arXiv:2601.00983v1 [math.NT] 2 Jan 2026

关于 Al-Salam–Chihara 多项式的 Ismail 恒等式的组合证明

ALI KEMAL UNCU

Dedicated to Mourad Ismail, a great inspiration, on the occasion of his 80th birthday.

Abstract. 我们利用分拆理论的生成函数解释，为 Mourad Ismail 的工作中出现的两个恒等式给出了新的证明t理论生成函数解释。

1. Introduction

伊斯梅尔一直是推动 q-级数研究发展的重要力量。他是正交多项式与特殊函数领域的造诣极深的大师。我在佛罗里达大学读研究生时，有幸结识了 Mourad。虽然从地理位置上看我们相距不远，但我们很少互相拜访。研究方面也是如此。表面上看，我们对相似的数学对象感兴趣，所得到的一些结果也总是看起来密切相关；然而， q-级数的面向实在太多，我无法理解他是如何取得那些发现的。Mourad 的专长对我而言曾经、如今依然如同魔法一般。我当时正通过分拆理论，掌握以组合方法处理 q-级数。我在奥地利见到 Mourad 的次数比在佛罗里达还多。我在符号计算研究所担任博士后研究员，后来又在约翰·拉东计算与应用数学研究所工作期间，他曾多次访问奥地利。2018 年，我观看了 Mourad 在 Peter Paule（另一位技艺精湛的大师）的 60 岁生日庆祝活动 [10] 上所作的报告。我们交流了对报告及其内容的一些想法，尤其是他那些结果的组合意义。Mourad 指给我看了他当时的手稿 [11]。他表达了希望了解能否用组合学证明其结果的愿望。我证明了其中一些结果，并在私下交谈中分享了这些证明。我很感激他在 [11]中认可了这些证明。对于一位刚开始博士后生涯的研究者来说，能得到一位数学界传奇人物如此认可，是一种荣誉。值他 80 岁生日之际，我决定重新审视并改写这些证明，将它们献给他。希望这也能鼓励其他分拆理论研究者关注 Mourad 的著作以及所有相关研究。可以肯定的是，借助组合技巧研究 q-级数的这一方面，还有很多值得学习、值得证明，也有很大的探索和改进空间。

本文利用分拆生成函数的解释，为以下两个定理给出新的证明。在本文余下部分，设 q、 a、 b、 t 和 x 均为形式超越变量，彼此之间不满足任何关系。

定理 1.1.

$$\frac{(atq;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\sum_{k\geq 0}\frac{(-bt)^k}{(q,atq;q)_k}q^{k(k+1)/2}=\frac{(atq,btq;q)_\infty}{(q;q)_\infty}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k(abt^2q)^kq^{k(3k-1)/2}}{(atq,btq,q;q)_k}. \tag{1.1}$$

定理 1.2。

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}(-x)^n}{(q;q)_n}=(xq^2;q^2)_\infty\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}(-x)^n}{(q^2,xq^2;q^2)_n}. \tag{1.2}$$

Date: 2026年1月6日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 05A15, 05A17, 05A19, 11B65, 11P81, 33D15.*Key words and phrases.* 加权分拆恒等式。

值得注意的是，上述定理见于拉马努金遗失的笔记本。具体而言，它们分别是 [3, 条目 2.2。4]和 [3, 条目 1.5。1], 。Berndt–Kim–Yee 在 [7, 定理 5.5] 中给出了定理 1.2 的另一种简短得多的组合证明。

在回应 Mourad 的请求时，我并未意识到 [7]。我为定理 1.1 和定理 1.2 所写证明的原始说明篇幅较长，只供 Mourad 阅读，并假定他此前并不了解分拆理论。尽管如此，独立研究已证明的恒等式再次展现了其价值。我们通过以下分拆关系以及以下q-级数恒等式来说明这一点。对分拆进行不同的拆分，从而得到新的证明，会带来新的双射和更多的组合联系。例如，在证明定理 1.2 时，我们还将得到以下新的分拆定理。

定理 1.3。

$$\sum_{\pi\in\mathcal{RR}} x^{\nu(\pi)}q^{|\pi|} = \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{D}\\ s_e(\pi)>2\nu_o(\pi)}} x^{\nu(\pi)}q^{|\pi|},$$

其中， $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{RR}$ 分别是分拆项之间间隔为 ≥ 1 和 ≥ 2的分拆集合； $\nu(\pi)$ 和$\nu_o(\pi)$ 分别表示一个分拆的分拆项数和奇数部分数； $s_e(\pi)$ 表示最小偶数部分（若没有偶数部分，则为 ∞ ）。

为进一步展示定理 1.3 所揭示的组合联系，我们在表 1 中明确列出两个集合中所有恰好由 3 个分拆项组成的 15 的分拆。

TABLE 1。由定理 1 两边计数的恰好由 3 个分拆项组成的 15 的分拆 .3

$\pi\in\mathcal{RR}$	$\pi\in\mathcal{D},\ s_e(\pi)>2\nu_o(\pi)$
$(11,3,1)$	$(11,3,1)$
$(10,4,1)$	$(10,4,1)$
$(9,5,1)$	$(9,5,1)$
$(9,4,2)$	$(8,6,1)$
$(8,6,1)$	$(8,4,3)$
$(8,5,2)$	$(7,5,3)$
$(7,5,3)$	$(6,5,4)$

此外，对生成函数组合结构的理解使我们得以对这些函数及其恒等式进行细化。下面的多项式恒等式就是其中之一，它蕴含定理 1.1。

定理 1.4. 对于所有非负整数 L，我们有

$$\sum_{n,k=0}^{\lfloor L/2\rfloor}\frac{q^{n^2+2nk+k(k+1)}x^{n+k}}{(q^2;q^2)_{n+k}}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q^2}(q^{2(\lfloor(L+1)/2\rfloor-n-k+1)};q^2)_n(q^{2(\lfloor L/2\rfloor-n-k+1)};q^2)_k$$

$$=\frac{(-1)^L-1}{2}q^{L^2}x^L+\sum_{n=0}^{L+1}q^{n^2}x^n\begin{bmatrix}L-n+1\\n\end{bmatrix}_q, \tag{1.3}$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$是 下取整函数，它取小于或等于自变量的最大整数 .

A 定理 1.4 的推论是，通过比较 (1.3) 中 x 的指数，可得如下结果 g.

推论 1.5. 对于所有非负整数 L和 m，我们有

$$\sum_{k\geq 0}q^k\frac{(q^{2(\lfloor(L+m)/2\rfloor-m+1)};q^2)_{m-k}(q^{2(\lfloor(L+m-1)/2\rfloor-m+1)};q^2)_k}{(q^2;q^2)_m}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}_{q^2}=\begin{bmatrix}L\\m\end{bmatrix}_q.$$

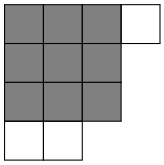
本文其余部分安排如下。下一节介绍必要的背景信息。接下来的两节给出定理 1.1 和定理 1.2 的组合证明，以及观察到的分拆恒等式。最后一节将展望、对定理 1.4 及一个蕴含定理 1.1 的类似结果的讨论，以及未来可能的研究方向作为重点。

2. Some Background

我们将采用 Andrews 百科全书 [2] 中分拆理论的经典定义。为求完整起见，我们在此重述一些重要的定义和公式。

分拆是由正整数组成的有限非递增列表，例如 $\pi = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_{\nu(\pi)})$，其中$\lambda_i$ 是 π的分拆项， $\nu(\pi)$表示 π的分拆项数， $l(\pi)$表示 π的最大分拆项。 π的所有分拆项之和记为 $|\pi|$，称为 π的大小。如果其大小等于 n，则称 π 为“n 的一个分拆”。令 $\mathcal{D}$ 为互异部分的分拆集合， $\mathcal{P}$ 为所有分拆的集合。例如，(5，4，1)是10的一个（各部分互异的）分拆，含有3个分拆项。此外，空列表是大小为0（且含有0个分拆项）的唯一分拆。

分拆与费雷尔图（或杨表）之间存在一一对应关系。例如，分拆 (4，3，3，2) 与下图相对应，



其中，分拆中最大的部分对应最上方一行的框数，第二大的部分对应从上往下第二行的框数，依此类推。最后，在分拆的 Ferrers 图中，可以放入一个唯一的最大正方形，使正方形的一个角与图的左上角对齐。这个唯一的正方形称为杜菲方块，我们将 π 的杜菲方块边长记为 $d(\pi)$。在上面的例子中，杜菲方块的大小为 3×3，并在 Ferrers 图中以灰色阴影标出。

我们定义 q-Pochhammer 符号

$$(a;q)_n := \prod_{i=0}^{n-1}(1-aq^i) \quad \text{and} \quad (a_1, a_2, \ldots, a_k; q)_n := \prod_{i=1}^{k}(a_i;q)_n,$$

wh其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$。此外，我们定义高斯系数（或 q-二项式系数）a　　s

$$\begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \frac{(q;q)_{a+b}}{(q;q)_a (q;q)_b}, & \text{if } a, b \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

高斯系数在经典分拆理论中的解释

$$\begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix}_q$$

是这样一个生成函数：它计数最大分拆项为 $\leq a$ 且分拆项数为 $\leq b$ 的分拆（等价地说，其费雷尔图可以放入一个 $a \times b$ 框中）。

令 $1 \leq j$ 和 $j \leq N \leq \infty$。对于分拆项取自集合 $\{j, j+1, \ldots, N\}$ 的分拆，其生成函数有多种表示形式；其中， q的指数记录分拆的大小，而 x 的指数记录分拆项数：

$$\frac{1}{(xq^j;q)_{N-j+1}} = 1 + \sum_{i=j}^{N} \frac{xq^i}{(xq^i;q)_{N-i+1}} = \sum_{i=j}^{N} \frac{x^i q^{i^2}}{(xq^j;q)_{i-j+1}} \begin{bmatrix} N \\ i \end{bmatrix}_q + \sum_{i=0}^{j-1} x^i q^{ij} \begin{bmatrix} N-j+i \\ i \end{bmatrix}_q. \tag{2.1}$$

这些表达式从左到右的解释，分别是通过几何级数展开和形式乘法得到的：按照最小部分及其余部分对分拆进行剖分

分拆项, 以及按照杜菲方块对分拆进行剖分。类似地,

$$\sum_{i=j}^{N} \frac{x^i q^i}{(q;q)_i} \tag{2.2}$$

可以解释为至少有 j 个分拆项且至多有 N 个分拆项的分拆数量的生成函数，其中 q 的指数记录分拆的大小，而x 的指数记录分拆中分拆项的数量。

也可以写出类似的生成函数，用于计数由互异部分组成的分拆。集合 $\{j, j+1, \ldots, N\}$中互异部分组成的分拆数量的生成函数（其中 q 的指数记录分拆的大小，而 x 的指数记录分拆中分拆项的数量）可表示为$(-xq^j;q)_{N-j+1}$。至少有 j 个且至多有 N 个分拆项的互异分拆数量的生成函数为

$$\sum_{i=j}^{N} \frac{x^i q^{i(i+1)/2}}{(q;q)_i}. \tag{2.3}$$

这里，指数 $i(i+1)/2$ 解释为分拆$(i,\ \ i-1,\ \ i-2,\ \ldots\ldots,\ \ 1)$，这是由 i个互异部分组成的最小分拆。

在（2.1）、（2.2）和（2.3）的所有求和表示中，被加数表示具有相应剖分且固定 i的分拆，其中固定的量可以是分拆项的数目，也可以是杜菲方块的边长。对从 j 到 N 的所有可能性求和，即可得到该解释的生成函数。

3. Proof of Theorem 1.1

在开始证明（1.1）之前，请注意，该等式的两边分别是 [11]中的（5.2）和（5.7）的右边。伊斯梅尔通过研究其核心对象 Al-Salam–Chihara 多项式与杰克逊的 ${}_2\phi_1 - {}_2\phi_2$ 变换 [9, III.4，第 359] 页（伊斯梅尔称之为 q-Pfaff–Kummer 变换）的极限形式来证明这一恒等式。

在这里，我们希望仅使用组合推理给出一个简短证明。经过一些基本的约分和 $b \mapsto -b$之后，（1.1）等价于恒等式

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(q, atq;q)_k} = \sum_{m\geq 0} (bt)^m q^{m(m+1)/2} (-btq^{m+1};q)_\infty \frac{(at)^m q^{m^2}}{(q, atq;q)_m}. \tag{3.1}$$

我们的目标是证明，该恒等式的两边都是同一组分拆对数量的生成函数。

从（3.1）的左端出发，对于固定的 k，我们知道

$$\frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_k}$$

是将整数分拆为 k 互异部分的分拆数量的生成函数，其中 (bt) 的指数表示分拆项的数量（见第 2 节）。我们还知道

$$\frac{1}{(atq;q)_k}$$

是以分拆项 $\leq k$ 为部件的分拆数量的生成函数，其中 (at) 的指数表示分拆项的个数。综合来看，(3.1) 左边固定 k 时的被加数，是分拆对数量的生成函数，其中第一分拆 π_1 恰好由 k 个互异部分组成，而第二分拆 π_2 （不一定由互异部分组成）满足关系 $l(\pi_2) \leq k$。对所有 k 求和，可得关系：

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(q, atq;q)_k} = \sum_{\substack{(\pi_1,\pi_2)\in \mathcal{D}\times\mathcal{P} \\ l(\pi_2)\leq \nu(\pi_1)}} t^{\nu(\pi_1)+\nu(\pi_2)} a^{\nu(\pi_2)} b^{\nu(\pi_1)} q^{|\pi_1|+|\pi_2|}. \tag{3.2}$$

现在我们转而解释 (3.1) 右边的含义。表达式

$$(bt)^m q^{m(m+1)/2}(-btq^{m+1};q)_\infty$$

是将 π_1^* 分拆为 $\geq m$ 个互异部分的分拆数的生成函数，其中分拆项 1、2、..... m 都出现在该分拆中，而 (bt) 的指数记录分拆项的个数。该分式

$$\frac{(at)^m q^{m^2}}{(q,atq;q)_m}$$

是含有 $m\times m$ 杜菲方块的分拆数的生成函数，而 (at) 的指数记录分拆项的个数。对所有 m 求和可得

$$\sum_{m\geq 0}(bt)^m q^{m(m+1)/2}(-btq^{m+1};q)_\infty \frac{(at)^m q^{m^2}}{(q,atq;q)_m} = \sum_{\substack{(\pi_1^*,\pi_2^*)\in\mathcal{D}\times\mathcal{P}\\ d(\pi_2^*)\leq r(\pi_1^*)}} t^{\nu(\pi_1^*)+\nu(\pi_2^*)} a^{\nu(\pi_2^*)} b^{\nu(\pi_1^*)} q^{|\pi_1^*|+|\pi_2^*|}, \tag{3.3}$$

其中，$r(\pi_1^*)$ 是 π_1^* 中从 1 开始的连续分拆项的个数。

我们的下一个任务是证明 (3.2) 和 (3.3) 计数相同。为此，我们希望对 (3.3) 左侧作修改，并证明它可以看作一个生成函数，用来计数与 (3.2) 所计数的相同的分拆。

对于固定的 m，我们有

$$(bt)^m q^{m(m+1)/2}(-btq^{m+1};q)_\infty = \sum_{k=m}^{\infty}\frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_{k-m}}.$$

这里，右边的被加数可视为将 k 个互异部分分拆为分拆项 1、2、. . . 、 m 的数量生成函数，而 (bt) 的指数记录分拆项的个数。对右边的 k 求和即可得出两边等价。然后，将其代入 (3.1) 的右边，得到

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 0}(bt)^m q^{\binom{m+1}{2}}(-btq^{m+1};q)_\infty \frac{(at)^m q^{m^2}}{(q,atq;q)_m} &= \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_{k-m}}\right)\frac{(at)^m q^{m^2}}{(q,atq;q)_m},\\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_{k-m}(q;q)_m}\frac{(at)^m q^{m^2}}{(atq;q)_m},\\ &= \sum_{m\geq 0}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_k}\begin{bmatrix}k\\ m\end{bmatrix}_q\frac{(at)^m q^{m^2}}{(atq;q)_m}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

对于固定的 m，(3.4) 的内层求和：

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_k}\begin{bmatrix}k\\ m\end{bmatrix}_q\frac{(at)^m q^{m^2}}{(atq;q)_m}$$

可以分成三部分来解释。首先，

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_k}$$

是将 π_1 分拆为 $k(\geq m)$ 个互异部分的分拆数量生成函数，其中 (bt) 的指数记录分拆项的个数。其次，

$$\frac{(at)^m q^{m^2}}{(atq;q)_m}$$

是最大分拆项恰好为 m 、且最大分拆项至少重复 m 次的分拆˜π_2 数量的生成函数，而(at)的指数记录分拆项的数量。

最后

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}_m$$

is 适合放入一个 $m \times (k-m)$ bo 的分拆数量的生成函数 ˆπ_3 x.

注意，分拆 ˆπ_2 和 ˆπ_3 可以拼在一起，通过将 ˆπ_3 放在 m 个 m 的右侧，得到一个新的分拆 π_2。所得分拆的杜菲方块与 ˆπ_2 的杜菲方块相同。此操作是一一对应的。对于任意给定的分拆，只需将杜菲方块右侧的分拆项拆开，即可还原此操作。这种合并操作会改变最大分拆项的大小。分拆 π_2 的最大分拆项为 $\leq k$ （小于 π_1 的分拆项数），其杜菲方块的大小为 $m \times m$。综合以上观察，我们得到

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_k} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}_q \frac{(at)^m q^{m^2}}{(atq;q)_m} = \sum_{\substack{(\pi_1,\pi_2)\in\mathcal{D}\times\mathcal{P} \\ d(\pi_2)=m \\ l(\pi_2)\leq\nu(\pi_1)}} t^{\nu(\pi_1)+\nu(\pi_2)} a^{\nu(\pi_2)} b^{\nu(\pi_1)} q^{|\pi_1|+|\pi_2|}.$$

对所有 $m \geq 0$ 求和，便解除了对分拆 π_2 的杜菲方块大小的限制。这表明 (3.3) 的左边等于 (3.2) 的右边：

$$\sum_{m\geq 0} (bt)^m q^{\binom{m+1}{2}} (-btq^{m+1};q)_\infty \frac{(at)^m q^{m^2}}{(q,atq;q)_m} = \sum_{\substack{(\pi_1,\pi_2)\in\mathcal{D}\times\mathcal{P} \\ l(\pi_2)\leq\nu(\pi_1)}} t^{\nu(\pi_1)+\nu(\pi_2)} a^{\nu(\pi_2)} b^{\nu(\pi_1)} q^{|\pi_1|+|\pi_2|}. \tag{3.5}$$

注意，(3.2) 和 (3.5) 的右边相等。这证明了 (3.1)，并推出定理 1.1。

本节中的论证也证明了以下结果。

定理 3.1。

$$\sum_{\substack{(\pi_1,\pi_2)\in\mathcal{D}\times\mathcal{P} \\ l(\pi_2)\leq\nu(\pi_1)}} t^{\nu(\pi_1)+\nu(\pi_2)} a^{\nu(\pi_2)} b^{\nu(\pi_1)} q^{|\pi_1|+|\pi_2|} = \sum_{\substack{(\pi_1^*,\pi_2^*)\in\mathcal{D}\times\mathcal{P} \\ d(\pi_2^*)\leq r(\pi_1^*)}} t^{\nu(\pi_1^*)+\nu(\pi_2^*)} a^{\nu(\pi_2^*)} b^{\nu(\pi_1^*)} q^{|\pi_1^*|+|\pi_2^*|}.$$

生成函数有一处细微变化，但这个变化并非无关紧要。例如，考虑两个大小总和为 8 的分拆对。分拆对 ((3,2),(2,1)) 计入左边的和式，却不计入右边；而 ((2,1),(3,2)) 计入右边，却不计入左边。

4. Proof of Theorem 1.2

现在我们开始证明定理 1.2，这一证明稍难一些。我们的证明不同于 [7] 中的证明。那里，作者将等式两边都解释为 2-模图，并通过从每个奇数部分中取出 1，进而论证两边生成的剩余分拆数量相同，从而说明等式两边的分拆数相同。我们也使用 2-模图，但方式不同。这里我们将定义一个从极小构型到适合放入特定尺寸框中的 Ferrers 图的显式双射，其生成函数为 q-二项式系数。我们还将在这里借助生成函数的解释证明分拆恒等式定理 1.3。

(1.2) 的左边是 Mourad [10] 所称的 Ramanujan 函数，带有 $x \mapsto -x$。这个函数常见于分拆的组合处理。在给出该证明之前，我们想先对这个恒等式两边作组合解释。在 (1.2) 中，令 $x \mapsto -x$以及右边带有外部因子 $(-xq^2;q^2)_\infty$，并进行被加数中出现的简单约分。由此得到等价公式

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2} x^n}{(q;q)_n} = \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2} x^n}{(q^2;q^2)_n} (-xq^{2n+2};q^2)_\infty. \tag{4.1}$$

(4.1) 的左边是 Ramanujan 函数，我们想从它的经典解释开始介绍。令 $\mathcal{RR}$ 为一类（罗杰斯–拉马努金型）分拆，其中每两个连续部分之间的间隔为 ≥ 2。那么，

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}x^n}{(q;q)_n}=\sum_{\pi\in\mathcal{RR}}x^{\nu(\pi)}q^{|\pi|}. \tag{4.2}$$

为了向不熟悉的读者提供更多背景，我们从一个简单的观察开始

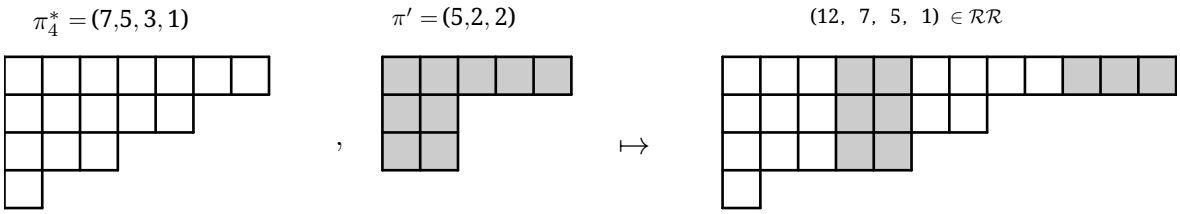
$$n^2=(2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1.$$

对于固定的正 n，我们将 $q^{n^2}x^n$ 理解为表示分拆

$$\pi_n^*=(2n-1,2n-3,\ldots,3,1)\in\mathcal{RR},$$

并且 x^n 记录分拆项的个数。注意， π_n^* 是由恰好 n 个分拆项组成、在 $\mathcal{RR}$ 中大小最小的分拆。我们将固定长度下大小最小的这类分拆称为最小构型。注意， $1/(q;q)_n$ 是分拆 π' 为 $\leq n$ 个分拆项的生成函数。分拆 π_n^* 与一个 π' 可以通过双射配对：将 π' 的 Ferrers 图中的列插入 π_n^* 的 Ferrers 图中，并确保插入列右侧的每一列都比它矮。如此持续操作，直到该列在 π_n^* 的 Ferrers 图中遇到高度相同或更高的列。表 2 展示了这一操作。

TABLE 2. 列插入操作示例。



还应注意，从任意分拆中取出属于 $\mathcal{RR}$的列，得到恰好 n 分拆项，从而构成一对分拆：其中一个分拆是最小构型 π_n^*，另一个分拆（可以是空分拆）有 $\leq n$ 分拆项。逆操作是直接明了的。因此，合并起来

$$\frac{q^{n^2}x^n}{(q;q)_n}=\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{RR}\\ \nu(\pi)=n}}x^{\nu(\pi)}q^{|\pi|}.$$

对所有 $n\geq 0$ 求和，便得到式（4.2）所表示的解释。

（4.1）的右边也可以用类似的方法进行解释。对于任意固定的非负整数 n，被加数中的因子

$$\frac{q^{n^2}x^n}{(q^2;q^2)_n}$$

是将 n个互异奇数部分分拆的生成函数，而

$$(-xq^{2n+2};q^2)_\infty$$

是将分拆项数为 $\geq 2n+2$ 的互异偶数部分分拆数的生成函数，其中 x在两个生成函数中都表示分拆项的数量。由于奇偶性差异，将这两个不同因子所计数的任意两个分拆组合起来并重新排列（很容易实现）即可建立双射，只需

将这些分拆合并，并按非递增顺序重新排列序列。这就得到了以下解释

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}x^n}{(q^2;q^2)_n}(-xq^{2n+2};q^2)_\infty=\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{D}\\ s_e(\pi)>2\nu_o(\pi)}}x^{\nu(\pi)}q^{|\pi|}, \tag{4.3}$$

其中， s_e（π）是 π 中的最小偶数部分（若存在；否则可将其定义为 ∞），而 ν_o（π）是 π中奇数部分的数量。

比较 (4.2) 和 (4.3) 即可证明定理 1.3。

现在我们开始证明 (4.1)：我们将说明，右边的级数可以解释为对与左边相同的分拆进行计数的生成函数。这里，我们希望更仔细地研究这些生成函数，从而明确说明，右边 (4.1) 也可以解释为从唯一的极小构型出发，对 Rogers–Ramanujan 型分拆进行计数的生成函数。

出于这一考虑，我们先将项 $(-xq^{2n+2};q^2)_\infty$ 改写为级数。对于固定的非负整数 n，由 $(-xq^{2n+2};q^2)_\infty$ 计数的一个分拆 π 含有偶数部分 $\geq 2n+2$。如果 π 有k个分拆项，那么从 π 的每个分拆项中提取（减去） $2n$ ，仍可得到一个由k 个互异偶数部分组成的分拆 π'。此外，还可以从 π' 中提取出 $2\binom{k+1}{2}=k(k+1)$ 个分拆项：从最小项中减去 2，从第二小项中减去 4，从第三小项中减去 6，依此类推，直至从π的最大项中减去 $2k$ 。由于这些分拆项互异且都是偶数，这样做是可行的。这样便留下分拆 π''，它是一个由 $\leq k$ 个偶数部分组成的分拆（可能为空）。这里的所有提取操作都是双射，且很容易逆转。因此，只需将这类分拆的生成函数相乘，就能得到它们的生成函数。所有此类 π'' 的生成函数为 $1/(q^2;q^2)_k$，而这些提取操作可表示为 q因子 $q^{2nk+k(k+1)}$。因此，

$$\frac{q^{2nk+k(k+1)}}{(q^2;q^2)_k}$$

是恰好含有 k 个不小于 $2n+2$ 的互异偶数部分的分拆的生成函数。对所有可能的 k 求和，并引入变量 x^k 来计数分拆项的个数，现在显然有

$$(-xq^{2n+2};q^2)_\infty=\sum_{k\geq 0}\frac{x^kq^{2nk+k(k+1)}}{(q^2;q^2)_k}. \tag{4.4}$$

将 (4.4) 代入 (4.1) 右边，重新排列求和次序，并仿照 (3.4) 引入一个 q 项式因子：

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}x^n}{(q^2;q^2)_n}(-xq^{2n+2};q^2)_\infty&=\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{q^{n^2+2nk+k(k+1)}x^{n+k}}{(q^2;q^2)_n(q^2;q^2)_k}\\&=\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{q^{n^2+2nk+k(k+1)}x^{n+k}}{(q^2;q^2)_{n+k}}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q^2}\end{aligned} \tag{4.5}$$

审视我们的目标，我们希望证明因子

$$q^{n^2+2nk+k(k+1)}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q^2}$$

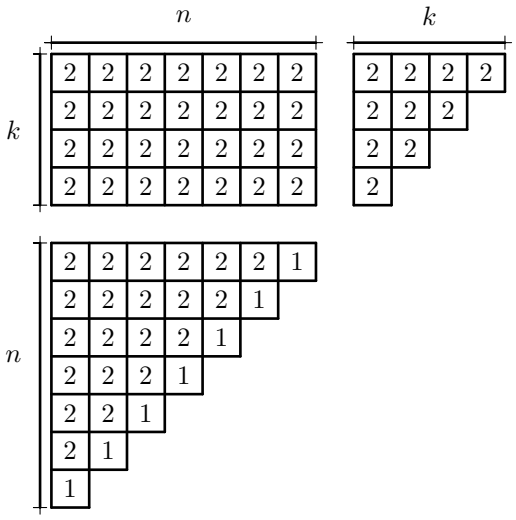
是满足 $\mathcal{RR}$将分拆项分为n-奇数部分和 k-偶数部分的间隔条件的所有分拆的数量生成函数，其中不能进行任何列抽取而不违反 $\mathcal{RR}$间隔条件。我们将此类分拆称为极小分拆。因此，额外的 $1/(q^2;q^2)_{n+k}$ 因子引入了要插入的额外列（如表 2 所示），同时不改变分拆项的奇偶性。这里的极小性定义与前一种情况类似；来自 $\mathcal{RR}$ 的一个极小分拆，是满足 $\mathcal{RR}$间隔条件的大小最小的分拆。这等价于说，对于来自 $\mathcal{RR}$ 的一个极小分拆，不能进行任何列抽取而不违反间隔条件。

一般而言，对于任意给定的分拆 π ，在 $\mathcal{RR}$ 中将其分为 m 分拆项，可以双射地尽可能多次抽取厚度为 2 的列，且不违反 $\mathcal{RR}$的间隔条件，并构造一对分拆 $(\pi_1,\ \pi_2)$，其中 π_1 是极小的，而 π_2 由 $\leq m$ 偶数部分组成。所有此类 π_2 的生成函数为

$$\frac{1}{(q^2;q^2)_M}. \tag{4.6}$$

我们仍需进一步研究 $\mathcal{RR}$ 中的极小分拆，并作一些观察。为了便于直观展示，在表3中，我们想从将 $q^{n^2+2nk+k}{}_{(k+1)}$ 解释为一个 2-模费雷尔图 [2, Ex 5., p. 13] 开始。（指数中的各项可以写得更简洁，但为了与（4.4）中概述的提取过程保持联系，我们将这三项分开列出。）

TABLE 3. 使用（$n,\ k$）=（7，4），将因子 $q^{n^2+2nk+k}{}_{(k+1)}$ 直观表示为 $\mathcal{RR}$ 中的一个分拆。



由 $q^{n^2+2nk+k}{}_{(k+1)}$ 编码的分拆——不存在可提取的多余列——是集合 $\mathcal{RR}$ 中由 n 个奇数部分和 k 个偶数部分构成的极小分拆。我们想指出，对于此类限制，极小分拆 [1] 可能不止一个，具体取决于奇数部分的位置。为此，我们在表4中列出了 $\mathcal{RR}$ 中由2个奇数部分和2个偶数部分构成的全部6个极小分拆，并以2-模费雷尔图表示。

现在，为了简化记号，我们希望将极小分拆与向量配对。在 $\mathcal{RR}$ 中，具有 n-奇数和 k-偶数分拆项的极小分拆，与以 k 1s 和 n 2s 为元素的 $1\times(n+k)$-向量之间存在一个双射。从极小分拆到向量的转换很容易表达：从最小的分拆项（Ferrers 图的底行）开始，将 2-模费雷尔图的行末方格值填入向量的各个元素中。表5对此进行了说明。

从向量到 2-模费雷尔图／分拆的逆向构造需要我们进行一些观察。第一个观察是，由 $q^{n^2+2nk+k}{}_{(k+1)}$ 编码的分拆是

$$(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-\text{many}},\underbrace{2,2,\ldots,2}_{k-\text{many}}).$$

可以根据给定的由 1 和 2 组成的向量构造一个 2-模费雷尔图。设 M 为该向量 v的长度，首先创建一个高度为 M的三角费雷尔图 π^*，然后填入

[1]确切数量为 $\binom{n+k}{n}$.

TABLE 4. $\mathcal{RR}$ 的极小分拆，其中分拆项分为 2-奇数部分和 2-偶数部分，并表示为 2-模费雷尔图 s.

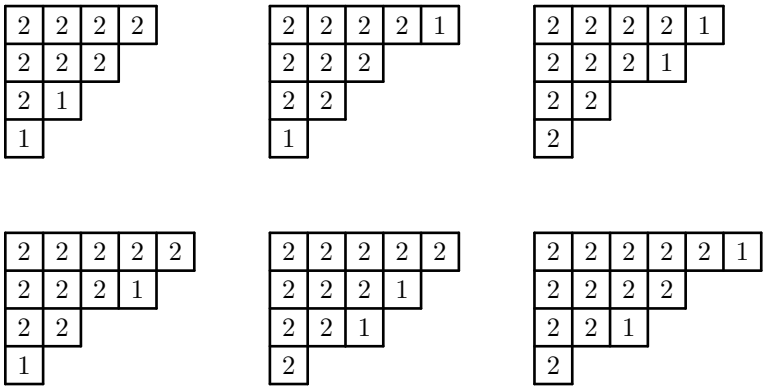


TABLE 5. $\mathcal{RR}$中极小分拆的相应向量表示，其中分拆项分为 2-奇数部分和 2-偶数部分，见表4

$$(1,1,2,2),\quad (1,2,2,1),\quad (2,2,1,1),$$
$$(1,2,1,2),\quad (2,1,1,2),\quad (2,1,2,1).$$

每一列的末端填入向量中的对应项，而其余框（位于 2-模费雷尔图内部）填入 2。这个 Ferrers 图 π^* 表示一个分拆，但各分拆项之间可能不满足差值条件 $\mathcal{RR}$ 。为满足间隔条件，对于向量中出现相邻项（$\ldots$，2，1，$\ldots$）的位置，也就是 2 后接 1 的位置，需要在相应位置插入一列由 2 填充的中间框。该中间列的高度由向量中对应的 1 的索引决定；如果 1 位于第 i位，那么相应列的高度为 $M-i+1$。注意，所有需要插入的额外列的高度都为 $\leq M-1$，因为我们不需要在第一列之前插入列，而第一列的高度为 M。此外，还要注意，每个额外列的高度彼此至少相差 2。

现在这些观察都已列出，我们希望写出 $\mathcal{RR}$中所有此类极小分拆的生成函数。设 π 是 $\mathcal{RR}$ 中由 n-奇数部分和 k-偶数部分组成的极小分拆，且 v 是其向量表示。我们希望从 π构造一对分拆（π_1，π_2）。我们提取 π 中所有的中间列，并将它们放入 π_2 ，剩余的分拆记为 π_1。不出所料， π_1 的大小为 $q^{n^2+2nk+k}{}_{(k+1)}$。

我们剩下的任务是证明所有此类 π_2 的生成函数为

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{q^2}.$$

等价地，我们希望证明， π_2 与给定的极小构形向量 v ，和能够放入一个 $n\times k$ 框中的 2-模费雷尔图之间存在双射。对于这项剩余任务，我们将采用 Sylvester双射 [6]背后的思路，并以算法的方式说明如何利用向量 v将分拆 π_2 配对起来，以及如何将它们与能够放入 $n\times k$ 框中的分拆配对，其中所有框都填有 2。

i. 取 π_2 的 2-模费雷尔图中最短的一列。该列的高度 h 与向量 v 在索引 $(n+k)-h+1$处的一个 1 相关。从该索引到向量末尾有 n_h 1个 k_h 和 2。ii. 取所选列中的 h 个框，将其中的 n_h 个竖直放置，然后将剩余的 k_h 个框水平放置在

高度为 n_h 的列旁边，紧挨着最上方的框。这样就形成一个钩子，由竖直的钩子臂 （大小为 n_h）和水平的钩子臂 （大小为 k_h+1）组成。

iii. 接着，按照 Sylvester 双射中的做法重复上述构造，并将新生成的钩子放在先前的钩子堆顶上，从而得到一个分拆 $\hat{}\pi$。

需要确认 $\hat{}\pi$ 确实是一个分拆。需要指出的是，要通过这一构造得到一个分拆，每个钩子的腿和臂都必须分别比前一个钩子的腿和臂至少长 1。当向量 v 中的一个 2 后面跟着一个 1 时，就用这个 1 以及 v 中直到末尾的内容生成一个新钩子。使用这个用于生成钩子的 1，表明系统中至少多出一个 1，因此该钩子的腿会更长；而生成前一个钩子的那个 2 现在也纳入考虑，同样表明臂会更长。这与 π_2 的列高彼此至少相差 2 是一致的。

对于固定的 n 和 k，最后两个需要处理的问题是所得分拆的大小（以及它是否适合放入一个 $n\times k$ 框中），以及该映射的双射性（以及给定一个位于 $n\times k$ 框中的分拆时，我们是否能够找到一个 v 和一个 π_2 ）。最大的（最后一个）钩子始终具有 $\geq n$ 的腿长和 $\leq k$ 的臂长，因为即使在极端情况下（向量的第一个索引为 2 v ，后面跟着一个 1），也可以取所有的 1，但只取 2 中除一个以外的所有项。因此，所构造的分拆适合放入一个 $n\times k$ 框中。给定一个适合放入 $n\times k$ 框中的分拆 π ，展开钩子以构造分拆 π_2 是很直接的。最后，为了构造向量 v ，我们从 π 开始，需要考察这些钩子。如果 π 是空分拆，我们处于基例，此时 v 由若干个 n 1后接若干个 k 2组成。如果 π 非空，我们考察最内侧的钩子，并在向量中写入 leg-length 个 1，后接 arm-length 减 1 个 2。然后转向下一个钩子，在已经写下的内容之前写入 leg-length 个 1，后接 arm-length 减 1 个 2。重复此过程，直到所有钩子都处理完毕。这样便得到一个向量 v' ，其长度为 $M=m_1+m_2$ ，包含若干个 m_1 1和 m_2 2。我们在 v' 前面添加 $(n-m_1)$ 个 1，随后添加 $(k-m_2)$ 个 2，从而得到预期的代表向量 v 。这说明，向量—分拆对 $(v,\ \pi_2)$ 与适合放入 $n\times k$ 框中的分拆之间存在一个双射。

本研究表明， $\mathcal{RR}$ 含有n-奇数分拆项和 k-偶数分拆项的极小分拆数的生成函数为

$$q^{n^2+2nk+k(k+1)}\begin{bmatrix}n+k\\ k\end{bmatrix}_{q^2}.$$

接着考虑列插入，并记住 (4.6)

$$\frac{q^{n^2+2nk+k(k+1)}}{(q^2;q^2)_{n+k}}\begin{bmatrix}n+k\\ k\end{bmatrix}_{q^2}$$

是所有含有 $\mathcal{RR}$分拆且具有 n-奇数分拆项和 k-偶数分拆项的生成函数。因此，对所有可能的 n 和 k 求和，并将分拆项的总数作为x 的指数进行追踪，我们得到

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{q^{n^2+2nk+k(k+1)}x^{n+k}}{(q^2;q^2)_{n+k}}\begin{bmatrix}n+k\\ k\end{bmatrix}_{q^2}=\sum_{\pi\in\mathcal{RR}}x^{\nu(\pi)}q^{|\pi|}. \tag{4.7}$$

因此，比较 (4.7) 和 (4.5) 可知，(4.5) 的左端等于 (4.2) 的右端。这就完成了恒等式 (4.1) 的证明，并推出定理 1.2。

5. Outlook

Mourad 的研究中得出的 q-级数恒等式似乎适合用组合构造来证明。若能看看是否还有更多恒等式可以用这种方法证明，将会很有意思。此外，如果先对感兴趣的对象作出解释，再运用分拆理论双射变换，是否能找到那些未通过正交多项式研究发现的新恒等式，也值得探讨。

这些证明中使用的组合构造，与作者及佛罗里达大学数论小组早期的工作 [1, 4–6, 8, 13], 尤其是 [12] 相似。值得注意的是，在这些工作的大多数中，一旦理解了某个恒等式背后的组合结构，作者和 Berkovich 就会对分拆项增加额外的界限，并将 q-级数恒等式精化为依赖一个或多个离散变量的多项式恒等式。这里也不例外。定理 1.4 是对 (4.7) 和 4.2 左端进行比较所得结果的精化。我们研究在第4节定义的最小构型中，奇数个（n 个）和偶数个（k 个）分拆项可以添加多少列，并限制这些贡献，以确保所有分拆项均小于或等于 L。这个恒等式可以用 q-Zeilberger 算法轻松证明。这里省略证明。

这些更精细的恒等式将有益于正交多项式研究以及组合学研究。例如，根据定理 3.1，我们可以进行试验并猜想如下结果：

定理5.1。

$$\sum_{\substack{(\pi_1,\pi_2)\in\mathcal{D}_N\times\mathcal{P}_N\\ l(\pi_2)\leq\nu(\pi_1)}} t^{\nu(\pi_1)+\nu(\pi_2)}a^{\nu(\pi_2)}b^{\nu(\pi_1)}q^{|\pi_1|+|\pi_2|} = \sum_{\substack{(\pi_1^*,\pi_2^*)\in\mathcal{D}_N\times\mathcal{P}_N\\ d(\pi_2^*)\leq r(\pi_1^*)}} t^{\nu(\pi_1^*)+\nu(\pi_2^*)}a^{\nu(\pi_2^*)}b^{\nu(\pi_1^*)}q^{|\pi_1^*|+|\pi_2^*|},$$

其中，$\mathcal{D}_N$ 和 $\mathcal{P}_N$ 分别是来自 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{P}$的分拆集合，并且附加条件是分拆项至多为 N。

上述定理的 q-级数对应形式很容易证明，如下所示：

定理5.2。 对于任意非负整数 N，有

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(bt)^k q^{k(k+1)/2}}{(atq;q)_k}\begin{bmatrix}N\\k\end{bmatrix}_q = \sum_{m\geq 0}(bt)^m q^{m(m+1)/2}(-btq^{m+1};q)_{N-m}\frac{(at)^m q^{m^2}}{(atq;q)_m}\begin{bmatrix}N\\m\end{bmatrix}_q.$$

请注意，定理5.2是对（3.1）的一个（简单）加强，并可推出定理 1.1。我们认为，[11]中尚未出现定理5.2。无论是通过分拆之间的双射，还是借助正交多项式，探寻该定理的其他证明及推论都将很有意义。总的来说，我们希望看到这些不同的技巧相互促进、共同发展。

Acknowledgement

作者谨向匿名审稿人致谢，感谢他们认真审阅稿件并纠正了其中的错别字，尤其是公式中的错误。他们付出的时间和心血，以及恰如其分的不满，使本文更易读，也消除了错误。作者还感谢 Runqiao Li 在稿件提交前审阅了手稿。

作者感谢奥地利科学基金 FWF P34501N 和英国研究与创新署工程与自然科学研究委员会 EP/T015713/1 项目的部分资助。

References

[1] K. Alladi, *Partition identities involving gaps and weights*, 《美国数学会汇刊》349（1997），第12期，5001–5019页。[2] G.E. Andrews, *The Theory of Partitions*, 剑桥大学出版社（1976）。[3] G.E. Andrews，B.C. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook: Part II*，施普林格（2009）。[4] A. Berkovich，A. Dhar, *On Partitions with Bounded Largest Part and Fixed Integral GBG-rank Modulo Primes*，《组合学年刊》（2024）。https://doi.org/10.1007/s00026-024-00733-y。[5] A. Berkovich，andA.K. Uncu, *On partitions with fixed number of even-indexed and odd-indexed odd parts*，《数论杂志》167（2016），第7–30页。[6] A. Berkovich，and A.K. Uncu, *On Finite Analogs of Schmidt's Problem and Its Variants* S`组合学洛林研讨会88（2023），文章B88b。[7] B.C. Berndt，B. Kim，and A.J. Yee, *Ramanujan's lost notebook: Combinatorial proofs of identities associated with Heine's transformation or partial theta functions* 117 7 2010 。《组合理论杂志》A辑，（），（），第957–973页。[8] A. Dhar，and A. Mukhopadhyay，Berkovich与Uncu恒等式的组合证明，arXiv:2309.07785。[9] G. Gasper，and M. Rahman。 *Basic hypergeometric series*，第96卷。剑桥大学出版社（2011）。

[10] M.E.H. Ismail, *A polynomial version of the Rogers-Ramanujan Identities and Ramanujan type functions*, 在“组合学、特殊函数与计算机代数”研讨会上的报告——为庆祝Peter Paule 60岁生日而举办的会议，2018年5月18日。https://www3.risc.jku.at/conferences/paule60/ 访问日期：2025年2月12日。[11] M.E.H. Ismail, *Solutions of the Al-Salam–Chihara and allied moment problems*, 《分析与应用》18第02期, （2020），第185–210页。[12] A.K. Uncu *On double sum generating functions in connection with some classical partition theorems*, 《离散数学》344, 第11期（2021）：112562。[13] A.K. Uncu, *Weighted Rogers–Ramanujan partitions and Dyson crank*, 《拉马努金期刊》46（2018），第579–591页。[14] D. Zeilberger, *The method of creative telescoping*, 《符号计算杂志》11（1991），195–204页。

University of Bath, Faculty of Science, Department of Computer Science, Bath, BA2 7AY, UK
Email address: aku21@bath.ac.uk