arXiv:2601.01000v1 [math.LO] 2 Jan 2026

半 Nelson 代数

Noem´ı Lubomirsky、Paula Mench´on 和 Hern´an Javier San Mart´ın

摘要

本文旨在推广 Heyting 代数与 Nelson代数之间的联系。该联系由 Fidel 和 Vakarelov 于20世纪70年代末独立建立。我们在有界分配半蕴涵格的框架下开展这一推广。为此，我们引入半 Nelson 代数这一簇。此外，我们用某些蕴涵滤子刻画半纳尔逊代数的同余格。我们还建立了有界分配半蕴涵格的代数范畴与中心化半 Nelson 代数的代数范畴之间的等价关系。

1 引言

本文着重于统一源自若干与直觉主义逻辑相关的代数簇的思想，例如 Heyting 代数 [1]，半 Heyting 代数 [19]，子剩余格 [10]，Nelson代数 [22]，半 Nelson 代数 [8] 以及子剩余 Nelson 代数 [14]。

半蕴涵格 [5]定义为带有最大元（记作 1）的格，并配备满足方程 $x \to x = 1$和不等式 $x \wedge (x \to y) \leq y$的二元运算 $\to$ 。上述不等式可以替换为以下准方程：

$$\text{If } z \leq x \to y \text{ then } z \wedge x \leq y.$$

有界分配半蕴涵格定义为底层格是分配格且具有最小元 [1] 的半蕴涵格。代数逻辑中许多重要的簇都是有界分配半蕴涵格这一簇的子簇。这些代数的一些相关例子包括 Heyting 代数、子剩余格、RWH 代数 [6]，、半 Heyting 代数和 Hilbert 有界分配格（即希尔伯特代数 [3, 9]，其自然序定义了一个有界分配格）。

Nelson 强否定构造逻辑于 [17] 中提出并得到研究（另见 [18, 21, 22]），是一种非经典逻辑，它将正直觉主义逻辑的构造性方法与经典（即德摩根）否定结合起来。这种逻辑的代数模型称为纳尔逊代数。纳尔逊代数构成的类是一个簇，至少自 20 世纪 50 年代末以来便一直受到研究（最早由 Rasiowa 开展；见 [18] 及其中的参考文献）。20 世纪 70 年代末，Fidel 和 Vakarelov 独立证明了

[1]有界分配半蕴涵格于 [20] 以弱蕴涵格之名被引入并进行了研究。

每个纳尔逊代数都可以表示为一个 Heyting代数的特殊二元积（此处称为扭结构）。

本手稿的主要目标是在有界分配半蕴涵格的框架下拓展扭结构造，从而得到一个新的簇，其成员称为半纳尔逊代数。更确切地说，我们证明，每个半纳尔逊代数都可以表示为某个有界分配半蕴涵格的扭结构。

半纳尔逊代数是克林代数与半蕴涵的扩展。这些结构为非经典逻辑提供了代数框架，尤其适用于那些试图兼顾构造性逻辑的性质与克莱尼系统中对合否定的逻辑。在这一背景下，克林代数的逻辑得到了深入研究并在 [13], 中得到刻画，其性质也在其中被形式化。

本文安排如下。第2节回顾纳尔逊代数的定义，并概述将 Heyting 代数与 Nelson代数联系起来的主要构造。此外，我们还回顾有界分配半蕴涵格的定义，并介绍其若干性质。第3节引入半纳尔逊代数，并证明每个半纳尔逊代数都可以表示为某个有界分配半蕴涵格上的扭结构。第4节证明，对于任意给定的半纳尔逊代数，其同余格与其 h-蕴涵滤子格（它们是一类蕴涵滤子）之间存在序同构。第5节刻画了那些可以表示为有界分配半蕴涵格的扭结构的半纳尔逊代数，并进一步证明，有界分配半蕴涵格的代数范畴与中心化半纳尔逊代数的代数范畴之间存在等价关系。中心化半纳尔逊代数定义为带有中心的半纳尔逊代数，即相对于对合保持不变的固定元素（该元素必然唯一）。最后，在第6节中，我们应用本文中得到的一些结果，分别考察半纳尔逊代数和子剩余 Nelson 代数的若干方面。

2 基本结果

本节回顾纳尔逊代数的定义 [2, 7, 23] ，以及 Heyting 代数与 Nelson代数之间的一些联系 [22]。最后，我们回顾有界分配半蕴涵格的定义及其一些性质 [20]。

回想一下，克莱尼代数 [2, 7, 12]是带有一元运算 $\sim$ 的有界分配格，并满足以下等式:

Ne1) $\sim\sim x = x$,

Ne2) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

Ne3) $(x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y) = x \wedge \sim x$.

定义1. 一个代数 $\langle T, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 0, 1\rangle$ 其类型为 $(2, 2, 2, 1, 0, 0)$，如果 $\langle T, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ 是一个克莱尼代数，并且对每个 $x, y, z \in T$，以下等式均成立，则称其为纳尔逊代数:

Ne4) $x \to x = 1$,

Ne5) $x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z$,

Ne6) $x \wedge (x \to y) = x \wedge (\sim x \vee y)$,

Ne7) $\sim x \vee y \leq x \to y$,

Ne8) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$.

设 $\langle T, \wedge, \vee, \to, \sim, 0, 1\rangle$ 是一个类型为 (2，2，2，1，0，0) 的代数。假设$\langle T, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是一个有界分配格，且条件 Ne6) 成立。那么条件 Ne7) 和 Ne8) 也成立 [15, 16]。我们用 纳尔逊代数簇 表示纳尔逊代数的簇。

有两种关键构造可以建立 Heyting 代数与纳尔逊代数之间的联系。给定一个 Heyting 代数 A，我们定义集合

$$\mathrm{K}(A) = \{(a, b) \in A \times A : a \wedge b = 0\} \tag{1}$$

然后赋予它以下运算 ns:

- $(a, b) \wedge (c, d) = (a \wedge c, b \vee d)$,
- $(a, b) \vee (c, d) = (a \vee c, b \wedge d)$,
- $\sim (a, b) = (b, a)$,
- $(a, b) \Rightarrow (c, d) = (a \to c, a \wedge d)$,
- $\bot = (0, 1)$,
- $\top = (1, 0)$.

那么 $\langle \mathrm{K}(A) \wedge, \vee, \Rightarrow, \bot, \top\rangle \in$ 纳尔逊代数 [22]。在同一篇手稿中，Vakarelov 证明，若 $T \in$ 是纳尔逊代数，则由下式定义的关系 θ

$$x \theta y \text{ if and only if } x \to y = 1 \text{ and } y \to x = 1 \tag{2}$$

是一个等价关系，并且 $\langle T/\theta, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ 是一个 Heyting代数，其运算定义如下

- $x/\theta \wedge y/\theta := x \wedge y/\theta$,
- $x/\theta \vee y/\theta := x \vee y/\theta$,
- $x/\theta \to y/\theta := x \to y/\theta$,
- $0 := 0/\theta$,
- $1 := 1/\theta$。

现在我们回顾有界分配半蕴涵格的定义。

定义 2. 若代数 $\langle A, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ 的类型为 $(2, 2, 2, 0, 0)$，且代数$(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ 是有界分配格，并且对任意 $a, b \in A$ 满足以下两个条件，则称其为有界分配半蕴涵格（简称 h-格）：

1) $a \to a = 1$,

2) $a \wedge (a \to b) \leq b$。

我们用 hIL 表示其成员为 h-格的簇。给定 $A \in$ hIL 和 a, $b \in A$，我们定义 $a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a)$。

引理 3. 设 $A \in$ hIL 且 $a, b \in A$。则满足以下条件：

1) 若 $a \to b = 1$，则 $a \leq b$,

2) $a \to b = 1$ 当且仅当 $a = b$ 时， $b \to a = 1$

3) $a \wedge (a \leftrightarrow b) = b \wedge (a \leftrightarrow b)$。

证明。 通过直接计算即可得出。 □

以下例子见于 [20, 例 1]。

例 4。 集合 $A = \{0, a, 1\}$，其中元素按全序排列 $0 < a < 1$，运算 $\to$ 定义为

$\to$	0	a	1
0	1	a	1
a	0	1	0
1	0	a	1

是一个 *h*-格。

3 半 Nelson 代数

本节定义半纳尔逊代数，并证明每个半纳尔逊代数都可以表示为一个 h-格的扭结构。

设 $A \in$ hIL。我们按（1）定义 K(A)。则 $\langle$K(A) $\wedge, \vee, \sim$, (0, 1), (1, 0)$\rangle$ 是一个克莱尼代数 [7, 12]。我们还在 K(A) 上按第 2 节定义二元运算 $\Rightarrow$。注意，这是一个定义良好的映射，因为若 (a, b) 和 (c, d) 是 K(A) 的元素，则 $(a \to c) \wedge a \wedge d \leq c \wedge d = 0$，即 $(a \to c) \wedge a \wedge d = 0$。因此，结构 $\langle$K(A) $\wedge, \vee, \Rightarrow, \sim$, (0, 1), (1, 0)$\rangle$ 是一个类型为 (2, 2, 2, 1, 0, 0) 的代数。

定义5。 型为$(2, 2, 2, 1, 0, 0)$ 的代数 $\langle T, \wedge, \vee, \to, \sim, 0, 1\rangle$ 称为半纳尔逊代数（简称 *h-Nelson*代数），如果 $\langle T, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ 是克莱尼代数，且对每个 $x, y, z \in T$，以下条件均成立：

(hN1) $x \to x = 1$, (hN2) $x \wedge (x \to y) \leq x \wedge (\sim x \vee y)$, (hN3) $\sim (x \to y) \to (x \wedge \sim y) = 1$,
(hN4) $(x \wedge \sim y) \to \sim (x \to y) = 1$, (hN5) $(x \wedge y \wedge (x \to y)) \to (x \wedge (x \to y)) = 1$,
(hN6) $(x \wedge (x \to y)) \to (x \wedge y \wedge (x \to y)) = 1$,

(hN7) 若 $x \to y = 1$、 $y \to x = 1$、 $y \to z = 1$ 和 $z \to y = 1$，则 $x \to z = 1$ 且 $z \to x = 1$,

(hN8) 若 $x \to y = 1$ 且 $y \to x = 1$，则 $(x \wedge z) \to (y \wedge z) = 1$,

(hN9) 若 $x \to y = 1$ 且 $y \to x = 1$，则 $(x \vee z) \to (y \vee z) = 1$,

(hN10) 若 $x \to y = 1$ 且 $y \to x = 1$ 则 $(x \to z) \to (y \to z) = 1$且$(z \to x) \to (z \to y) = 1$。

我们用 KhIL 表示其成员为 h-Nelson代数的类。

命题6. 若 $A \in$hIL 则 $\mathrm{K}(A) \in$KhIL。

证明。 设 $A \in$ hIL。我们将证明 K(A) 满足定义1的条件。为证明这一点，设 $x = (a, b)$、 $y = (c, d)$ 和 $z = (e, f)$ 是 K(A) 的元素。

显然， $x \to x = (1, 0)$，因此满足 (hN1)。
为了证明 (hN2)，注意到

$$x \wedge (x \to y) = (a \wedge (a \to c), b \vee (a \wedge d)),$$

$$x \wedge (\sim x \vee y) = (a \wedge (b \vee c), b \vee (a \wedge d)).$$

由于 $a \wedge (a \to c) \leq a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$，因此

$$x \wedge (x \to y) \leq x \wedge (\sim x \vee y),$$

因此满足 (hN2)。
直接计算可得

$$\sim (x \to y) \to (x \wedge \sim y) = (1, a \wedge d \wedge (b \vee c)).$$

But

$$a \wedge d \wedge (b \vee c) = (a \wedge d \wedge b) \vee (a \wedge d \wedge c) = 0,$$

so

$$\sim (x \to y) \to (x \wedge \sim y) = (1, 0),$$

这就是 (hN3)。
条件 (hN4) 可由等式

$$(x \wedge \sim y) \to \sim (x \to y) = (1, a \wedge d \wedge (a \to c))$$

以及 $a \wedge d \wedge (a \to c) \leq c \wedge d = 0$ 这一事实推出，即 $a \wedge d \wedge (a \to c) = 0$。
现在我们来证明 (hN5) 和 (hN6)。直接计算可得

$$x \wedge y \wedge (x \to y) = (a \wedge c \wedge (a \to c), b \vee d), \tag{3}$$

$$x \wedge (x \to y) = (a \wedge (a \to c), b \vee (a \wedge d)). \tag{4}$$

此外， $a \wedge (a \to c) \leq a \wedge c \wedge (a \to c)$，因此

$$a \wedge c \wedge (a \to c) = a \wedge (a \to c). \tag{5}$$

此外，考虑到 A 的底层格满足分配律，以及 $a \wedge b = c \wedge d = 0$ 和 $a \wedge (a \to c) \leq c$ 这些事实，我们得到

$$(a \wedge c \wedge (a \to c)) \wedge (b \vee (a \wedge d)) = 0, \tag{6}$$

$$(a \wedge (a \to c)) \wedge (b \vee d) = 0. \tag{7}$$

因此，根据等式 (3),. . . ,(7) 直接计算可知，条件 (hN5) 和 (hN6) 得以满足。

假设 $x \to y = 1$, $y \to x = 1$, $y \to z = 1$ 和 $z \to y = 1$，那么$a \to c = 1$, $a \wedge d = 0$, $c \to a = 1$, $c \wedge b = 0$, $c \to e = 1$, $c \wedge f = 0$, $e \to c = 1$ 和$e \wedge d = 0$。特别地，由引理 3 可得 $a = c = e$，因此

$$x \to z = (1, a \wedge f).$$

然而， $a \wedge f = e \wedge f = 0$。因此， $x \to z = (1, 0)$。类似地，我们有$z \to x = (1, 0)$。因此，(hN7) 得以满足。

最后，我们将证明 (hN8) 和 (hN9)。假设 $x \to y = 1$ 和$y \to x = 1$，那么 $a = c$, $a \wedge d = 0$ 和 $c \wedge b = 0$。此外，

$$x \wedge z = (a \wedge e, b \vee f),$$

$$y \wedge z = (c \wedge e, d \vee f) = (a \wedge e, d \vee f),$$

这意味着

$$(x \wedge z) \to (y \wedge z) = (1, a \wedge e \wedge (d \vee f)).$$

由于 $a \wedge e \wedge (d \vee f) = (a \wedge e \wedge d) \vee (a \wedge e \wedge f)$ 且 $a = c$因此 $a \wedge e \wedge (d \vee f) = 0$，所以

$$(x \wedge z) \to (y \wedge z) = (1, 0),$$

这就是 (hN8)。为证明 (hN9)，注意到

$$x \vee z = (a \vee e, b \wedge f),$$

$$(c \vee e, d \wedge f) = (a \vee e, d \wedge f),$$

so

$$(x \vee z) \to (y \vee z) = (1, (a \vee e) \wedge d \wedge f).$$

考虑到 $(a \vee e) \wedge d \wedge f = (a \wedge d \wedge f) \vee (e \wedge d \wedge f)$， $a = c$， $a \wedge c = 0$并且 $e \wedge f = 0$ 我们得到

$$(a \vee e) \wedge d \wedge f = 0.$$

因此,

$$(x \vee z) \to (y \vee z) = (1, 0),$$

这正是我们的目标。 □

命题7。 设 $T \in$KhIL。对于每个x、 $y \in T$， 以下条件均成立：

1) $1 \to x \leq x$,

2) 若 $x \to y = 1$ 则 $x = x \wedge (\sim x \vee y)$,

3) 若 $x \to y = 1$ 且 $\sim y \to \sim x = 1$ 则 $x \leq y$。

证明。 首先我们将证明条件 1) 得到满足。根据 (hN2),

$$(1 \to x) = 1 \wedge (1 \to x) \leq 1 \wedge (\sim 1 \vee x) = x, i.e.,$$

$1 \to x \leq x$。

现在我们将证明 2) 成立。假设 $x \to y = 1$, 因此根据 (hN2) 可得 $x \leq ($ $\sim x \vee y)$, 即

$$x = x \wedge (\sim x \vee y).$$

最后我们将证明 3) 得到满足。假设 $x \to y = 1$ 和 $\sim y \to \sim x = 1$。由本命题的 2. 可知

$$x = x \wedge (\sim x \vee y) = (x \wedge \sim x) \vee (x \wedge y),$$

$$\sim y = \sim y \wedge (y \vee \sim x) = (\sim y \wedge y) \vee (\sim y \wedge \sim x),$$

so

$$y = (y \vee \sim y) \wedge (x \vee y).$$

特别地,

$$x = (x \wedge \sim x) \vee (x \wedge y) \leq (y \vee \sim y) \vee (x \wedge y) = y \vee \sim y,$$

so

$$x = x \wedge (x \vee y) \leq (y \vee \sim y) \wedge (x \vee y) = y.$$

因此, $x \leq y$。 □

例 8. 考虑例 *4* 中给出的 *h*-格，可知$\mathrm{K}(A)$具有 *h-Nelson*代数的结构，其论域是由$(0, 1) < (0, a) < (0, 0) < (a, 0) < (1,0)$构成的五元链。

设 $T \in$KhIL。我们将二元关系 θ 定义为第2节中的式 (2)。

引理9. 设 $T \in$KhIL。则 θ 是与 $\wedge$、$\vee$和 $\to$相容的等价关系。

证明. θ 的自反性和对称性显然成立。由 (hN7) 可得该关系具有传递性。因此, θ 是一个等价关系。由 (hN8)、(hN9) 和 (hN10) 可得, θ 与 $\wedge$、 $\vee$ 和 $\to$ 相容。 □

设 $\langle T, \wedge, \vee, \to, \sim, 0, 1\rangle$ 是一个 h-Nelson代数。由引理9可知，我们可以在 T/θ 上定义运算 $\wedge$、 $\vee$、 $\to$、0 和 1，如第2节所述。特别地, $\langle T/\theta, \wedge, \vee, 0,$ $1\rangle$ 是一个有界分配格。我们用 $\preceq$表示该格的序关系。

命题10。若 $T \in$ KhIL 则 $T/\theta \in$ hIL。

证明。 设 $T \in$ KhIL 且 x, $y \in T$。由 (hN1) 可得

$$x/\theta \to x/\theta = 1/\theta.$$

不等式

$$x/\theta \wedge (x/\theta \to y/\theta) \preceq y/\theta$$

由 (hN5) 和 (hN6) 可得。因此, $T/\theta \in$ hIL。 □

定理 11. 设 $T \in$ KhIL。那么，由$\rho_T(x) = (x/\theta, \sim x/\theta)$ 给出的映射 $\rho_T: T \to \mathrm{K}(T/\theta)$ 是一个单态射。

证明。我们用 ρ 代替 ρ_T。首先，我们将证明 ρ 是定义良好的映射。令 $x \in T$。注意，$x/\theta \wedge \sim x/\theta = 0/\theta$ 当且仅当（$x \wedge \sim x$）$\to 0 = 1$且 $0 \to$（$x \wedge \sim x$）$= 1$。首先注意，由 (hN1) 和 (hN4) 可得

$$(x \wedge \sim x) \to 0 = (x \wedge \sim x) \to \sim (x \to x) = 1.$$

此外，由 (hN1) 和 (hN3) 可得

$$0 \to (x \wedge \sim x) = \sim (x \to x) \to (x \wedge \sim x) = 1.$$

因此，ρ是定义良好的映射。

直接计算可得，ρ 保留 $\wedge$、$\vee$、$\sim$、0 和 1。ρ 保留 $\to$这一事实由 (hN3) 和 (hN4) 得出。因此，ρ 是一个同态。最后，为了证明 ρ 是单射映射，令 $x, y \in T$满足 $\rho(x) = \rho(y)$，即 $x \to y = 1$、$y \to x = 1$、$\sim x \to \sim y = 1$ 且 $\sim y \to \sim x = 1$。因此，由引理 7 可得 $x = y$。所以，ρ 是单射映射。因此，ρ 是单态射。 □

自然会想到，拟簇 KhIL 是否实际上是一个簇。答案是肯定的。为证明这一点，我们首先确立以下结果。

命题 12. 设 $T \in$KhIL。那么，对于所有 $x, y, z \in T$，以下条件均成立：

$$(x \to y) \vee (z \wedge \sim z) = (x \vee (z \wedge \sim z)) \to (y \vee (z \wedge \sim z)). \tag{8}$$

证明。设 $A \in$ hIL。我们证明方程（8）在 K(A) 中成立。取 K(A) 中的 $x =$ (a, b)、$y =$ (c, d) 和 $z =$ (e, f)。那么

$$(x \to y) \vee (z \wedge \sim z) = (a \to c, (a \wedge d) \wedge (e \vee f)),$$

and

$$(x \vee (z \wedge \sim z)) \to (y \vee (z \wedge \sim z)) = (a, b \wedge (e \vee f)) \to (c, d \wedge (e \vee f)).$$

不难验证

$$(a, b \wedge (e \vee f)) \to (c, d \wedge (e \vee f)) = (a \to c, (a \wedge d) \wedge (e \vee f)).$$

因此，方程（8）在 K(A) 中成立。

最后，根据定理 11，每个 $T \in$ KhIL 都同构于某个 $A \in$hIL 的 K(A) 的子代数，因此方程（8）在 T 中也成立。 □

引理 13. 设 T 是一个克莱尼代数。那么，

$$1 = x \vee (z \wedge \sim z) \text{ } \textit{if and only if} \text{ } x = 1.$$

证明. 假设 $1 = x \vee (z \wedge \sim z)$。由此可得 $1 \leq x \vee \sim z$，根据德摩根定律可得 $\sim x \wedge z = 0$。由于 $z \wedge \sim z \leq x \vee \sim x$，我们有$x \vee (z \wedge \sim z) \leq x \vee \sim x$，这意味着 $x \vee \sim x = 1$。因此，

$$z = z \wedge (x \vee \sim x) = (z \wedge x) \vee (z \wedge \sim x) = (z \wedge x) \vee 0 = z \wedge x.$$

因此 $z \leq x$，从而 $1 = x \vee z = x$。反向蕴涵显然成立，结论得证。

□

在 [11] 和 [23], 对于克莱尼代数 T 及其负元集合$T^- = \{ x \in T\colon \ \ x \leq \sim x \}$, 引入了以下关系:

$$x \, \theta_{T^-} \, y \quad \text{if and only if} \quad \exists n \in T^- \text{ such that } x \vee n = y \vee n. \tag{9}$$

由于 T^- 是 T的理想，关系 θ_{T^-} 是格同余。此外，商格 T/θ_{T^-}是分配的，并为克林代数的扭积表示提供了所采用的底层分配结构。方程（8）的动机在于确保 θ_{T^-} 与运算 $\rightarrow$相容。在此假设下，将证明 $\theta = \theta_{T^-}$。注意， $T^- = \{ x \wedge \sim x : x \in T \}$，这一描述将在下文中使用。

命题14。 若 T 是一个满足从*(hN1)*到 *(hN6)*的条件以及方程（*8*）的克莱尼代数，则下列条件等价:

1. $x \rightarrow y = 1$ 和 $y \rightarrow x = 1$;
2. 存在 $z \in T$ 使得 $x \vee (z \wedge \sim z) = y \vee (z \wedge \sim z)$。

证明。 假设 $x \rightarrow y = 1$ 和 $y \rightarrow x = 1$。由命题7可得$x = x \wedge (\sim x \vee y)$ 和 $y = y \wedge (\sim y \vee x)$。令 $z = (x \wedge \sim x) \vee (y \wedge \sim y)$。那么$z \leq \sim z$ 和 $z \wedge \sim z = z$。因此,

$$x \vee z = x \vee (x \wedge \sim x) \vee (y \wedge \sim y) = x \vee (y \wedge \sim y) = (x \vee y) \wedge (x \vee \sim y).$$

由于 $y \leq \sim y \vee x$，我们有 $x \vee y \leq \sim y \vee x$，因此 $x \vee (z \wedge \sim z) = x \vee y$。同理， $y \vee (z \wedge \sim z) = x \vee y$，从而， $y \vee (z \wedge \sim z) = x \vee (z \wedge \sim z)$。

现在，假设存在 $z \in T$使得 $x \vee (z \wedge \sim z) = y \vee (z \wedge \sim z)$。由 (hN1) 和 (8)， $1 = x \vee (z \wedge \sim z) \rightarrow y \vee (z \wedge \sim z) = (x \rightarrow y) \vee (z \wedge \sim z)$。由引理 13， $x \rightarrow y = 1$。同理可得 $y \rightarrow x = 1$。 □

定理15。 类 KhIL 是一个簇。

证明。 我们将证明，KhIL 恰好是由 Kleene 代数的方程以及条件（hN1）–（hN6）和方程（8）定义的代数类。

一方面，由命题 12 可知，KhIL 中的每个代数都满足方程（8）。

另一方面，假设 T 满足条件（hN1）–（hN6）和方程（8）。由命题14立即可知， T 满足条件（hN8）、（hN9）和（hN7），因为 θ_{T^-} 是 T 的格同余。

为证明条件（hN10），假设 $x \rightarrow y = y \rightarrow x = 1$。由命题14，存在 $w \in T$，使得 $x \vee （w \wedge \sim w） = y \vee （w \wedge \sim w）$。于是,

$$z \vee (w \wedge \sim w) \rightarrow x \vee (w \wedge \sim w) = z \vee (w \wedge \sim w) \rightarrow y \vee (w \wedge \sim w)$$

并由方程（8）可得

$$(z \rightarrow x) \vee (w \wedge \sim w) = (z \rightarrow y) \vee (w \wedge \sim w).$$

再次由命题14可得，$(z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y) = 1$ 和 $(z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x) = 1$。类似地，可以证明 $(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z) = 1$ 和 $(x \rightarrow z) \rightarrow (y \rightarrow z) = 1$。因此， $T \in$ KhIL，结论得证。 □

注16. 方程（*8*）独立于条件（*hN1*）–（*hN6*）。为说明这一点，我们考虑链 $T = \{0, a, 1\}$，其中 $0 < a < 1$，运算 $\rightarrow$定义如下：

$\rightarrow$	0	a	1
0	1	1	1
a	1	1	a
1	0	a	1

以及 $\sim 0 = 1$、$\sim 1 = 0$ 和 $\sim a = a$。T 是满足条件*(hN1)-(hN6)*的克莱尼代数，但是

$$(0 \rightarrow 1) \vee a = 1 \vee a = 1 \neq (0 \vee a \rightarrow 1 \vee a) = (a \rightarrow 1) = a.$$

4 h-Nelson代数的同余

设 $T \in$是KhIL，$F \subseteq T$。照例，若 $1 \in F$是 T的一个滤子，则称之为滤子：F是一个上集（即对于每个 $x, y \in T$，若 $x \leq y$且 $x \in F$，则 $y \in F$），并且对所有 $x, y \in F$，都有 $x \wedge y \in F$。我们还称 F为 T的一个蕴涵滤子，若 $1 \in F$，且对于每个 $x, y \in F$，若 $x \in F$ 且 $x \rightarrow y \in F$，则 $y \in F$。

定义17。设 $T \in$是*KhIL*，$F \subseteq T$。若 F 是 T 的一个*h*-蕴涵滤子，即它是 T 的一个蕴涵滤子，并满足以下附加条件：对于每个 x、$y \in T$和 $f \in F$，则称之为*h*-蕴涵滤子：

F1) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \wedge f) \rightarrow (y \wedge f)) \in F$,
F2) $((x \wedge f) \rightarrow (y \wedge f)) \rightarrow (x \rightarrow y) \in F$,
F3) $\sim(x \rightarrow y) \rightarrow \sim((x \wedge f) \rightarrow (y \wedge f)) \in F$,
F4) $\sim((x \wedge f) \rightarrow (y \wedge f)) \rightarrow \sim(x \rightarrow y) \in F$.

本节证明，对于每个 $T \in$ KhIL，T 的同余格与 T的 h-蕴涵滤子格之间存在一个序同构。为此，我们将给出一些定义和技术性结果。

设 $T \in$ KhIL。给定 T 上的一个等价关系 θ 以及 $x \in T$，我们用x/θ 表示与同余关系 θ相关联的 x的等价类。我们还用T/θ表示集合 $\{x/\theta : x \in T\}$。此外，我们用 Con(T) 表示 T的同余关系集合。最后，我们用 hIF(T) 表示 T的 h- 蕴涵滤子集合。

注18。设 $T \in$ KhIL 且 $F \in \mathrm{hIF}(T)$。那么 F 是一个上集。事实上，设 $x, y \in T$满足 $x \leq y$和 $x \in F$。由 *F2)* 可得 $((x \wedge x) \rightarrow (y \wedge x)) \rightarrow (x \rightarrow y) \in F$，即 $1 \rightarrow (x \rightarrow y) \in F$。由于 $1 \in F$，因此 $x \rightarrow y \in F$。考虑到 $x \in F$，可得 $y \in F$。因此，F 是一个上集。

引理 19。设 $T \in$KhIL 且 $\theta \in \mathrm{Con}(T)$。那么 $1/\theta \in \mathrm{hIF}(T)$。

证明。令 $\theta \in$ Con(T)。注意，$1/\theta$ 是一个上集，因为 θ 特别是一个格同余。为了证明 $1/\theta$ 是一个蕴涵滤子，取 x，$y \in T$使得 x，$x \rightarrow y \in 1/\theta$。于是 $x \wedge (x \rightarrow y) \in 1/\theta$。由于 $1/\theta$ 是一个上集，由(hN2)可得 $x \wedge (\sim x \vee y) \in 1/\theta$。此外，由于 $x/\theta = 1/\theta$，因此$\sim x/\theta = 0/\theta$，所以 $y/\theta = 1/\theta$，即 $y \in 1/\theta$。因此，$1/\theta$ 是一个蕴涵滤子。通过直接计算可知，$1/\theta$ 是一个h-蕴涵滤子。 □

引理20。 设 $T \in$ KhIL、 $\theta \in \mathrm{Con}(T)$ 且 $x, y \in T$。那么 $(x, y) \in \theta$ 当且仅当 $x \to y$, $\sim y \to \sim x$, $y \to x$, $\sim x \to \sim y \in 1/\theta$。

证明。 设 $\theta \in$ Con(T) 且 x, $y \in T$。显然, 若 $(x, y) \in \theta$, 则$x \to y$, $\sim y \to \sim x$, $y \to x$, $\sim x \to \sim y \in 1/\theta$。反之, 设 $x \to y$,$\sim y \to \sim x$, $y \to x$, $\sim x \to \sim y \in 1/\theta$。由于 $T/\theta \in$ 是 KhIL, 根据命题7可得 $x/\theta = y/\theta$, 即 $(x, y) \in \theta$。 □

引理21。 设 $T \in$ KhIL 且 $\theta, \psi \in \mathrm{Con}(T)$。那么 $\theta \subseteq \psi$ 当且仅当$1/\theta \subseteq 1/\psi$。特别地, $\theta = \psi$ 当且仅当 $1/\theta = 1/\psi$。

证明。 设 θ, $\psi \in$ Con(T)。显然, 若 $\theta \subseteq \psi$, 则 $1/\theta \subseteq 1/\psi$。反向结论可根据引理20通过直接计算得到。 □

引理22。 设 $T \in$KhIL 且 F 为 T 的蕴涵滤子, 并且对于任意 x、$y \in T$和 $f \in F$, 其满足定义*17*中的 *F1)* 和 *F2)*。则 F是一个滤子。此外, 当且仅当 $1 \to x \in F$时, $x \in F$。

证明。 由蕴涵滤子的定义可得 $1 \in F$。由注18中的 F2) 可知, F 是一个上集。现在, 设 $x \in T$。为了证明 $x \in F$ 当且仅当 $1 \to x \in F$, 假设 $x \in F$。于是

$$1 \to (1 \to x) = ((1 \wedge x) \to (x \wedge x)) \to (1 \to x) \in F,$$

so $1 \to x \in F$。逆向蕴含由命题 7 可得。

最后, 为了证明 F在 $\wedge$下封闭, 设 x, $y \in F$。则 $1 \to y \in F$。此外,

$$(1 \to y) \to ((1 \wedge x) \to (y \wedge x)) \in F$$

由于 $x \in F$, 因此当 $1 \to y \in F$时, $x \to (y \wedge x) \in F$。因此, $y \wedge x \in F$。所以, F 是一个滤子。 □

在 h-Nelson代数的框架下, 照例定义二元项

$$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x).$$

令 $T \in$ KhIL 和 $x, y \in T$。我们还定义

$$s(x, y) = (x \leftrightarrow y) \wedge (\sim x \leftrightarrow \sim y).$$

值得注意的是, $s(x, y) = s(y, x) = s(\sim x, \sim y) = s(\sim y, \sim x)$。

引理 23. 令 $T \in$ KhIL 以及 $x, y, z \in T$。则满足以下条件:

1) $(x \wedge (x \leftrightarrow y)) \to (y \wedge (x \leftrightarrow y)) = 1$, 2) $(x \wedge s(x, y)) \to (y \wedge s(x, y)) = 1$, 3) $(x \wedge (x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)) \to (z \wedge (x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)) = 1$, 4) $(x \wedge s(x, y) \wedge s(y, z)) \to (z \wedge s(x, y) \wedge s(y, z)) = 1$, 5) $((x \vee z) \wedge (x \leftrightarrow y)) \to ((y \vee z) \wedge (x \leftrightarrow y)) = 1$, 6) $(x \wedge s(x, y)) \to (z \wedge s(x, y)) = (y \wedge s(x, y)) \to (z \wedge s(x, y))$,

7) $(z \wedge s(x,y)) \to (x \wedge s(x,y)) = (z \wedge s(x,y)) \to (y \wedge s(x,y))$,

8) $((z \wedge (x \leftrightarrow y)) \to (x \wedge (x \leftrightarrow y))) \to ((z \wedge (x \leftrightarrow y)) \to (y \wedge (x \leftrightarrow y))) = 1$,

9) $((x \wedge (x \leftrightarrow y)) \to (z \wedge (x \leftrightarrow y))) \to ((y \wedge (x \leftrightarrow y)) \to (z \wedge (x \leftrightarrow y))) = 1$,

10) $(x \wedge \sim x) \to 0 = 0 \to (x \wedge \sim x) = 1$。

证明。 由定理 11，不失一般性，我们可以假设对于某个 $A \in$ hIL，有 $T =$K(A)。令 $x =(a,\ b)$、$y =(c,\ d)$ 和 $z =(e,\ f)$ 为 K(A) 的元素。直接计算可得

$$x \leftrightarrow y = (a \leftrightarrow c, (a \wedge d) \vee (c \wedge b)),$$

$$\sim x \leftrightarrow \sim y = (b \leftrightarrow d, (a \wedge d) \vee (c \wedge b)),$$

$$y \leftrightarrow z = (c \leftrightarrow e, (c \wedge f) \vee (e \wedge d)),$$

$$\sim y \leftrightarrow \sim z = (d \leftrightarrow f, (c \wedge f) \vee (e \wedge d)),$$

so

$$s(x,y) = ((a \leftrightarrow c) \wedge (b \leftrightarrow d), (a \wedge d) \vee (c \wedge b)).$$

为证明 1)，注意到

$$x \wedge (x \leftrightarrow y) = (a \wedge (a \leftrightarrow c), b \vee (a \wedge d)),$$

$$y \wedge (x \leftrightarrow y) = (c \wedge (a \leftrightarrow c), d \vee (c \wedge b)).$$

由于 $a \wedge (a \leftrightarrow c) = c \wedge (a \leftrightarrow c)$，直接计算可证明

$$(x \wedge (x \leftrightarrow y)) \to (y \wedge (x \leftrightarrow y)) = (1, 0).$$

条件 2）由本引理的 1）和 (hN8) 得出。

为证明条件 3），注意到由本引理的 1）和 (hN8) 可得

$$(x \wedge (x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)) \to (y \wedge (x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)) = 1,$$

$$(y \wedge (x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)) \to (z \wedge (x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)) = 1.$$

因此，由 (hN7) 可得

$$(x \wedge (x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)) \to (z \wedge (x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)) = 1.$$

条件 4）由本引理的 3）和 (hN8) 得出。

条件 5）由本引理的 1）、T 的底层格的分配律以及 (hN9) 得出。

为了证明 6)，注意到

$$x \wedge s(x,y) = (a \wedge (a \leftrightarrow c) \wedge (b \leftrightarrow d), b \vee (a \wedge d)),$$

$$y \wedge s(x,y) = (c \wedge (a \leftrightarrow c) \wedge (b \leftrightarrow d), d \vee (c \wedge b)),$$

$$z \wedge s(x,y) = (e \wedge (a \leftrightarrow c) \wedge (b \leftrightarrow d), f \vee (a \wedge d) \vee (c \wedge b)).$$

给定 $(u,\ v) \in T$，我们定义 $\pi_1(u,\ v) = u$ 和 $\pi_2(u,\ v) = v$。显然，$\pi_1(x \wedge s(x,\ y)) = \pi_1(y \wedge s(x,\ y))$，因此

$$\pi_1((x \wedge s(x,y)) \to (z \wedge s(x,y))) = \pi_1((y \wedge s(x,y)) \to (z \wedge s(x,y))).$$

此外，直接计算可得

$$\pi_2(x \wedge s(x,y)) \to (z \wedge s(x,y)) = f \wedge a \wedge (a \leftrightarrow c) \wedge (b \leftrightarrow d),$$

$$\pi_2((y \wedge s(x,y)) \to (z \wedge s(x,y)) = f \wedge c \wedge (a \leftrightarrow c) \wedge (b \leftrightarrow d).$$

由于 $a \wedge (a \leftrightarrow c) = c \wedge (a \leftrightarrow c)$，因此

$$f \wedge a \wedge (a \leftrightarrow c) \wedge (b \leftrightarrow d) = f \wedge c \wedge (a \leftrightarrow c) \wedge (b \leftrightarrow d).$$

因此，我们已证明 6)。类似的论证可证明 7)。

条件 8) 和 9) 由本引理的 1) 及 (hN10) 得出。

条件 10) 可由直接计算得出。 □

设 $T \in$ KhIL。取 F 为 T 的一个 h-蕴涵滤子。定义集合

$$\Theta(F) = \{(x,y) \in T \times T : s(x,y) \in F\}.$$

注意，$s(x,\ y) \in F$当且仅当 $x \to y,\ y \to x,\ \sim x \to \sim y,\ \sim y \to \sim x \in F$。

引理 24。设 $T \in$ KhIL 且 $F \in \mathrm{hIF}(T)$。那么 $\Theta(F)$ 是一个等价关系，且 $1/\Theta(F) = F$。

证明。设 $F \in$ hIF(T)。首先，我们将证明 $\Theta(F)$ 是一个等价关系。显然，$\Theta(F)$ 是自反且对称的关系。为证明传递性，设 $x, y, z \in T$ 满足 $(x, y), (y, z) \in \Theta(F)$，即 $s(x, y)\ s(y, z) \in F$。令 $f = s(x, y) \wedge s(y, z)$。由引理22可知 F 是一个滤子，因此 $f \in F$。此外，由引理 23 可知 $(x \wedge f) \to (z \wedge f) = 1$。但 $((x \wedge f) \to (z \wedge f)) \to (x \to z) \in F$，因此 $x \to z \in F$。类似地，我们有 $z \to x \in$，$\sim x \to \sim z, \sim z \to \sim x \in F$。于是，$s(x, z) \in F$，即 $(x, z) \in \Theta(F)$。因此，$\Theta(F)$ 是传递关系。由此，$\Theta(F)$ 是等价关系。

最后，令 $x \in T$。那么 $x \in 1/\Theta(F)$ 当且仅当 $x \to 1, 1 \to x, 0 \to \sim x$和 $\sim x \to 0 \in F$。设 $x \to 1, 1 \to x, 0 \to \sim x$和 $\sim x \to 0 \in F$。由于 $1 \to x \in F$，由引理22可得 $x \in F$。反过来，假设 $x \in F$。由引理22可得 $1 \to x \in F$。此外，$((x \wedge x) \to (1 \wedge x)) \to (x \to 1) \in F$，即 $1 \to (x \to 1) \in F$，因此 $x \to 1 \in F$。此外，由引理 23 可得 $0 \to (\sim x \wedge x) = 1$。由于 $((0 \wedge x) \to (\sim x \wedge x)) \to (0 \to \sim x) \in F$，因此 $0 \to \sim x \in F$。最后，由于 $(\sim x \wedge x) \to 0 = 1$且 $((\sim x \wedge x) \to (0 \wedge x)) \to (\sim x \to 0) \in F$，因此 $\sim x \to 0 \in F$。因此，$1/\Theta(F) = F$。

□

引理 25. 设 $T \in$ KhIL 且 $F \in \mathrm{hIF}(T)$。则 $\Theta(F) \in \mathrm{Con}(T)$。

证明。首先，我们将证明 $\Theta(F)$ 保持 $\wedge$。令 $x,\ y,\ z \in T$，使得 $(x,\ y) \in \Theta(F)$，即 $s(x,\ y) \in F$。由引理 23 可得

$$(x \wedge s(x,y)) \to (y \wedge s(x,y)) = 1,$$

$$(y \wedge s(x,y)) \to (x \wedge s(x,y)) = 1.$$

因此，由 (hN8) 可得

$$(x \wedge z \wedge s(x,y)) \to (y \wedge z \wedge s(x,y)) = 1.$$

But

$$((x \wedge z \wedge s(x,y)) \to (y \wedge z \wedge s(x,y))) \to ((x \wedge z) \to (y \wedge z)) \in F,$$

所以 $(x \wedge z) \to (y \wedge z) \in F$。类似地，$(y \wedge z) \to (x \wedge z) \in F$。为了证明 $\sim(x \wedge z) \to \sim(y \wedge z) \in F$，首先注意到

$$(\sim x \wedge s(x,y)) \to (\sim y \wedge s(x,y)) = 1,$$

$$(\sim y \wedge s(x,y)) \to (\sim x \wedge s(x,y)) = 1,$$

所以由 (hN9) 可得

$$(((\sim x \wedge s(x,y)) \vee (\sim z \wedge s(x,y))) \to ((\sim y \wedge s(x,y)) \vee (\sim z \wedge s(x,y))) = 1,$$

即，

$$(\sim (x \wedge z) \wedge s(x,y)) \to (\sim (y \wedge z) \wedge s(x,y)) = 1.$$

因此，$\sim(x \wedge z) \to \sim(y \wedge z) \in F$。类似地，我们得到 $\sim(y \wedge z) \to \sim(x \wedge z) \in F$。于是，$(x \wedge z, y \wedge z) \in \Theta(F)$。

由此可知，$s(x,y) = s(\sim x, \sim y)$，这是因为 $\Theta(F)$ 保持 $\sim$。由于我们还证明了 $\Theta(F)$ 保持 $\wedge$，且特别地 T 是一个克莱尼代数，因此 $\Theta(F)$ 保持 $\vee$。

下面我们将证明 $\Theta(F)$ 保持蕴涵。设x，y，$z \in T$满足 $(x, y) \in \Theta(F)$，即 $s(x, y) \in F$。于是

$$(x \to z, ((x \wedge s(x,y)) \to (z \wedge s(x,y))),$$

$$(y \to z, ((y \wedge s(x,y)) \to (z \wedge s(x,y)))$$

它们是 $\Theta(F)$ 的元素。由引理 23 可得

$$(x \wedge s(x,y)) \to (z \wedge s(x,y)) = (y \wedge s(x,y)) \to (z \wedge s(x,y))$$

于是，$\Theta(F)$ 的传递性意味着 $(x \to z, \ y \to z) \in \Theta(F)$。基于引理 23 的类似论证表明 $(z \to x, \ z \to y) \in \Theta(F)$。因此，$\Theta(F)$ 保持蕴涵。

于是，$T/\Theta(F) \in$ KhIL。因此，$\Theta(F) \in \mathrm{Con}(T)$。 □

定理 26。设 $T \in$ KhIL。映射 $\theta \mapsto 1/\theta$ 和 $F \mapsto \Theta(F)$在 $\mathrm{Con}(T)$ 与 $\mathrm{hIF}(T)$之间建立序同构。

下面我们介绍并研究开蕴涵滤子和 N-蕴涵滤子。这类滤子将在后文中使用。

定义27. 如果满足 $1 \to x \in F$ 每当 $x \in F$，则称 *h-Nelson* 代数的蕴涵滤子 F 为开滤子。

由引理22，我们得到以下结果。

命题 28. 设 $T \in$KhIL。那么， T 的每个 h-蕴涵滤子都是 T的开蕴涵滤子。

值得注意的是，命题 28 的逆命题未必成立。事实上，设 T 为例 8 中给出的 h-Nelson代数。令 $F =\{(a,\ 0),\ (1,\ 0)\}$。显然可以证明， F是一个开蕴涵滤子。令 $x =(0,\ 1)$， $y =(1,\ 0)$，以及 $f =(a,\ 0)$。直接计算可得，$((x \wedge f) \to (y \wedge f)) \to (x \to y) =(0,\ 0) \notin F$。因此， F不是一个 h-蕴涵滤子。

设 $\to_N$ 表示由下式定义的导出蕴涵

$$x \to_N y = x \to (x \wedge y).$$

现在我们引入以下定义。

定义 29. 设 $T \in$ KhIL 且 $F \subseteq T$。若 $1 \in F$，并且对任意 $x,\ y \in T$，当 x时有 $x \to_N \in F$，则称 F 为一个 N-蕴涵滤子。

注 30. 设 $T \in$ KhIL 且 F 是一个 N-蕴涵滤子。那么 F 是一个上集。事实上，设 $x \leq y$且 $x \in F$。由于 $x \to_N y = 1 \in F$且 $x \in F$，因此 $y \in F$。所以， F 是一个上集。

命题 31. 设 $T \in$ KhIL。那么， T 的每个 h-蕴涵滤子都是 T的 N-蕴涵滤子。

证明. 设 $T \in$ KhIL。取 F 作为 T 的一个 h-蕴涵滤子，并设 $x, x \to_N y \in F$。特别地， $x \to (x \wedge y) \in F$。由 F2) 可得，$((x \wedge x) \to (y \wedge x)) \to (x \to y) \in F$，即 $(x \to (x \wedge y)) \to (x \to y) \in F$。因此，考虑到 F是一个蕴涵滤子且 $x, x \to (x \wedge y) \in F$，可得 $y \in F$。因此， F 是 T的一个 N-蕴涵滤子。 □

命题 31 的逆命题不一定成立。事实上，设 T 为例 8 中给出的 h-Nelson代数，且 $F = \{(a,\ 0),\ (1,\ 0)\}$。我们有， F 不是 h-蕴涵滤子。然而，直接计算表明，F 是 N-蕴涵滤子。

5 中心 h-纳尔逊代数

如果存在一个关于对合的不动点元素，则称克莱尼代数（纳尔逊代数）为中心化的；也就是说，存在一个元素 c，使得$\sim$ c =c。该元素必然唯一。如果 $T =$ K(A)，其中 A 是一个有界分配格，则中心为 c $=(0,\ 0)$。设 T 是一个中心化的克莱尼代数。我们定义以下条件：

(CK) 对每个 $x,\ y \in T$，若 $x,\ y \geq$ c 且 $x \wedge y \leq$ c，则存在 $z \in T$，使得 $z \vee$ c $= x$ 且 $\sim z \vee$c $= y$。

条件（CK）并非每个中心化克莱尼代数都必然满足，例如见 [4] 的图 1。不过，每个中心化纳尔逊代数都满足条件（CK）（见 [7, 定理 3。5] 和 [4, 命题6。1]）。

以下两个性质是众所周知的：

• 设 T 是一个克莱尼代数。那么 T 同构于 K(A)，其中 A是某个有界分配格，当且仅当 T 是中心化的，并满足条件 (CK)（参见 [7, 定理 2。3] 和 [4, 命题6。1]）。

• 设T是一个纳尔逊代数。那么， T同构于某个 Heyting代数 A 的 K(A)，当且仅当 T 是中心化的（见 [7, 定理 3.7]）。

代数 $\langle T, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 0, 1, \mathsf{c}\rangle$ 是一个中心化 *h-Nelson*代数，如果 $\langle T, \wedge, \vee, \rightarrow \sim, 0, 1\rangle$ 是一个 h-Nelson代数，且 c 是一个中心。我们用 KhIL^c 表示其成员为中心化 h-Nelson代数的簇。

本节我们证明，对于给定的 $T \in$KhIL^c， T 同构于某个 h-格 A 的 K(A)，当且仅当 T 是中心化的并满足条件 (CK)（我们还将证明，并非每个中心化 h-Nelson代数都必然满足条件 (CK)）。最后，我们证明 hIL 与 KhIL^c 中对象满足条件 (CK) 的全子范畴之间存在范畴等价 [2]。

我们先给出一些预备结果。

注 32。

1）注意，若 T, U 是克林代数， T 有中心 c_T，且 f 是 *KhIL* 中从 T 到 U 的态射，则 U 有中心 c_U，并且 $f(c_T) = c_U$。事实上，$f(c_T) = f(\sim c_T) = \sim f(c_T)$。*2*）若 $T \in KhIL^c$，则由定理 *11* 和 *1*）可知，映射 $\rho_T : T \rightarrow K(T/\theta)$ 是 $KhIL^c$ 中的单态射。

令 $T \in$ KhIL^c 且 $x, y \in T$。

1) *If* $x \rightarrow y = 1$ *then* $x \vee \mathsf{c} \leq y \vee \mathsf{c}$.

2) *If* $x \vee \mathsf{c} = y \vee \mathsf{c}$ *then* $x \rightarrow y = 1$.

3) $\mathsf{c} \rightarrow 0 = 1$.

证明。 由注 32 可知，不失一般性，我们可以假设对某个 $A \in$ hIL，有 $T =$ K(A)。设 $x = (a, b)$ 且 $y = (d, e)$，其中 $a, b, d, e \in A$，并满足 $a \wedge b = d \wedge e = 0$。

为了证明 1)，假设 $x \rightarrow y = 1$，则 $a \leq d$，即 $x \vee \mathsf{c} \leq y \vee \mathsf{c}$。现在证明 2)。假设 $x \vee \mathsf{c} = y \vee \mathsf{c}$，即 $a = d$。那么 $x \rightarrow y = (a \rightarrow d, a \wedge e) = (a \rightarrow a, d \wedge e) = (1, 0)$，这就是 2)。现在，假设 $(x \wedge y) \rightarrow 0 = 1$，于是 $(a \wedge d) \rightarrow 0 = 1$。因此， $a \wedge d = 0$，这意味着 $0 \rightarrow (x \wedge y) = 1$ 且 $x \wedge y \leq \mathsf{c}$。最后证明 4)。直接计算可得 $(0, 0) \rightarrow (0, 1) = (1, 0)$。 □

设 $T \in$KhIL^c。我们定义如下条件:

(C) 对于每个 $x, y \in T$，如果 $(x \wedge y) \rightarrow 0 = 1$ 那么存在 $z \in T$使得$z \vee \mathsf{c} = x \vee \mathsf{c}$ 且 $\sim z \vee \mathsf{c} = y \vee \mathsf{c}$。

引理 34. 设 $T \in$KhIL^c。则 ρ 是满射，当且仅当 T 满足条件 (C)。

[2]如果 C 是一个代数类，我们会滥用记号，也用这种方式指代与该类相关联的代数范畴。

证明. 假设 ρ 是满射。取 $x, y \in T$，使得 $(x \wedge y) \to 0 = 1$，由引理 33 可得 $0 \to (x \wedge y) = 1$。因此，$x/\theta \wedge y/\theta = 0/\theta$。由于$\rho$ 是满射，存在 $z \in T$，使得 $z/\theta = x/\theta$ 和 $\sim z/\theta = y/\theta$，即$z \to x = 1$、$x \to z = 1$、$\sim z \to y = 1$、$y \to \sim z = 1$。再次应用引理 33，我们得到 $z \vee \mathsf{c} = x \vee \mathsf{c}$ 和 $\sim z \vee \mathsf{c} = y \vee \mathsf{c}$。

反之，假设 (C) 成立，并令 $x, y \in T$ 满足 $x/\theta \wedge y/\theta = 0/\theta$，于是 $(x \wedge y) \to 0 = 1$。由假设可知，存在 $z \in T$ 使得 $z \vee \mathsf{c} = x \vee \mathsf{c}$ 且 $\sim z \vee \mathsf{c} = y \vee \mathsf{c}$。由引理 33 可得$z \to x = 1$，$x \to z = 1$，$\sim z \to y = 1$ 和 $y \to \sim z = 1$。于是 $\rho(z) = (x/\theta, y/\theta)$。因此，$\rho$ 是满射。 □

引理 35. 设 $T \in \mathsf{KhIL}^c$。条件 (C) 与 (CK) 等价。

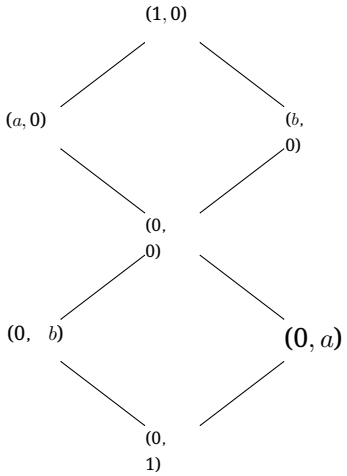
证明。 假设 T 满足 (CK)，并令 $x, y \in T$ 使得 $(x \wedge y) \to 0 = 1$。由引理 33 可得 $x \wedge y \leq \mathsf{c}$。令 $\hat{}x = x \vee \mathsf{c}$ 和 $\hat{}y = y \vee \mathsf{c}$。于是 $\hat{}x, \hat{}y \geq \mathsf{c}$ 且 $\hat{}x \wedge \hat{}y \leq \mathsf{c}$，因此由假设可知，存在 $z \in T$ 使得 $z \vee \mathsf{c} = \hat{}x$ 且 $\sim z \vee \mathsf{c} = \hat{}y$，即 $z \vee \mathsf{c} = x \vee \mathsf{c}$ 且 $\sim z \vee \mathsf{c} = y \vee \mathsf{c}$。

反过来，假设 (C) 成立。令 $x, y \in T$ 使得 $x, y \geq \mathsf{c}$ 且 $x \wedge y \leq \mathsf{c}$。由此可得 $x \wedge y = \mathsf{c}$。根据引理 33，$(x \wedge y) \to 0 = 1$。因此，根据假设，存在 $z \in T$ 使得 $z \vee \mathsf{c} = x \vee \mathsf{c}$ 且 $\sim z \vee \mathsf{c} = y \vee \mathsf{c}$，也就是说，$z \vee \mathsf{c} = x$ 且 $\sim z \vee \mathsf{c} = y$。 □

定理 36. 设 $T \in \mathsf{KhIL}$。那么，T 同构于 $\mathrm{K}(A)$，其中某个 *h*-格为 A，当且仅当 T 有中心且满足条件 (CK)。

证明. 假设对于某个 $A \in \mathsf{hIL}$，有 $T \cong \mathrm{K}(A)$。令 $x, y \in \mathrm{K}(A)$，使得$x, y \geq \mathsf{c}$ 且 $x \wedge y \leq \mathsf{c}$。因此，存在 $a, b \in A$，使得 $x = (a, 0)$、$y = (b, 0)$ 且 $a \wedge b = 0$。元素 $z = (a, b) \in \mathrm{K}(A)$ 满足 $z \vee \mathsf{c} = x$ 且$\sim z \vee \mathsf{c} = y$。因此，$\mathrm{K}(A)$ 满足 (CK)。由于同构保持这一条件，故 T 满足 (CK)。此外，$\mathrm{K}(A)$ 的中心为 (0,0)，这意味着 T 有中心。反向结论由引理 34、引理 35 和注 32 得出。 □

令 A 为含四个元素的布尔代数，其中 a 和 b 是原子。这个代数可视为一个有界分配格。在其上定义二元运算 $\to$，定义在 A 上为 $x \to y = 1$若 $x \leq y$，则 $x \to y = 0$；若 $x \not\leq y$，则 A。显然，配备此二元运算的 A 是一个 h-格。我们稍滥用记号，也用 A 表示这个 h-格。于是 $\mathrm{K}(A) \in$ 属于 KhIL^c。令 T 为 $\mathrm{K}(A$的子集，其哈斯图如下；这是 [4]（另见 [14]）中图 1 的哈斯图：



我们有 T 是 K(A) 的子代数；因此 $T \in$ 属于 KhIL^c。注意，(a，0)，(b，0) $\geq$(0，0) 且 (a，0) $\wedge$(b，0) =(0，0)。然而，不存在 $z \in T$使得 $z \vee$(0，0) =(a，0)，且 $\sim z \vee$(0，0) =(b，0)。因此，T不满足 (CK)。同样值得注意的是，$U = \{$(0，1)，(1，0)$\} \in$属于 KhIL，但 U的中心不为 [3]。

若 $A \in$ hIL，则 K(A) $\in$ KhIL。此外，若 $f\colon A \to B$ 是 hIL 中的态射，由直接计算可知，映射 K(f) : K(A) $\to$ K(B)，其定义为 K(f)(a，b) :=(f(a) f(b))，是 KhIL 中的态射。此外，K 可扩展为从 hIL 到 KhIL 的函子。反之，若 $T \in$ KhIL，则 C(T) =: $T/\theta \in$hIL。若 $f\colon T \to U$是 KhIL 中的态射，则 C(f) : $T/\theta \to U/\theta$，其定义为 C(f)(x/θ) = f(x)/θ，是 hIL 中的态射。此外，C 可扩展为从 KhIL 到 hIL 的函子。

引理 37。 设 $A \in$hIL。则映射 $\alpha_A : A \to$C(K(A)) 由 $\alpha_A(a) =$(a, $a \to 0$)/θ 给出，是一个同构。

证明。我们用 α 代替 α_A。首先证明 α 是定义良好的映射。设 $a \in A$。则 $a \wedge (a \to 0) \leq 0$，即 $a \wedge (a \to 0) = 0$。因此，($a, a \to 0$)/$\theta \in$K(A)/θ。设 $a \in A$。则 ($a, a \to 0$)/θ =(a, 0)/θ。显然，α 是同态。α 的单射性也显然。为证明 α 是满射，设 $y \in$ C(K(A))，于是对某些满足 $a \wedge b = 0$的a、$b \in A$，有 $y =$ (a, b)/θ 。此外，$y =$($a, a \to 0$)/θ，因此 $y = \alpha$(a)。故 α是满射。因此，α 是同构。 □

直接计算可得，若 $f\colon A \to B$ 是 hIL 中的态射，且$a \in A$则 C(K(f))(α_A(a)) = α_B (f(a))；若 $f\colon T \to U$是 KhIL 中的态射，且 $x \in T$则 K(C(f))(ρ_T(x)) = ρ_U(f(x))。

因此，由本节前述结果、注 32 以及引理 34 和 35 可得以下结果。

定理 38。 存在hIL 与KhIL^c 中满足(CK)的对象所构成的全子范畴之间的范畴等价。

[3]这个例子也出现在 [14] 的图 1 中

6 两个重要子簇

在 [8] 中，半 Heyting 代数和半 Nelson 代数框架下，Heyting代数与Nelson代数之间众所周知的关系得到了推广。这一关系也在 [14] 中推广到了子剩余格和子剩余 Nelson 代数。本文将上述结果推广到 h-格簇；该簇恰当地包含半 Heyting 代数簇和子剩余格簇。本节回顾 [8, 14], 中的一些定义和结果, 并研究其与本文部分结果的关系。我们还以直接的方式分别描述半 Nelson 代数和子剩余 Nelson 代数的同余关系。

半 Nelson 代数

我们首先定义半 Heyting 代数。Sankap- panavar [19] 将其作为 Heyting 代数的一种抽象而引入。

定义 39. 一个代数 $\langle H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$，其类型为 $(2, 2, 2, 0, 0)$，若对每个 $a, b, d \in H$都满足以下条件，则称其为半 *Heyting* 代数：

(S1) $\langle H, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界格，

(S2) $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$,

(S3) $a \wedge (b \rightarrow d) = a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge d)]$,

(S4) $a \rightarrow a = 1$。

我们用 SH 表示半 Heyting 代数构成的簇。显然，每个半海廷代数都是一个 h-格。半 Heyting 代数与 Heyting 代数具有以下共同性质：它们是伪补分配格，其同余关系由格滤子 [19] 决定。

以下定义见于 [8]。

定义 40. 一个代数 $\langle T, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1\rangle$，其类型为 $(2, 2, 2, 1, 0)$，若对每个 $x, y, z \in H$，以下条件均成立，则称为半纳尔逊代数：

（SN1） $x \wedge (x \vee y) = x$,

(SN2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

(SN3) $\sim\sim x = x$,

(SN4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

(SN5) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$,

(SN6) $x \wedge (x \rightarrow_N y) = x \wedge (\sim x \vee y)$,

(SN7) $x \rightarrow_N (y \rightarrow_N z) = (x \wedge y) \rightarrow_N z$,

(SN8) $(x \rightarrow_N y) \rightarrow_N [(y \rightarrow_N x) \rightarrow_N [(x \rightarrow z) \rightarrow_N (y \rightarrow z)]] = 1$,

(SN9) $(x \rightarrow_N y) \rightarrow_N [(y \rightarrow_N x) \rightarrow_N [(z \rightarrow x) \rightarrow_N (z \rightarrow y)]] = 1$,

(SN10) $(\sim(x \to y)) \to_N (x \wedge \sim y) = 1$,

(SN11) $(x \wedge \sim y) \to_N (\sim(x \to y)) = 1$.

其中，同样，$x \to_N y$ 表示术语 $x \to (x \wedge y)$。

注意，半纳尔逊代数特别是一个克莱尼代数，其中 0 定义为 ~ 1。下文中，我们考虑签名为 (2, 2, 2, 1, 0, 0) 的半海廷代数。Cornejo 和 Viglizzo 在 [8] 中引入了半 Nelson 代数，作为 Nelson 代数的一种推广。我们用 SN 表示半 Nelson 代数构成的簇。由 [8, 定理 4.1] 可知，若 $A \in$SH，则 K(A) $\in$ SN；由 [8, 定理 3.4] 可知，若 $T \in$ SN，则$T/\theta \in$ SN，其中 θ 是引理9中所考虑的等价关系。最后，[8, 推论 5.2] 证明了，若 $T \in$SN，则映射 ρ_T 从 T 到 K(T/θ) 是一个单态射，其定义与定理 11 中相同。因此，由每个半海廷代数都是一个 h-格，可得以下结果。

命题 41. SN $\subseteq$ KhIL。

以下性质刻画了哪些 h-格是半海廷代数。

命题 42. 设 $A \in$ hIL。那么 $A \in$ 半海廷代数 当且仅当 $\mathrm{K}(A) \in$ SN。

证明。设 $A \in$ hIL。显然，若 $A \in$是半海廷代数，则 K(A) $\in$SN。反之，假设 K(A) $\in$ SN，因此 K(A)/$\theta \in$是半海廷代数，其中 θ 是引理9中所考虑的等价关系。于是，由引理 37 可知 A同构于 K(A)/θ，故 $A \in$是半海廷代数，这正是我们要证明的。 □

注 43. 设 A 为例 *4* 中所考虑的 *h*-格。注意到 $a \wedge (a \to 1) = 0$ 且 $a \wedge 1 = 1$，因此 $a \wedge (a \to 1) \neq a \wedge 1$。于是，$A \notin$ 半海廷代数。因此，由命题 *42* 可知 $\mathrm{K}(A)$ $\notin$SN。所以，SN 真包含于 KhIL。

在 [8, 定理 6.11] 中已证明，若 $T \in$ SN，则 T 的同余格与 T的 N-蕴涵滤子格之间存在序同构。因此，由定理 26 可知，T 的 N-蕴涵滤子集合与 T 的 h-蕴涵滤子集合一致。下文将给出一些技术性结果，以直接证明上述性质。

引理 44. 设 $A \in$ 半海廷代数 且 $a, b, c, d \in A$。以下条件成立：

1) 若 $(a, b), (b, c) \in \mathrm{K}(A)$，则 $(a, b) \to_N (c, d) = (1, 0)$ 当且仅当 $a \leq c$。

2) $c \leq (a \to b) \to ((a \wedge c) \to (b \wedge c))$。

3) $c \leq ((a \wedge c) \to (b \wedge c)) \to (a \to b)$。

证明。设 $(a, b), (c, d) \in$K(A)。注意，$(a, b) \to_N (c, d) = (a \to (a \wedge c)\ a \wedge d)$。因此，$(a, b) \to_N (c, d) = (1, 0)$ 当且仅当 $a \to (a \wedge c) = 1$ 且 $a \wedge d = 0$。考虑到 $a \wedge (a \to (a \wedge c)) = a \wedge c$ 且 $c \wedge d = 0$，可得 $(a, b) \to_N (c, d) = (1, 0)$ 当且仅当 $a \leq c$。因此，条件1)成立。根据 [20, 引理 9] 以及方程$1 \to x = x$ 在每个半海廷代数中都成立这一事实，条件2)和3)也成立。 □

引理45。 设 $T \in \mathsf{SN}$ 且 $x, y, f \in T$。满足以下条件：

1) $f \to_N ((x \to y) \to ((x \wedge f) \to (y \wedge f))) = 1$.2)
$f \to_N ((x \wedge f) \to (y \wedge f)) \to (x \to y)) = 1$.3)
$f \to_N (\sim(x \to y) \to \sim((x \wedge f) \to (y \wedge f))) = 1$.4)
$f \to_N (\sim((x \wedge f) \to (y \wedge f)) \to \sim(x \to y)) = 1$.

证明。 不失一般性，我们可以假设对于某个$A \in$半海廷代数 SH，有 $T = \mathrm{K}(A)$。条件 1) 和 2) 根据引理 44 得出。3) 和 4) 的证明可根据半海廷代数的定义直接计算得出。 □

命题46。 设 $T \in$SN。那么， T 的 *h*-蕴涵滤子集与 T的 *N*-蕴涵滤子集一致。

证明。 设 $T \in \mathsf{SN}$。由命题 31 可知， T的每个 h-蕴涵滤子都是 T的 N-蕴涵滤子。根据注 30 和引理45进行直接计算可得， T 的每个 N-蕴涵滤子都是 T 的 h-蕴涵滤子。 □

子剩余 Nelson 代数

我们从子剩余格的定义开始 [10]。

定义 47。 子剩余格是一个二元组 (A, D)，其中 A 是有界分配格， D 是 A 的有界子格，并且对于每个 $a, b \in A$，集合 $\{d \in D : a \wedge d \leq b\}$ 都存在最大元。该元素记为 $a \to b$。

设 (A, D) 是一个子剩余格。该二元组可以视为一个代数 $\langle A, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$，其类型为 (2, 2, 2, 0, 0)，其中 $D = \{a \in A : 1 \to a = a\} = \{1 \to a : a \in A\}$。此外，代数 $\langle A, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ 是子剩余格，当且仅当 $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界分配格，且对于每个 $a, b, c \in A$，以下条件均成立：

1) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$,

2) $c \to (a \wedge b) = (c \to a) \wedge (c \to b)$,

3) $(a \to b) \wedge (b \to c) \leq a \to c$,

4) $a \to a = 1$,

5) $a \wedge (a \to b) \leq b$,

6) $a \to b \leq c \to (a \to b)$.

子剩余格由 Epstein 和 Horn [10] 引入，作为 Heyting 代数的一种可能推广；Celani 和 Jansana 也将这类代数作为弱 Heyting 代数 [6]的特例进行研究。显然，每个子剩余格都是一个 h-格。

以下定义见于 [14]。

定义48。 若代数 $\langle T, \wedge, \vee, \to, \sim, 0, 1\rangle$ 的类型为 (2、2、2、1、0、0)，则称其为子剩余 *Nelson*代数，当且仅当 $\langle T, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ 是克莱尼代数，并且对任意 $a, b, c \in T$均满足以下条件：

1) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$,

2) $z \to (x \wedge y) = (z \to x) \wedge (z \to y)$,

3) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z) = 1$,

4) $x \to x = 1$,

5) $x \wedge (x \to y) \leq x \wedge (\sim x \vee y)$,

6) $x \to y \leq z \to (x \to y)$,

7) $\sim (x \to y) \to (x \wedge \sim y) = 1$,

8) $(x \wedge \sim y) \to \sim (x \to y) = 1$.

子剩余 Nelson 代数在 [14] 中作为 Nelson 代数的推广被引入。我们用 SNA 表示子剩余 Nelson 代数构成的簇。由 [14, 命题 3.2] 可知，若 $A \in$ SRL，则 K(A) $\in$ SNA；由 [14, 命题 3.6] 可知，若 $T \in$ SNA，则 $T/\theta \in$ SRL，其中 θ 是引理9中讨论的等价关系。最后， [14, 定理 3.7 5.2] 证明了，若 $T \in$ SN，则按定理 11 中的定义，从 T 到 K(T/θ) 的映射 ρ_T 是一个单态射。因此，下述结果可由每个子剩余格都是一个 h-格这一事实推出。

命题49. SNA $\subseteq$ KhIL。

下面的结果刻画了哪些 h-格是次剩余格。

命题50。 设 $A \in$ hIL。那么， $A \in$是 SRL 当且仅当 $\mathrm{K}(A) \in$属于 SNA。

证明。 证明与命题 42 的证明类似。 □

注51。 设 A 为例 *4* 中所讨论的 *h*-格。注意到 $(a \vee 0) \to a = 1$ 且 $(a \to a) \wedge (0 \to a) = a$，因此 $(a \vee 0) \to a \neq (a \to a) \wedge (0 \to a)$。于是，$A \notin$ 属于 SRL。因此，由命题*50*可得 $\mathrm{K}(A) \notin$属于 SNA，所以SNA 真包含于KhIL。

在 [14, 定理 4.7]中已证明，若 $T \in$ 属于 SNA，则 T 的同余格与 T的开蕴涵滤子格之间存在序同构。因此，根据定理 26，我们有 T 的开蕴涵滤子集与 T 的 h-蕴涵滤子集相同。接下来，我们将证明上述性质，但不使用[14,定理 4.7]。我们从下面的技术性引理开始。

引理52. 设 $T \in$SNA 且 $x, y, z \in T$。则满足以下条件：

1) $(x \to (x \wedge z)) \to (((x \wedge z) \to (y \wedge z)) \to (x \to y)) = 1$.

2) $(x \to y) \to ((x \wedge z) \to (y \wedge z)) = 1$。

3) $((x\wedge\sim y)\ \to\sim((x\wedge z)\ \to y))\ \to(\sim(x\to y)\ \to\sim((x\wedge z)\ \to(y\wedge z)))\ =1$。

4) $\sim((x\wedge z)\to(y\wedge z))\to\sim(x\to y)=1.$

证明。 设 $T\in$SNA。不失一般性，我们可以假设 T 具有形式 K(A)，其中 $A\in$为某个 $A\in$SRL。为证明 1)，只需证明对于每个 $a,\ b,\ c\in A$, $a\to(a\wedge c)\ \leq((a\wedge c)\ \to(b\wedge c))\ \to(a\to b)$ [4]。最后一个等式成立当且仅当 $(a\to(a\wedge c))\ \wedge((a\wedge c)\ \to(b\wedge c))\ \leq a\to b$。这是由 $a\to(b\wedge c)\ \leq a\to b$ 这一事实推出的。

条件 2)、3) 和 4) 得以满足，可由直接计算得出。

□

注53。 子剩余*Nelson*代数的每个开蕴涵滤子都是上集。事实上，设 $T\in$ SNA，并设 F 是 T的一个开蕴涵滤子。令$x,y\in T$满足 $x\leq y$和 $x\in F$。那么，容易证明 $x\to y=1$。由于 $x,x\to y\in F$，因此可得 $y\in F$。

命题54。 设 $T\in$ SNA。那么， T的 *h*-蕴涵滤子集合与 T的开蕴涵滤子集合相同。

证明。 设 $T\in$SNA。由命题 28 可知， T的每个 h-蕴涵滤子都是 T的开蕴涵滤子。通过基于引理52的直接计算可知， T 的每个开蕴涵滤子都满足 F1) 和 F4)。

设 F是 T的一个开蕴涵滤子。为证明它满足 F2)，假设 $z\in F$。那么， $x\to(x\wedge z)\ =(x\to x)\ \wedge(x\to z)\ =x\to z$。由于 $x\leq 1$，我们得到 $1\to z\leq x\to z$；又由 $1\to z\in F$可得 $x\to z\in F$。根据引理52，$(x\to(x\wedge z))\ \to(((x\wedge z)\ \to(y\wedge z))\ \to(x\to y))\ \in F$，因此 $((x\wedge z)\ \to(y\wedge z))\ \to(x\to y)\ \in F$。为证明 F满足 F3)，假设 $z\in F$。直接计算可得 $((x\wedge\sim y)\ \to(x\wedge\sim y\wedge z))\ \to((x\wedge\sim y)\ \to\sim((x\wedge z)\ \to y))\ =1$。用类似的论证可得$x\to(x\wedge z)\ \in F$，并且由于 $x\to(x\wedge z)\ \leq(x\wedge\sim y)\ \to(x\wedge\sim y\wedge z)$，因此 $(x\wedge\sim y)\ \to(x\wedge\sim y\wedge z)\ \in F$。最后，根据引理52， $\sim(x\to y)\ \to\sim((x\wedge z)\ \to(y\wedge z))\ \in F$。

因此， T的每个开蕴涵滤子都是 T的一个h-蕴涵滤子。 □

致谢

本研究得到阿根廷国家科学技术研究委员会（PIP 11220170100195CO、PIP 11220200100912CO）、拉普拉塔国立大学（11X/921）以及国家科学技术促进局（PICT2019-2019-00882，阿根廷国家科学技术促进局）的支持。另获得波兰国家科学中心资助，项目编号为2020/39/B/HS1/00216，项目名称为“几何与拓扑的逻辑哲学基础”，并得到MOSAIC项目的支持。该项目获得欧盟“地平线2020”研究与创新计划的资助，资助形式为玛丽·居里资助协议，编号101007627。

[4]在 [14, 注记 3。1] 中已证明，如果 $A\in$SRL 和 $(a,b),\ (c,d)\in\mathrm{K}(A)$，则 $(a,b)\to(c,d)\ =(1,0)$ 当且仅当 $a\leq c$。

参考资料

[1]Balbes R. 和 Dwinger P.，《分配格》。密苏里大学出版社，哥伦比亚（1974）。[2] Busaniche M. 和 Cignoli R.，《作为次结构逻辑的带强否定构造逻辑》。《逻辑与计算杂志》20（4），761–793（2010）。[3] Cabrer L.M.、Celani S.A. 和 Montangie D.，《希尔伯特代数的表示与对偶》。《中欧数学杂志》7（3），463–478（2009）。[4] Castiglioni J.L.、Celani S. 和 San Martín H.J.，《带蕴涵的克莱尼代数》。《代数大学报》，第77卷，第4期，375–393（2017）。[5] Castiglioni J.L.、Fernández V.、Mallea H. 和 San Martín H.J.，《子希尔伯特格》。《逻辑学研究》111，431–452（2023）。[6] Celani S. 和 Jansana R.，《带严格蕴涵的有界分配格》。《数学逻辑季刊》51，第3期，219–246（2005）。[7] Cignoli R.，《满足插值性质的克莱尼代数类与纳尔逊代数》。《代数大学报》23，262–292（1986）。[8] Cornejo J.M. 和 Viglizzo I.，《半纳尔逊代数》。《序》在线版，1–23（2016）。[9] Diego A.，《希尔伯特代数论》。《数学逻辑笔记》。南方国立大学数学研究所，阿根廷布兰卡湾（1965）。[10] Epstein G. 和 Horn A.，《由子剩余格刻画的逻辑》。《数学逻辑与数学基础杂志》22，199–210（1976）。[11] Jalali A.，《克莱尼代数的表示以及投射克莱尼代数与德摩根代数的刻画》。《巴勒莫数学学会会刊》（2），增刊第29期，435–474（1992）。[12] Kalman J.A.，《带对合的格》。《美国数学学会汇刊》87，485–491（1958）。[13] Kumar, A.、Banerjee, M.，《克莱尼代数与逻辑：布尔表示和粗糙集表示、三值语义、粗糙集语义与正交语义》。《逻辑学研究》，第105卷，第3期，439–469（2017）。[14] Lubomirsky N.、Menchón P. 和 San Martín H.J.，《子剩余 Nelson 代数》。《模糊集与系统》，第498卷，文章109170（2025）。[15] Monteiro A. 和 Monteiro L.，《纳尔逊代数、三值卢卡西维茨代数、德摩根代数和克莱尼代数的独立公理》。内部技术报告47。南方国立大学数学研究所，布兰卡湾（1995）。

[16]Monteiro A. 和 Monteiro L.，《未发表论文 *I*，*Notas de L´ogicaMatem´atica 40*》。南方国立大学数学研究所，布兰卡湾（1996）。[17] Nelson D.，《可构造假》。符号逻辑杂志 14，16–26（1949）。[18] Rasiowa H.，《非经典逻辑的代数方法》，《逻辑与数学基础研究》第 78 卷。北荷兰出版社，阿姆斯特丹（1974）。[19] Sankappanavar H.P.，《半 *Heyting* 代数：从 *Heyting* 代数抽象而来》。第九届A.R. Monteiro博士大会论文集，33–66（2008）。[20] San Mart´ın H.J.，《弱蕴涵半格中的同余关系》。软计算，第 21 卷，第 12 期，3167–3176（2017）。[21] Sendlewski A.，《关于 *N*-格的簇的一些研究》。《逻辑学研究》43，257–280（1984）。[22] Vakarelov D.，《关于 *N*-格与带强否定的构造性逻辑的札记》。《逻辑学研究》36，109–125（1977）。[23] Viglizzo I.，´纳尔逊代数。硕士论文，南方国立大学，布兰卡湾，布宜诺斯艾利斯，阿根廷（1999）。

Noem´ı Lubomirsky，拉普拉塔数学中心
（CMaLP）、精确科学学院（UNLP）和
CONICET。阿根廷拉普拉塔（1900）。
nlubomirsky@mate.unlp.edu.ar

Paula Mench´on，NUCOMPA，数学系，精确科学学院，布宜诺斯艾利斯
省中部国立大学（UNICEN）。阿根廷坦迪尔（7000）。
mpmenchon@nucompa.exa.unicen.edu.ar

Hern´an Javier San Mart´ın，拉普拉塔数学
中心（CMaLP）、精确科学学院（UNLP）
和 CONICET。阿根廷拉普拉塔（1900）。
hsanmartin@mate.unlp.edu.ar