arXiv:2601.00986v1 [math.NA] 2 Jan 2026

一种用于非凸多面体网格上对流-扩散-反应方程的简单弱Galerkin有限元方法

Chunmei Wang† 和 Shangyou Zhang

Abstract. 本文提出了一种简单的弱Galerkin（WG）有限元方法，用于求解对流-扩散-反应方程。该方法具有很强的灵活性，支持在一般的非凸多面体网格上使用不连续近似函数。我们在适当的范数下建立了严格的误差估计。最后，通过数值实验验证理论收敛阶，并展示该方法的计算效率。

1. Introduction

本文旨在为对流-扩散-反应方程开发一种简单的弱Galerkin（WG）有限元方法。该数值框架适用于由凸和非凸多面体网格组成的一般剖分。为便于阐述，我们聚焦于稳态对流-扩散-反应问题，该问题要求求解一个未知标量函数 u ，使得：

$$\begin{aligned} -\rho\Delta u + \nabla\cdot(\mathbf{b}u) + cu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中， $\rho > 0$ 表示扩散系数， $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2,\ 3)$是一个有界多边形或多面体区域，其边界为 $\partial\Omega$。为确保该问题的适定性，我们假设$\mathbf{b}$ c， f具有足够的正则性。具体而言，我们假设$\mathbf{b} \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^d$，并且强制性条件 $c+\frac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{b} \geq c_0 > 0$ 对某个常数 c_0 成立（参见 [28]）。

Department of Mathematics, University of Florida, Gainesville, FL 32611, USA.

Department of Mathematical Sciences, University of Delaware, Newark,DE 19716, USA*E-mail addresses*: chunmei.wang@ufl.edu, szhang@udel.edu.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 65N30, 65N15, 65N12, 65N20.*Key words and phrases.* 弱Galerkin，有限元方法，弱梯度，弱散度，非凸，多面体网格，对流-扩散-反应。

† 通讯作者。

相应的(1.1)的变分形式为求 $u \in H_0^1(\Omega)$，使得：

$$(1.2) \qquad (\rho \nabla u, \nabla v) + (\nabla \cdot (\mathbf{b}u), v) + (cu, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

其中， $H_0^1(\Omega)$ 表示在 $\partial\Omega$ 上具有零迹的标准索博列夫空间。

众所周知，在线性椭圆方程 (1.1) 处于奇异摄动区域时，会带来显著的数值计算挑战，其特征为 $0 < \rho \ll 1$。在这种情况下，解通常会出现边界层或内部层，即解或其梯度发生快速变化的狭窄区域。除非将计算网格加密至与奇异摄动参数同一尺度，否则传统数值格式往往会产生伪振荡，无法获得准确的近似解。

为缓解这些问题，人们提出了多种稳定化策略，大致可分为拟合网格方法和拟合算子方法。网格优化方面的早期工作包括巴赫瓦洛夫的研究 [3]，而希什金提出的分段等距网格 [29]至今仍是奇异摄动分析的基石。此外，过去几十年来，自适应加密技术已得到广泛应用 [2, 6]以捕捉局部尖锐特征 [27]。

近几十年来，采用间断离散空间的数值方法迅速发展，其中尤以间断Galerkin（DG）方法和弱Galerkin（WG）方法为代表。在对流主导流问题中，DG方法利用自然的迎风处理实现固有稳定化 [15, 28]；另见 [1, 4, 5, 12, 13, 14]。弱Galerkin方法是这一范式的有力拓展，它通过一种与分段多项式的分布理论相平行的框架来逼近微分算子。借助专门设计的稳定子，弱Galerkin方法降低了传统有限元方法的全局正则性要求。弱Galerkin方法在广泛的偏微分方程（PDE）中展现了有效性 [17, 18, 45, 49, 19, 20, 21, 22, 47, 50, 10, 44, 26, 16, 30, 52, 39, 43, 40, 41, 42, 46, 48]。

该领域的一项重要进展是原始-对偶弱伽辽金（PDWG）方法，它解决了经典方法难以处理的问题 [23, 24, 7, 8, 9, 25, 31, 32, 51, 11, 35, 36, 33, 37, 38]。PDWG 方法将数值解表述为对一个泛函进行约束极小化，其中约束条件表示偏微分方程的弱形式。由此得到的欧拉-拉格朗日系统将原始变量与对偶变量（拉格朗日乘子）耦合起来，从而形成对称鞍点格式。文献 [8, 51, 11]专门将 PDWG 方法推广到了对流-扩散方程。

本文提出了一种简单的弱Galerkin公式，适用于一般的凸和非凸多面体网格。该方法的基本

分析要点是利用泡函数。尽管计算离散弱梯度和离散弱散度需要使用高次多项式，但该格式仍能保持所得刚度矩阵的全局稀疏性和维数。

本文其余部分安排如下。第2节简要回顾弱梯度和弱散度算子。第3节介绍用于对流-扩散-反应方程的简单弱伽辽金格式。第4节证明离散解的存在性和唯一性。第5节推导误差方程。第6节给出能量范数下的误差估计。最后，第7节通过数值实验验证理论结果，并展示所提出方法的性能。

记号。全文采用索伯列夫空间的标准记号。对于具有利普希茨边界的有界开域 $D \subset \mathbb{R}^d$，$(\cdot,\cdot)_{s,D}$,$|\cdot|_{s,D}$ 和 $\|\cdot\|_{s,D}$ 分别表示 $H^s(D)$ 中的内积、半范数和范数。当 $D=\Omega$时，省略下标 D。对于 $s=0$，记号可简化为 $(\cdot,\cdot)_D$ 和 $\|\cdot\|_D$。

2. Discrete Weak Gradient and Discrete Weak Divergence

本节将简要概述弱梯度和弱散度算子，以及它们相应的离散表示，并遵循文献 [48]所确立的框架。

设 T 为一个边界为 ∂T的多边形单元。T上的弱函数定义为一个二元组 $v=\{v_0,v_b\}$，其中 $v_0 \in L^2(T)$且 $v_b \in L^2(\partial T)$。这里，分量 v_0 和 v_b 分别表示函数在 T内部和边界上的取值。一般而言，假设 v_b 独立于 v_0 在 ∂T 上的迹。特殊情形是$v_b = v_0|_{\partial T}$，此时弱函数 v 由 v_0唯一确定，因此可简记为 $v=v_0$。

令 $W(T)$表示 T上的弱函数空间，其定义如下：

$$W(T)=\{v=\{v_0,v_b\} : v_0 \in L^2(T), v_b \in L^2(\partial T)\}. \tag{2.1}$$

弱梯度，记作 ∇_w，是一个线性算子，将 $W(T)$ 映射到 $[H^1(T)]^d$ 的对偶空间。对于任意 $v \in W(T)$，弱梯度 $\nabla_w v$ 被定义为满足以下条件的有界线性泛函：

$$(\nabla_w v, \boldsymbol{\varphi})_T = -(v_0, \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})_T + \langle v_b, \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial T}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in [H^1(T)]^d,$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 ∂T 的单位外法向量。

类似地，弱散度算子 $\nabla_w\cdot(\mathbf{b}v)$ 被定义为从 $W(T)$ 到 $H^1(T)$ 的对偶空间的线性算子。对于任意 $v \in W(T)$,

弱散度 $\nabla_w \cdot (\mathbf{b}v)$ 是满足以下条件的有界线性泛函：

$$(\nabla_w \cdot (\mathbf{b}v), w)_T = -(\mathbf{b}v_0, \nabla w)_T + \langle (\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})v_b, w\rangle_{\partial T}, \quad \forall w \in H^1(T).$$

对于任意非负整数 r，令 $P_r(T)$ 表示 T 上次数不超过 r 的多项式空间。离散弱梯度记为 $\nabla_{w,\,r,\,T}$，它是从 $W(T)$ 到 $[P_r(T)]^d$ 的线性算子。对于任意 $v \in W(T)$，$\nabla_{w,\,r,\,T} v$ 是 $[P_r(T)]^d$ 中满足以下条件的唯一多项式向量：

$$(\nabla_{w,r,T} v, \boldsymbol{\varphi})_T = -(v_0, \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})_T + \langle v_b, \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial T}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in [P_r(T)]^d. \tag{2.2}$$

对于充分光滑的函数 $v_0 \in H^1(T)$，对右端第一项应用标准分部积分公式可得：

$$(\nabla_{w,r,T} v, \boldsymbol{\varphi})_T = (\nabla v_0, \boldsymbol{\varphi})_T + \langle v_b - v_0, \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial T}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in [P_r(T)]^d. \tag{2.3}$$

在 T 上的离散弱散度记为 $\nabla_{w,\,r,\,T}\cdot(\mathbf{b}v)$，它是一个线 r
性算子，从 $W(T)$ 到 $P_r(T)$。对于任意 $v \in W(T)$，$\nabla_{w,\,r,\,T}\cdot(\mathbf{b}v)$ 是唯一的 e
满足以下条件的 $P_r(T)$ 中的多项式：

$$(\nabla_{w,r,T}\cdot(\mathbf{b}v), w)_T = -(\mathbf{b}v_0, \nabla w)_T + \langle (\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})v_b, w\rangle_{\partial T}, \quad \forall w \in P_r(T). \tag{2.4}$$

此外，对于 $v_0 \in H^1(T)$，对式（2.4）应用分部积分可得：2.5
( )

$$(\nabla_{w,r,T}\cdot(\mathbf{b}v), w)_T = (\nabla\cdot(\mathbf{b}v_0), w)_T + \langle (\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})(v_b - v_0), w\rangle_{\partial T}, \forall w \in P_r(T).$$

3. Weak Galerkin Algorithm

设 $\mathcal{T}_h$ 为区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 的一个多面体有限元剖分。假设 $\mathcal{T}_h$ 满足文献[48]中详述的形状正则性条件。令 $\mathcal{E}_h$ 表示 $\mathcal{T}_h$中所有边（对于 $d=2$）或面（对于 $d=3$）的集合，并令 $\mathcal{E}_h^0 = \mathcal{E}_h \setminus \partial\Omega$ 表示所有内部边或面的集合。对于每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$，令 h_T 表示其直径，并定义网格尺寸为$h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$。

设 $k \geq 0$ 和 $q \geq 0$ 为满足 $k \geq q$的非负整数。对于每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$，定义局部弱有限元空间如下：

$$V(k,q,T) = \{v = \{v_0, v_b\} : v_0 \in P_k(T), v_b \in P_q(e), e \subset \partial T\}. \tag{3.1}$$

通过在剖分 $\mathcal{T}_h$ 上组装局部空间 $V(k,q,T)$，并要求每个内部界面 $e \in \mathcal{E}_h^0$上的 v_b 取唯一值，我们定义全局弱有限元空间：

$$V_h = \{v = \{v_0, v_b\} : \{v_0, v_b\}|_T \in V(k,q,T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}. \tag{3.2}$$

在 $\partial\Omega$上具有零边界值的 V_h 子空间记为：

$$V_h^0 = \{v \in V_h : v_b = 0 \text{ on } \partial\Omega\}. \tag{3.3}$$

为简便起见，且在不会引起混淆的情况下，对于任意 $v \in V_h$，我们将离散弱梯度 $\nabla_{w,\,r,\,T} v$ 和离散弱散度

$\nabla_{w,\ r,\ T}\cdot(\mathbf{b}v)$分别简记为 $\nabla_w v$和 $\nabla_w\cdot(\mathbf{b}v)$。这些算子根据（2.2）和（2.4）逐单元计算：

$$\begin{aligned}(\nabla_w v)|_T =&\nabla_{w,r,T}(v|_T), \quad \forall T\in\mathcal{T}_h,\\ (\nabla_w\cdot(\mathbf{b}v))|_T =&\nabla_{w,r,T}\cdot(\mathbf{b}v|_T), \quad \forall T\in\mathcal{T}_h.\end{aligned}$$

在本文中，离散算子的多项式次数 r 对非凸多面体单元取为 $r=k-1+2N$，对凸多面体单元取为 $r=k-1+N$，其中 N 表示单元 T 的边或面的数量。关于选择 r 的进一步论证见 [34]。

我们引入全局 L^2 内积记号 $(\cdot,\ \cdot)=\sum_{T\in\mathcal{T}_h}(\cdot,\ \cdot)_T$，并在 $V_h\times V_h$ 上定义如下双线性型 $a(\cdot,\ \cdot)$：

$$\begin{aligned}a(u,v)=&\rho(\nabla_w u,\nabla_w v)+(\nabla_w\cdot(\mathbf{b}u),v_0)\\ &+\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\langle\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(u_0-u_b),v_0-v_b\rangle_{\partial T^+}+(cu_0,v_0),\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 ∂T 上的单位外法向量，在 ∂T^+ 面上则为 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}>0$。

对流-扩散-反应问题 (1.1) 的简单弱Galerkin数值格式如下：

弱Galerkin算法 3.1。求 $u_h=\{u_0,u_b\}\in V_h^0$使得

$$a(u_h,v)=(f,v_0),\quad \forall v=\{v_0,v_b\}\in V_h^0.\tag{3.5}$$

4. Existence and Uniqueness of the Numerical Solution

首先回顾，对于区域 Ω 的形状正则有限元剖分$\mathcal{T}_h$，任意 $T\in\mathcal{T}_h$ 和 $\phi\in H^1(T)$ [48]均满足以下迹不等式：

$$\|\phi\|_{\partial T}^2\le C(h_T^{-1}\|\phi\|_T^2+h_T\|\nabla\phi\|_T^2).\tag{4.1}$$

此外，若 ϕ 是单元 T上的多项式，则满足以下离散迹不等式 [48]:

$$\|\phi\|_{\partial T}^2\le Ch_T^{-1}\|\phi\|_T^2.\tag{4.2}$$

对于任意弱函数 $v=\{v_0,v_b\}\in V_h$，我们定义离散能量范数如下：

$$\begin{aligned}|||v|||^2=&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\rho(\nabla_w v,\nabla_w v)_T+\frac{1}{2}\langle\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(v_b-v_0),v_0-v_b\rangle_{\partial T^-}\\ &+\frac{1}{2}\langle\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(v_0-v_b),v_0-v_b\rangle_{\partial T^+}+((c+\frac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{b})v_0,v_0)_T.\end{aligned}\tag{4.3}$$

此外，我们定义离散 H^1 半范数如下：

$$\begin{aligned}\|v\|_{1,h}^2 = &\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \rho\|\nabla v_0\|_T^2 + \frac{1}{2}\langle \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(v_b - v_0), v_0 - v_b\rangle_{\partial T^-} \\ &+ \frac{1}{2}\langle \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(v_0 - v_b), v_0 - v_b\rangle_{\partial T^+} + ((c + \frac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{b})v_0, v_0)_T \\ &+ h_T^{-1}\|v_0 - v_b\|_{\partial T}^2.\end{aligned} \tag{4.4}$$

为证明该格式的稳定性，我们使用若干预备结果。

引理 4.1. [34] 对于任意 $v = \{v_0, v_b\} \in V_h$，存在一个常数 C 使得：

$$\|\nabla v_0\|_T \le C\|\nabla_w v\|_T.$$

引理 4.2. [34] 对于 $v = \{v_0, v_b\} \in V_h$，令 $\boldsymbol{\varphi} = (v_b - v_0)\mathbf{n}\varphi_{e_i}$，其中 $\mathbf{n}$ 是边/面 e_i的单位外法向量。则有以下不等式：

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_T^2 \le Ch_T \int_{e_i} |v_b - v_0|^2 ds. \tag{4.5}$$

引理 4.3. 存在正定常数 C_1 和 C_2，使得对于任意$v = \{v_0, v_b\} \in V_h$：

$$C_1\|v\|_{1,h} \le |||v||| \le C_2\|v\|_{1,h}. \tag{4.6}$$

证明. 考虑一个可能为非凸的多面体单元 T。我们定义基于边/面的泡函数为 $\varphi_{e_i} = \prod_{k\neq i} l_k^2(x)$。可以验证：(1) 对于 $k \neq i$，在边/面 e_k 上有 $\varphi_{e_i} = 0$；(2) 存在一个子域$\widehat{e_i} \subset e_i$，使得对于某个常数 $\rho_1 > 0$，有 $\varphi_{e_i} \ge \rho_1$。

将 v_b 和 v_0 在边 e_i 上的迹延拓到单元 T 上（仍记为 v_b 和 v_0，见 [34]），并在 (2.3) 中取 $\boldsymbol{\varphi} = (v_b - v_0)\mathbf{n}\varphi_{e_i}$，可得：

$$\begin{aligned}(\nabla_w v, \boldsymbol{\varphi})_T &= (\nabla v_0, \boldsymbol{\varphi})_T + \langle v_b - v_0, \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial T} \\ &= (\nabla v_0, \boldsymbol{\varphi})_T + \int_{e_i} |v_b - v_0|^2 \varphi_{e_i} ds.\end{aligned}$$

应用柯西-施瓦茨不等式、引理 4.2 以及泡函数的性质，可得：

$$h_T^{-1}\int_{e_i} |v_b - v_0|^2 ds \le C(\|\nabla_w v\|_T^2 + \|\nabla v_0\|_T^2) \le C\|\nabla_w v\|_T^2.$$

将此结果与引理 4.1 及定义 (4.3)–(4.4) 结合，可得下界 $C_1\|v\|_{1,h} \le |||v|||$。

接下来，由 (2.3)、柯西-施瓦茨不等式和迹不等式 (4.2)，可得

$$\left|(\nabla_w v, \boldsymbol{\varphi})_T\right| \leq \|\nabla v_0\|_T \|\boldsymbol{\varphi}\|_T + C h_T^{-\frac{1}{2}} \|v_b - v_0\|_{\partial T} \|\boldsymbol{\varphi}\|_T,$$

从而得到

$$\|\nabla_w v\|_T^2 \leq C(\|\nabla v_0\|_T^2 + h_T^{-1} \|v_b - v_0\|_{\partial T}^2),$$

进一步得到

$$|||v||| \leq C_2 \|v\|_{1,h}.$$

引理的证明至此完成。 □

引理 4.4。 对于任意 $v \in V_h$，该双线性型满足以下类强制性恒等式：

$$a(v, v) = |||v|||^2.$$

证明。 由（2.4）及通常的分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla_w \cdot (\mathbf{b}v), v_0)_T \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} -(\mathbf{b}v_0, \nabla v_0)_T + \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} v_b, v_0 \rangle_{\partial T} \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \mathbf{b}v_0, v_0)_T + (\mathbf{b}v_0, \nabla v_0)_T + \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}(v_b - v_0), v_0 \rangle_{\partial T} \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \mathbf{b}v_0, v_0)_T - (\nabla_w \cdot (\mathbf{b}v), v_0) + \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} v_b, v_0 \rangle_{\partial T} \\
&\quad + \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}(v_b - v_0), v_0 \rangle_{\partial T} \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \mathbf{b}v_0, v_0)_T - (\nabla_w \cdot (\mathbf{b}v), v_0) + \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}(v_b - v_0), v_0 - v_b \rangle_{\partial T},
\end{aligned}$$

其中使用了 $v \in V_h^0$和 $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} v_b, \quad v_b \rangle_{\partial T} = 0$。

这给出

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla_w \cdot (\mathbf{b}v), v_0)_T = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \mathbf{b}v_0, v_0)_T + \frac{1}{2} \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}(v_b - v_0), v_0 - v_b \rangle_{\partial T},$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
a(v,v) &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \rho(\nabla_w v, \nabla_w v)_T + (\nabla_w \cdot (\mathbf{b}v), v_0)_T + \langle \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(v_0 - v_b), v_0 - v_b\rangle_{\partial T^+} + (cv_0, v_0)_T \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \rho(\nabla_w v, \nabla_w v)_T + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{b}v_0, v_0)_T \\
&\quad + \frac{1}{2}\langle \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(v_b - v_0), v_0 - v_b\rangle_{\partial T} + \langle \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(v_0 - v_b), v_0 - v_b\rangle_{\partial T^+} + (cv_0, v_0)_T \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \rho(\nabla_w v, \nabla_w v)_T + ((c + \frac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{b})v_0, v_0)_T \\
&\quad + \frac{1}{2}\langle \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(v_b - v_0), v_0 - v_b\rangle_{\partial T^-} + \frac{1}{2}\langle \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(v_0 - v_b), v_0 - v_b\rangle_{\partial T^+} \\
&= |\!|\!| v |\!|\!|^2.
\end{aligned}
$$

引理的证明至此完成。 □

定理 4.5。 弱 *Galerkin* 数值格式（3.5）具有唯一解 $u_h \in V_h^0$。

证明。 由于该系统是线性有限维系统，唯一性蕴含存在性。设 $u_h^{(1)}$，$u_h^{(2)} \in V_h^0$ 是两个解，并定义误差 $\eta_h = u_h^{(1)} - u_h^{(2)} \in V_h^0$。由此可得，对于所有 $v \in V_h^0$，$a(\eta_h, v) = 0$。令 $v = \eta_h$，由引理 4.4 可知 $|\!|\!|\eta_h|\!|\!| = 0$。根据引理 4.3 中的范数等价性，有 $\|\eta_h\|_{1,h} = 0$，这就要求在每个单元 T 上有 $\nabla\eta_0 = 0$，并且在 ∂T 上有 $\eta_0 = \eta_b$。利用在每个 T 上有 $\nabla\eta_0 = 0$ 这一事实，可得在每个 T 上有 $\eta_0 = C$。再结合在每个 ∂T 上有 $\eta_0 = \eta_b$ 以及在 $\partial\Omega$ 上有 $\eta_b = 0$，可得 $\eta_0 \equiv 0$，进而在区域 Ω 中有 $\eta_b \equiv 0$ 和 $\eta_h \equiv 0$。因此，有 $u_h^{(1)} \equiv u_h^{(2)}$。该定理的证明至此完成。□

5. Error Equations

本节推导支配精确解与弱 Galerkin 近似之间关系的误差方程。我们首先定义所需的投影算子。

对于每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$，令 Q_0 表示到多项式空间 $P_k(T)$上的 L^2 投影。类似地，对于每条边或每个面 $e \subset \partial T$，令 Q_b表示到 $P_q(e)$上的 L^2 投影算子。对于任意函数 $w \in H^1(\Omega)$，到弱有限元空间 V_h上的 L^2 投影记为 $Q_h w$，其定义如下：

$$
(Q_h w)|_T := \{Q_0(w|_T), Q_b(w|_{\partial T})\}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \tag{5.1}
$$

此外，令 Q_r 为投影算子，将函数投影到次数为 r的分段多项式空间上。如前所述，次数 r 的选取

对于非凸单元取为 $r = k - 1 + 2N$，对于凸单元取为 $r = k - 1 + N$，其中 N 为多面体 T的面数。

引理 5.1。 对于任意 $u \in H^1(\Omega)$，离散弱算子满足以下交换性质：

$$\nabla_w u = Q_r(\nabla u), \tag{5.2}$$

$$\nabla_w \cdot (\mathbf{b}u) = Q_r(\nabla \cdot (\mathbf{b}u)). \tag{5.3}$$

证明。 对于任意 $u \in H^1(T)$，应用离散弱梯度的定义 (2.3) 可得

$$\begin{aligned}(\nabla_w u, \boldsymbol{\varphi})_T =& (\nabla u, \boldsymbol{\varphi})_T + \langle u|_{\partial T} - u|_T, \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial T} \\ =& (\nabla u, \boldsymbol{\varphi})_T \\ =& (Q_r \nabla u, \boldsymbol{\varphi})_T,\end{aligned}$$

对于所有 $\boldsymbol{\varphi} \in [P_r(T)]^d$。类似地，对于离散弱散度，应用 (2.5) 可得：

$$\begin{aligned}(\nabla_w \cdot (\mathbf{b}u), w)_T =& (\nabla \cdot (\mathbf{b}u), w)_T + \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}(u|_{\partial T} - u|_T), w\rangle_{\partial T} \\ =& (\nabla \cdot (\mathbf{b}u), w)_T \\ =& (Q_r \nabla \cdot (\mathbf{b}u), w)_T,\end{aligned}$$

对于所有 $w \in P_r(T)$。这证实了引理中的断言。 □

设 u 和 $u_h \in V_h^0$ 分别为对流-扩散-反应问题 (1.1) 的精确解及由 WG 算法 3.1 得到的数值近似。我们将误差函数 e_h 定义为：

$$e_h = u - u_h. \tag{5.4}$$

引理 5.2。 在 (5.4) 中定义的误差函数 e_h 满足以下误差方程：

$$\begin{aligned}&\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\rho \nabla_w e_h, \nabla_w v)_T + (\nabla_w \cdot (\mathbf{b}e_h), v_0)_T \\ &+ \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}(e_0 - e_b), v_0 - v_b\rangle_{\partial T^+} + (ce_h, v_0)_T = \ell(u, v), \quad \forall v \in V_h^0,\end{aligned} \tag{5.5}$$

其中，反一致性误差泛函 $\ell(u, v)$ 定义为：

$$\ell(u, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \rho(I - Q_r)\nabla u \cdot \mathbf{n}, v_0 - v_b\rangle_{\partial T}.$$

证明。 利用性质 (5.2) 和 (5.3)，并在离散弱梯度 (2.3) 的定义中令 $\boldsymbol{\varphi} = Q_r \nabla u$ ，可得：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\rho \nabla_w u, \nabla_w v)_T + (\nabla_w \cdot (\mathbf{b}u), v_0)_T \\
&+ \langle \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(u|_T - u|_{\partial T}), v_0 - v_b\rangle_{\partial T^+} + (cu, v_0)_T \\
=& \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\rho Q_r \nabla u, \nabla_w v)_T + (Q_r \nabla\cdot(\mathbf{b}u), v_0)_T \\
&+ (cu, v_0)_T \\
=& \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\rho Q_r \nabla u, \nabla v_0)_T + \langle \rho Q_r \nabla u\cdot\mathbf{n}, v_b - v_0\rangle_{\partial T} \\
&+ (Q_r\nabla\cdot(\mathbf{b}u), v_0)_T + (cu, v_0)_T \\
=& \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\rho \nabla u, \nabla v_0)_T + \langle \rho Q_r \nabla u\cdot\mathbf{n}, v_b - v_0\rangle_{\partial T} \\
&+ (\nabla\cdot(\mathbf{b}u), v_0)_T + (cu, v_0)_T \\
=& \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (f, v_0)_T + \langle \rho\nabla u\cdot\mathbf{n}, v_0\rangle_{\partial T} + \langle \rho Q_r\nabla u\cdot\mathbf{n}, v_b - v_0\rangle_{\partial T} \\
=& \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (f, v_0)_T + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \langle \rho(I - Q_r)\nabla u\cdot\mathbf{n}, v_0 - v_b\rangle_{\partial T},
\end{aligned}
$$

其中我们用到了模型方程 (1.1)、标准的分部积分，以及以下事实：
$\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\langle \rho\nabla u\cdot\mathbf{n}\ v_b\rangle_{\partial T} = \langle \rho\nabla u\cdot\mathbf{n}\ v_b\rangle_{\partial\Omega} = 0$ 因为$v_b = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。

将数值格式 (3.5) 从上述恒等式中相减，得到：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\rho\nabla_w e_h, \nabla_w v)_T + (\nabla_w\cdot(\mathbf{b}e_h), v_0)_T \\
&+ \langle \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(e_0 - e_b), v_0 - v_b\rangle_{\partial T^+} + (ce_h, v_0)_T \\
=& \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \langle \rho(I - Q_r)\nabla u\cdot\mathbf{n}, v_0 - v_b\rangle_{\partial T}.
\end{aligned}
$$

引理得证。 □

6. Error Estimates误差估计

下面的引理回顾了在假设分割具有形状正则性的条件下，投影算子 Q_r 和 Q_0 已知的逼近性质。

引理 6.1。 [48] 设 $\mathcal{T}_h$ 是区域 Ω 的有限元剖分，并满足 [48] 中规定的形状正则性假设。对于任意 $0 \le$

$s \leq 1$、 $0 \leq n \leq k$ 和 $0 \leq m \leq r$，以下估计成立：

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2s}\|\nabla u - Q_r\nabla u\|_{s,T}^2 \quad \leq \quad Ch^{2m}\|u\|_{m+1}^2, \tag{6.1}$$

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2s}\|u - Q_0 u\|_{s,T}^2 \quad \leq \quad Ch^{2n+2}\|u\|_{n+1}^2. \tag{6.2}$$

引理 6.2. 假设对流-扩散-反应方程的精确解 u (1.1) 具有足够的正则性，使得 $u \in H^{k+1}(\Omega)$。存在一个与网格尺寸 h无关的常数 C，使得以下逼近估计成立：

$$|||u - Q_h u||| \leq C(1+\rho^{\frac{1}{2}})h^k\|u\|_{k+1}. \tag{6.3}$$

证明。 利用恒等式 (2.3)、柯西-施瓦茨不等式、迹不等式 (4.1)–(4.2) 以及针对 $n = k$且满足 $s = 0,1$ 的逼近估计 (6.2)，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}(\rho\nabla_w(u - Q_h u), \mathbf{v})_T \\
=&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}(\rho\nabla(u - Q_0 u), \mathbf{v})_T + \langle\rho(Q_0 u - Q_b u), \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial T} \\
\leq&\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\rho^{\frac{1}{2}}\nabla(u - Q_0 u)\|_T^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\rho^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}\|_T^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&+\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\rho^{\frac{1}{2}}(Q_0 u - Q_b u)\|_{\partial T}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\rho^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}\|_{\partial T}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\leq&\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\rho^{\frac{1}{2}}\nabla(u - Q_0 u)\|_T^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\rho^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}\|_T^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&+\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}h_T^{-1}\|\rho^{\frac{1}{2}}(Q_0 u - u)\|_T^2 + h_T\|\rho^{\frac{1}{2}}(Q_0 u - u)\|_{1,T}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\cdot\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}Ch_T^{-1}\|\rho^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}\|_T^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\leq& C\rho^{\frac{1}{2}}h^k\|u\|_{k+1}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\rho^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}\|_T^2\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

对任意 $\mathbf{v} \in [P_r(T)]^d$。令 $\mathbf{v} = \nabla_w(u - Q_h u)$，则有

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\rho\|\nabla_w(u - Q_h u)\|_T^2 \leq C\rho h^{2k}\|u\|_{k+1}^2. \tag{6.4}$$

同样，利用（2.5）、柯西-施瓦茨不等式、迹不等式（4.1）–（4.2），以及针对 $n = k$ 和 $s = 0, 1$ 的估计（6.2），我们

have

$$
\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}(\nabla_w\cdot(\mathbf{b}(u-Q_hu)),w)_T\\
=&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}(\nabla\cdot(\mathbf{b}(u-Q_0u)),w)_T+\langle\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(Q_0u-Q_bu),w\rangle_{\partial T}\\
\le&\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\nabla\cdot(\mathbf{b}(u-Q_0u))\|_T^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|w\|_T^2\Big)^{\frac12}\\
&+\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(Q_0u-Q_bu)\|_{\partial T}^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|w\|_{\partial T}^2\Big)^{\frac12}\\
\le&\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\nabla\cdot(\mathbf{b}(u-Q_0u))\|_T^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|w\|_T^2\Big)^{\frac12}\\
&+\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}h_T^{-1}\|\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(Q_0u-u)\|_T^2+h_T\|\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(Q_0u-u)\|_{1,T}^2\Big)^{\frac12}\\
&\cdot\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}h_T^{-1}\|w\|_T^2\Big)^{\frac12}\\
\le&Ch^k\|u\|_{k+1}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|w\|_T^2\Big)^{\frac12},
\end{aligned}
$$

对于任意 $w\in P_r(T)$。取 $w=\nabla_w\cdot(\mathbf{b}(u-Q_hu))$ 可得

$$
\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\nabla_w\cdot\mathbf{b}(u-Q_hu)\|_T^2\le Ch^{2k}\|u\|_{k+1}^2. \tag{6.5}
$$

将估计式 (6.2) 应用于 $n=k$ 和 $s=0$，可得

$$
\sum_{T\in\mathcal{T}_h}c\|u-Q_0u\|_T^2\le Ch^{2(k+1)}\|u\|_{k+1}^2. \tag{6.6}
$$

利用迹不等式 (4.2)，以及将估计式 (6.2) 应用于 $n=k$、$s=0$和 $s=1$，可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\langle\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(Q_bu-Q_0u),Q_bu-Q_0u\rangle_{\partial T}\\
\le&C\|Q_bu-Q_0u\|_{\partial T}^2\\
\le&Ch_T^{-1}\|u-Q_0u\|_T^2+Ch_T\|u-Q_0u\|_{1,T}^2\\
\le&Ch^{2k+1}\|u\|_{k+1}^2.
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

最后，利用引理 4.4 并结合估计式 (6.4)、(6.5) 和 (6.6)，我们得到

$$
|||u-Q_hu|||^2=a(u-Q_hu,u-Q_hu)\le C(\rho+1)h^{2k}\|u\|_{k+1}^2.
$$

引理的证明至此完成。 □

定理 6.3。 设 $u \in H^{k+1}(\Omega)$ 为对流-扩散-反应方程 (1.1)的精确解。存在常数 C，使得以下离散能量范数下的误差估计成立：

$$|||u - u_h||| \leq C(1+\rho^{\frac{1}{2}})h^k\|u\|_{k+1}. \tag{6.8}$$

证明。 为了估计误差方程 (5.5) 的右端，我们应用柯西-施瓦茨不等式、迹不等式 (4.1)、对 $m = k$ 且 $s = 0$,1 的逼近结果 (6.1)，以及范数等价性 (4.6)，得到

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\langle\rho(I-Q_r)\nabla u\cdot\mathbf{n}, v_0-v_b\rangle_{\partial T}\Big| \\
\leq& C\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\rho(I-Q_r)\nabla u\cdot\mathbf{n}\|_T^2 + h_T^2\|\rho(I-Q_r)\nabla u\cdot\mathbf{n}\|_{1,T}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\cdot\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}h_T^{-1}\|v_0-v_b\|_{\partial T}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\leq& C\rho h^k\|u\|_{k+1}\|v\|_{1,h} \\
\leq& C\rho h^k\|u\|_{k+1}|||v|||.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

将 (6.9) 代入 (5.5)，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}(\rho\nabla_w e_h, \nabla_w v)_T + (\nabla_w\cdot(\mathbf{b}e_h), v_0)_T \\
&+\langle\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}(e_0-e_b), v_0-v_b\rangle_{\partial T^+} + (ce_0, v_0)_T \leq C\rho h^k\|u\|_{k+1}|||v|||.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

利用 (4.4)、柯西-施瓦茨不等式、三角不等式，并令 $v = Q_h u - u_h$ 取 (6.10) 中的值，同时考虑估计 (6.3)，可得

$$\begin{aligned}
&|||u-u_h|||^2 = a(u-u_h, u-u_h) \\
=& a(u-u_h, u-Q_hu) + a(u-u_h, Q_hu-u_h) \\
\leq& a(u-u_h, u-u_h)a(u-Q_hu, u-Q_hu) \\
&+ C\rho h^k\|u\|_{k+1}|||Q_hu-u_h||| \\
\leq& |||u-u_h|||\,|||u-Q_hu||| \\
&+ C\rho h^k\|u\|_{k+1}(|||Q_hu-u|||+|||u-u_h|||) \\
\leq& |||u-u_h|||C(1+\rho^{\frac{1}{2}})h^k\|u\|_{k+1} + C\rho h^k\|u\|_{k+1}(1+\rho^{\frac{1}{2}})h^k\|u\|_{k+1} \\
&+ C\rho h^k\|u\|_{k+1}|||u-u_h|||.
\end{aligned}$$

重新整理各项，即得所需结果：

$$|||u-u_h||| \leq C(1+\rho^{\frac{1}{2}})h^k\|u\|_{k+1}.$$

至此，定理得证。 □

7. Numerical experiments

我们在正方形区域 $\Omega = (-1,\ 1) \times (-1,\ 1)$ 上求解对流-扩散-反应方程 (1.1)，其中

$$\rho = 1 \text{ or } 10^{-6} \text{ or } 10^{-9}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 1. \tag{7.1}$$

在（1.1）中选取 f 后，精确解与 ρ 无关（即不存在边界层或内部层）：

$$u = \sin(\pi x)\sin(\pi y). \tag{7.2}$$

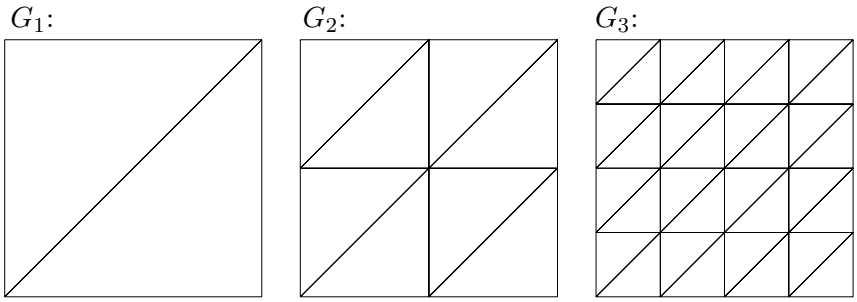


Figure 1. 表1–4计算所用的三角形网格。

在图1所示的三角形网格上，使用弱Galerkin有限元P_k-P_k/P_{k+1}（针对$\{u_0, u_b\}/\nabla_w$），$k = 1$、2、3、4，对（7.2）中的解进行近似。误差和计算得到的收敛阶列于表1–4中。所有情形均达到最优收敛阶。

Table 1. 在图1所示网格上，用于（7.2）的 P_1-P_1/P_2 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O\ (h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在 (7.1) 中			
5	0.164E-02	2.0	0.108E+00	1.0
6	0.412E-03	2.0	0.537E-01	1.0
7	0.103E-03	2.0	0.269E-01	1.0
	$\lambda = 10^{-6}$ 在（7.1）中			
5	0.142E-02	2.0	0.204E-03	1.0
6	0.358E-03	2.0	0.103E-03	1.0
7	0.896E-04	2.0	0.515E-04	1.0

TABLE 2. 针对图1网格上（7.2）的 P_2-P_2/P_3 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在（7.1）中			
5	0.192E-04	3.0	0.406E-02	2.0
6	0.239E-05	3.0	0.101E-02	2.0
7	0.297E-06	3.0	0.253E-03	2.0
	$\lambda = 10^{-6}$ 在 (7.1) 中			
5	0.192E-04	3.0	0.406E-02	2.0
6	0.239E-05	3.0	0.101E-02	2.0
7	0.297E-06	3.0	0.253E-03	2.0

TABLE 3. 图1网格上用于（7.2）的 P_3-P_3/P_4 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O\ (h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w\ (Q_h u - u_h)\ \|_0$	$O\ (h^r)$
	$\rho = 1$ 在（7.1）中			
4	0.664E-05	4.1	0.912E-03	3.0
5	0.401E-06	4.0	0.114E-03	3.0
6	0.251E-07	4.0	0.147E-04	3.0
	$\lambda = 10^{-6}$ 在（7.1）中			
5	0.835E-06	4.0	0.326E-06	3.0
6	0.523E-07	4.0	0.409E-07	3.0
7	0.327E-08	4.0	0.511E-08	3.0

TABLE 4. 图1网格上用于（7.2）的 P_4-P_4/P_5 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在（7.1）中			
4	0.260E-06	5.0	0.142E-03	4.0
5	0.816E-08	5.0	0.893E-05	4.0
6	0.255E-09	5.0	0.558E-06	4.0
	$\lambda = 10^{-6}$ 在 (7.1) 中			
4	0.468E-06	5.0	0.155E-06	4.0
5	0.147E-07	5.0	0.973E-08	4.0
6	0.461E-09	5.0	0.609E-09	4.0

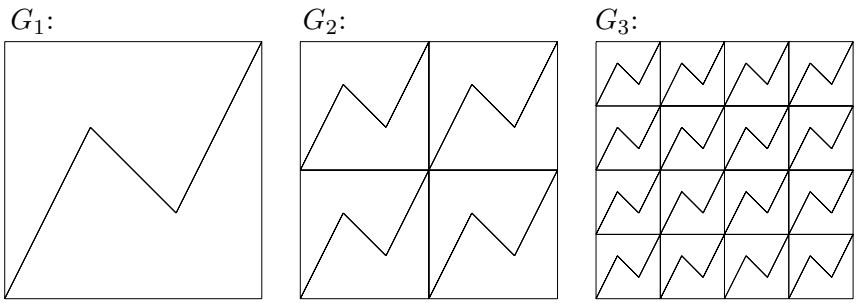


FIGURE 2. 表5–8和表13–16中计算所用的非凸多面体网格。

再次使用弱Galerkin有限元 P_k-P_k/P_{k+2}（对于 $\{u_0, u_b\}$/∇_w），$k = 1$, 2，3，4，在图2所示的非凸多面体网格上计算（7.2）中的解。误差和计算得到的收敛阶列于表5–8中。所有情形下均达到最优收敛阶，但结果略逊于三角形网格上的结果。

TABLE 5. 在图2网格上使用 P_1-P_1/P_3 单元求解式（7.2）。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在式（7.1）中			
5	0.449E-02	2.0	0.286E+00	1.0
6	0.113E-02	2.0	0.143E+00	1.0
7	0.283E-03	2.0	0.712E-01	1.0
	$\lambda = 10^{-6}$ 在 (7.1) 中			
5	0.178E-02	2.0	0.395E-03	1.0
6	0.448E-03	2.0	0.199E-03	1.0
7	0.112E-03	2.0	0.100E-03	1.0

TABLE 6. 在图2网格上，采用 P_2-P_2/P_4 单元求解（7.2）。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O\ (h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w\ (Q_h u - u_h)\ \|_0$	$O\ (h^r)$
	$\rho = 1$ 在（7.1）中			
5	0.226E-04	3.0	0.742E-02	1.9
6	0.284E-05	3.0	0.188E-02	2.0
7	0.356E-06	3.0	0.470E-03	2.0
	$\lambda = 10^{-6}$ 在 (7.1) 中			
5	0.433E-04	3.0	0.133E-04	2.0
6	0.550E-05	3.0	0.334E-05	2.0
7	0.691E-06	3.0	0.838E-06	2.0

TABLE 7. 在图2网格上使用 P_3-P_3/P_5 单元求解（7.2）。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在（7.1）中			
4	0.708E-05	4.1	0.149E-02	3.6
5	0.454E-06	4.0	0.186E-03	3.0
6	0.288E-07	4.0	0.234E-04	3.0
	$\lambda = 10^{-6}$ 在 (7.1) 中			
4	0.156E-04	3.9	0.311E-05	3.2
5	0.103E-05	3.9	0.394E-06	3.0
6	0.671E-07	3.9	0.499E-07	3.0

TABLE 8. 采用 P_4-P_4/P_6 单元求解图2网格上的(7.2)。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在(7.1)中			
3	0.140E-04	6.7	0.319E-02	5.9
4	0.313E-06	5.5	0.790E-04	5.3
5	0.175E-07	—	0.417E-05	4.2
	$\lambda = 10^{-6}$ 在 (7.1) 中			
3	0.186E-04	6.5	0.386E-05	5.7
4	0.501E-06	5.2	0.149E-06	4.7
5	0.186E-07	4.8	0.884E-08	4.1

我们再次求解方程（1.1），其中参数定义见（7.1），精确解为

$$u = \sin(\frac{\pi}{2}x)\sin(\frac{\pi}{2}y)(1 - \mathrm{e}^{\frac{x-1}{\rho}})(1 - \mathrm{e}^{\frac{y-1}{\rho}}). \tag{7.3}$$

我们注意到，边界层出现在出流域边界$\{x = 1\}$ 和 $\{y = 1\}$处。我们在图3中绘制了(7.3)的有限解，其中函数的一个薄区域绘制在 u_0 和 u_b之间。

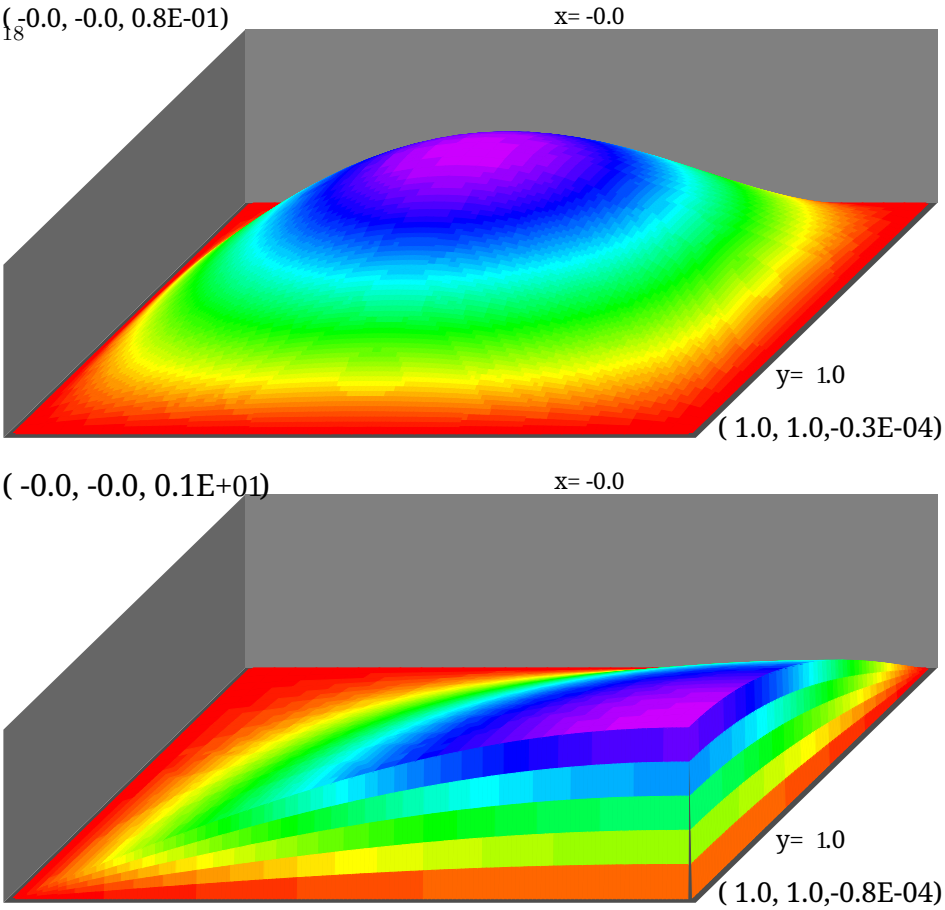


FIGURE 3. 网格5上 P_2 WG 方法的解（图4），对应 $\rho = 1$（上）和 $\rho = 10^{-9}$。

我们在图4所示的矩形网格上，使用弱Galerkin有限元方法 P_k-P_k/P_{k+1}（针对$\{u_0, u_b\}/\nabla_w$），$k = 1$，2，3，4计算(7.3)。误差和计算得到的收敛阶列于表5–8中。所有情形均达到了最优收敛阶。WG有限元方法在ρ较小时是稳定的。

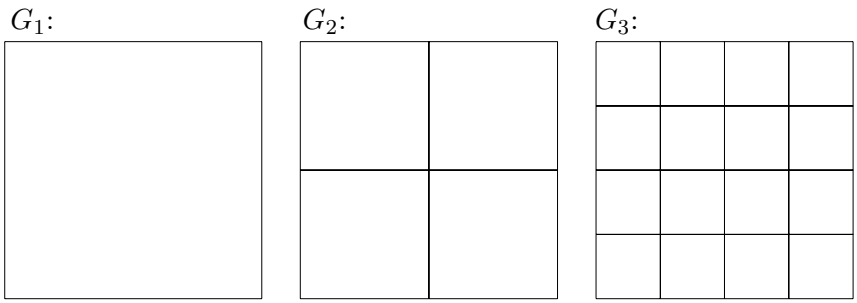


FIGURE 4. 表9–12中计算所用的正方形网格。

TABLE 9. 在图4网格上，用 P_1-P_1/P_2 单元求解(7.3)。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在(7.3)中			
5	0.731E-03	1.9	0.120E-01	1.2
6	0.187E-03	2.0	0.576E-02	1.1
7	0.471E-04	2.0	0.285E-02	1.0
	$\lambda = 10^{-9}$ 在 (7.3) 中			
5	0.345E-03	2.1	0.219E-05	1.0
6	0.840E-04	2.0	0.109E-05	1.0
7	0.207E-04	2.0	0.543E-06	1.0

TABLE 10. 图 4 网格上（7.3）的 P_2-P_2/P_3 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在（7.3）中			
5	0.161E-06	3.8	0.649E-04	2.1
6	0.148E-07	3.4	0.161E-04	2.0
7	0.163E-08	3.2	0.400E-05	2.0
	$\lambda = 10^{-9}$ 在 (7.3) 中			
5	0.601E-05	3.0	0.420E-07	2.0
6	0.754E-06	3.0	0.106E-07	2.0
7	0.106E-06	2.8	0.302E-08	1.8

TABLE 11. 在图 4 网格上，针对 (7.3) 的 P_3-P_3/P_4 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在 (7.3) 中			
3	0.363E-05	5.9	0.252E-03	4.8
4	0.929E-07	5.3	0.169E-04	3.9
5	0.447E-08	4.4	0.195E-05	3.1
	$\lambda = 10^{-9}$ 在 (7.3) 中			
3	0.193E-04	4.0	0.343E-07	2.9
4	0.120E-05	4.0	0.449E-08	2.9
5	0.784E-07	3.9	0.622E-09	2.9

TABLE 12. 图 4 网格上(7.3)的 P_4-P_4/P_5 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在(7.3)中			
2	0.354E-04	6.9	0.150E-02	5.9
3	0.287E-06	6.9	0.241E-04	6.0
4	0.364E-08	6.3	0.514E-06	5.6
	$\lambda = 10^{-9}$ 在 (7.3) 中			
2	0.263E-04	5.7	0.305E-07	4.9
3	0.890E-06	4.9	0.186E-08	4.0
4	0.383E-07	4.5	0.194E-09	3.3

最后，我们采用弱Galerkin有限元 P_k-P_k/P_{k+2}（对于 $\{u_0, u_b\}$/∇_w），$k = 1$、2、3、4，在图2所示的非凸多边形网格上计算边界层解(7.3)。误差和计算得到的收敛阶列于表13–16。所有情况下均获得了最优收敛阶。

TABLE 13. 采用 P_1-P_1/P_3 单元求解图2网格上的(7.3)。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 对于(7.3)			
5	0.380E-03	2.0	0.217E-01	1.0
6	0.958E-04	2.0	0.109E-01	1.0
7	0.240E-04	2.0	0.544E-02	1.0
	$\lambda = 10^{-9}$ 在 (7.3) 中			
5	0.350E-03	2.0	0.265E-05	1.0
6	0.881E-04	2.0	0.133E-05	1.0
7	0.221E-04	2.0	0.667E-06	1.0

TABLE 14. 图2网格上(7.3)的 P_2-P_2/P_4 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在(7.3)中			
4	0.131E-04	3.1	0.221E-02	1.9
5	0.163E-05	3.0	0.564E-03	2.0
6	0.203E-06	3.0	0.142E-03	2.0
	$\lambda = 10^{-9}$ 在 (7.3) 中			
4	0.489E-04	2.9	0.241E-06	2.0
5	0.623E-05	3.0	0.607E-07	2.0
6	0.792E-06	3.0	0.154E-07	2.0

TABLE 15. 图2网格上(7.3)的 P_3-P_3/P_5 单元。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在(7.3)中			
3	0.663E-05	4.8	0.809E-03	4.4
4	0.414E-06	4.0	0.850E-04	3.2
5	0.260E-07	4.0	0.107E-04	3.0
	$\lambda = 10^{-9}$ 在 (7.3) 中			
3	0.129E-04	3.8	0.389E-07	3.1
4	0.927E-06	3.8	0.497E-08	3.0
5	0.740E-07	3.6	0.874E-09	2.5

TABLE 16. 通过 P_4-P_4/P_6 单元求解图2网格上的(7.3)。

G_i	$\|Q_h u - u_h\|$	$O(h^r)$	$\sqrt{\rho}\|\nabla_w(Q_h u - u_h)\|_0$	$O(h^r)$
	$\rho = 1$ 在(7.3)中			
2	0.296E-04	6.7	0.366E-02	5.7
3	0.443E-06	6.1	0.714E-04	5.7
4	0.135E-07	5.0	0.289E-05	4.6
	$\lambda = 10^{-9}$ 在 (7.3) 中			
2	0.213E-04	6.5	0.722E-07	5.7
3	0.537E-06	5.3	0.271E-08	4.7
4	0.390E-07	3.8	0.389E-09	—

REFERENCES

[1] B. AYUSO AND L.D. MARINI, *Discontinuous Galerkin methods for advection-diffusion-reaction problems*, SIAM J. Numer. Anal., ( ), 47 2009 1391 1420 第 - 页。[2] I. BABUSKA, *The selfadaptive approach in the finite element method, in The Math-ematics of Finite Elements and Applications II*, 《1975年于阿克斯布里奇举行的数学与应用研究所第二届布鲁内尔大学会议论文集》，学术出版社，伦敦，1976年，第125–142页。

[3] N.S. Bakhvalov, *On the optimization of the methods for solving boundary value problems in the presence of a boundary layer* 9 1969 , Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., ( ), pp. 841-859. [4] C.E. Baumann and J.T. Oden, *A discontinuous hp finite element method for convection difusion problems* 175 1999 , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., ( ), pp. 311-341. [5] A. Buffa, T.J.R. Hughes, and G. Sangalli, *Analysis of a multiscale discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems* 44 2006 , SIAM J. Numer. Anal., ( ), pp. 1420-1440. [6] C. Boor, *Good approximation by splines with variable knots in Spline Functions and Approximation Theory* 1972, , 研讨会论文集, 埃德蒙顿, Internat. Ser. Numer. Math. 21, Birkhauser, 巴塞尔, 1973, pp. 57-72. [7] W. Cao, C. Wang and J. Wang, *An L^p-Primal-Dual Weak Galerkin Method for div-curl Systems* ,《计算与应用数学杂志》, vol. 422, 114881, 2023年. [8] W. Cao, C. Wang and J. Wang, *An L^p-Primal-Dual Weak Galerkin Method forConvection-Diffusion Equations*,《计算与应用数学杂志》, vol. 419, 114698, 2023年. [9] W. Cao, C. Wang and J. Wang, *A New Primal-Dual Weak Galerkin Method for Elliptic Interface Problems with Low Regularity Assumptions*,《计算物理学杂志》, vol. 470, 111538, 2022年. [10] S. Cao, C. Wang, and J. Wang, *A new numerical method for div-curl Systems with Low Regularity Assumptions* ,《计算机与应用数学》, vol. 144, pp. 47-59, 2022年. [11] W. Cao and C. Wang, *New Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Methods for Convection-Diffusion Problems* 162, ,《应用数值数学》, vol. pp. 171-191, 2021年. [12] J. Guzman, *Local analysis of discontinuous Galerkin methods applied to singularly perturbed problems* 14 2006 41 56 , J. Numer. Math., ( ), pp. - . [13] P. Houston, C. Schwab, and E. Suli, *Discontinuous hp finite element methods for advection diffusion-reaction problems* 39 2002 2133 , SIAM J. Numer. Anal., ( ), pp. - 2163. [14] T.J.R. Hughes, G. Scovazzi, P.B. Bochev, and A. Buffa, *A multiscale discontinuous Galerkin method with the computational structure of a continuous Galerkin method* 195 2006 2761 2787 , Comput. Methods Appl Mech. Engrg., ( ), pp. - . [15] C. Johnson, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method* 1987 , 剑桥大学出版社, 剑桥, . [16] D. Li, Y. Nie, and C. Wang, *Superconvergence of Numerical Gradient for Weak Galerkin Finite Element Methods on Nonuniform Cartesian Partitions in Three Dimensions* 78 3 905 ,《计算机与应用数学》, vol ( ), pp. -928, 2019年. [17] D. Li, C. Wang and J. Wang, *An Extension of the Morley Element on General Polytopal Partitions Using Weak Galerkin Methods*, 科学计算杂志, 100, vol 27, 2024年. [18] D. Li, C. Wang and S. Zhang, *Weak Galerkin methods for elliptic interface problems on curved polygonal partitions*,《计算与应用数学杂志》, pp. 115995, 2024年. [19] D. Li, C. Wang, J. Wang and X. Ye, *Generalized weak Galerkin finite element methods for second order elliptic problems*,《计算与应用数学杂志》, vol. 445, pp. 115833, 2024年. [20] D. Li, C. Wang, J. Wang and S. Zhang, *High Order Morley Elements for Biharmonic Equations on Polytopal Partitions*,《计算与应用数学杂志》, Vol. 443, pp. 115757, 2024年。

[21] D. Li, C. Wang and J. Wang, *Curved Elements in Weak Galerkin Finite Element Methods* 153, 20 32, 2024 ,《计算机与应用数学》, Vol. pp. - . [22] D. Li, C. Wang and J. Wang, *Generalized Weak Galerkin Finite Element Methods for Biharmonic Equations* ,《计算与应用数学杂志》, vol. 434, 115353, 2023年. [23] D. Li, C. Wang and J. Wang, *An L^2-primal-dual finite element method for first-order transport problems* ,《计算与应用数学杂志》, vol. 434, 115345, 2023年. [24] D. Li and C. Wang, *A simplified primal-dual weak Galerkin finite element method forFokker-Planck type equations*,《偏微分方程数值方法杂志》, vol 39, pp. 3942-3963, 2023年. [25] D. Li, C. Wang and J. Wang, *Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Methods for Transport Equations in Non-Divergence Form*,《计算与应用数学杂志》, vol. 412, 114313, 2022年. [26] D. Li, C. Wang, and J. Wang, *Superconvergence of the Gradient Approximation for Weak Galerkin Finite Element Methods on Rectangular Partitions*,《应用数值数学》, vol. 150, pp. 396-417, 2020年. [27] H.-J. Reinhardt, *A posteriori error estimates and adaptive finite element computations for singularly perturbed one space dimensional parabolic equations*, 载于《分析中渐近问题的解析与数值方法》, 会议论文集, 奈梅亨, 荷兰, 1980年, North-Holland 数学研究丛书 47, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1981年, pp. 213-233. [28] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska, *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection-Diffusion-Reaction and Flow Problems* , 第2版, 2008年, Springer计算数学丛书, Springer, 柏林. [29] G.I. Shishkin, *Grid Approximation of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations* 1990 , 第二篇博士论文, 凯尔迪什研究所, 莫斯科, . [30] C. Wang, *New Discretization Schemes for Time-Harmonic Maxwell Equations by Weak Galerkin Finite Element Methods*,《计算与应用数学杂志》, Vol. 341, pp. 127-143, 2018年. [31] C. Wang, *Low Regularity Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Methods for Ill-Posed Elliptic Cauchy Problems* 19 1 33 ,《国际数值分析与建模杂志》, vol 0, pp. 51, 2022年. [32] C. Wang, *A Modified Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Method for Second Order Elliptic Equations in Non-Divergence Form* ,《国际数值分析与建模杂志》, vol. 18(4), pp. 500-523, 2021年. [33] C. Wang, *A New Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Method for Ill-posedElliptic Cauchy Problems*,《计算与应用数学杂志》, vol 371, 112629, 2020 年 . [34] C. Wang, *C. Wang, Auto-Stabilized Weak Galerkin Finite Element Methods on Polytopal Meshes without Convexity Constraints*,《计算与应用数学杂志》, vol. 466, 116572, 2025年. [35] C. Wang and J. Wang, *A Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Method for Fokker-Planck Type Equations* 58 5 2632 , SIAM Numerical Analysis, vol. ( ), pp. -2661, 2020年. [36] C. Wang and J. Wang, *A Primal-Dual Finite Element Method for First-Order Transport Problems* 417, 109571, 2020 ,《计算物理学杂志》, Vol. . [37] C. Wang and J. Wang, *Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Methods forElliptic Cauchy Problems*,《计算机与应用数学》, vol 79(3), pp. 746-763, 2020年. [38] C. Wang and J. Wang, *A Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Method for Second Order Elliptic Equations in Non-Divergence form*, Mathematics of Computa- tion, Vol. 87, pp. 515-545, 2018年。

[39] C. Wang and J. Wang, *Discretization of Div-Curl Systems by Weak Galerkin Finite Element Methods on Polyhedral Partitions* 68, , 科学计算杂志，第 卷，第1144-1171页，2016年。[40] C. Wang and J. Wang, *A Hybridized Formulation for Weak Galerkin Finite Element Methods for Biharmonic Equation on Polygonal or Polyhedral Meshes*,《数值分析与建模国际期刊》，第12卷，第302-317页，2015年。[41] J. Wang and C. Wang, *Weak Galerkin Finite Element Methods for Elliptic PDEs*, 中国科学，第45卷，第1061-1092页，2015年。[42] C. Wang and J. Wang, *An Efficient Numerical Scheme for the Biharmonic Equation by Weak Galerkin Finite Element Methods on Polygonal or Polyhedral Meshes*,《计算机与应用数学杂志》，第68卷，第12期，第2330页，2014年，第2314页。[43] C. Wang, J. Wang, R. Wang and R. Zhang, *A Locking-Free Weak Galerkin Finite Element Method for Elasticity Problems in the Primal Formulation*,《计算与应用数学杂志》，第307卷，第346-366页，2016年。[44] C. Wang, J. Wang, X. Ye and S. Zhang, *De Rham Complexes for Weak Galerkin Finite Element Spaces* 397, ,《计算与应用数学杂志》，第 卷，第113645页，2021年。[45] C. Wang, J. Wang and S. Zhang, *Weak Galerkin Finite Element Methods for Optimal Control Problems Governed by Second Order Elliptic Partial Differential Equations* 2024 ,《计算与应用数学杂志》，即将出版。[46] C. Wang, J. Wang and S. Zhang, *A parallel iterative procedure for weak Galerkinmethods for second order elliptic problems*,《数值分析与建模国际期刊》，第21卷第1期，第1-19页，2023年。[47] C. Wang, J. Wang and S. Zhang, *Weak Galerkin Finite Element Methods for Quad-Curl Problems* 428, ,《计算与应用数学杂志》，第 卷，第115186页，2023年。[48] J. Wang and X. Ye, *A weak Galerkin mixed finite element method for second-order elliptic problems* 83, 2101 2126, 2014 ,《数学计算》，第 卷，第 页。[49] C. Wang, X. Ye and S. Zhang, *A Modified weak Galerkin finite element method for the Maxwell equations on polyhedral meshes*,《计算与应用数学杂志》，第448卷，第115918页，2024年。[50] C. Wang and S. Zhang, *A Weak Galerkin Method for Elasticity Interface Problems*,《计算与应用数学杂志》，第419卷，第114726页，2023年。[51] C. Wang and L. Zikatanov, *Low Regularity Primal-Dual Weak Galerkin Finite Element Methods for Convection-Diffusion Equations*,《计算与应用数学杂志》，第394卷，第113543页，2021年。[52] C. Wang and H. Zhou, *A Weak Galerkin Finite Element Method for a Type of Fourth Order Problem arising from Fluorescence Tomography*, 科学计算杂志，第71卷第3期，第897-918页，2017年。