 《天体物理学杂志》, 756, 84, doi: 10.1088/0004-637x/756/1/84 Murchikova, E. M., Abdikamalov, E., & Urbatsch, T. 2017, 《皇家天文学会月刊》, 469, 1725, doi: 10.1093/mnras/stx986 Nagakura, H., Iwakami, W., Furusawa, S., 等. 2018, 《天体物理学杂志》, 854, 136, doi: 10.3847/1538-4357/aaac29 Noble, S. C., Gammie, C. F., McKinney, J. C., & Del Zanna, L. 2006, 《天体物理学杂志》, 641, 626, doi: 10.1086/500349 O'Connor, E. 2015, 《天体物理学杂志增刊》, 219, 24, doi: 10.1088/0067-0049/219/2/24 O'Connor, E. P., & Couch, S. M. 2018, 《天体物理学杂志》, 854, 63, doi: 10.3847/1538-4357/aaa893 Ott, C. D., Burrows, A., Dessart, L., & Livne, E. 2008, 《天体物理学杂志》, 685, 1069, doi: 10.1086/591440 O'Connor, E., Bollig, R., Burrows, A., 等. 2018, 《G辑：核与粒子物理学杂志》, 45, 104001, doi: 10.1088/1361-6471/aadeae Pareschi, L., & Russo, G. 2005, 《科学计算杂志》, 25, 129, doi: 10.1007/s10915-004-4636-4 Pennisi, S. 1992, 《国际工程科学杂志》, 30, 679, doi: 10.1016/0020-7225(92)90011-5

Pochik, D., Barker, B. L., Endeve, E., 等. 2021, 《天体物理学杂志增刊》, 253, 21, doi: 10.3847/1538-4365/abd700 Pons, J. A., Ib´a˜nez, J. M., & Miralles, J. A. 2000, 《皇家天文学会月刊》, 317, 550, doi: 10.1046/j.1365-8711.2000.03679.x Rahman, N., Just, O., & Janka, H.-T. 2019, 《皇家天文学会月刊》, 490, 3545, doi: 10.1093/mnras/stz2791 Rampp, M., & Janka, H.-T. 2000, 《天体物理学杂志快报》, 539, L33, doi: 10.1086/312837 Rampp, M., & Janka, H. T. 2002, 《天文学与天体物理学》, 396, 361, doi: 10.1051/0004-6361:20021398 Reddy, S., Prakash, M., & Lattimer, J. M. 1998, 《物理评论D》, 58, 013009, doi: 10.1103/PhysRevD.58.013009 Rezzolla, L., & Zanotti, O. 2013, 相对论流体力学 (牛津大学出版社) Richers, S. 2020, 《物理评论D》, 102, 083017, doi: 10.1103/PhysRevD.102.083017 Richers, S., & Sen, M. 2022, 快速味变换 (Springer Nature Singapore), 1–17, doi: 10.1007/978-981-15-8818-1 125-1 Rueda-Ram´ırez, A. M., Hindenlang, F. J., Chan, J., & Gassner, G. J. 2023, 《计算物理学杂志》, 475, 111851, doi: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111851 Rujeko, C., & Reynolds, D. 2021, 《SIAM科学计算杂志》, 43, 3082, doi: 10.1137/20M1354349 Sandu, A. 2019, 《SIAM数值分析杂志》, 57, 2300, doi: 10.1137/18M1205492 Schaal, K., Bauer, A., Chandrashekar, P., 等. 2015, 《皇家天文学会月刊》, 453, 4278, doi: 10.1093/mnras/stv1859 Schneider, F. 2016, 《计算物理学杂志》, 322, 905, doi: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.080 Shibata, M., Kiuchi, K., Sekiguchi, Y., & Suwa, Y. 2011, 《理论物理进展》, 125, 1255, doi: 10.1143/PTP.125.1255 Shu, C.-W. 2016, 《计算物理学杂志》, 316, 598, doi: 10.1016/j.jcp.2016.04.030 Shu, C.-W., & Osher, S. 1988, 《计算物理学杂志》, 77, 439, doi: 10.1016/0021-9991(88)90177-5 Skinner, M. A., Burrows, A., & Dolence, J. C. 2016, 《天体物理学杂志》, 831, 81, doi: 10.3847/0004-637X/831/1/81 Skinner, M. A., Dolence, J. C., Burrows, A., Radice, D., & Vartanyan, D. 2019, 《天体物理学杂志增刊》, 241, 7, doi: 10.3847/1538-4365/ab007f Skinner, M. A., & Ostriker, E. C. 2013, 《天体物理学杂志增刊》, 206, 21, doi: 10.1088/0067-0049/206/2/21 Smit, J. M., Cernohorsky, J., & Dullemond, C. P. 1997, 《天文学与天体物理学》, 325, 203 Smit, J. M.,van den Horn, L. J., & Bludman, S. A. 2000, 《天文学与天体物理学》, 356, 559 Steiner, A. W., Hempel, M., & Fischer, T. 2013, 《天体物理学杂志》, 774, 17, doi: 10.1088/0004-637X/774/1/17 Sumiyoshi, K., Yamada, S., Suzuki, H., 等. 2005, 《天体物理学杂志》, 629, 922, doi: 10.1086/431788 Tamborra, I., & Shalgar, S. 2021年, 《核与粒子科学年度评论》, 71, 165, doi: 10.1146/annurev-nucl-102920-050505Tchekhovskoy, A., McKinney, J. C., &Narayan, R. 2007, 《皇家天文学会月刊》, 379, 469, doi: 10.1111/j.1365-2966.2007.11876.xTeukolsky, S. A. 2016, 《计算物理学杂志》, 312, 333 , doi: 10.1016/j.jcp.2016.02.031Thavappiragasam, M.,Harris, J. A., Endeve, E., &Videau,B.2024 , 载于《面向未来加速器推进 OpenMP》, 编者: A. Espinosa, M. Klemm, B. R. de Supinski, M. Cytowski, & J. Klinkenberg（沙姆: 施普林格·自然瑞士）, 16–30, doi: 10.1007/978-3-031-72567-8 2 Thompson, T. A., Burrows, A., & Horvath 2000年, 《物理评论C》, 62, 035802, doi: 10.1103/PhysRevC.62.035802 Thompson, T. A., Burrows, A., & Pinto 2003年, 《天体物理学杂志》, 592, 434, doi: 10.1086/375701 Toro, E. F., Spruce, M., & Speares 1994, 《激波》, 4, 25, doi: 10.1007/BF01414629 Trotter, H. F. 1959, 《美国数学学会会刊》, 10, 545. http://www.jstor.org/stable/2033649 van Leer, B. 1979, 《计算物理学杂志》, 32, 101, doi: 10.1016/0021-9991(79)90145-1 Varma, V., M¨uller, B., & Obergaulinger 2021年, 《皇家天文学会月刊》, 508, 6033, doi: 10.1093/mnras/stab2983 Vaytet, N., Audit, E., Dubroca, B., & Delahaye 2011年, 《定量光谱学与辐射传输杂志》, 112, 1323, doi: doi={10.1016/j.jqsrt.2011.01.027}Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., et al. 2020年, 《自然·方法》, 17, 261, doi: 10.1038/s41592-019-0686-2 Volpe, M. C. 2024, 《现代物理学评论》, 96, 025004, doi: 10.1103/RevModPhys.96.025004 Walker, H., & Ni, P. 2011年, 《SIAM数值分析杂志》, 49, 1715, doi: 10.1137/10078356X Wang, T., & Burrows 2023年, 《天体物理学杂志》, 943, 78, doi: 10.3847/1538-4357/aca75c Woosley, S. E., & Heger 2007, 《物理学报告》, 442, 269, doi: 10.1016/j.physrep.2007.02.009 Woosley, S. E., & Weaver 1995, 《天体物理学杂志增刊》, 101, 181, doi: 10.1086/192237 Yamada,S., Nagakura, H., Akaho,R., et al.2024, 《日本学士院纪要B辑》, 100, 190, doi: 10.2183/pjab.100.015 Zhang, W., Howell, L., Almgren, A., et al. 2012年, 《天体物理学杂志增刊》, 204, 7, doi: 10.1088/0067-0049/204/1/7 Zhang, X., & Shu, C.-W. 2010, 《计算物理学杂志》, 229, 3091, doi: 10.1016/j.jcp.2009.12.030 Zhang, X., & Shu, C.-W. 2011, 《计算物理学杂志》, 230, 1238, doi: 10.1016/j.jcp.2010.10.036