arXiv:2601.01001v1 [math.AP] 2 Jan 2026

细长杆中梯度损伤模型的降维

E. Bonnetier* D. Henao† V. Ramos‡

摘要

本文提出一种方法，将细长杆（半径与长度之比很小，$\delta = R/L \to 0$）的三维梯度损伤模型降为一维模型。该三维模型以能量泛函的极小化为目标，其中包括弹性应变能、损伤相关退化函数 $a_\eta(\alpha)$、损伤能项 $w(\alpha)$，以及用于惩罚损伤突变的梯度项。经过无量纲化和重新缩放后，问题被改写到单位圆柱上，并分析能量泛函在 δ 趋近于零时的行为。利用 Γ-收敛，我们证明三维能量泛函序列收敛到一个一维泛函，该泛函定义在与横向坐标无关的位移场和损伤场上。紧性结果保证应变和损伤梯度的弱收敛，而下界和上界不等式则证实了能量极限。我们证明，三维能量的极小化子收敛到一维能量的极小化子，且应变趋近于对角形式，体现出单轴变形。

关键词： 梯度损伤模型、降维、 Γ-收敛、能量泛函、单轴变形。

1 引言

梯度损伤模型（参见例如 [25, 2, 3, 13, 9, 10, 31, 21, 12], 及其中的参考文献）已被用于描述脆性和准脆性材料中的裂纹成核与扩展，尤其适用于极具挑战性的问题，例如遭受热冲击的薄膜中具有复杂几何形状且呈规则间距分布的裂纹的形成 [11, 30], ，或确定法国先贤祠方石砌体中所观测到的损伤成因´ [22]。在这些模型中，裂纹对应于局部化带，其中会激活内部损伤变量，从而降低材料的刚度。第一阶段是损伤起始，即材料从初始弹性状态开始发生损伤，此时应力达到一个定义明确的内禀极限；该极限可根据模型参数确定（并且与区域的大小和形状以及加载历史无关）。随着载荷增加，损伤程度不断提高，直至达到材料所能承受的最大应力。继续加载时，物体的响应取决于其尺寸相对于模型中规定的正则化参数 ℓ 的大小；该参数可解释为内部特征长度（如同弹性极限应力一样，是材料的另一种属性）。

简而言之，对于长度为 $L \sim \ell$ 的短杆，即使在极端载荷条件下，均匀损伤解（损伤变量在整个物体中保持恒定）仍然稳定。相比之下，对于由应力软化材料制成的杆（其应变空间中的弹性区域会随着损伤发展而缩小），均匀损伤解会失去稳定性，使内部变量得以在宽度与 ℓ 相当的窄带中继续增长。

因此，梯度损伤模型已被证明能够一致地数值近似 Griffith 模型中脆性断裂预存裂纹的扩展 [20, 18], ，能够为无几何奇异性的无缺陷材料中的裂纹成核提供一种机制 [15], ，并能够捕捉对混凝土、岩石和生物材料的行为具有重要影响的尺寸效应和软化特性。此外，梯度损伤模型克服了局部损伤模型中观察到的虚假网格依赖性 [24, 6, 28], ，因为在损伤变量上增加梯度项后，局部化解中的耗散能基本上与裂纹面积成正比，而非

*法国格勒诺布尔-阿尔卑斯大学傅里叶研究所。电子邮箱： Eric.Bonnetier@univ-grenoble-alpes.fr。
†智利兰卡瓜奥伊金斯大学工程科学研究所。电子邮箱： duvan.henao@uoh.cl。
‡智利大学数学工程系。电子邮箱：vramos@dim.uchile.cl。

局部模型中观察到的无耗散能失效。更复杂三维几何中的裂纹起始过程已得到研究，例如 [31, 21], ；而 [12]则给出了对黏聚断裂和具有任意强度面的成核过程的统一处理。[8]表明，包含塑性和黏弹性的梯度损伤模型变体与地质断层形成过程的描述相容。

在这类梯度损伤模型中，裂纹成核能力与均匀损伤状态失去稳定性以及局部化损伤解的出现有关。前述稳定性分析 [29, 27, 25] 主要针对单轴拉伸试验，采用形式推导得到的一维梯度损伤模型的变分不等式。因此，有必要验证从三维到一维这一重要的降维过程。本研究旨在实现这一目标：我们证明，在细长杆极限下，三维模型收敛到一维梯度损伤模型，且收敛方式为 Γ 收敛 [14, 17, 1] 。

文献 [7] 提出了将梯度损伤模型用于地下采矿中岩体的整体劣化，并通过数值模拟观测地表沉降。本研究的动机在于，简化的一维梯度损伤模型将用于根据单轴压缩试验识别参数。这是朝着更系统地研究崩落采矿问题中的三维损伤模型迈出的必要一步；该问题正由智利大学数学建模中心（CMM）采矿组开展研究。

本文所研究的数学问题的精确表述如下：考虑一列圆柱形区域

$$\Omega_j := \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le R_j,\ \ 0 \le z \le L\}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \text{with} \quad \delta_j := \frac{R_j}{L} \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

其中 $L > 0$ 为固定值，且 $R_j \to 0$。在顶部边界 $z = L$施加轴向位移 t ，从而产生固定的均匀轴向应变

$$\varepsilon_z = \frac{\tilde{t}}{L}, \quad \text{uniform for all } j \in \mathbb{N}.$$

与每个构型（$\tilde{\boldsymbol{u}}$、$\tilde{\alpha}$）相关的总能量，其中 $\tilde{\boldsymbol{u}} : \Omega_j \to \mathbb{R}^3$ 为位移，$\tilde{\alpha} : \Omega_j \to [0, 1]$ 为损伤变量，由以下泛函给出：

$$\widetilde{E}_j[\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\alpha}] = \int_{\Omega_j} \frac{1}{2} a_\eta(\tilde{\alpha}(\boldsymbol{X}))A\varepsilon : \varepsilon + w(\tilde{\alpha}(\boldsymbol{X})) + \frac{1}{2} w_1 \ell^2 |\nabla \tilde{\alpha}(\boldsymbol{X})|^2 \, d\boldsymbol{X}, \tag{1}$$

其中 A 表示线弹性张量， ε表示应变张量，a_η 表示退化函数， w 表示损伤能量密度， ℓ表示固定的特征长度参数（更多详情见第 2 节）。我们将可容许构型集合定义为

$$\mathcal{A} := \left\{(\boldsymbol{u}, \alpha) \in H^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right) \times H^1(\Omega) \mid 0 \le \alpha \le 1 \text{ a.e.}, \tilde{u}_3(\cdot, 0) = 0,\ u_3(\cdot, 1) = -\varepsilon_z\right\}, \tag{2}$$

其中 Ω 为单位圆柱，$\boldsymbol{u} = \left(u_1(\boldsymbol{x})\ u_2(\boldsymbol{x})\ u_3(\boldsymbol{x})\right) = \left(\frac{\tilde{u}_1}{R_j}, \frac{\tilde{u}_2}{R_j}, \frac{\tilde{u}_3}{L}\right)$ 为无量纲位移，定义在重标度坐标 $\boldsymbol{x} = \left(\frac{X}{R_j}, \frac{Y}{R_j}, \frac{Z}{L}\right)$上。此外，我们引入约化试探空间：

$$\mathcal{S} := \left\{(\boldsymbol{u}, \alpha) \in \mathcal{A} \mid \exists\, \bar{u}, \bar{\alpha} \in H^1(0, 1) \text{ such that } u_3(x, y, z) = \bar{u}(z),\ \alpha(x, y, z) = \bar{\alpha}(z) \text{ a.e.}\right\}. \tag{3}$$

如果一对 $(\boldsymbol{u}, \alpha)$ 属于 $\mathcal{S}$ ，那么稍微滥用一下记号，我们写作 $u_3'(z)$ 来表示 $\frac{d\bar{u}_3}{dz}(z)$，这是根据 $\mathcal{S}$ 的定义。更一般地，在全文中，我们将任意函数 $u \in L^2(0,1)$ 视为 $L^2(\Omega)$ 中的函数，并交替写作 $u(z) = u(\boldsymbol{x}) = u(x, y, z)$。

令 E_j 表示 $E_j \setminus |\Omega_j|$ 的单位体积能量（其在新变量下的表达式见（8））。我们证明两个主要结果：首先，我们证明泛函序列 (E_j) Γ-收敛到有效一维泛函 E_∞ ，其定义如下：

$$E_\infty[\boldsymbol{u}, \alpha] = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 a_\eta(\alpha(z))\frac{1}{2}E|u_3'(z)|^2 + w(\alpha(z)) + \frac{1}{2}w_1\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 |\alpha'(z)|^2 \, dz, & (\boldsymbol{u}, \alpha) \in \mathcal{S}, \\ +\infty, & (\boldsymbol{u}, \alpha) \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{S}. \end{cases} \tag{4}$$

更确切地说，我们证明了

定理 1。 *i) (*Γ-下极限 不等式*)*

设 $\{(\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个序列。假设对于某个 $(\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{\alpha})\in\mathcal{A}$，由 (9) 定义的序列 $\left(u_3^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛到 $\widehat{u}_3$，且 $\alpha^{(j)}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛到 $\widehat{\alpha}$。那么

$$E_\infty[\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{\alpha}]\le\liminf_{j\to\infty}E_j[\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)}].$$

ii)（ Γ-上极限 不等式）

给定任意 $(\boldsymbol{u},\alpha)\in\mathcal{S}$，可以构造一个序列 $(\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)})$，使其属于 $\mathcal{A}$，并满足

$$\big(u_3^{(j)},\alpha^{(j)}\big)\quad converges\ strongly\ in\ L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\ to\ \big(u_3,\alpha\big),$$

and

$$\lim_{j\to\infty}E_j[\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)}]=\int_0^1 a_\eta\big(\alpha(z)\big)\cdot\frac{1}{2}Eu_3'(z)^2+w\big(\alpha(z)\big)+\frac{w_1\ell^2}{2L^2}|\alpha'(z)|^2\,\mathrm{d}z.$$

其次，我们证明，若 $(\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ 是 E_j 的一个极小化子序列，则有更强的结果**定理 2**。 假设对每个 $j\in\mathbb{N}$

$$(\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)})\ minimizes\ E_j[\boldsymbol{u},\alpha]\ in\ \mathcal{A}.$$

那么存在一对 $(\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{\alpha})$ 属于 $\mathcal{S}$，使得（对某个子序列）

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega|u_3^{(j)}(x,y,z)-\widehat{u}_3(z)|^2d\boldsymbol{x}\longrightarrow0,\quad \int_\Omega\left|\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}(x,y,z)-\frac{d\widehat{u}_3}{dz}(z)\right|^2d\boldsymbol{x}\longrightarrow0,\\
&\int_\Omega\left|\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}(x,y,z)+\nu\frac{d\widehat{u}_3}{dz}(z)\right|^2d\boldsymbol{x}\longrightarrow0,\quad \int_\Omega\left|\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}(x,y,z)+\nu\frac{d\widehat{u}_3}{dz}(z)\right|^2d\boldsymbol{x}\longrightarrow0,\qquad(5)\\
&\int_\Omega\left|\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial y}+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial x}\right|^2+\left|\delta_j\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right|^2+\left|\delta_j\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y}\right|^2d\boldsymbol{x}\longrightarrow0,\\
&\alpha^{(j)}\xrightarrow{H^1(\Omega)}\widehat{\alpha},\quad and\quad(\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{\alpha})\ minimizes\ E_\infty[\boldsymbol{u},\alpha]\ in\ \mathcal{S}.
\end{aligned}$$

注记。 *1.* 定理 *1* 是一个 Γ-收敛结果，但针对的是一种非标准拓扑。其证明基于下述定理 *3*——一个紧性结果，该结果刻画了这种“降维”拓扑。后一个定理确实描述了可容许的 $(\boldsymbol{u}^{(j)}$、 $\alpha^{(j)})$’ 的弱极限结构，其中只有位移场的某些分量或其导数能够被期望得到控制，而能量 $E(\boldsymbol{u}^{(j)}$、 $\alpha^{(j)})$ 一致有界。

2. 关于定理 *2*，其证明将定理 *3* 与能量的一个精确下界结合起来，前提是定理 *3* 中的收敛成立。该下界在命题 *1* 中导出。

3. 此外，在定理 *2* 的假设下，我们证明了极小化子的强收敛（更准确地说，在分量 $u_3^{(j)}$ 、应变张量 $\varepsilon^{(j)}$以及损伤变量 $\alpha^{(j)}$及其梯度上强收敛），这是底层“降维”拓扑的另一个特殊特征。

4. 这一拓扑的另一个特点是，在定理 *1* 的证明中，可以选取 $u_3^{(j)}(x,y,z)=\widehat{u}_3(z)$ 来构造一个恢复序列，即一个与 j （以及 x、y）无关的函数。恢复序列中的水平分量 $u_1^{(j)}$ 、 $u_2^{(j)}$ 确实依赖于 j，即使其梯度会随着 $j\to\infty$趋于无界；但由于式 (5)、(8)中的重标度剪切应变带有前置因子 δ_j，它们对能量的贡献在细长杆极限下变得可以忽略。该系统的行为主要由轴向位移 u_3决定，而水平分量则能够根据能量极小准则进行调整，尽可能地减小剪切应变（见式 (26)、(27)、(30)和(41)）。这与极限泛函 E_∞ 对向量位移场 $\boldsymbol{u}$的依赖方式一致：它仅通过轴向分量 u_3 依赖于该位移场。

5. 在本文中，内部特征长度 ℓ 和正则化参数 η 均为固定的正值，因此对于固定的损伤 α，相应的弹性位移是一个椭圆型偏微分方程的解。值得研究的是，当参数 ℓ_j、 η_j 允许趋于 *0* 时，在何种条件下可以进行降维。

关于从三维弹性理论中严格推导降维模型，已有大量文献可供参考（例如， [4, 第 16] 章讨论杆的线性理论； [16, 第 A.1 章和第 B.5]章讨论板理论中的基尔霍夫–洛夫方程和冯·卡门方程； [19]以及 [26]讨论非线性弹性背景下的板和杆模型）。我们在此采用的技术受到以下工作的启发： [23], 提出的弹性地基上薄板的断裂与分层模型的严格推导，以及 [5]中在有界变形且具有有界跳跃（SBD）框架下对脆性基尔霍夫–洛夫板进行的降维分析。

本文的结构如下：第 2 节介绍预备定义、符号以及开展分析所依据的假设。第 3 节详细说明无量纲化和重新缩放过程。第 4 节讨论紧性结果，第 5 节则致力于推导能量泛函 E_j 的下界和上界。最后，第 6 节汇总定理 2 的证明。

2 预备知识

本节介绍我们据以将三维梯度损伤模型约化为一维模型的定义、记号和假设。

区域与可容许位移

对于具有 $R \ll L$ 的细长杆，我们定义区域：

$$\tilde{\Omega} := \{\boldsymbol{X} = (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 < R^2,\ 0 < Z < L\}$$

（波浪号用于表示物理区域中的集合和函数，并将在无量纲化后省略；向量量以粗体表示）。我们用 $\tilde{u} \in H(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ 表示

$$\begin{aligned} \tilde{u}: \quad & \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3, \\ & \boldsymbol{X} \longmapsto \tilde{u}(\boldsymbol{X}) = (\tilde{u}_1(\boldsymbol{X}), \tilde{u}_2(\boldsymbol{X}), \tilde{u}_3(\boldsymbol{X})) \end{aligned}$$

每个材料点相对于其初始位置的位移，而 $\tilde{\alpha} \in H^1((\Omega))$ 表示损伤。我们假设杆 Ω 满足以下混合边界条件

$$\tilde{u}_3(X, Y, L) = -\tilde{t}, \quad \tilde{u}_3(X, Y, 0) = 0, \quad \forall X, Y \text{ such that } X^2 + Y^2 < R^2. \tag{6}$$

我们的分析以单轴压缩试验（$\tilde{t} > 0$）的建模为依据，但同样适用于受拉杆件（$\tilde{t} < 0$）。

在 t 作用下的平衡态，定义为满足边界条件 (6) 的所有场（$\tilde{\mathbf{u}}\ \alpha$） $\in H(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^3) \times H^1(\tilde{\Omega})$ 中使下列三维梯度损伤能达到极小的极小化元。

$$\int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{2} a_\eta(\tilde{\alpha}(\boldsymbol{X})) A\varepsilon : \varepsilon + w(\tilde{\alpha}(\boldsymbol{X})) + \frac{1}{2} w_1 \ell^2 |\nabla \tilde{\alpha}(\boldsymbol{X})|^2 \, d\boldsymbol{X}$$

下面对各项进行说明。

应变张量 ε

与物体变形相关的应变张量 ε 是由下式定义的对称二阶张量：

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{u}^T\right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \qquad \nabla \tilde{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial X} & \dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial Y} & \dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}_2}{\partial X} & \dfrac{\partial \tilde{u}_2}{\partial Y} & \dfrac{\partial \tilde{u}_2}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}_3}{\partial X} & \dfrac{\partial \tilde{u}_3}{\partial Y} & \dfrac{\partial \tilde{u}_3}{\partial Z} \end{bmatrix}.$$

弹性常数

在发生损伤之前，材料遵循各向同性线弹性应力-应变关系，其形式为:

$$\sigma \quad = \quad A\varepsilon \; := \; 2\mu\varepsilon + \lambda(\mathrm{tr}\varepsilon), I$$

其中，拉梅系数 λ 和 μ 分别衡量材料的体积（压缩）响应和刚度。杨氏模量 E 和泊松比 ν 定义为

$$E \; = \; \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \qquad \text{and} \qquad \nu \; = \; \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{7}$$

损伤变量 $\tilde{\alpha}$

标量场 $\tilde{\alpha} \in H^1$(˜Ω)

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}: \qquad & \tilde{\Omega} \to [0,1], \\ & \boldsymbol{X} \longmapsto \tilde{\alpha}(\boldsymbol{X}) = \tilde{\alpha}(X,Y,Z). \end{aligned}$$

˜描述物理区域 Ω 中材料损伤的分布。它可以理解为微裂纹、内聚力丧失或局部结构退化对介质宏观刚度造成的影响。在本文的语境中,

- $\tilde{\alpha}(\boldsymbol{X}) = 0$ 表示材料在点 $\boldsymbol{X}$处完好无损。
- $0 < \tilde{\alpha}(\boldsymbol{X}) < 1$ 表示部分损伤，即某些力学性能（例如刚度）有所降低，但并未完全丧失。
- $\tilde{\alpha}(\boldsymbol{X}) = 1$ 表示材料已完全损伤。

请注意， $\tilde{\alpha}$ 在横向（X, Y）和纵向（Z）上都可能变化。

退化函数$a_\eta(\tilde{\alpha})$

退化函 数 a_η : $[0,1] \to \mathbb{R}$ 描述介质的弹性刚度如何软化 s
损伤 褶皱。我们假设 a 是连续且严格递减的函数，并且

$$a_\eta(0) \; = \; 1, \quad \text{and} \quad a_\eta(1) = \eta,$$

因此，在不存在损伤时，介质刚度等于弹性相的刚度；而在完全损伤时，介质刚度则降至ηA。

与损伤相关的能量 $w(\tilde{\alpha})$

局部损伤能量密度,

$$\begin{aligned} w \; : [0,1] \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}, \\ \tilde{\alpha} \quad &\longrightarrow \quad w(\tilde{\alpha}), \end{aligned}$$

衡量了当 $\tilde{\alpha}$ 增长时，对损伤能增量的逐点贡献。我们假设w 是光滑的递增函数，并且

$$w(0) \quad = \quad 0.$$

出现在总能量表达式中的材料参数 w_1 定义为 $\tilde{\alpha} = 1$时w(˜α)的值

$$w_1 \quad = \quad w(1).$$

损伤分布 $w(\tilde{\alpha})$

秉承 Mumford-Shah 能量的理念， [2, 3, 9, 10, 13, 18], 能量泛函 E_j 会惩罚˜的较大取值 $|\nabla\tilde{\alpha}$（$\mathbf{X}$）|, 从而使损伤在 Ω 的大区域内保持均匀，并倾向于形成平滑的损伤分布，尤其是在 w_1 的取值较大时。

3 无量纲化与重新缩放

˜我们将原始区域 Ω 重缩放为如下形式的单位圆柱

$$\Omega := \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 < 1, \ 0 < z < 1\}, \qquad x = \frac{X}{R}, \quad y = \frac{Y}{R}, \quad z = \frac{Z}{L}.$$

此外，我们定义长宽比 δ 以及重标度损伤和位移

$$\delta := \frac{R}{L}, \qquad \alpha(x, y, z) = \tilde{\alpha}(X, Y, Z),$$

$$u_1(x, y, z) = \frac{\tilde{u}_1(X, Y, Z)}{R}, \quad u_2(x, y, z) = \frac{\tilde{u}_2(X, Y, Z)}{R}, \quad u_3(x, y, z) = \frac{\tilde{u}_3(X, Y, Z)}{L}.$$

因此，法向应变和剪切应变变为

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}_1(x, y, z) = R\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\
\varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial Y} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial X}\right) = \frac{1}{2}\left(R\frac{\partial u_1}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} + R\frac{\partial u_2}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right), \\
\varepsilon_{13} &= \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial Z} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial X}\right) = \frac{1}{2}\left(R\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial Z} + L\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{L}{R}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\delta\frac{\partial u_1}{\partial z} + \delta^{-1}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right), \qquad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\left(\delta\frac{\partial u_2}{\partial z} + \delta^{-1}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

由此得到弹性能量密度的以下表达式:

$$\begin{aligned}
\mu\varepsilon : \varepsilon &= \mu\left(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{32}^2 + \varepsilon_{33}^2\right) \\
&= \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)^2 \\
&\quad + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\delta\frac{\partial u_1}{\partial z} + \delta^{-1}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\delta\frac{\partial u_2}{\partial z} + \delta^{-1}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2 \\
\frac{1}{2}A\varepsilon : \varepsilon &= \mu\varepsilon : \varepsilon + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\varepsilon)I : \varepsilon \\
&= \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)^2 \\
&\quad + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\delta\frac{\partial u_1}{\partial z} + \delta^{-1}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\delta\frac{\partial u_2}{\partial z} + \delta^{-1}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned}$$

另一方面，重写 $\alpha(\boldsymbol{x}) = \tilde{\alpha}(X)$ 得到

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial X}\cdot R \quad \text{and} \quad \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial X} = \frac{1}{R}\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial Y} = \frac{1}{R}\frac{\partial \alpha}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial Z} = \frac{1}{L}\frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

$$|\nabla\tilde{\alpha}(\boldsymbol{X})|^2 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{L^2}\left[\delta^{-2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2\right].$$

如引言中所述，我们考虑一列直径为$\delta_j = R_j/L \xrightarrow{j\to\infty} 0$的圆柱形区域 $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 。在无量纲变量下，单位体积的损伤梯度总能量 (1) 可改写为:

$$\begin{aligned}
E_j[\boldsymbol{u}, \alpha] := \frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\alpha(\boldsymbol{x}))\Bigg[&\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)^2 \\
&+ \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\delta_j\frac{\partial u_1}{\partial z} + \delta_j^{-1}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\delta_j\frac{\partial u_2}{\partial z} + \delta_j^{-1}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2\Bigg] \\
&+ w(\alpha(\boldsymbol{x})) + \frac{1}{2}w_1\left(\frac{l}{L}\right)^2\left[\delta_j^{-2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \delta_j^{-2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2\right]d\boldsymbol{x}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

4 紧性

本节将刻画可容许场序列 $(\mathbf{u}^j, \alpha^j)$ 弱收敛极限的结构。

定理 3. 假设 $\{(\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个序列，取值于 $\mathcal{A}$，并且对于某个 $M > 0$

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad E_j[(\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)})] \le M,$$

其中 E_j 由(8)定义。对于每个 $j \in \mathbb{N}$，令 $u_3^{(j)} : (0,1) \to \mathbb{R}$ 表示 u_3的水平平均，定义为

$$\overline{u}_3^{(j)}(z) := \fint_{x_1^2+x_2^2<1} u_3^{(j)}(x,y,z)\, d\mathcal{H}^2(x,y). \tag{9}$$

那么，存在 $\widehat{\varepsilon}_{11}$、$\widehat{\varepsilon}_{22}$、$\widehat{\varepsilon}_{33}$ 属于 $L^2(\Omega)$，以及 $\widehat{\alpha}$ 属于 $H^1(\Omega)$，使得在抽取一个子序列后（不重新标记），

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{11}, \quad \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{22}, \quad \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{33},$$
$$\alpha^{(j)} \rightharpoonup \widehat{\alpha} \ \in H^1(\Omega), \quad \alpha^{(j)} \to \widehat{\alpha} \ a.e.\ in\ \Omega, \quad 0 \le \widehat{\alpha} \le 1 \ a.e.\ in\ \Omega,$$

并且使得 $u_3^{(j)}$在 $H^1(0,1)$ 中弱收敛，在 $L^2(0,1)$中强收敛到函数 $\widehat{u}_3 : \Omega \to \mathbb{R}$，该函数由下式定义（除去一个勒贝格零测集）：

$$\widehat{u}_3(x,y,z) = \widehat{u}_3(z) := \int_0^z \varepsilon_{33}(s)ds, \quad where \quad \varepsilon_{33}(s) := \fint_{x^2+y^2<1} \widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,s)\, d\mathcal{H}^2(x,y). \tag{10}$$

此外，给定 u_1和 u_2这对属于 $H^1(\Omega)$的函数，这一对 $(\boldsymbol{u}, \alpha) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega)$，其中 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \widehat{u}_3)$，属于 $\mathcal{S}$。

证明。 首先，我们证明 $u^{(j)}$的导数弱收敛。已知

$$E_j\left[\left(\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)}\right)\right] \ \le \ M \quad \text{for some } M > 0, \tag{11}$$

由（8）可推得

$$\frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta\left(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x})\right)\left[\mu\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2\right] d\boldsymbol{x} \le M.$$

由a_η的一致下界

$$a_\eta\left(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x})\right) \ge \eta > 0,$$

可得

$$\frac{\eta}{\pi}\mu\left[\int_\Omega\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2 d\boldsymbol{x} + \int_\Omega\left(\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2 d\boldsymbol{x} + \int_\Omega\left(\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2 d\boldsymbol{x}\right] \le M,$$

进而推出以下一致有界性

$$\left\|\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \ \le \ \frac{M\pi}{\eta\mu}.$$

由巴拿赫–阿劳格鲁定理可知，存在函数 $\widehat{\varepsilon}_{11}, \widehat{\varepsilon}_{22}, \widehat{\varepsilon}_{33} \in L^2(\Omega)$，使得对于某个子序列（不重新编号）

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{11}, \quad \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{22}, \quad \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{33}.$$

接下来我们可知 $\nabla\alpha^{(j)} \rightharpoonup \nabla\widehat{\alpha}$，且 $\alpha^{(j)} \to \widehat{\alpha}$ 几乎处处成立。事实上，由一致有界（11）可知

$$\frac{w_1}{2}\left(\frac{l}{L}\right)^2\left[\int_\Omega \delta_j^{-2}\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\delta_j^{-2}\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial z}\right)^2 d\boldsymbol{x}\right]\le M, \tag{12}$$

并且由于 $\delta_j<1$，可得

$$\frac{w_1}{2}\left(\frac{l}{L}\right)^2\|\nabla\alpha^j\|^2_{L^2(\Omega)}\le M,$$

因此$\|\nabla\alpha^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}$一致有界。此外，由于 $(\mathbf{u}^j,\alpha_j)\in\mathcal{A}$, $0\le\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x})\le 1$ 在 Ω 中几乎处处成立，因此 $\alpha^{(j)}$ 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中一致有界。再次应用巴拿赫–阿劳格鲁定理和 Rellich-Kondrachov定理，我们可以提取一个子序列，使得 $\alpha^{(j)}\rightharpoonup\widehat{\alpha}$ 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中收敛，且$\alpha^{(j)}\to\widehat{\alpha}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，并且在 Ω 中几乎处处收敛。

其次，我们证明函数 $\widehat{u}_3:(0,1)\to\mathbb{R}$ 满足竖向位移的边界条件 (6)，并且是一个 H^1 函数。为此，我们注意到

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_3(0) &= \int_0^0 \varepsilon_{33}(s)ds=0,\quad \text{and},\\
\widehat{u}_3(1) &= \int_0^1\varepsilon_{33}(s)ds=\int_0^1\left[\fint_{x^2+y^2<1}\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,s)d\mathcal{H}^2(x,y)\right]ds=\frac{1}{\pi}\int_\Omega\widehat{\varepsilon}_{33}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\
&= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_\Omega\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}dz=\frac{1}{\pi}\lim_{j\to\infty}\fint_{x^2+y^2<1}\left(u_3^{(j)}(x,y,1)-u_3^{(j)}(x,y,0)\right)d\mathcal{H}^2(x,y)\\
&= -\varepsilon_z.
\end{aligned}$$

第三，由詹森不等式，我们推得

$$\varepsilon_{33}^2(s) = \left[\fint_{x^2+y^2<1}\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,s)d\mathcal{H}^2(x,y)\right]^2\le\fint_{x^2+y^2<1}{\widehat{\varepsilon}_{33}}^2(x,y,s)d\mathcal{H}^2(x,y),$$

从而

$$\int_0^z\varepsilon_{33}^2(s)ds\le\int_0^z\left(\fint_{x^2+y^2<1}\widehat{\varepsilon}_{33}^2(x,y,s)d\mathcal{H}^2(x,y)\right)ds\le\fint_\Omega\widehat{\varepsilon}_{33}^2d\boldsymbol{x}.$$

利用柯西–施瓦茨不等式，并注意到 $z\in(0,1)$，可得

$$\left(\int_0^z\varepsilon_{33}(s)ds\right)^2\le z\int_0^z\varepsilon_{33}^2(s)ds\le\int_0^z\varepsilon_{33}^2(s)ds,$$

因此

$$\widehat{u}_3(z)=\int_0^z\varepsilon_{33}(s)ds\le\left(\int_0^z\varepsilon_{33}^2(s)ds\right)^{1/2}\le\left(\fint_\Omega\widehat{\varepsilon}_{33}^2ds\right)^{1/2}$$

从而 $\widehat{u}_3\in L^\infty(0,1)$ 且 $\varepsilon_{33}\in L^2(0,1)$，因为 $\widehat{\varepsilon}_{33}\in L^2(\Omega)$。此外，鉴于 $\varphi\in C_c^\infty(0,1)$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^1\widehat{u}_3(z)\varphi'(z)\,dz &= \int_0^1\Big(\int_0^z\varepsilon_{33}(s)\,ds\Big)\varphi'(z)\,dz=\int_0^1\int_0^1\chi_{s<z}\varepsilon_{33}(s)\varphi'(z)\,ds\,dz\\
&= \int_0^1\varepsilon_{33}(s)\Big(\int_s^1\varphi'(z)\,dz\Big)\,ds=-\int_0^1\varepsilon_{33}(s)\varphi(s)\,ds.
\end{aligned}$$

这证明了 $\widehat{u}_3\in H^1(0,1)$，并且 $\widehat{u}_3'=\varepsilon_{33}$。

为证明 $\widehat{\alpha}$ 与 x_1、x_2 无关，我们注意到

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial\widehat{\alpha}}{\partial x}\right)^2d\boldsymbol{x}\le\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial x}\right)^2d\boldsymbol{x}\le\liminf_{j\to\infty}\frac{2ML^2\delta_j^2}{w_1\ell^2}=0, \tag{13}$$

由 (12) 以及 L^2 范数的下半连续性可得。因此，几乎处处有 $\frac{\partial \widehat{\alpha}}{\partial x} = 0$。类似地，几乎处处有 $\frac{\partial \widehat{\alpha}}{\partial y} = 0$。

接下来，取 u_1 和 u_2 为 $H^1(\Omega)$ 中任意一对函数，并定义 $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) = (u_1,\ u_2,\ \widehat{u}_3)$。由 (13) 可得 $(\boldsymbol{u},\ \widehat{\alpha}) \in \mathcal{S}$，证毕。

最后，我们证明在 (9) 中定义的序列 $u_3^{(j)}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛于 $\widehat{u}_3$。为此，取 $\varphi \in L^2(\Omega)$，并考虑

$$
\begin{aligned}
J &:= \int_\Omega \overline{u}_3^{(j)}(x,y,z)\varphi(x,y,z)\,d\mathcal{H}^2(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_{x^2+y^2<1} \overline{u}_3^{(j)}(x,y,z)\varphi(x,y,z)\,d\mathcal{H}^2(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_{x^2+y^2<1} \left[\fint_{X^2+Y^2<1} u_3^{(j)}(X,Y,z) d\mathcal{H}^2(X,Y) \right] \varphi(x,y,z)\,d\mathcal{H}^2(x,y)dz \\
&= \int_0^1 \int_{x^2+y^2<1} \fint_{X^2+Y^2<1} \left(\int_0^z \partial_3 u_3^{(j)}(X,Y,s)\,ds \right) d\mathcal{H}^2(X,Y)\varphi(x,y,z)\,d\mathcal{H}^2(x,y)dz.
\end{aligned}
$$

令 $\Phi(X,\ Y,\ s) := \fint_{X^2+Y^2<1} (x,\ y,\ z) d\mathcal{H}(x,\ y) dz$。由此可得

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^1 \fint_{X^2+Y^2<1} \partial_3 u_3^{(j)}(X,Y,s)\Phi(X,Y,s)\,d\mathcal{H}^2(X,Y)\,ds \\
&\overset{j\to\infty}{\to} \int_0^1 \fint_{X^2+Y^2<1} \widehat{\varepsilon}_{33}(X,Y,s)\Phi(X,Y,s) d\mathcal{H}^2(X,Y)\,ds \\
&= \int_0^1 \int_{x^2+y^2<1} \fint_{X^2+Y^2<1} \int_0^z \widehat{\varepsilon}_{33}(X,Y,s) d\mathcal{H}^2(X,Y)\,ds\ \varphi(x,y,z) d\mathcal{H}^2(x,y)dz \\
&= \int_0^1 \int_{x^2+y^2<1} \int_0^z \fint_{X^2+Y^2<1} \widehat{\varepsilon}_{33}(X,Y,s) d\mathcal{H}^2(X,Y)\,ds\ \varphi(x,y,z) d\mathcal{H}^2(x,y)dz \\
&= \int_0^1 \int_{x^2+y^2<1} \left(\int_0^z \varepsilon_{33}(s)\,ds \right)\ \varphi(x,y,z) d\mathcal{H}^2(x,y)dz \\
&= \int_\Omega \widehat{u}_3(z)\varphi(x,y,z)\,d(x,y,z).
\end{aligned}
$$

另一方面，我们注意到，对于任意 $\varphi \in C_c^\infty([0,1])$

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 \overline{u}_3^{(j)}(z)\partial_z\varphi(z)d\boldsymbol{x} &= -\int_0^1 \fint_{x^2+y^2<1} u_3^{(j)}(x,y,z)\partial_z\varphi(z)\,d\mathcal{H}^2(x,y)\,dz \\
&= \frac{-1}{\pi}\int_\Omega u_3(j)(x,y,z)\partial_z\varphi(z)\,d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_\Omega \partial_z u_3^{(j)}(x,y,z)\varphi(z)\,d(x,y,z) \\
&\xrightarrow{j\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_\Omega \widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)\varphi(z)d(x,y,z) = \int_0^1 \varepsilon_{33}(z)\varphi(z)dz.
\end{aligned}
$$

换言之，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，函数 $u_3^{(j)}$ 存在弱导数，而 $\partial_z u_3$ 由 $\partial_z u_3^{(j)}$ 的水平平均组成。上述计算还表明，$\widehat{u}_3 \in H^1(0,\ 1)$ 存在弱导数 $\varepsilon_{33}(z)$。此外，序列 $\left(u_3^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ 不仅在 $L^2(0,\ 1)$ 中弱收敛于 $\widehat{u}_3$，而且在 $H^1(0,\ 1)$ 中也弱收敛于 $\widehat{u}_3$。因此，应用 Rellich-Kondrachov定理，可得一个子序列在$L^2(0,\ 1)$ 中强收敛于 $\widehat{u}_3$。

□

5 下能量界与上能量界

5.1 能量下界

本节中，我们推导出 E_j 关于极限能量 E_∞ 的下界。该结果是证明定理 1 的 Γ-收敛结论中的下极限条件的关键步骤。此外，它还

help有助于在定理的证明中建立极小化子序列的弱紧性 2.

命题 1. 设 $\{(\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A}$中的一个序列。假设由(9) 定义的截面平均值序列$\left(u_3^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛到某个 $\widehat{u}_3\in H^1(\Omega)$，且该极限满足 $\widehat{u}_3(x,y,0)=0$对几乎处处的 x 以及 y成立。此外，假设

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\rightharpoonup\widehat{\varepsilon}_{11},\quad \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\rightharpoonup\widehat{\varepsilon}_{22},\quad \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\rightharpoonup\widehat{\varepsilon}_{33},\quad \nabla\alpha^{(j)}\rightharpoonup\nabla\widehat{\alpha},\quad \alpha^{(j)}\to\widehat{\alpha}\ \textit{pointwise a.e.},$$

对于某些 $\widehat{\varepsilon}_{11},\widehat{\varepsilon}_{22},\widehat{\varepsilon}_{33}$，它们属于 $L^2(\Omega)$，并且对于某个 $\widehat{\alpha}\in H^1(\Omega)$，它仅依赖于 z。那么 $\widehat{u}_3$ 与 x 和 y 无关，并且

$$\begin{aligned}
\liminf_{j\to\infty}E_j[\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)}]\geq{}&\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))\frac{1}{2}E(\widehat{u}_3'(z))^2+w(\widehat{\alpha}(z))+\frac{1}{2}w_1\left(\frac{l}{L}\right)^2|\widehat{\alpha}'(z)|^2dz\\
&+\frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))\left[\frac{\mu}{2}(\widehat{\varepsilon}_{11}-\widehat{\varepsilon}_{22})^2+2(\lambda+\mu)\left(\frac{\widehat{\varepsilon}_{11}+\widehat{\varepsilon}_{22}}{2}+\nu\widehat{\varepsilon}_{33}\right)^2\right]d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))E\left(\fint_{x^2+y^2<1}\left(\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)-\varepsilon_{33}(z)\right)^2d\mathcal{H}^2(x,y)\right)dz\\
&+\liminf_{j\to\infty}\left\{\frac{\mu}{\pi}\left(\int_\Omega\left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{11}-\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2d\boldsymbol{x}\right.\right.\\
&\qquad+\left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{22}-\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2d\boldsymbol{x}\\
&\qquad\left.+\left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{33}-\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2d\boldsymbol{x}\right)\\
&+\frac{\eta\mu}{2\pi}\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial y}+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\left(\delta_j\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\left(\delta_j\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y}\right)^2\right]d\boldsymbol{x}\\
&\left.+\frac{1}{2}w_1\left(\frac{l}{L}\right)^2\int_\Omega\left[\delta_j^{-2}\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\delta_j^{-2}\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial z}-\frac{\partial\widehat{\alpha}}{\partial z}\right)^2\right]d\boldsymbol{x}\right\}
\end{aligned}\tag{14}$$

其中 $\varepsilon_{33}(z)$ 表示 $\widehat{\varepsilon}_{33}$的截面平均值，定义见(10)。

证明。 假设 $\{(\boldsymbol{u}^{(j)},\ \alpha^{(j)})\}_{j\in\mathbb{N}}$ 满足命题的假设，并回顾能量泛函 E_j 由下式给出

$$\begin{aligned}
E_j[\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)}]=\frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))&\left[\mu\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2\right.\\
&+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}+\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial y}+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial x}\right)^2\\
&\left.+\frac{\mu}{2}\left(\delta_j\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\delta_j\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right)^2\right]\\
+w(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))+\frac{1}{2}w_1\left(\frac{l}{L}\right)^2&\left[\delta_j^{-1}\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\delta_j^{-1}\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial z}\right)^2\right]d\boldsymbol{x}
\end{aligned}\tag{15}$$

鉴于等式

$$\int_\Omega|f^{(j)}|^2=\int_\Omega|f+(f^{(j)}-f)|^2=\int_\Omega f^2+2\int_\Omega(f^{(j)}-f)f+\int_\Omega|f^{(j)}-f|^2,$$

我们可以看到，如果 $f^{(j)}\rightharpoonup f\in L^2(\Omega)$，那么

$$\int_\Omega|f^{(j)}|^2=\int_\Omega f^2+\int_\Omega(f^{(j)}-f)^2+o(1)\geq\int_\Omega f^2+o(1).\tag{16}$$

其中 $o(1)$ 表示一个在 $j \to \infty$ 时趋于零的量。

我们设

$$f_x^{(j)}(\boldsymbol{x}) := \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\,\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \tag{17}$$

$$f_x(\boldsymbol{x}) = \sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\,\widehat{\varepsilon}_{11}(\boldsymbol{x}). \tag{18}$$

由于 a_η 连续， $\alpha^{(j)} \to \widehat{\alpha}$ 在 Ω 中几乎处处成立，且 $0 \le \alpha^{(j)} \le 1$，根据勒贝格控制收敛定理，对于任意测试函数 $\varphi \in L^2(\Omega)$， $\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)})}\,\varphi \to \sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha})}\,\varphi$ 在 L^2 中强收敛，因此

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_x^{(j)}(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f_x(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$

当 $\dfrac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{11}$ 时。类似的论证可用于证明

$$f_y^{(j)}(\boldsymbol{x}) := \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\,\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \rightharpoonup f_y(\boldsymbol{x}) := \sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\,\widehat{\varepsilon}_{22}(\boldsymbol{x}) \tag{19}$$

$$f_z^{(j)}(\boldsymbol{x}) := \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\,\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}(\boldsymbol{x}) \rightharpoonup f_z(\boldsymbol{x}) := \sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\,\widehat{\varepsilon}_{33}(\boldsymbol{x}), \tag{20}$$

在 $L^2(\Omega)$中弱收敛。将（16）应用于（15）的第一项可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2 d\boldsymbol{x} &= \frac{\mu}{\pi}\int_\Omega \left(\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2 d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{\mu}{\pi}\int_\Omega \left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{11}\right)^2 d\boldsymbol{x} \\
&\quad + \frac{\mu}{\pi}\int_\Omega \left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{11} - \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2 d\boldsymbol{x} + o(1),
\end{aligned}$$

对于 $\dfrac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}$，也有类似的界。

合并各项可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))\left[\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2\right] d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{\mu}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))\left[(\widehat{\varepsilon}_{11})^2 + (\widehat{\varepsilon}_{22})^2 + (\widehat{\varepsilon}_{33})^2\right] d\boldsymbol{x} \\
&\quad + \frac{\mu}{\pi}\left(\int_\Omega \left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{11} - \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2 d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{22} - \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2 d\boldsymbol{x}\right. \\
&\quad \left. + \int_\Omega \left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{33} - \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2 d\boldsymbol{x}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

对于（15）中的因子 λ，我们再次应用（16），并利用 $f_j(x) = \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\left(\dfrac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y} + \dfrac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)$和 $f(x) = \sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\,(\widehat{\varepsilon}_{11} + \widehat{\varepsilon}_{22} + \widehat{\varepsilon}_{33})$，得到

$$\frac{\lambda}{2\pi}\int_\Omega a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2 d\boldsymbol{x} \ge \frac{\lambda}{2\pi}\int_\Omega a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))\,(\widehat{\varepsilon}_{11} + \widehat{\varepsilon}_{22} + \widehat{\varepsilon}_{33})^2\,d\boldsymbol{x} + o(1).$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\mu\big(\widehat{\varepsilon}_{11}{}^2+\widehat{\varepsilon}_{22}{}^2+\widehat{\varepsilon}_{33}{}^2\big)+\frac{\lambda}{2}\big(\widehat{\varepsilon}_{11}+\widehat{\varepsilon}_{22}+\widehat{\varepsilon}_{33}\big)^2\\
&= \frac{\mu}{2}\big(\widehat{\varepsilon}_{11}+\widehat{\varepsilon}_{22}\big)^2+\frac{\mu}{2}\big(\widehat{\varepsilon}_{11}-\widehat{\varepsilon}_{22}\big)^2+\mu\widehat{\varepsilon}_{33}{}^2+\frac{\lambda}{2}\big(\widehat{\varepsilon}_{11}+\widehat{\varepsilon}_{22}+\widehat{\varepsilon}_{33}\big)^2\\
&= \left(2(\lambda+\mu)\Big(\frac{\widehat{\varepsilon}_{11}+\widehat{\varepsilon}_{22}}{2}+\nu\widehat{\varepsilon}_{33}\Big)^2+\frac{E}{2}\widehat{\varepsilon}_{33}{}^2\right)+\frac{\mu}{2}(\widehat{\varepsilon}_{11}-\widehat{\varepsilon}_{22})^2
\end{aligned}$$

其中，泊松比 ν 和杨氏模量 E 定义见式（7）。
因此，利用以下事实 $a_\eta>\eta$，我们可以估算式（15）中的弹性能量密度:　　，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))\left[\left(\mu\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2\right)+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}+\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2\right.\\
&\quad\left.+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial y}+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\delta_j\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\delta_j\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y}\right)^2\right]d\boldsymbol{x}\\
\geq\ &\frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))\left[\mu\widehat{\varepsilon}_{11}^2+\mu\widehat{\varepsilon}_{22}^2+\mu\widehat{\varepsilon}_{33}^2+\frac{\lambda}{2}(\widehat{\varepsilon}_{11}+\widehat{\varepsilon}_{22}+\widehat{\varepsilon}_{33})^2\right]d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{\mu}{2\pi}\int_\Omega\Big(a_\eta(\alpha^{(j)})\Big)\left[\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial y}+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\left(\delta_j\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\left(\delta_j\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y}\right)^2\right]d\boldsymbol{x}\\
&+J+o(1)\\
\geq\ &\frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))\frac{1}{2}E(\widehat{\varepsilon}_{33})^2d\boldsymbol{x}+\frac{\eta}{\pi}\int_\Omega\frac{\mu}{2}(\widehat{\varepsilon}_{11}-\widehat{\varepsilon}_{22})^2+2(\lambda+\mu)\left(\frac{\widehat{\varepsilon}_{11}+\widehat{\varepsilon}_{22}}{2}+\nu\widehat{\varepsilon}_{33}\right)^2d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{\mu\eta}{2\pi}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial y}+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\left(\delta_j\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\left(\delta_j\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y}\right)^2d\boldsymbol{x}\\
&+J+o(1),
\end{aligned}\tag{21}$$

其中我们令

$$\begin{aligned}
J\ =\ &\frac{\mu}{\pi}\int_\Omega\left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{11}-\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{22}-\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2\\
&+\left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{33}-\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

现在让我们关注式 (21) 中的第一项

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Omega a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))E\,\widehat{\varepsilon}_{33}^2\,d\boldsymbol{x}.$$

回顾切片平均值 ε_{33} 的定义 (10)，以及 $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\alpha}(z)$，我们可以看出

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_\Omega a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))E\,\widehat{\varepsilon}_{33}^2\,d\boldsymbol{x} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{x^2+y^2<1} a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))E\,\widehat{\varepsilon}_{33}^2\,d\mathcal{H}^2(x,y)\,dz \qquad (22)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))E\left(\fint_{x^2+y^2<1}\widehat{\varepsilon}_{33}^2(x,y,z)\,d\mathcal{H}^2(x,y)\right)dz\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))E\left[\fint_{x^2+y^2<1}\widehat{\varepsilon}_{33}^2(x,y,z)+\varepsilon_{33}^2(z)+\varepsilon_{33}^2(z)-2\varepsilon_{33}^2(z)\right.\\
&\qquad\left.+2\big(\varepsilon_{33}(z)-\varepsilon_{33}(z)\big)\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)\,d\mathcal{H}^2(x,y)\right]dz\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))E\left[\fint_{x^2+y^2<1}\varepsilon_{33}^2(z)+2\varepsilon_{33}(z)(\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)-\varepsilon_{33}(z))\right.\\
&\qquad\left.+\big(\widehat{\varepsilon}_{33}^2(x,y,z)-2\varepsilon_{33}(z)\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)+\varepsilon_{33}^2(z)\big)\,d\mathcal{H}^2(x,y)\right]dz\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))E\left[\fint_{x^2+y^2<1}\varepsilon_{33}^2(z)+2\varepsilon_{33}(z)(\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)-\varepsilon_{33}(z))\right.\\
&\qquad\left.+(\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)-\varepsilon_{33}(z))^2\,d\mathcal{H}^2(x,y)\right]dz\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))E\,\varepsilon_{33}^2(z)\,dz+\frac{1}{2}\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))E\left(\fint_{x^2+y^2<1}(\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)-\varepsilon_{33}(z))^2\,d\mathcal{H}^2(x,y)\right)dz,
\end{aligned}$$

其中，为了得到最后一个等式，我们由 (10) 推知

$$\left(\fint_{x^2+y^2<1}\varepsilon_{33}(z)(\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)-\varepsilon_{33}(z))\,d\mathcal{H}^2(x,y)\right) = 0.$$

此时，我们着手证明

$$\varepsilon_{33}(z) = \frac{d\widehat{u}_3}{dz}(z). \qquad (23)$$

注意，$\widehat{u}_3$ 是函数 $u_3^{(j)}$ 的弱极限，因此它与 x 和 y 无关，见 (9)。给定 $\varphi\in\mathcal{C}_c(0,1)$，我们计算得

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{d\widehat{u}_3}{dz}(z),\varphi(z)\right\rangle &= -\int_0^1\widehat{u}_3(z)\frac{d\varphi}{dz}(z)\,dz\\
&= -\lim_{j\to\infty}\int_0^1\overline{u}_3^{(j)}(z)\frac{d\varphi}{dz}(z)\,dz\\
&= -\lim_{j\to\infty}\int_0^1\left(\fint_{x_1^2+x_2^2<1}u_3^{(j)}(x,y,z)\frac{d\varphi}{dz}(z)\,d\mathcal{H}^2(x,y)\right)dz\\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{j\to\infty}\int_\Omega\partial_z u_3^{(j)}(x,y,z)\varphi(z)\,d(x,y,z)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_\Omega\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)\varphi(z)\,d(x,y,z)\\
&= \int_0^1\left(\fint_{x_1^2+x_2^2<1}\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)\,d\mathcal{H}^2(x,y)\right)\varphi(z)\,dz\\
&= \int_0^1\varepsilon_{33}(z)\varphi(z)\,dz,
\end{aligned}$$

这就证明了断言 (23)。综上，(22) 和 (23) 得出

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_\Omega a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))E(\widehat{\varepsilon}_{33})^2d\boldsymbol{x} &= \frac{1}{2}\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))E\left(\widehat{u}_3'(z)\right)^2dz \qquad (24)\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))E\left(\fint_{x^2+y^2<1}(\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)-\varepsilon_{33}(z))^2\,d\mathcal{H}^2(x,y)\right)dz.
\end{aligned}$$

再次应用 (16)，并回忆起 $\widehat{\alpha}$ 与 x 和 y 无关，我们还可以看出

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \alpha^{(j)}}{\partial z}\right)^2 = \pi \int_0^1 |\widehat{\alpha}'(z)|^2 dz + \int_\Omega \left(\frac{\partial \alpha^{(j)}}{\partial z} - \frac{\partial \widehat{\alpha}}{\partial z}\right)^2 d\boldsymbol{x} + o(1). \tag{25}$$

结合 (21)、(24) 和 (25) 可得 (14)，并证明该命题。 □

5.2 能量上界

定理 *1* 的证明。步骤 1： Γ-下极限不等式 设 $(\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个序列，使得对于某个 $(\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\alpha}) \in \mathbb{A}$

$$\begin{aligned} \overline{u}_3^{(j)} &\rightharpoonup \widehat{u}_3 \quad \text{weakly in } L^2(0,1) \\ \alpha^{(j)} &\to \widehat{\alpha} \quad \text{strongly in } L^2(0,1). \end{aligned}$$

不失一般性（必要时取一个子序列），我们可以假设下极限 $E_j[\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)}]$ 有限，且实际上是一个极限。因此，可以应用定理 3，并且我们可以假设，经过抽取一个子序列后，

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{11}, \quad \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{22}, \quad \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{33},$$

如定理 3 所述。该定理还表明

$$\overline{u}_3^{(j)} \to \widehat{u}_3,$$

在 $L^2(0,1)$ 中强收敛。特别地，由此可知，极限状态 $(\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\alpha})$ 属于由 (3) 定义的单轴类$\mathcal{S}$。再次应用定理 3，必要时取一个子序列，可得

$$\nabla \alpha^{(j)} \rightharpoonup \nabla \widehat{\alpha}, \quad \text{weakly in } L^2(\Omega), \qquad \alpha^{(j)} \to \widehat{\alpha} \text{ pointwise a.e.}$$

并且

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{11}, \quad \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{22}, \quad \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{33}, \quad \text{weakly in } L^2(\Omega),$$

对某些 $\widehat{\varepsilon}_{11}$、$\widehat{\varepsilon}_{22}$、$\widehat{\varepsilon}_{33} \in L^2(\Omega)$。因此，命题 1 的假设均已满足，且由 (14) 得到 Γ-下极限不等式，因为该不等式中的余项均非负。

步骤 2： Γ-上极限不等式
设 $\overline{u_3} \in H^1(0,1)$ 满足边界压缩条件，且 $\alpha \in H^1(0,1)$ 使得 $0 \le \alpha(z) \le 1$，几乎处处于 $z \in (0,1)$。理想情况下，我们希望构造三维应变场 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}$，使得

$$\varepsilon_{11}^{(j)} = \varepsilon_{22}^{(j)} = -\nu \varepsilon_{33}^{(j)}, \quad \varepsilon_{12}^{(j)} = \varepsilon_{13}^{(j)} = \varepsilon_{23}^{(j)} = 0, \tag{26}$$

其中 $\varepsilon_{33}^{(j)}$ 与横向坐标 x, y 无关。

若我们定义，对于 $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \Omega$,

$$\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}) = \overline{\alpha}(z), \quad \text{and} \quad u_3^{(j)}(\boldsymbol{x}) = u_3(x, y, z) = \overline{u}_3(z),$$

那么，由于

$$\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u}_3(z)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{u}_3(z)}{\partial y} = 0,$$

条件（26）将意味着

$$\varepsilon_{13}^{(j)} = \frac{1}{2}(\delta_j \partial_z u_1^{(j)} + \frac{1}{\delta_j} \partial_x u_3^{(j)}) = \frac{\delta_j}{2} \partial_z u_1^{(j)} = 0,$$

同样地，对于 ε_{23}^j也是如此。因此，我们将得到

$$\partial_z u_1^{(j)} = \partial_z u_2^{(j)} = 0,$$

从而

$$\partial_z \varepsilon_{11}^{(j)} \;=\; \partial_{zx}^2 u_1^{(j)} \;=\; -\nu \partial_{zz}^2 u_3^{(j)} \;=\; 0.$$

然而， u_3 通常不是 z 的仿射函数，因此要求 $\boldsymbol{u}^{(j)}$ 及相关应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}$ 满足式（26）过于严格。

为放宽这一条件，我们定义

$$u_1^{(j)}(x,y,z) := -\nu x\, \varepsilon_{33}^{(j)}(z), \quad u_2^{(j)}(x,y,z) := -\nu y\, \varepsilon_{33}^{(j)}(z), \quad u_3^{(j)}(x,y,z) := \overline{u}_3(z), \tag{27}$$

其中， $\varepsilon_{33}^{(j)}$ 是 u_3'（z）的平滑版本，其构造将在下文给出。至于损伤变量，选择

$$\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}) \;=\; \widehat{\alpha}(z),$$

即，独立于 j 和 x， y，即可达到目的。于是，纵向剪切应变可写为

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{13}^{(j)} &= \frac{1}{2}\left(\delta \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z} + \delta^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\delta\nu x \frac{\partial \varepsilon_{33}^{(j)}}{\partial z} + \delta^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right), \\
\varepsilon_{23}^{(j)} &= \frac{1}{2}\left(\delta \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial z} + \delta^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\delta\nu y \frac{\partial \varepsilon_{33}^{(j)}}{\partial z} + \delta^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

将这些试验场代入能量表达式，可得

$$\begin{aligned}
E_j[\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha] &= \frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\overline{\alpha}(z))\left[\mu\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2\right. \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\delta_j \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z} + \delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right)^2 \\
&\quad \left. + \frac{\mu}{2}\left(\delta_j \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial z} + \delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y}\right)^2\right] + w(\overline{\alpha}(z)) + \frac{w_1}{2}\frac{l^2}{L^2}|\overline{\alpha}'(z)|^2\, d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\overline{\alpha}(z))\left[\mu\nu^2\left|\varepsilon_{33}^{(j)}\right|^2 + \mu\nu^2\left|\varepsilon_{33}^{(j)}\right|^2 + \mu\,|\overline{u}_3'|^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\overline{u}_3' - 2\nu\varepsilon_{33}^{(j)}\right)^2\right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu}{2}\,\nu^2\,\delta_j^2 x^2\left(\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_{33}^{(j)}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\,\nu^2\,\delta_j^2 y^2\left(\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_{33}^{(j)}\right)^2\right] + w(\overline{\alpha}(z)) + \frac{w_1}{2}\frac{l^2}{L^2}\,|\alpha'(z)|^2\, d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\overline{\alpha}(z))\left[\left(\mu(2\nu^2+1) + \frac{\lambda}{2}(2\nu-1)^2\right)\left|\varepsilon_{33}^{(j)}\right|^2 + \left(\mu+\frac{\lambda}{2}\right)\left(|\overline{u}_3'|^2 - |\varepsilon_{33}^{(j)}|^2\right)\right. \\
&\quad \left. + 2\lambda\nu\varepsilon_{33}^{(j)}\left(\varepsilon_{33}^{(j)} - \overline{u}_3'\right) + (x^2+y^2)\,\frac{\mu}{2}\nu^2\delta_j^2\left|\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_{33}^{(j)}\right|^2\right] + w(\overline{\alpha}(z)) + w_1\frac{\ell^2}{2L^2}\,|\alpha'(z)|^2\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\mu(2\nu^2+1) + \frac{\lambda}{2}(2\nu-1)^2 &= \mu\left(2\left(\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)^2 + 1\right) + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{2\lambda}{2(\lambda+\mu)} - 1\right)^2 \\
&= \frac{\lambda^2\mu + 2\lambda^2\mu + 4\lambda\mu^2 + 2\mu^3 + \lambda^3 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2\mu + \lambda^3 + 2\lambda^2\mu + \lambda\mu^2}{2(\lambda+\mu)^2} \\
&= \frac{\mu\,(\lambda+\mu)\,(3\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)^2} \;=\; \frac{1}{2}E,
\end{aligned} \tag{28}$$

$E_j[\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha]$ 的表达式可化简为

$$\begin{aligned} E_j[\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha] &= \frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\overline{\alpha}(z))\left[\frac{E}{2}\left|\varepsilon_{33}^{(j)}\right|^2+\left(\mu+\frac{\lambda}{2}\right)\left(|\overline{u}_3'|^2-|\varepsilon_{33}^{(j)}|^2\right)+2\lambda\nu\varepsilon_{33}^{(j)}\left(\varepsilon_{33}^{(j)}-\overline{u}_3'\right)\right.\\ &\quad\left.+(x^2+y^2)\frac{\mu}{2}\nu^2\delta_j^2\left|\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_{33}^{(j)}\right|^2\right]+w(\overline{\alpha}(z))+w_1\frac{\ell^2}{2L^2}\left|\overline{\alpha}'(z)\right|^2\,d\boldsymbol{x}\\ &= \frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\overline{\alpha}(z))\frac{E}{2}(\overline{u}_3'(z))^2+w(\overline{\alpha}(z))+w_1\frac{\ell^2}{2L^2}\left|\overline{\alpha}'(z)\right|^2\,d\boldsymbol{x}\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\overline{\alpha}(z))\left[\left(\mu+\frac{\lambda}{2}-\frac{E}{2}\right)\left(|\overline{u}_3'|^2-|\varepsilon_{33}^{(j)}|^2\right)+2\lambda\nu\varepsilon_{33}^{(j)}\left(\varepsilon_{33}^{(j)}-\overline{u}_3'\right)\right.\\ &\quad\left.+(x^2+y^2)\frac{\mu}{2}\nu^2\delta_j^2\left|\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_{33}^{(j)}\right|^2\right]d\boldsymbol{x}. \end{aligned}\tag{29}$$

现在我们来构造函数 $\varepsilon_{33}^{(j)}$，使得 $\varepsilon_{33}^{(j)}\to u_3'$ 属于 $L^2(0,1)$，并且−

$$\frac{\mu}{2}(x^2+y^2)\,\nu^2\left\|\delta_j\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_{33}^{(j)}\right\|^2 \;\to\; 0.$$

后一条件要求 $\delta_j\partial_z\varepsilon_{33}^{(j)}$ 趋于 0，因此 $\partial_z\varepsilon_{33}^{(j)}$ 不应增长过快。因此，$\varepsilon_{33}^{(j)}=v_{k_j}$ 的具体构造必须在逼近 $u_3'(z)$与严格控制其导数之间取得平衡。为此，我们考虑一个磨子 $\rho\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$，并令

$$v_k(z) \;:=\; \overline{u}_3'*\rho_{1/\sqrt{k}}(z),$$

其中，对于 $s>0$，$\rho_s(z)=s^{-1}\rho(z/s)$；将 u_3' 在 $(0,1)$ 之外定义为 0，从而使卷积有定义。函数 v_k 满足

$$v_k \;=\; \overline{u}_3'*\rho_{\frac{1}{\sqrt{k}}} \;\to\; \overline{u}_3' \quad\text{strongly in } L^2(0,1) \text{ as } k\to\infty,$$

and

$$\frac{d}{dz}v_k \;=\; \frac{d}{dz}\left(\overline{u}_3'*\rho_{\frac{1}{\sqrt{k}}}\right) \;=\; \overline{u}_3'*\left(k\rho'\left(\sqrt{k}z\right)\right).$$

由此可得

$$\left\|\frac{d}{dz}v_k\right\|_{L^\infty((0,1))} \;\le\; \|\overline{u}_3'(z)\|_{L^1}\left\|k\rho'\left(\sqrt{k}z\right)\right\|_{L^\infty} \;=\; k\|\overline{u}_3'(z)\|_{L^1}\left\|\rho'\left(\sqrt{k}z\right)\right\|_{L^\infty} \;\le\; kM\|\overline{u}_3'\|_{L^1}.$$

鉴于 $u_3'(z)\in L^2((0,1))\subset L^1((0,1))$，我们看到，对于某个与 k 无关的常数 $C>0$，

$$\left\|\frac{d}{dz}v_k\right\|_{L^\infty((0,1))} \;\le\; Ck.$$

我们通过选取对角子序列 $\varepsilon_{33}^{(j)}=v_{k_j}$ 来定义 $\varepsilon_{33}^{(j)}$，其中选择 $k_j=\left\lfloor\delta_j^{-1/2}\right\rfloor$，这保证了

$$\varepsilon_{33}^{(j)}=v_{k_j}\to\overline{u}_3' \quad\text{in } L^2(0,1), \quad\text{and}\quad \left\|\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_{33}^{(j)}\right\|_{L^\infty}=\left\|\frac{\partial}{\partial z}v_{k_j}\right\|_{L^\infty} \;\le\; Ck_j\approx C\delta_j^{-1/2},$$

从而

$$\delta_j^2\left\|\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon_{33}^{(j)}\right\|_{L^2}^2 \;\le\; \delta_j^2\cdot\delta_j^{-1} \;=\; \delta_j \;\to\; 0 \quad\text{as } j\to\infty.$$

由 (29) 可得

$$\lim_{j\to\infty}E_j[\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha] \;=\; \int_0^1 a_\eta\left(\overline{\alpha}(z)\right)\cdot\frac{1}{2}E\overline{u}_3'(z)^2+w\left(\overline{\alpha}(z)\right)+\frac{w_1\ell^2}{2L^2}\left|\overline{\alpha}'(z)\right|^2\,\mathrm{d}z,$$

如前所述。

□

6 极小化子的收敛性

定理 *2* 的证明。 我们考虑由下式定义的函数 $\boldsymbol{u}_{\text{test}}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x})\ u_2(\boldsymbol{x})\ u_3(\boldsymbol{x}))$ 和 $\alpha_{\text{test}}(\boldsymbol{x})$

$$u_1(x,y,z) = \nu\varepsilon_z x, \quad u_2(x,y,z) = \nu\varepsilon_z y, \quad u_3(x,y,z) = -\varepsilon_z z, \quad \alpha_{\text{test}}(x,y,z) \equiv 0. \tag{30}$$

注意，在不存在损伤时， $\boldsymbol{u}_{\text{test}}$ 是能量的极小化元，并且方程 (26) 得到满足。由于$a_\eta(0) = 1$ 且 $w(0) = 0$，见 (28)，我们在试探对$(\boldsymbol{u}_{\text{test}}$、$\alpha_{\text{test}})$ 处计算泛函 E_j ：

$$\begin{aligned} E_j[\boldsymbol{u}_{\text{test}}, \alpha_{\text{test}}] &= \frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\alpha_{\text{test}}(\boldsymbol{x}))\left[\mu(\nu\varepsilon_z)^2 + \mu(\nu\varepsilon_z)^2 + \mu\varepsilon_z^2 + \frac{\lambda}{2}\left(\nu\varepsilon_z + \nu\varepsilon_z - \varepsilon_z\right)^2\right] + w(\alpha_{\text{test}}(\boldsymbol{x}))\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_\Omega \left[\mu\varepsilon_z^2(2\nu^2+1) + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_z^2(2\nu-1)^2\right] dx \ = \ \frac{E}{2}\varepsilon_z^2. \end{aligned}$$

由于根据假设，$(\boldsymbol{u}^{(j)},\ \alpha^{(j)})$使 $E_j[\boldsymbol{u},\alpha]$达到极小，我们推知

$$E_j[\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)}] \le E_j[\boldsymbol{u}_{\text{test}}, \alpha_{\text{test}}] \ = \ \frac{E}{2}\varepsilon_z^2, \tag{31}$$

因此 $E_j[\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)}] \le M$ 一致有界。由定理 3 可知，存在 $\widehat{u}_3$、 $\widehat{\alpha}$ 属于$H^1(\Omega)$，且仅依赖于 z；并且存在 $\widehat{\varepsilon}_{11}$、$\widehat{\varepsilon}_{22}$、$\widehat{\varepsilon}_{33}$ 属于 $L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$，它们满足 (10)，使得

$$\begin{cases} \widehat{u}_3(\cdot,0) = 0, \quad \widehat{u}_3(\cdot,1) = -\varepsilon_z, \qquad 0 \le \widehat{\alpha} \le 1 \quad \text{a.e. in } (0,1), \\ \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{11}, \qquad \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{22}, \qquad \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z} \rightharpoonup \widehat{\varepsilon}_{33}, \\ \nabla\alpha^{(j)} \rightharpoonup \nabla\widehat{\alpha}, \qquad \alpha^{(j)} \to \widehat{\alpha} \text{ a.e. in } \Omega, \end{cases}$$

并且由 (9) 定义的序列 $u^{(j)}$弱收敛于 $\widehat{u}_3$ ，在 $H^1\big((0,\ 1)\big)$ 中成立，且在$L^2\big((0,\ 1)\big)$中强收敛。我们定义向量值映射 $\widehat{\boldsymbol{u}} \in H^1(\Omega;\ \mathbb{R}^3)$如下：

$$\widehat{\boldsymbol{u}}(x,y,z) \ := \ \big(0,0,\widehat{u}_3(z)\big), \quad (x,y,z) \in \Omega.$$

应用命题 1，我们得到

$$\liminf_{j\to\infty} E_j[\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)}] \ \ge \ E_\infty[\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\alpha}] + J + \liminf_{j\to\infty} K^{(j)}, \tag{32}$$

其中

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))\left[\frac{\mu}{2}(\widehat{\varepsilon}_{11} - \widehat{\varepsilon}_{22})^2 + 2(\lambda+\mu)\left(\frac{\widehat{\varepsilon}_{11} + \widehat{\varepsilon}_{22}}{2} + \nu\widehat{\varepsilon}_{33}\right)^2\right] d\boldsymbol{x} \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z)) E\left(\fint_{x^2+y^2<1} \left(\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z) - \varepsilon_{33}(z)\right)^2 d\mathcal{H}^2(x,y)\right) dz \\ K^{(j)} &= \left\{ \frac{\eta\mu}{2\pi}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\delta_j\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z} + \delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\delta_j\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial z} + \delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y}\right)^2\right] d\boldsymbol{x} \right. \\ &\quad + \frac{\mu}{\pi}\int_\Omega \left[\left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{11} - \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{22} - \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{33} - \sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2\right] d\boldsymbol{x} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}w_1\left(\frac{l}{L}\right)^2\int_\Omega \left[\delta_j^{-2}\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial x} - \frac{\partial\widehat{\alpha}}{\partial x}\right)^2 + \delta_j^{-2}\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial y} - \frac{\partial\widehat{\alpha}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial z} - \frac{\partial\widehat{\alpha}}{\partial z}\right)^2\right] d\boldsymbol{x}\right\}. \end{aligned}$$

由定理 1-(*ii*) 应用于 $(\widehat{\boldsymbol{u}},\ \widehat{\alpha})$，存在 $\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_r^{(j)}, \widehat{\alpha}_r^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{A}$，使得

$$\limsup_{j\to\infty} E_j\left[\widehat{\boldsymbol{u}}_r^{(j)}, \widehat{\alpha}_r^{(j)}\right] = E_\infty[\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\alpha}]. \tag{33}$$

由于对每个 j，$\left(\boldsymbol{u}^{(j)},\ \alpha^{(j)}\right)$ 都是极小化元，

$$\liminf_{j\to\infty} E_j[\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)}] \le \limsup_{j\to\infty} E_j[\boldsymbol{u}^{(j)},\alpha^{(j)}] \le \limsup_{j\to\infty} E_j[\widehat{\boldsymbol{u}}_r^{(j)},\widehat{\alpha}_r^{(j)}].$$

因此，由 (32) 和 (33) 可得

$$E_\infty[\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{\alpha}] \ + \ J \ + \ \liminf_{j\to\infty} K^{(j)} \ \ \le \ \ E_\infty[\widehat{\boldsymbol{u}},\widehat{\alpha}].$$

取一个子序列，不失一般性地假设上述不等式中的下极限实际上是一个极限。由于 J 和 $K^{(j)}$ 的表达式是平方和，我们得到

$$\frac{1}{\pi}\int_\Omega a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))\left[\frac{\mu}{2}(\widehat{\varepsilon}_{11}-\widehat{\varepsilon}_{22})^2+2(\lambda+\mu)\left(\frac{\widehat{\varepsilon}_{11}+\widehat{\varepsilon}_{22}}{2}+\nu\widehat{\varepsilon}_{33}\right)^2\right]d\boldsymbol{x} \ \ = \ \ 0. \tag{34}$$

$$\int_0^1 a_\eta(\widehat{\alpha}(z))E\left(\fint_{x^2+y^2<1}\left(\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)-\varepsilon_{33}(z)\right)^2 d\mathcal{H}^2(x,y)\right)dz \ \ = \ \ 0, \tag{35}$$

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial y}+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\left(\delta_j\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x}\right)^2+\left(\delta_j\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial z}+\delta_j^{-1}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial y}\right)^2 d\boldsymbol{x} \ \ \to \ \ 0, \tag{36}$$

$$\int_\Omega\left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{11}-\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)^2 d\boldsymbol{x} \ \ \to \ \ 0, \tag{37}$$

$$\int_\Omega\left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{22}-\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}\right)^2 d\boldsymbol{x} \ \ \to \ \ 0, \tag{38}$$

$$\int_\Omega\left(\sqrt{a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))}\widehat{\varepsilon}_{33}-\sqrt{a_\eta(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}))}\frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}\right)^2 d\boldsymbol{x} \ \ \to \ \ 0, \tag{39}$$

$$\int_\Omega\delta_j^{-2}\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial x}-\frac{\partial\widehat{\alpha}}{\partial x}\right)^2+\delta_j^{-2}\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial y}-\frac{\partial\widehat{\alpha}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha^{(j)}}{\partial z}-\frac{\partial\widehat{\alpha}}{\partial z}\right)^2 d\boldsymbol{x} \ \ \to \ \ 0. \tag{40}$$

利用 $a_\eta(\widehat{\alpha}(\boldsymbol{x}))\ge\eta>0$，由方程 (34) 得到

$$\frac{\mu}{2}(\widehat{\varepsilon}_{11}-\widehat{\varepsilon}_{22})^2+2(\lambda+\mu)\left(\frac{\widehat{\varepsilon}_{11}+\widehat{\varepsilon}_{22}}{2}+\nu\widehat{\varepsilon}_{33}\right)^2=0,$$

因此 $\widehat{\varepsilon}_{11}=\widehat{\varepsilon}_{22}=-\nu\widehat{\varepsilon}_{33}$。结合 (35)、(10) 和 (23)，现在得到 $\widehat{\varepsilon}_{33}(x,y,z)=\varepsilon_{33}(z)=\widehat{u}'(z)$，从而

$$\widehat{\varepsilon}_{11}=\widehat{\varepsilon}_{22}=-\nu\widehat{u}'(z). \tag{41}$$

另一方面，由 (37) 以及附录中的引理 1，应用于

$$g^{(j)}(x)=\frac{1}{\sqrt{a_\eta\left(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x})\right)}},$$

并且对于式（17）中定义的函数 $f_x^{(j)}$，我们可以看到

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}=\left(\sqrt{a_\eta\left(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x})\right)}\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}\right)\frac{1}{\sqrt{a_\eta\left(\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x})\right)}}\xrightarrow{j\to\infty}\widehat{\varepsilon}_{11},\quad\text{in } L^2(\Omega).$$

鉴于定义（19-20）和收敛性（38-39），同样的论证可用于证明

$$\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y} \to \widehat{\varepsilon}_{22} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z} \to \widehat{\varepsilon}_{33},$$

在 L^2 中强收敛，因此

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x}(x,y,z) + \nu \frac{\mathrm{d}\widehat{u}_3}{\mathrm{d}z}(z) \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \longrightarrow 0, \quad \int_\Omega \left| \frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial y}(x,y,z) + \nu \frac{\mathrm{d}\widehat{u}_3}{\mathrm{d}z}(z) \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \longrightarrow 0,$$

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\mathrm{d}\widehat{u}_3}{\mathrm{d}z}(z) \right|^2 d(x,y,z) \longrightarrow 0.$$

现在我们证明 $||u_3^{(j)} - \widehat{u}_3||_{L^2(\Omega)} \to 0$。事实上，由于

$$u_3^{(j)}(x,y,z) - \widehat{u}_3(z) = \int_{s=0}^{z} \left(\partial_z u_3^{(j)}(x,y,s) - \widehat{u}_3'(s) \right) ds,$$

可得

$$\begin{aligned} ||u_3^{(j)} - \widehat{u}_3||^2_{L^2(\Omega)} &\leq \int_{x^2+y^2\leq 1} \int_{z=0}^{1} z \int_{s=0}^{z} \left| \partial_z u_3^{(j)}(x,y,s) - \widehat{u}_3'(s) \right|^2 ds\, dz\, d\mathcal{H}^2(x,y) \\ &\leq \int_{s=0}^{1} \int_{x^2+y^2\leq 1} \left| \partial_z u_3^{(j)}(x,y,s) - \widehat{u}_3'(s) \right|^2 d\mathcal{H}^2(x,y)\, ds \\ &= \int_\Omega \left| \partial_z u_3^{(j)} - \widehat{u}_3' \right|^2 d\boldsymbol{x} \;\to\; 0, \quad \text{as } j \to \infty. \end{aligned}$$

最后，证明 $(\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\alpha})$ 在 $\mathcal{A}$ 中使 E_∞ 取极小值是标准的。为方便读者，我们在此重述该证明，因为我们采用的是关于竖向位移的水平平均 $u_3^{(j)}$ 收敛的非标准拓扑 L^2。设 $(\boldsymbol{u}_c, \alpha_c)$ 是 $\mathcal{A}$ 中任意一对竞争者。根据–Γ-上极限性质，存在 $\mathcal{A}$ 中的一个序列 $\left((\boldsymbol{u}_{c,r}^{(j)}, \alpha_{c,r}^{(j)}) \right)_{j\in\mathbb{N}}$，使得

$$\limsup_{j\to\infty} E_j\left[\boldsymbol{u}_{c,r}^{(j)}, \alpha_{c,r}^{(j)}\right] \leq E_\infty\left[\boldsymbol{u}_c, \alpha_c\right].$$

根据 Γ-下极限性质，

$$E_\infty\left[\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\alpha}\right] \leq \liminf_{j\to\infty} E_j\left[\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)}\right].$$

由于对每个 $j \in \mathbb{N}$，$(\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)})$ 在 $\mathcal{A}$ 中使 E_j 取极小值，因此 $E_j\left[\boldsymbol{u}^{(j)}, \alpha^{(j)}\right] \leq E_j\left[\boldsymbol{u}_{c,r}^{(j)}, \alpha_{c,r}^{(j)}\right]$。证明至此完成。

□

致谢

我们感谢 J.-F. Babadjian 建议在能量下界 (21) 的证明中将 $a_\eta(\partial_{x_i} u_i^{(j)})^2$ 视为 $\sqrt{a_\eta}\partial_{x_i} u_i^{(j)}$ 的平方，正如 [2, 3], 中所做的那样；这一建议改进了初稿。当时，为了保证一致收敛，我们没有选择 $|\nabla\alpha|^2$，而是选用了一个大于空间维数的指数。此外，我们感谢 L. Scardia 指出，我们的分析得出了 Γ- 收敛的完整证明（定理 1），而不仅仅是极小化元的结果（定理 2）；也感谢 B. Bourdin 就梯度损伤模型进行了富有见地的讨论。

证明收敛到单轴损伤模型的问题，源于将一维方程用于单轴压缩试验参数识别的需求；这项工作是 CMM 开展地下采矿研究的一部分。我们谨向 S. Gaete、A. Jofr´e、R. Lecaros、J. Ortega、J. Ram´ırez-Ganga、J. San Martin 和 I. Vidal 致谢，感谢他们在讨论中提供的启发与见解。

E.B. 的工作部分得到项目 ANR-24-CE40-2216 STOIQUES 的资助。D.H. 的工作得到 FONDECYT1231401、ANID 卓越中心资助计划下的 Centro de Modelamiento Matem´atico (CMM) BASAL 项目 FB210005，以及 CODELCO 的项目“矿山诱发地震活动分析”（“An´alisis de la sismicidad inducida en miner´ıa subterr´anea”）的资助。

V.R 的工作得到 ANID 卓越中心数学建模中心（CMM）BASAL 基金 FB210005 的支持。

附录

引理 1。 设 μ 为正有限拉东测度。设 (f_j)、(g_j) 分别为 $L^2(\Omega,\mu)$ 和 $L^\infty(\Omega,\mu)$ 中的序列。假设

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|g_j\|_{L^\infty} \le M \quad \textit{for some } M>0.$$

此外，假设 $g_j \to g$ μ-几乎处处成立，且 $f_j \to f$ 属于 $L^2(\Omega,\mu)$，其中 $(f, g) \in L^2(\Omega,\mu)\times L^\infty(\Omega,\mu)$。则

$$f_j g_j \to fg \quad \textit{in } L^2(\Omega,\mu).$$

证明。 设 $\varepsilon>0$。由于 $f^2\in L^1$，存在 $\delta>0$，使得对于任意 μ-可测集 E,

$$\mu(E)<\delta \Rightarrow \int_E |f|^2\,d\mu < \frac{\varepsilon^2}{3^2\cdot(2M)^2}.$$

~ ~根据叶戈罗夫定理，存在一个可测集 E，使得 $\mu(E)<\delta$，并且 $g_j\to g$ 在 ~ $\Omega\setminus E$ 中一致收敛。于是，存在 $J\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $j\ge J$,

$$\|g_j-g\|_{L^\infty(\Omega\setminus\widetilde{E})} \le \frac{\varepsilon}{3\|f\|_{L^2(\Omega)}}, \qquad \text{and} \qquad \|f_j-f\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{3M}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\|f_jg_j-fg\|_{L^2(\Omega)} = &= \|(f_j-f)g_j+(g_j-g)f\|_{L^2(\Omega)} \le \|(f_j-f)g_j\|_{L^2(\Omega)}+\|(g_j-g)f\|_{L^2(\Omega)}\\
&= \left(\int_\Omega (f_j-f)^2 g_j^2\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega (g_j-g)^2 f^2\right)^{1/2}\\
&\le M\|f_j-f\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\widetilde{E}} f^2 + \int_{\Omega\setminus\widetilde{E}} (g_j-g)^2 f^2\right)^{1/2}\\
&= M\|f_j-f\|_{L^2(\Omega)} + \left((2M)^2\int_{\widetilde{E}} f^2\,d\mu + \left(\frac{\varepsilon}{3\|f\|_{L^2(\Omega)}}\right)^2 \int_\Omega f^2\,d\mu\right)^{1/2}\\
&\le \frac{\varepsilon}{3}+\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3^2}+\frac{\varepsilon^2}{3^2}} \le (1+\sqrt{2})\frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] Luigi Ambrosio 和 Norman Dancer。变分法与偏微分方程：几何演化问题与度理论专题。施普林格，2000年。

[2] Luigi Ambrosio 和 Vincenzo Maria Tortorelli。通过 γ–收敛，以椭圆型泛函逼近依赖于跳跃的泛函。《纯粹与应用数学通讯》，43(8):999–1036，1990年。

[3] Luigi Ambrosio 和 Vincenzo Maria Tortorelli. 关于用二次椭圆型泛函逼近依赖于跳跃的泛函。《意大利数学联合会公报》, 6:105–123, 1992.[4] Stuart S Antman. 《弹性力学的非线性问题》. 施普林格, 2005.

[5] Jean-Fran¸cois Babadjian 和 Duvan Henao. 允许发生断裂、脱粘或分层的线弹性薄膜约化模型。《界面与自由边界》, 18(4):545–578, 2016.[6] Ahmed Benallal, Rene Billardon 和 Giuseppe Geymonat. 率无关材料中的分岔与局部化：一些一般性考量。载于《耗散系统的分岔与稳定性》, 第 1–44 页。施普林格, 1993.[7] Eric Bonnetier, Sergio Gaete, Alejandro Jofre, Rodrigo Lecaros, Gino Montecinos, Jaime H Ortega, Javier Ram´ırez-Ganga 和 Jorge San Mart´ın. 用于研究地下采矿中材料行为的梯度损伤模型。《应用数学建模》, 146:116171, 2025.[8] Eric Bonnetier, Luk´aˇs Jakabˇcin, St´ephane Labb´e 和 Anne Replumaz. 对一类结合多种耗散机制的模型进行数值模拟：断裂、塑性和黏性耗散。《计算物理学杂志》, 271:397–414, 2014。《计算物理学前沿》.[9] Blaise Bourdin, Gilles A Francfort 和 Jean-Jacques Marigo. 修订脆性断裂问题的数值实验。《固体力学与物理学杂志》, 48(4):797–826, 2000.[10] Blaise Bourdin, Gilles A Francfort 和 Jean-Jacques Marigo. 断裂的变分方法。《弹性学杂志》, 91(1):5–148, 2008.[11] Blaise Bourdin, Jean-Jacques Marigo, Corrado Maurini 和 Paul Sicsic. 热冲击诱发的形态发生与复杂裂纹扩展。《物理评论快报》, 112(1):014301, 2014.[12] Blaise Bourdin, Jean-Jacques Marigo, Corrado Maurini 和 Camilla Zolesi. 纳入任意凸强度准则的断裂变分方法。2025. arXiv 预印本 2506.22558.[13] Andrea Braides. 《自由间断问题的逼近》。数学讲义第 1694 卷。施普林格, 1998.[14] Andrea Braides. 《Γ-收敛入门》。克拉伦登出版社, 2002.[15] Antonin Chambolle, Alessandro Giacomini 和 Marcello Ponsiglione. 脆性材料中的裂纹萌生。《理性力学与分析文档》, 188(2):309–349, 2008.[16] Philippe G Ciarlet. 《数学弹性力学》。第二卷：板理论。工业与应用数学学会, 2021.[17] Gianni Dal Maso. 《Γ-收敛导论》。施普林格, 2012.[18] Gilles A Francfort 和 J-J Marigo. 将脆性断裂重新视为能量极小化问题。《固体力学与物理学杂志》, 46(8):1319–1342, 1998.[19] Gero Friesecke, Richard D James 和 Stefan M¨uller. 通过 Γ-收敛从非线性弹性导出的板模型层级。《理性力学与分析文档》, 180(2):183–236, 2006.[20] Alan Griffith. VI. 固体断裂与流动现象。《伦敦皇家学会哲学汇刊》。A辑，221(582-593):163–198, 1921.[21] Aditya Kumar, Blaise Bourdin, Gilles A Francfort 和 Oscar Lopez-Pamies. 重新审视脆性断裂相场方法中的成核。《固体力学与物理学杂志》, 142:104027, 2020.[22] Giovanni Lancioni 和 Gianni Royer-Carfagni. 断裂力学的变分方法：在巴黎法国先贤祠中的实际应用。《弹性学杂志》, 95(1):1–30, 2009.[23] Andr´es Le´on-Baldelli, Jean-Fran¸cois Babadjian, Blaise Bourdin, Duvan Henao 和 Corrado Mau-rini. 面内载荷作用下薄膜断裂与脱粘的变分模型。《固体力学与物理学杂志》, 70:320–348, 2014.[24] Jean-Jacques Marigo. 基于功性质的塑性、损伤与断裂力学本构关系。《核工程与设计》, 114(3):249–272, 1989.[25] Jean-Jacques Marigo, Corrado Maurini 和 Kim Pham. 梯度损伤模型断裂建模综述。《力学》, 51(12):3107–3128, 2016.

[26] Stefan Neukamm 和 Kai Richter。弯曲机制下弹塑性杆的降维。2024。arXiv 预印本 2409.08646。[27] Kim Pham 和 J-J Marigo。梯度损伤模型中均匀状态的稳定性：三维情形下的尺寸效应与形状效应。《弹性学杂志》，110(1):63–93，2013。[28] Kim Pham 和 Jean-Jacques Marigo。损伤的变分方法：I. 基本概念。《研究报告. *M´*力学，338(4):191–198，2010。[29] Kim Pham、Jean-Jacques Marigo 和 Corrado Maurini。梯度损伤模型单轴试验中均匀响应的唯一性与稳定性问题。《固体力学与物理学杂志》，59(6):1163–1190，2011。[30] Paul Sicsic、Jean-Jacques Marigo 和 Corrado Maurini。热冲击问题中周期性裂纹阵列的起始：一种梯度损伤建模方法。《固体力学与物理学杂志》，63:256–284，2014。[31] Erwan Tann´e、Tianyi Li、Blaise Bourdin、J-J Marigo 和 Corrado Maurini。脆性断裂变分相场模型中的裂纹成核。《固体力学与物理学杂志》，110:80–99，2018。