arXiv:2601.01028v1 [gr-qc] 3 Jan 2026

度规 $f(R)$ 引力中的规范不变引力波偏振及其宇宙学含义

Ramesh Radhakrishnan[1*]、DavidMcNutt[2], Delaram Mirfendereski[3], Alejandro Pinero[4],Eric Davis[5], William Julius[6], Gerald Cleaver[7]

摘要

我们对度规 $f(R)$ 引力中的引力波偏振进行了完整的规范不变分析，特别关注修正的 Starobinsky 模型 $f(R) = R+\alpha R^2-2\Lambda$。该模型的常曲率解 $R_d = 4\Lambda$ 为早期和晚期宇宙学提供了自然的德西特背景。通过围绕这一背景将场方程线性化，我们推导出曲率扰动 δR 满足的克莱因–戈尔登方程，并表明标量传播模获得了质量 $m_\psi^2 = 1/(6\alpha)$，凸显出同一标量自由度如何在高曲率下支配暴胀动力学，并在当前加速膨胀的宇宙中支配引力波的传播。利用标量–矢量–张量分解以及对扰动里奇张量的分解，我们得到一组完整的规范不变传播方程，分离出存在物质时标量模、矢量模和张量模各自的贡献。我们发现，张量扇区保留了广义相对论中的两种横向无迹偏振，而标量扇区则支持由有质量标量传播模决定的有质量呼吸/纵向模。通过分别在局部闵可夫斯基区域和完全协变的德西特形式下计算测地线偏离方程，我们独立地得到了相同的偏振内容，并识别出其潮汐特征。由此建立的框架将额外标量偏振与宇宙学可观测量联系起来，为引力波现象学与度规$f(R)$引力的宇宙学含义之间提供了统一的规范不变联系。

关键词： $f(R)$引力；规范不变性；Bardeen变量；偏振模；引力波；标量-矢量-张量分解；标量子；暴胀；宇宙学

1 引言

研究引力波（GW）偏振为区分广义相对论（GR）与其他引力理论提供了一种有力途径。在 Eardley、Lee 和 Lightman 基于 Newman–Penrose（NP）形式体系所做的经典分类中 [1], 一般的度规引力理论最多可能包含六种引力波偏振态。在广义相对论中，只有其中两种为人熟知的张量“+”（$\oplus$）和“×”（$\otimes$）模，它们对应度规的两个辐射自由度

[1]通讯作者：ramesh_radhakrishna1@baylor.edu[2]挪威皇家海军学院数学系，挪威卑尔根[3]得克萨斯大学里奥格兰德河谷分校物理与天文学系，美国得克萨斯州[4]得克萨斯大学里奥格兰德河谷分校物理与天文学系，美国得克萨斯州[5]纽约州立大学奥尔巴尼分校物理系，美国纽约州奥尔巴尼[6]贝勒大学物理与天文学系，美国得克萨斯州韦科[7]贝勒大学物理与天文学系，美国得克萨斯州韦科

。度规的自由度（DoF）。广义相对论的扩展理论通常会引入额外的标量模和/或矢量模，从而改变自由下落测试粒子之间的相对位移。

一个特别著名的例子是 Brans–Dicke理论 [2], , 其中标量场会产生一个额外的横向呼吸模。更一般地，近期运用 NP形式主义和不可约（3+1）分解 [3, 4] 进行的分析证实，NP偏振态的数量未必与理论中的辐射自由度数量一致。这种不匹配自然出现在标量-张量理论以及度规 $f(R)$ 引力中；在后者中，里奇标量扰动引入了一种新的有质量标量传播模，它满足有效质量为 m_ψ [5–7]的克莱因–戈尔登方程。对于无质量传播，该标量模会产生一种独立偏振：测试粒子环的横向呼吸形变。然而，当标量模有质量时（$m_\psi \neq 0$），标量扇区会引发横向呼吸运动与沿传播方向的纵向运动的混合；这两个 NP 振幅并不独立，而是共同表征一个标量辐射自由度。因此，在有质量情形下，度规 $f(R)$ 引力包含三个辐射自由度，但最多可能表现出四个 NP 偏振振幅。

值得注意的是，近期关于含有有质量模的理论中 NP 量如何诠释的讨论。对于群速度不同于光速的引力波，某些在广义相对论中为零的 NP 分量不再恒为零，这使 NP 标量与物理偏振之间的对应关系变得复杂 [1]。这是因为非光速传播会使波矢成为非零向量，因此标准的 NP零四重标架无法与传播方向对齐，辐射分量与非辐射分量通常的解耦也会失效[3, 8]。这些问题并不意味着 NP 方法无效，而是促使人们采用互补的规范不变形式体系。

若干修正引力模型也呈现出类似特征。例如，在修正高斯–博内引力中$f(G)$，张量波如同在广义相对论中那样传播，同时还会出现一个额外的有质量标量模[9]。在通过 Bardeen变量研究的有质量引力理论中 [10], , 通常不辐射的标量模变得具有动力学性质，构成有质量引力子的螺旋度-0 分量。相比之下，Einstein–Dilaton–Gauss–Bonnet理论和动力学Chern–Simons引力等二次理论，在其线性化极限下可以呈现与广义相对论相同的偏振内容[11]。涉及显式物质-几何耦合的扩展理论，包括 $f(R,\ T)$和 $f(R,\ T^\phi)$引力[12],, 进一步凸显了偏振计数问题的微妙性。尽管 $f(R,\ T)$ 引力和 $f(R)$引力在真空中具有相同的远场偏振结构（$T = 0$），它们的源依赖动力学却有所不同。涉及额外标量 ϕ的$f(R,\ T^\phi)$理论，即使在真空中也会产生可区分的偏振模式。这些分析还强调，必须明确区分 $f(R)$引力中的标量模 ψ 与任何额外的物质标量 ϕ。

幂级数模型中线性化度规 $f(R)$ 引力的引力辐射已得到研究

$$f(R) = \sum_{n=0}^{N} a_n R^n, \tag{1}$$

以及 Starobinsky 模型等特定子类。太阳系检验表明，度规 $f(R)$ 引力对光线偏折的描述与广义相对论具有相同的后牛顿参数 $\Gamma = 1$，但近日点进动可能有所不同 [13]。对极端质量比旋近波形相位的研究表明，在某些情形下可能探测到偏离广义相对论的现象。在 $f(R)$ 和 Horndeski 理论中开展的偏振分析 [8] 凸显了利用激光干涉仪探测纵向标量模的难度，而脉冲星计时阵列可能具有更高的灵敏度。利用测地线偏离方程 [14]，已明确证实有质量标量传播模兼具纵向和呼吸模式的性质。度规 $f(R)$ 引力的其他应用还包括研究低于和高于钱德拉塞卡极限的质量白矮星所产生的引力辐射，

其中所有相关 偏振振幅使用格林函数方法进行了估算 [15].

德西特背景特别适合用于分析度规 $f(R)$ 引力中张量模和标量模的传播。它既能很好地近似描述由暗能量驱动的晚期宇宙加速膨胀，也能刻画早期宇宙中准指数式的“慢滚”暴胀阶段。（这里的“慢滚”是指暴胀子的动能远小于其势能的状态，因此哈勃参数几乎保持恒定。）背景曲率会影响引力波的色散关系、模态混合及渐近行为，因此有必要直接在 de Sitter 空间 [16, 17] 中研究有质量标量模和张量模。由于含宇宙学常数的广义相对论仅支持两种张量偏振，de Sitter 空间为分离出度规 $f(R)$ 引力所产生的任何额外模态，并建立暴胀物理与晚期加速膨胀之间的宇宙学联系，提供了一个理想的研究环境。

本文结构如下。第2节中，我们推导德西特背景下度规 $f(R)$ 引力的场方程，并得到额外标量模的克莱因–戈尔登方程，其质量为 m_ψ。第3节讨论里奇张量的扰动及由此得到的线性化场方程。第4节进行 (3+1) 不可约分解，将其分解为标量、矢量和张量扇区。第5节针对模型 $f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda$ 展开讨论，并给出其明确的线性化动力学。第6节确定规范不变的巴丁变量，并推导物理偏振内容。最后，第7节利用测地线偏离方程验证这些结果，表明所得到的偏振模确实体现为自由下落测试粒子的相对加速度。

2 德西特背景下度规 $f(R)$ 引力的场方程

在度规 $f(R)$ 引力中，爱因斯坦–希尔伯特拉格朗日密度 R 被一个一般函数$f(R)$取代，

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\, f(R) + S_m[g_{\mu\nu}, \Psi_m], \tag{2}$$

其中， S_m 为物质作用量， Ψ_m 统称物质场，并且

$$\kappa \equiv 8\pi G = 2M_{\rm Pl}^{-2} \tag{3}$$

以约化普朗克质量 $M_{\rm Pl}$ (我们采用单位制 $c = 1$)。对度规变分（2），并参照例如 [18], ，可得度规 $f(R)$ 场方程

$$f'(R)\, R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + \left(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)f'(R) = \kappa\, T_{\mu\nu}, \tag{4}$$

其中， $f\prime(R) \equiv df/dR$、 $\Box \equiv g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma$，并且

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\, S_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{5}$$

i为物质应力-能量张量。在真空中，我们令 $T_{\mu\nu} = 0$ ，则（4）化简为 o

$$f'(R)\, R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + \left(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)f'(R) = 0. \tag{6}$$

对（4）取迹，可得标量（迹）方程

$$3\Box f'(R) + Rf'(R) - 2f(R) = \kappa T, \tag{7}$$

其中 $T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$。在真空中，

$$3\Box f'(R) + Rf'(R) - 2f(R) = 0. \tag{8}$$

迹方程将作为识别有质量标量传播模（即“标量子”）及其有效质量的起点。

2.1 $f(R)$ 引力、标量–张量形式与变色龙机制

场方程 (4) 通过 $\Box f\prime(R)$ 和 $\nabla_\mu\nabla_\nu f\prime(R)$ 包含度规的高阶导数。要揭示额外标量自由度并分析屏蔽——即在高密度环境中通过依赖环境的有效质量抑制标量介导的第五种力——一种有效方法是通过共形变换将度规 $f(R)$ 引力改写为标量–张量理论（例如参见 [6, 7]）。

定义

$$F(R) \equiv f'(R) > 0, \qquad F(R) = \exp\Big(-\frac{2\beta\phi}{M_{\rm Pl}}\Big), \tag{9}$$

其中，ϕ 是一个标量场。在度规 $f(R)$ 引力中，耦合参数固定为 $\beta = 1/\sqrt{6}$，这反映了标量与物质耦合的普适强度。随后我们引入共形变换

$$\bar{g}_{\mu\nu} = F(R)\, g_{\mu\nu} = \exp\Big(-\frac{2\beta\phi}{M_{\rm Pl}}\Big) g_{\mu\nu}, \tag{10}$$

该变换将 约旦框架度规 $g_{\mu\nu}$ 映射为 爱因斯坦框架度规 $\bar{g}_{\mu\nu}$。在约旦框架中，物质与 $g_{\mu\nu}$ 最小耦合，自由下落的测试粒子沿着 $g_{\mu\nu}$的测地线运动。在爱因斯坦框架中，引力部分呈现为爱因斯坦–希尔伯特形式，并包含一个正则标量场；与此同时，物质相对于爱因斯坦框架度规 $\bar{g}_{\mu\nu}$的耦合则变为依赖于 ϕ的非最小耦合。

用 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 和 ϕ表示时，作用量（2）变为

$$S = \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\Big[\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\,\bar{R} - \frac{1}{2}\,\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\phi\,\bar{\nabla}_n u\phi - V(\phi)\Big] + S_m(A^2(\phi)\,\bar{g}_{\mu\nu}, \Psi_m), \tag{11}$$

其中，$\bar{\nabla}_\mu$ 和 $\bar{R}$ 分别是 $\bar{g}_{\mu\nu}$的协变导数和里奇标量，而

$$A^2(\phi) = F^{-1}(R) = \exp\Big(+\frac{2\beta\phi}{M_{\rm Pl}}\Big) \tag{12}$$

是物质扇区中联系爱因斯坦度规与乔丹度规的共形因子。标量势为

$$V(\phi) = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\frac{RF(R) - f(R)}{F^2(R)} = \frac{1}{\kappa}\frac{Rf'(R) - f(R)}{f'^2(R)}. \tag{13}$$

相应的爱因斯坦框架场方程可写为

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{M_{\rm Pl}^2}\Big(T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(m)}\Big), \tag{14}$$

$$\bar{\Box}\phi = V'(\phi) - \frac{\beta}{M_{\rm Pl}}\,T^{(m)}, \tag{15}$$

其中， $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$是标量场应力张量， $T_{(m)\mu\nu}$是爱因斯坦框架物质张量。对于空间平坦的 FRW 背景中的空间均匀标量场 $\phi = \phi(t)$，该方程可化为标准的宇宙学克莱因–戈尔登方程

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = \frac{\beta}{M_{\rm Pl}} T^{(m)}, \tag{16}$$

在真空极限（$T^{(m)} = 0$）下变为

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \tag{17}$$

在暴胀和背景宇宙学应用中求解的方程 [6, 19, 20]。这明确地将该模型的早期暴胀动力学与其晚期宇宙学影响联系起来。

实际应用中的约旦框架与爱因斯坦框架。 约旦框架是物质最小耦合的框架，实验可观测量（例如试验粒子轨迹和探测器响应）在该框架下最容易直接解释。爱因斯坦框架在数学上便于分析额外标量自由度的动力学，以及讨论稳定性、屏蔽机制和宇宙学演化。只要一致地变换度规和物质变量，物理预言便与框架无关。本文在约旦框架中进行引力波分析（Bardeen变量和度规扰动均在该框架中定义），而爱因斯坦框架的描述仅用于阐明标量-张量结构和变色龙机制。

变色龙机制在 $f(R)$ 引力中。 **度规**$f(R)$ 引力中的额外标量自由度，通过与物质应力-能量张量的迹耦合，传递一种普适的第五种力 [6, 7]。标量场 ϕ 在 (11) 中通过 $A^2(\phi)\,\bar{g}_{\mu\nu}$ 与物质普适耦合；除非它的有效质量在高密度环境中变大，否则就会传递这种第五种力。变色龙机制 利用有效势对密度的依赖性

$$V_{\rm eff}(\phi) = V(\phi) + \rho\, A(\phi), \qquad A(\phi) = \exp\!\Big(+\frac{\beta\phi}{M_{\rm Pl}}\Big), \tag{18}$$

其中， ρ 是局域物质密度。在高密度区域， $V_{\rm eff}$ 会形成一个极小值点，此处的有效质量

$$m_{\rm eff}^2(\rho) \equiv \left.\frac{d^2 V_{\rm eff}}{d\phi^2}\right|_{\phi_{\rm min}(\rho)} \tag{19}$$

很大，因此标量介导的力作用范围很短，与引力的局域检验相符。在低密度环境（宇宙学尺度）中，极小值会发生移动，而 $m_{\rm eff}$ 可能变得足够小，使标量场能够驱动宇宙加速膨胀，或在结构形成中留下印记 [21–23]。

要使 $f(R)$ 模型呈现可行的变色龙行为，由 ($V(\phi)$ 推导出的标量势 13必须在场空间的至少一部分满足某些条件，

$$V'(\phi) < 0, \qquad V''(\phi) > 0, \qquad V'''(\phi) < 0, \tag{20}$$

这意味着对 $f(R)$ 的形式及其导数 [22] 存在非平凡约束。这确保标量场在高密度区域可以很重，同时在宇宙学尺度上仍足够轻，从而影响晚期加速膨胀。

2.2 爱因斯坦表象中的慢滚暴胀与标量子动力学 e

上文介绍的度规 $f(R)$ 引力的标量–张量重构，为讨论由标量子驱动的早期宇宙暴胀提供了自然框架。在爱因斯坦框架中，标量场 ϕ 满足通过变分爱因斯坦框架作用量得到的场方程（11），

$$\bar{\Box}\phi = V'(\phi), \tag{21}$$

其中 $V(\phi)$ 由式（13）给出。对于在空间平直 FLRW 背景中演化的空间均匀标量场 $\phi = \phi(t)$，$d\bar{s}^2 = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x}^2$，该方程可化为标准的宇宙学克莱因–戈尔登方程 [6, 19, 20]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \tag{22}$$

wh其中 $H = \dot{a}/a$。背景膨胀由弗里德曼方程决定 n

$$3M_{\rm Pl}^2 H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \tag{23}$$

当势能占主导、动能较小，且标量场沿着$V(\phi)$缓慢滚动时，便会发生暴胀。这可用慢滚参数来量化

$$\epsilon(\phi) \equiv \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)}\right)^2, \qquad \eta(\phi) \equiv M_{\rm Pl}^2\frac{V''(\phi)}{V(\phi)}, \tag{24}$$

其中，暴胀要求 $\epsilon \ll 1$ 且 $|\eta| \ll 1$。在这些条件下，式（22）可化为熟知的慢滚方程

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi), \tag{25}$$

且哈勃参数满足 $H^2 \simeq V(\phi)/(3M_{\rm Pl}^2)$。

对于本文所考虑的 Starobinsky 型模型，其势 $V(\phi)$ 在大曲率（$R \gg \Lambda$）下具有近似平坦区域，从而确保慢滚条件（24）自然满足。在此范围内，标量子表现为具有有效质量 $m_\phi^2 \simeq V''(\phi)$的暴胀子，其暴胀预言与著名的 $R + \alpha R^2$ 模型[5, 24]一致。从观测角度看，慢滚阶段会产生近似尺度不变的原初曲率扰动谱，并抑制张量标量比，与当前的 CMB 约束高度吻合。

尽管慢滚暴胀发生在远高于当代引力波探测器所能探测尺度的曲率范围，但 $f(R)$引力理论中同一个额外标量自由度支配着这两个范围。在暴胀背景下，这个自由度通常称为标量子；而在线性扰动层面，它表现为一个可传播的有质量标量模。具体而言，德西特解处标量扰动的质量，

$$m_\psi^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{f'(R_d)}{f''(R_d)} - R_d\right], \tag{26}$$

控制引力波标量偏振的传播，并建立模型的早期暴胀动力学与其晚期宇宙学影响之间的联系。

德西特解和宇宙学含义。我们尤其关注常曲率德西特解及其周围的小扰动。对于具有 $R = R_d =$ 常数 和 $T = 0$的真空常曲率背景，迹方程（8）化为代数条件

$$R_d f'(R_d) - 2f(R_d) = 0. \tag{27}$$

任何函数 $f(R)$ 若能满足方程（27，便存在曲率为R_d的德西特解。（反德西特解对应于曲率为 $R_d < 0$ 的常曲率解，必须单独分析。）对于修正的 Starobinsky 模型

$$f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda, \tag{28}$$

德西特曲率 R_d 由下式确定

$$R_d(1 + 2\alpha R_d) - 2(R_d + \alpha R_d^2 - 2\Lambda) = 0, \tag{29}$$

在晚期低曲率区间 $\alpha R_d \ll 1$，该式可简化为 $R_d \simeq 4\Lambda$ 。[1] 因此， $f(R)$ 引力中的常曲率解为早期暴胀和晚期暗能量主导时期提供了统一的建模框架，也是我们分析引力波偏振的自然背景。

在本文余下部分，我们将在约旦框架中讨论，并直接用曲率扰动 δR 来描述额外的传播标量模。为避免符号混淆，我们采用以下记法：

- ϕ 表示本小节中用于标量-张量理论及暴胀描述的爱因斯坦框架标量场；以及
- δR （或等价地，表示质量为 m_ψ 的正则归一化标量扰动 ψ ），用于指称线性化约旦框架场方程及 Bardeen 变量分析中出现的额外传播标量模。

2.3 德西特背景附近的度规微扰

现在，我们考虑真空场方程（$g_{\mu\nu}$ 6）的背景解附近的小扰动。特别地，稍后我们将具体讨论满足（27）的德西特背景。扰动度规写为

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad \tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2), \tag{30}$$

其中， $h_{\mu\nu}$ 上的指标由背景度规g_μ升降 ν.

在线性阶下，曲率量和函数 $f(R)$展开为

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= R + \delta R + \mathcal{O}(h^2), \\ \tilde{f}(R) &= f(R) + f'(R)\,\delta R + \mathcal{O}(h^2), \\ \tilde{f}'(R) &= f'(R) + f''(R)\,\delta R + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned} \tag{31}$$

其中 R 是背景里奇标量， δR 是其扰动。

[1]在极高曲率（早期宇宙）下， αR^2 项占主导，模型趋近于暴胀型斯塔罗宾斯基机制；而在低曲率（晚期）下，宇宙学常数项 -2Λ 驱动加速膨胀。

˜将背景协变导数与扰动协变导数分开处理更为方便。记 ∇_μ为与 $\tilde{g}_{\mu\nu}$相关联的协变导数， ∇_μ 为与$g_{\mu\nu}$相关联的协变导数，则它们作用于一般张量 $T^{\nu_1\ldots}{}^{\nu_k}{}_{\rho_1\cdots\rho_l}$时的差为（例如参见 [25]）

$$\tilde{\nabla}_\mu T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\rho_1\cdots\rho_l} = \nabla_\mu T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\rho_1\cdots\rho_l} + \sum_i C^{\nu_i}{}_{\mu\sigma}\, T^{\nu_1\cdots\sigma\cdots\nu_k}{}_{\rho_1\cdots\rho_l} - \sum_j C^{\sigma}{}_{\mu\rho_j}\, T^{\nu_1\cdots\nu_k}{}_{\rho_1\cdots\sigma\cdots\rho_l}, \tag{32}$$

其中联络差 $C^\rho{}_{\mu\nu}$ 为

$$C^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\tilde{g}^{\rho\sigma}\left(\nabla_\mu \tilde{g}_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \tilde{g}_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu}\right). \tag{33}$$

所有不带波浪号的量均指背景度规。这些关系使我们能够用 $h_{\mu\nu}$ 和 δR表示扰动曲率张量和扰动迹方程。

对.....求变分的 真空迹方程（8），并保留微扰的一阶项，可得

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\left[\Box f'(R) + \frac{1}{3}Rf'(R) - \frac{2}{3}f(R)\right] \\ &= \left[\Box f''(R) + f''(R)\Box - \frac{1}{3}\left(f'(R) - Rf''(R)\right)\right]\delta R \\ &\quad - \left[h^{\mu\rho}\nabla_\mu + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\left(\nabla_\mu h_{\nu\sigma} + \nabla_\nu h_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma h_{\mu\nu}\right)\right]\left(f''(R)\,\partial_\rho R\right), \end{aligned} \tag{34}$$

这里我们使用了（31）和（32）。方程（34对一般背景均成立。

F或者，对于本文关注的德西特背景，里奇标量为常数 t,

$$R = R_d = \text{const}, \tag{35}$$

因此 $\nabla_\mu R = 0$和 $f\prime(R_d)$、 $f''(R_d)$均为常数。在这种情况下，(34) 的第二行消失，$\Box f''(R_d) = 0$，于是得到简化的标量微扰方程

$$\left[\Box - \frac{1}{3}\left(\frac{f'(R_d)}{f''(R_d)} - R_d\right)\right]\delta R = 0, \tag{36}$$

或者，等价地，

$$\left(\Box - m_\psi^2\right)\delta R = 0, \tag{37}$$

with

$$m_\psi^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{f'(R_d)}{f''(R_d)} - R_d\right]. \tag{38}$$

这里m_ψ 是德西特背景下与曲率扰动相关的标量传播模的有效质量 δR 。方程（37）是关于 δR 的克莱因–戈尔登方程，描述了除广义相对论中通常的张量模之外，有质量标量模的传播。在后续章节中，我们将把 δR 与规范不变的巴丁组合联系起来，并将相应的有质量标量传播模记为 ψ。

m_ψ**的宇宙学解释**。质量尺度 m_ψ^{-1}决定了标量介导相互作用的作用范围，以及德西特背景下引力波标量偏振的特征色散。在满足 $k \gg am_\psi$的亚视界尺度上，标量模表现为有效无质量，并且原则上可能产生额外的极化特征。在 $k \ll am_\psi$ 尺度上，该模受到强烈抑制，这与局域引力约束一致。对于修正的 Starobinsky 模型（28），在高曲率区间可得 $m_\psi^2 \approx 1/（6\alpha）$，这将质量尺度与早期暴胀动力学以及宇宙学中引力波传播的晚期修正联系起来。

度规扰动分解为标量、矢量和张量 Bardeen 变量的详细过程，以及相应偏振模的识别，将在后续章节中展开。

3 里奇张量 $\delta R_{\mu\nu}$ 的微扰与$f(R)$ 引力中的标量动力学

$f(R)$ 引力中的宇宙学扰动演化会影响宇宙的膨胀历史，以及引力波在不同宇宙学时期[26]的传播。为了理解引力场如何响应背景度规的微小偏离——无论是宇宙学 FRW 背景、黑洞时空，还是如本文所研究的德西特背景——都必须计算曲率量的微扰。由于里奇张量直接出现在场方程中，其微扰代表时空曲率的首阶修正，对于识别 $f(R)$ 理论中存在的有质量标量传播模至关重要。

此外， $f(R)$ 引力中的规范变换因存在 R的高阶导数而变得复杂。因此，要获得完全规范不变的微扰描述，就需要确定标量曲率扰动 δR 如何通过 $\delta R_{\mu\nu}$与度规扰动 $h_{\mu\nu}$ 相互作用。这是后续章节构造规范不变的Bardeen势的关键中间步骤。

为得到微扰场方程，我们将度规展开为 $g_{\mu\nu} = g^d_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$，并将 $f(R)$ 场方程（6）中的每一项线性化。利用 $\delta f = f'(R_d)\delta R$和 $\delta f\prime = f''(R_d)\delta R$，并注意到 R_d为常数，必须谨慎处理协变导数项（如 $\nabla_\mu\nabla_\nu f\prime(R)$）的变分。一般而言，

$$\delta(\nabla_\mu\nabla_\nu f') = \nabla_\mu\nabla_\nu\delta f' - (\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu})\,\nabla_\lambda f'. \tag{39}$$

然而，在常曲率德西特背景下，有

$$\nabla_\lambda f'(R_d) = 0, \tag{40}$$

s因此，联络变分项恒等于零。由此，在一阶下 r

$$\delta(\nabla_\mu\nabla_\nu f') = \nabla_\mu\nabla_\nu\delta f'. \tag{41}$$

考虑到这一简化后，$(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f\prime$的变分给出算符 $(g^d_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\delta f\prime$。

使用德西特背景（6）对真空场方程（$R = R_d$ =const）进行微扰，可得到线性化方程

$$f'(R_d)\,\delta R_{\mu\nu} + R^d_{\mu\nu}\,\delta f'(R_d) - \frac{1}{2}\left[g^d_{\mu\nu}\,\delta f(R_d) + h_{\mu\nu}\,f(R_d)\right] + \left(g^d_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)\delta f'(R_d) = 0, \tag{42}$$

其中， $g^d_{\mu\nu}$ 是背景 de Sitter 度规。

为得到（42），我们将度规分解为

$$g_{\mu\nu} = g^d_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{43}$$

其中， $h_{\mu\nu}$ 上的指标使用 $g^d_{\mu\nu}$升降。由于德西特空间是度规 $f(R)$引力的一个常曲率解，背景满足

$$\nabla_\mu f'(R_d) = 0, \tag{44}$$

这直接由 R_d为常数得出。该条件反映了这样一个事实： $f'(R_d)$是由所选 $f(R)$模型确定的非零常数，并代表背景上的有效引力耦合。

在常曲率真空背景上计算未扰动迹方程（8），得到代数德西特条件

$$R_d f'(R_d) = 2f(R_d), \tag{45}$$

它确定了 R_d 理论 $f(R)$ 所允许的背景曲率。将（45）代入背景场方程（6），并利用 $R = R_d$ 和 $T_{\mu\nu} = 0$，得到

$$R^d_{\mu\nu} f'(R_d) - \frac{1}{2} g^d_{\mu\nu} f(R_d) = 0, \tag{46}$$

这意味着

$$R^d_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{f(R_d)}{f'(R_d)}\, g^d_{\mu\nu}. \tag{47}$$

再次使用（45）可得

$$R^d_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R_d\, g^d_{\mu\nu}, \tag{48}$$

这表明背景是一个爱因斯坦空间，而且实际上具有最大对称性。

对于空间平直 FLRW 时空，里奇标量为 $R = 6(2H^2 + \dot{H})$。在德西特空间中$\dot{H} = 0$，因此 $R_d = 12H_d^2$ 且$H_d = \sqrt{R_d/12}$。

德西特宇宙经历指数膨胀，

$$a(t) \propto e^{H_d t}, \qquad H_d = \sqrt{R_d/12}, \tag{49}$$

这个常曲率解将作为我们进行微扰分析的背景。

将（42）除以 $f_\prime(R_d)$，并代入 $\delta f = f'_d \delta R$和 $\delta f_\prime = f''_d \delta R$，可得

$$\delta R_{\mu\nu} + \Big(\frac{f''_d}{f'_d} R^d_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^d_{\mu\nu}\Big)\delta R - \frac{1}{2}\frac{f_d}{f'_d} h_{\mu\nu} + \frac{f''_d}{f'_d}(g^d_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)\delta R = 0. \tag{50}$$

在这一阶段，有必要说明代数项的最终处理方式 $-\frac{1}{2}\frac{f_d}{f'_d} h_{\mu\nu}$，该项出现在方程（50）中。在常曲率德西特背景下，迹条件（45）意味着

$$\frac{f_d}{f'_d} = \frac{R_d}{2}, \tag{51}$$

因此，该贡献可写为 $-(R_d/4)\ h_{\mu\nu}$。该项与背景曲率尺度成正比，且不含导数。对于波长为 $\lambda \ll H_d^{-1}$ 的引力波，

在与探测器尺度传播相关的局部惯性（短波长）极限下，这类曲率抑制代数项不会对动力学波动方程产生贡献。因此，可以一致地将其忽略，或等价地将其吸收到背景德西特曲率中。在此理解下，线性化场方程可化为式（54）。

为求得（50），我们回顾一般的线性化里奇张量 [25, 27]

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\big(-\Box h_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu h + \nabla^\rho\nabla_\mu h_{\rho\nu} + \nabla^\rho\nabla_\nu h_{\rho\mu}\big) + \mathcal{O}(h^2), \tag{52}$$

其中 $h \equiv h^\rho{}_\rho$。

对于探测器尺度上的引力波传播，扰动的波长远小于德西特曲率半径 H_d^{-1}。因此，可以在背景的局部惯性系中进行研究，在该参考系中

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}, \qquad R_{\mu\nu} \approx 0, \tag{53}$$

同时仍保留非零常数 f'_d 和 f''_d。在此极限下，与曲率相关的代数项（其大小正比于 $h_{\mu\nu}$）不会对高频引力波的动力学传播产生影响。

在此近似下，（50）化简为

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\,\delta R + \frac{f''_d}{f'_d}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\delta R = 0. \tag{54}$$

线性化标量曲率为

$$\delta R \equiv R[h], \tag{55}$$

而线性化爱因斯坦张量化简为

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\,\delta R[h]. \tag{56}$$

将（55）和（56）代入（54），得到微扰场方程

$$\delta G_{\mu\nu} + \frac{1}{3m_\psi^2}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\,\delta R = 0, \tag{57}$$

其中，有效标量质量 m_ψ 源自线性化场方程的迹，其表达式为

$$m_\psi^2 = \frac{1}{3}\Big(\frac{f'_d}{f''_d} - R_d\Big). \tag{58}$$

在闵可夫斯基极限（$R_d \to 0$）下，这化简为

$$m_\psi^2 = \frac{1}{3}\frac{f'_d}{f''_d}. \tag{59}$$

确定有效标量质量 m_ψ^2 后，通过对规范不变量进行傅里叶（平面波）分解，其物理意义便一目了然。在常曲率背景下，线性扰动可采用如下形式 $X(t,\ \mathbf{x}) = X_k e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$，该形式将空间拉普拉斯算子对角化。将其代入克莱因–戈尔登型方程 $(\Box - m_\psi^2)\,\delta R = 0$，可得到色散关系 $\omega^2 = k^2 + m_\psi^2$。因此，与仍保持无质量的横向张量偏振不同，额外的标量模以有质量模的形式传播。这种平面波形式阐明了度规 $f(R)$ 引力中额外标量偏振的产生机制。

这些表达式表明，标量曲率扰动 δR 在德西特背景上以有质量标量场的形式传播。质量 m_ψ 决定标量引力波模的作用范围和色散特性，并明确取决于背景曲率 R_d。由于 R_d会随宇宙学时期而变化，标量模的行为蕴含着有关宇宙膨胀机制的信息，并有望呈现标准张量模之外的观测特征。

4 3+1 分解以及$f(R)$ 引力中的标量、矢量、张量模

本节采用标准的标量-矢量-张量（SVT）分解，分析度规的标量、矢量和张量扰动。正如第 2 节所述，在天体物理尺度上探测到的引力波传播于曲率半径远大于其波长的时空中。因此，为了进行 3+1 分解，我们在德西特背景的局部闵可夫斯基极限下开展分析，

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}, \tag{60}$$

同时保留背景常量 f'_d、 f''_d，以及有质量标量传播模的质量 m_ψ。本节始终采用度规号差 ($+---$)。对于标量扇区，我们采用纵向（牛顿）规范，此时度规扰动由规范不变的Bardeen势 Φ 和 Ψ 表示。

4.1 标量模

纵向规范下线性化爱因斯坦张量的 00 分量为

$$\delta G_{00} = -2\nabla^2\Phi. \tag{61}$$

The 00 扰动后的 $f(R)$ 场方程（57）因此可写为

$$\delta G_{00} - \frac{1}{3m_\psi^2}\nabla^2\delta R = 0. \tag{62}$$

将（61）代入（62）得到

$$-2\nabla^2\Phi - \frac{1}{3m_\psi^2}\nabla^2\delta R = 0, \tag{63}$$

因此

$$2\Phi + \frac{\delta R}{3m_\psi^2} = 0, \tag{64}$$

因此

$$\Phi = -\frac{\delta R}{6m_\psi^2}. \tag{65}$$

无迹空间分量（$i \neq j$）给出各向异性约束

$$\Phi - \Psi = \Pi, \tag{66}$$

其中， Π 表示（规范不变的）各向异性应力。在真空中， $\Pi = 0$，两个巴丁势相等，

$$\Phi = \Psi = -\frac{\delta R}{6m_\psi^2}. \tag{67}$$

因此，即使不存在物质各向异性应力，曲率扰动 δR 也会直接产生标量Bardeen势，从而形成 $f(R)$ 引力理论所预言的有质量标量（呼吸/纵向）引力波偏振。在宇宙学背景下，这一关系将额外的引力波偏振与宇宙学扰动的标量扇区以及德西特背景上的标量质量 m_ψ 联系起来。

值得注意的是，本地 $3{+}1$ 分析中使用的表达式 $\Phi = \Psi = -\delta R/(6m_\psi^2)$和质量参数 m_ψ^2，对应于德西特背景的短波长、局部闵可夫斯基极限。在这一条件下，曲率半径 H^{-1} 远大于引力波波长，与背景曲率 R_d 成正比的项可以忽略。因此，标量质量可化为 $m_\psi^2 \simeq \frac{1}{3} f'_d/f''_d = 1/(6\alpha)$。然而，在完整的全局de Sitter处理中，有效质量包含额外的曲率贡献，其形式为 $m_\psi^2 = \frac{1}{3}(f'(R_d)/f''(R_d) - R_d)$。因此，本文所采用的局部真空 $3{+}1$ 分解能够准确描述在局部惯性系中测得的引力波传播物理，而全局德西特质量则控制标量模在长波长下的宇宙学演化。

4.2 矢量模

矢量扰动以无散矢量的形式出现在度规的 $0i$ 分量中。规范不变量组合为 [28, 29]

$$V_i \equiv S_i - F_i', \qquad \partial^i V_i = 0, \tag{68}$$

其中， S_i 出现在 g_{0i} 分量中，而 F_i 为空间度规的矢量部分 .

在矢量扇区中，所有标量扰动都为零，因此特别有

$$\delta R = 0. \tag{69}$$

线性化里奇张量简化为 [3, 4]

$$\delta R_{0i} = -\frac{1}{2}\nabla^2 V_i. \tag{70}$$

真空中的微扰场方程意味着

$$\delta G_{0i} = \delta R_{0i} = 0, \tag{71}$$

因此

$$\nabla^2 V_i = 0. \tag{72}$$

在局域边界条件下，这给出 $V_i = 0$。与广义相对论一样，在真空度规 $f(R)$ 引力中，没有矢量模传播。

4.3 张量模

现在我们来考察横向无迹（TT）张量扰动 h_{ij}^{TT}。扰动后的度规 $f(R)$ 场方程的空间分量形式如下：

$$\delta G_{ij} + \frac{1}{3m_\psi^2}(\delta_{ij}\Box - \partial_i\partial_j)\,\delta R = 0. \tag{73}$$

扰动里奇张量的标量-矢量-张量分解为 [3, 4, 28, 30]

$$\delta R_{ij} = -\partial_i\partial_j(\Phi + \Psi) - \delta_{ij}(-\ddot{\Phi} + \nabla^2\Phi) - \frac{1}{2}(\partial_i\dot{V}_j + \partial_j\dot{V}_i) - \frac{1}{2}\Box h_{ij}^{TT}. \tag{74}$$

在纯张量扇区中，

$$\Phi = \Psi = 0, \qquad V_i = 0, \qquad \delta R = 0.$$

方程（74）化为

$$\delta R_{ij} = -\frac{1}{2}\Box h_{ij}^{TT}. \tag{75}$$

项 $(\delta_{ij}\Box - \partial_i\partial_j)\,\delta R$ 在（73）中没有 TT 投影，因此消失。代入（73）得到

$$\Box h_{ij}^{TT} = 0. \tag{76}$$

因此，度规 $f(R)$ 引力中的张量模传播方式与广义相对论完全相同：它们满足标准波动方程，以光速传播，并且仅具有两种横向无迹偏振态。因此，引力波传播中所有偏离广义相对论的效应都 exclusively 源自有质量标量传播模。

5 分析一种特定的 $f(R)$ 模型

现在，我们将第2 节和第3 节的一般讨论具体应用于一种具体且广受研究的模型。最简单且最成功的选择之一是 Starobinsky 模型

$$f(R) = R + \alpha R^2 + O(R^3), \tag{77}$$

它通过纯几何机制实现早期宇宙暴胀，并通过高曲率项 [5, 24]引入额外的标量自由度。在这一框架中，暴胀由 R^2 修正本身驱动，而非由独立的暴胀场驱动；参数 α 设定了特征性的暴胀尺度，并控制原初涨落的幅度 [31, 32]。

对于截断模型（77），$f(R)$ 的一阶和二阶导数为

$$f'(R) \approx 1 + 2\alpha R, \tag{78}$$

$$f''(R) \approx 2\alpha. \tag{79}$$

真空场方程（6）的形式为

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) = 0, \tag{80}$$

及其对应的迹方程

$$3\Box f'(R) + Rf'(R) - 2f(R) = 0. \tag{81}$$

5.1 常曲率背景与修正的 Starobinsky 模型的必要性

现在我们寻求具有恒定曲率的真空解，其特征由

$$g_{\mu\nu} = g^d_{\mu\nu}, \qquad R = R_d = \text{const}, \qquad \nabla_\mu R_d = 0. \tag{82}$$

对于此类背景，有

$$\Box f'(R_d) = 0, \tag{83}$$

且迹方程（81）化简为代数条件

$$R_d f'(R_d) - 2f(R_d) = 0. \tag{84}$$

将 Starobinsky 形式（77）代入（84）可得唯一解

$$R_d = 0. \tag{85}$$

因此，在纯 Starobinsky 模型（77）中，闵可夫斯基时空是唯一的恒定曲率真空解。特别是，不存在满足 $R_d > 0$ 的非平凡德西特背景，因而无法描述呈指数膨胀的晚期宇宙。

从宇宙学角度看，这一局限性促使我们扩展模型，将真空能贡献纳入其中。因此，我们采用修正的 Starobinsky 模型

$$f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda, \tag{86}$$

它为暴胀 $R+\alpha R^2$ 部分补充了宇宙学常数项。在该模型中，二次曲率项主导早期暴胀[5], ，而常数贡献 -2Λ驱动晚期加速膨胀 [7, 33]。

对于修正后的模型，常曲率条件（84）给出

$$R_d = 4\Lambda. \tag{87}$$

该解定义了一个德西特背景，我们将在其上对场方程进行线性化。正如第 3 节所示，这种类型的常R_d背景满足

$$R_{\mu\nu}\big|_{R_d} = \frac{1}{4} R_d \, g_{\mu\nu}, \tag{88}$$

因此，时空是一个爱因斯坦空间，其特征为 $R_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$。这种几何概念应与第 *2.1* 节讨论的爱因斯坦框架区分开来；爱因斯坦框架由约旦框架经共形变换得到。

因此，从宇宙学视角来看，修正的 Starobinsky 模型为背景动力学提供了统一描述：在高曲率下， αR^2 项驱动暴胀；在低曲率下， -2Λ 项则产生曲率为 $R_d = 4\Lambda$ 的晚期德西特阶段。这一德西特解构成了以下各节所述微扰和引力波分析的背景。

5.2 德西特点附近的爱因斯坦框架势与稳定性

在第 2.1 节中，我们回顾了度规 $f(R)$ 引力的标量-张量（爱因斯坦框架）表示。对于修正的 Starobinsky 模型

$$f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda, \tag{89}$$

爱因斯坦框架标量势为

$$V(\phi) = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2} \frac{\alpha R^2 + 2\Lambda}{(1+2\alpha R)^2}, \tag{90}$$

wh这里，标量场 ϕ 通过共形关系与曲率相关联

$$f'(R) = 1 + 2\alpha R = \exp\left(-\frac{2\beta\phi}{M_{\rm Pl}}\right), \tag{91}$$

其中 β 定义见第 2.1 节。方程（91）隐式定义了 $R = R(\phi)$。

链式法则与曲率导数。利用（91）， R 对 ϕ 的导数为

$$\frac{dR}{d\phi} = -\frac{2\beta}{M_{\rm Pl}} \frac{f'(R)}{f''(R)} = -\frac{\beta}{\alpha M_{\rm Pl}} (1 + 2\alpha R), \tag{92}$$

其中我们使用了 $f''(R) = 2\alpha$。 $V(\phi)$ 的所有导数均可通过反复应用链式法则 $d/d\phi = (dR/d\phi)\, d/dR$. 得到

一阶导数。对90）关于 R 求导，得到

$$\frac{dV}{dR} = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2} \frac{(1+2\alpha R)(R - 4\Lambda)}{(1+2\alpha R)^3}. \tag{93}$$

利用（92），势的一阶导数为

$$V'(\phi) = -\frac{\beta M_{\rm Pl}}{2\alpha} \frac{R - 4\Lambda}{(1+2\alpha R)}. \tag{94}$$

$V'(\phi) = 0$ 恰好在

$$R = R_d = 4\Lambda, \tag{95}$$

对应于德西特背景。

二阶导数。再次应用链式法则可得

$$V''(\phi) = \frac{\beta^2}{\alpha} \frac{1 - 2\alpha R + 16\alpha\Lambda}{(1+2\alpha R)^2}. \tag{96}$$

在德西特点处对此求值，得到

$$V''(\phi_d) = \frac{\beta^2}{\alpha(1+8\alpha\Lambda)} > 0 \qquad (\alpha > 0), \tag{97}$$

表明德西特构型对应于爱因斯坦框架势的局部极小值，因此在线性意义下是稳定的。

T三阶导数。 为完整起见，势的三阶导数为

$$V'''(\phi) = \frac{2\beta^3}{\alpha M_{\rm Pl}} \frac{32\alpha\Lambda - 2\alpha R + 3}{(1+2\alpha R)^2}, \tag{98}$$

该量非零，并控制德西特极小值附近标量模的主导自相互作用。式（98）与在爱因斯坦框架中通过直接求导得到的显式表达式完全一致。

稳定性解释。这些条件

$$V'(\phi_d) = 0, \qquad V''(\phi_d) > 0 \tag{99}$$

表明，在度规$f(R)$ 引力中，修正的 Starobinsky 模型存在稳定的德西特真空解。相应的标量自由度具有正的质量平方，这与第 3 节的微扰分析一致。

第 2.1 节讨论的完整变色龙机制要求通过共形因子 $A(\phi)$ 纳入物质耦合，并分析有效势 $V_{\rm eff}(\phi) = V(\phi) + \rho A(\phi)$ 对密度的依赖。对于当前讨论，只需指出，由修正的 Starobinsky 模型导出的真空爱因斯坦框架势 $V(\phi)$ 在度规 $f(R)$ 引力中存在稳定的德西特极小值。由此产生的密度依赖的标量质量和屏蔽行为，均由第 2.1 节已引入的同一爱因斯坦框架结构所决定。

5.3 迹扰动与标量质量

现在，我们重新考察约旦框架中的迹方程，以求得特定 $f(R)$ 模型中有质量标量传播模的显式质量，并确认其与第3节所得的一般结果一致。我们将曲率标量分解为

$$R = R_d + \delta R, \tag{100}$$

其中， R_d 是常曲率德西特背景。

真空场方程的迹为，

$$3\Box f'(R) + Rf'(R) - 2f(R) = 0, \tag{101}$$

可在德西特背景附近线性化。利用 $\delta f\prime = f''(R_d)\ \delta R$和 $\delta f = f'(R_d)\ \delta R$，并保留 δR的一阶项，迹方程可化为关于标量曲率扰动的克莱因–戈尔登方程，

$$\Box\,\delta R - \frac{1}{3}\left(\frac{f'(R_d)}{f''(R_d)} - R_d\right)\delta R = 0. \tag{102}$$

这种形式 明确表明， δR 以有质量标量场的形式传播，其有效质量为

$$m_\psi^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{f'(R_d)}{f''(R_d)} - R_d\right), \tag{103}$$

这与此前从线性化场方程推导出的通式一致。

现在我们将讨论范围限定在修正的 Starobinsky 模型，

$$f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda. \tag{104}$$

对于这一选择，可得

$$f'(R_d) = 1 + 2\alpha R_d, \qquad f''(R_d) = 2\alpha. \tag{105}$$

将这些表达式代入方程（102）可得

$$\left(\Box - \frac{1}{6\alpha}\right)\delta R = 0, \tag{106}$$

因此，　标量曲率扰动满足一个质量为.....的克莱因–戈尔登方程

$$m_\psi^2 = \frac{1}{6\alpha}, \tag{107}$$

，且与背景曲率 R_d 无关。

对于修正的 Starobinsky 模型，德西特背景曲率由宇宙学常数确定：

$$R_d = 4\Lambda, \tag{108}$$

而附加标量自由度的质量完全由二次耦合 α 控制，

$$m_\psi^{-1} = \sqrt{6\alpha}. \tag{109}$$

从宇宙学视角来看，α 决定了引力波标量极化的范围和色散尺度，而 Λ 则确定了渐近德西特曲率。这种明确的角色分工对于我们讨论标量模的传播及其在德西特宇宙学中的潜在观测特征十分重要。

6 度规$f(R)$ 引力中的扰动里奇张量的标量-矢量-张量分解

本节将重新讨论存在物质源时的 $(3+1)$ 分解。我们不再从真空扰动场方程（57）出发，而是考虑近似闵可夫斯基背景下修正的 Starobinsky 模型的线性化场方程，其中包括应力-能量张量 $T_{\mu\nu}$:

$$\delta G_{\mu\nu} + 2\alpha(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\delta R = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{110}$$

其中，$\alpha > 0$ 是 R^2 耦合，δR 是标量曲率扰动，$\eta_{\mu\nu}$ 是背景闵可夫斯基度规。利用关系式

$$m_\psi^2 = \frac{1}{6\alpha}, \tag{111}$$

与 α成正比的项也可以写成（$1/3m_\psi^2$）（$\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu$）$\delta R$，这与真空分析一致。

真空中额外的有质量标量模的克莱因–戈尔登方程（106）在存在物质时推广为

$$(\Box - m_\psi^2)\,\delta R = m_\psi^2\,\kappa\,T, \tag{112}$$

或等价地

$$\Box\delta R = m_\psi^2(\delta R + \kappa T), \tag{113}$$

其中 $T \equiv \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ 是应力-能量张量的迹。方程（112）表明，δR 表现为一个由迹 T源激发的有质量标量场（有质量标量传播模）；在极限$T \to 0$ 下，我们恢复真空方程。

利用平直背景下爱因斯坦张量的定义，

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\delta R, \tag{114}$$

并消去 $\Box\delta R$ 利用（113），线性化场方程（110）可写为

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\delta R + \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}(\delta R + \kappa T) - 2\alpha\partial_\mu\partial_\nu\delta R = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{115}$$

或者，等价地，

$$\delta R_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{6}\eta_{\mu\nu} + 2\alpha\partial_\mu\partial_\nu\right)\delta R = \kappa\Big[T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T\Big]. \tag{116}$$

方程（115）和（116）是对含物质的 $(3+1)$ 分解的出发点：左边包含通常的里奇张量扰动，并由有质量标量传播模 δR加以修正，而右边则涉及无迹组合 $T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}T/3$。

6.1 度规与物质的不可约标量-矢量-张量分解

根据 [4, 10], 近似闵可夫斯基背景下度规扰动 $h_{\mu\nu}$ 的标量-矢量-张量分解，可得

$$h_{00} = 2\psi, \tag{117}$$
$$h_{0i} = \beta_i + \partial_i\gamma, \tag{118}$$
$$h_{ij} = -2\phi\,\delta_{ij} + \Big(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\Big)\lambda + \frac{1}{2}(\partial_i\epsilon_j + \partial_j\epsilon_i) + h^{TT}_{ij}, \tag{119}$$

其中，我们定义了新量 ψ， β_i， γ， ϕ， ϵ_i， λ， h^{TT}_{ij}，并假设 $h_{\mu\nu} \to 0$，其中 $r \to \infty$。横向无迹条件为

$$\partial^i\beta_i = 0, \tag{120}$$
$$\partial^i\epsilon_i = 0, \tag{121}$$
$$\partial^i h^{TT}_{ij} = 0, \tag{122}$$
$$\delta^{ij}h^{TT}_{ij} = 0. \tag{123}$$

在 [4] 中以及我们此前的巴丁变量研究中，均已说明变量 ψ， β_i， γ， ϕ， ϵ_i， λ， h^{TT}_{ij}如何在由 ξ^a 生成的规范变换下变换，其中 $\xi^a \to 0$，而 $r \to \infty$。此类变换参数化为

$$\xi^a = (\xi^0, \xi^i) = (A, B^i + \partial^i C), \tag{124}$$

与 $\partial_i B^i = 0$。按照 [4], 中的相同步骤，可以得到规范不变标量和矢量组合

$$\Phi \equiv -\phi - \frac{1}{6}\nabla^2\lambda, \tag{125}$$
$$\Psi \equiv -\psi + \dot\gamma - \frac{1}{2}\ddot\lambda, \tag{126}$$
$$V_i \equiv \beta_i - \frac{1}{2}\dot\epsilon_i, \qquad \partial_i V^i = 0. \tag{127}$$

张量扰动 h_{ij}^{TT}已经是规范不变的。

我们可以对场方程右侧的物质应力-能量张量 $T_{\mu\nu}$ 进行类似的标量-矢量-张量分解。我们写作

$$T_{00} = \rho, \tag{128}$$
$$T_{0i} = S_i + \partial_i S, \tag{129}$$
$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + \sigma_{ij} + (\partial_i\sigma_j + \partial_j\sigma_i) + \Big(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\Big)\sigma, \tag{130}$$

其中 ρ、 S、 S_i、 P, σ、 σ_i和σ_{ij} 是新的标量、矢量和张量，它们满足约束 s

$$\partial_i S^i = 0, \tag{131}$$
$$\partial^i\sigma_i = 0, \tag{132}$$
$$\partial^i\sigma_{ij} = 0, \tag{133}$$
$$\delta^{ij}\sigma_{ij} = 0, \tag{134}$$

以及边界条件 $S \to 0$， $\sigma_i \to 0$， $\sigma \to 0$， $\nabla^2\sigma \to 0$，其中 $r \to \infty$（空间无穷远）。各向同性部分中的整体负号 $-P\delta_{ij}$ 在（130）中将根据下面由能量-动量守恒得到的关系显式进行跟踪。

守恒定律

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{135}$$

确定了 ρ、 S、 S_i、 P、 σ、 σ_i 和 σ_{ij}之间的关系。本节始终采用近似闵可夫斯基背景，此时 $\partial^\mu = (-\partial_0$、 $\partial^i)$，因此（135）可写为

$$-\partial_0 T_{0\nu} + \partial^i T_{i\nu} = 0. \tag{136}$$

作为一个有用的特例（也便于后续进行物理解释），我们注意到，静止于闵可夫斯基时空中的理想流体满足

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{bmatrix}, \tag{137}$$

因此 $T_{0i} = 0$ 且 $T_{ij} = -P\delta_{ij}$。与（129）–（130）比较可知，这对应于动量和各向异性应力分量为零（$S_i = 0$、 $S = 0$、 $\sigma_i = 0$、 $\sigma = 0$、 $\sigma_{ij} = 0$），而标量 ρ 和 P 保持不变。特别地，迹为

$$T = \rho - 3P. \tag{138}$$

（ $\nu = 0$ ）的分量给出

$$\dot\rho = \partial^i T_{i0} = \partial^i T_{0i} = \nabla^2 S, \tag{139}$$

这里用到了（129）和约束（131）。对于 $\nu = i$，将进入 $-\partial_0 T_{0i} + \partial^j T_{ji} = 0$ 的两部分分开处理较为方便。首先，对（130）取空间导数，得到

$$\partial^j T_{ji} = -\partial_i P + \frac{2}{3}\nabla^2\partial_i\sigma + \nabla^2\sigma_i + \partial^j\sigma_{ji}, \tag{140}$$

以及约束 式（132）–（133）意味着 $\partial^j\sigma_{ji} = 0$。其次，对式（129）求时间导数，得到 s

$$\partial_0 T_{0i} = \dot S_i + \partial_i\dot S. \tag{141}$$

对 $\nu = i$ 的能量-动量守恒关系将式（140）和式（141）结合起来，得到

$$\partial_i\Big(-P - \dot{S} + \frac{2}{3}\nabla^2\sigma\Big) - \dot{S}_i + \nabla^2\sigma_i = 0, \tag{142}$$

其中我们使用了 $\partial^j\sigma_{ji} = 0$。

对（142）再取一次空间导数，并对 σ_i 和 S_i应用约束，可得

$$\nabla^2\Big[-P - \dot{S} + \frac{2}{3}\nabla^2\sigma\Big] = 0. \tag{143}$$

对 S、 P 和 $\nabla^2\sigma$ 应用空间无穷远处的边界条件（这也保证了分解的唯一性），我们得出

$$-P - \dot{S} + \frac{2}{3}\nabla^2\sigma = 0. \tag{144}$$

将此条件代入（142），得

$$\nabla^2\sigma^i = \dot{S}^i. \tag{145}$$

方程（144）也可改写为

$$\nabla^2\sigma = \frac{3}{2}\dot{S} - \frac{3}{2}P. \tag{146}$$

方程（139）、（145）和（146）构成了所需的微分方程组，用以关联新定义的不可约物质变量 ρ、S_i、 S、 P、 σ、 σ_i和 σ_{ij}。这些结果与 [34],中的方程（23）一致，只是符号记法不同。

6.2 (3+1) 扰动里奇张量的分解

在 $f(R)$ 引力中，场方程通过依赖里奇标量 R 而包含度规的高阶导数。不同于广义相对论，在广义相对论中，爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$ 单独决定动力学， $f(R)$ 理论引入了一个与标量曲率扰动 δR 相关的有质量标量传播模。为了全面理解该标量模如何与度规扰动中通常的标量、矢量和张量分量相互作用，有必要超越标准的度规分解，并分析里奇张量 $\delta R_{\mu\nu}$ 本身的扰动。

通过用规范不变的巴丁变量和标量曲率扰动表示 $\delta R_{\mu\nu}$ ，我们得到一组解耦的微分方程，揭示了每个模在物质存在时的行为。这种分解为 $f(R)$ 引力中的线性化动力学提供了更完整、更清晰的描述，对于确定额外标量模对引力波传播和结构形成所造成的修正尤其有用。

按照[4], 中的方法，在广义相对论中将爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$ 的各分量分解，从而得到一组以Bardeen变量表示的爱因斯坦张量扰动微分方程。对于 $f(R)$引力，我们则将扰动里奇张量 $\delta R_{\mu\nu}$ 的各分量用Bardeen变量表示，从而得到一组新的微分方程。 $\delta R_{\mu\nu}$ 的各分量为

$$\delta R_{00} = \nabla^2\Psi - \frac{3}{2}\ddot{\Phi}, \tag{147}$$

$$\delta R_{0i} = -\frac{1}{2}\nabla^2 V_i - \partial_i\dot{\Phi}, \tag{148}$$

$$\delta R_{ij} = -\partial_{(i}\dot{\epsilon}_{j)} - \partial_i\partial_j\Big(\Phi + \frac{1}{2}\Psi\Big) - \frac{1}{2}\Box h_{ij}^{TT} - \delta_{ij}\big(-\ddot{\Phi} + \nabla^2\Phi\big). \tag{149}$$

用这些Bardeen变量表示时 Φ，Ψ，V_i，形式如方程（116）的场方程可以改写为一组微分方程，每个方程对应于 $\delta R_{\mu\nu}$的一个分量。例如，方程（00 ）的116分量形式为

$$\delta R_{00} - \frac{1}{6m_\psi^2}(m_\psi^2\eta_{00} + 2\partial_0\partial_0)\delta R = \kappa\Big(T_{00} - \frac{1}{3}\eta_{00}T\Big). \tag{150}$$

将 δR_{00} 由式（147给出的表达式代入，并利用 $\eta_{00} = -1$ 和 $T = \rho - 3P$，得到

$$\nabla^2\Psi - \frac{3}{2}\ddot{\Phi} + \frac{1}{6}\delta R - \frac{1}{3m_\psi^2}\ddot{\delta R} = \kappa\Big(\frac{4}{3}\rho - P\Big), \tag{151}$$

由此得到 $\delta R_{\mu\nu}$ 的 00 分量对应的微分方程。

接下来，我们考虑里奇张量扰动的 $0i$ 分量所对应的微分方程。式（116）给出

$$\delta R_{0i} - \frac{1}{6m_\psi^2}(m_\psi^2\eta_{0i} + 2\partial_0\partial_i)\delta R = \kappa\Big(T_{0i} - \frac{1}{3}\eta_{0i}T\Big). \tag{152}$$

将式（148）中 δR_{0i} 的表达式代入式（152），将式（129）中 T_{0i}的表达式代入，并利用 $\eta_{0i} = 0$，得到

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 V_i - \partial_i\dot{\Phi} - \frac{1}{3m_\psi^2}\partial_0\partial_i\delta R = \kappa(S_i + \partial_i S). \tag{153}$$

在空间无穷远处（$r \to \infty$），我们施加 $S \to 0$，因此 $\partial_i S \to 0$，类似地 $\partial_i\Phi \to 0$ 和 $\partial_0\partial_i\delta R \to 0$。在这些条件下，式（153）化简为

$$\nabla^2 V_i = -2\kappa S_i. \tag{154}$$

将式（153）的纵向部分和横向部分分开，并比较 ∂_i 的系数，得到

$$\dot{\Phi} + \frac{1}{3m_\psi^2}\dot{\delta R} = -\kappa S. \tag{155}$$

方程（154）和（155）是基于 $0i$ 分量的微分方程，$\delta R_{\mu\nu}$ 用 Bardeen变量和传播的有质量标量模表示。

最后，我们考虑里奇张量扰动的 ij 分量，即

$$\delta R_{ij} - \frac{1}{6m_\psi^2}(m_\psi^2\eta_{ij} + 2\partial_i\partial_j)\delta R = \kappa\Big(T_{ij} - \frac{1}{3}\eta_{ij}T\Big). \tag{156}$$

将 δR_{ij} 的表达式（130）和 T_{ij} 的方程（156）中的表达式（149）代入，并令各个独立的标量-矢量-张量部分的系数相等，我们得到

$$-\partial_{(i}\dot{\epsilon}_{j)} = \kappa\partial_{(i}\sigma_{j)}, \tag{157}$$

$$-\frac{1}{2}\Box h_{ij}^{TT} = \kappa\sigma_{ij}, \tag{158}$$

$$-\frac{1}{2}\Box\delta_{ij}\Phi - \frac{1}{3}\partial_i\partial_j\delta R = \kappa\Big(-\frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\sigma - \frac{1}{3}\eta_{ij}T\Big). \tag{159}$$

这些方程意味着

$$\dot{V}_i = \kappa\sigma_i, \tag{160}$$

$$\Box h_{ij}^{TT} = -2\kappa\sigma_{ij}, \tag{161}$$

$$\Psi + \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{3m_\psi^2}\delta R = -\kappa\sigma, \tag{162}$$

并利用 $T = \rho - 3P$,

$$\Box\Phi + \frac{1}{3}\delta R = \frac{2}{3}\kappa(\nabla^2\sigma - \rho). \tag{163}$$

方程（160）（163）是对应于 ij 分量的$\delta R_{\mu\nu}$ 微分方程组，以Bardeen变量和物质SVT变量表示。这些结果与 [34], 中推导出的结果一致，仅符号表示不同。

6.3 具有额外标量自由度的SVT方程的宇宙学解释

方程组（151）、（154）、（155）和（160）（163）在将背景从闵可夫斯基时空提升为缓慢变化的FLRW或德西特时空后，便可在宇宙学中得到直接的物理解读。

该 δR_{00} 方程（151）是一个修正的泊松型方程：引力势 Ψ 不仅由能量密度 ρ决定，也受压强 P、势的时间导数Φ以及标量曲率扰动 δR [35, 36]的动力学影响。在广义相对论中，线性阶的相应方程基本上只包含 Ψ 的拉普拉斯算子，且仅由 ρ决定，不包含额外标量自由度的贡献。这一修正导致有效引力耦合随尺度和时间变化，直接影响宇宙结构的增长，并可通过大尺度结构和弱引力透镜巡天加以约束。

该 δR_{0i} 扇区可分解为横向（矢量）部分和纵向（标量）部分。横向部分，即方程（154）与方程（160）共同表明，矢量扰动 V_i 由横向动量密度 S_i 和各向异性应力 σ_i源驱动，与广义相对论中一样。因此， $f(R)$ 引力在线性阶不会引入新的传播矢量模。然而，纵向标量方程（155）包含额外标量自由度 δR的时间导数，从而改变了 Φ 相对于广义相对论的时间演化。引力势的时间依赖性可通过积分 Sachs-Wolfe（ISW）效应，以及宇宙微波背景辐射图与大尺度结构之间的互相关直接探测。

该 δR_{ij} 方程表明，张量扇区，即方程（161），遵循与广义相对论在结构上完全相同的波动方程，但其源项来自各向异性应力。在 $f(R)$ 引力中，背景标量自由度和经过修正的膨胀历史仍可能改变引力波在宇宙学距离上的振幅阻尼和有效传播，从而为利用标准警报器检验引力理论的修正提供额外途径。

最后，扰动场方程的标量扇区为研究修正引力的一种特征性现象学特征提供了直接窗口。在线性宇宙学微扰理论中，标量度规扰动由规范不变的Bardeen势 Φ 和Ψ描述；在不存在物质各向异性应力时，它们在广义相对论中彼此相等。二者的不相等，即$\Phi \neq \Psi$，通常被称为引力滑移，表明引力偏离广义相对论，其原因可能是非理想流体或额外的引力自由度[36, 37]。

在度规 $f(R)$ 引力中， δR_{ij} 方程的标量部分，即方程（162）和（163），表明即使物质各向异性应力为零，引力滑移通常仍会出现（$\sigma = 0$，等价地， $\Pi = 0$）。在这种情况下，两个标量势之差转而由标量曲率扰动 δR源起，这反映了传播标量模的存在。这种 Φ 与 Ψ 之间关系的改变，是 $f(R)$ 模型的稳健特征，可通过联合分析星系聚类、红移空间畸变和弱引力透镜来进行观测约束 [36, 38]。因此，对 $\delta R_{\mu\nu}$ 进行完整的标量-矢量-张量分解，为将该理论的规范不变标量动力学与引力波物理和宇宙学中的可观测效应联系起来，提供了统一框架。

7 通过测地线偏离法确定偏振内容

测地线偏离方程将黎曼曲率张量与相邻测地线的相对加速度联系起来，因此能够直接探测特定引力理论中的引力波偏振 [27, 39]。本节将使用测地线偏离方程，识别我们所研究的特定度规 $f(R)$ 模型中的引力波偏振模，

$$f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda, \tag{164}$$

对于 t 标量曲率扰动 δR 满足有质量克莱因–戈尔登方程

$$(\Box - m_\psi^2)\,\delta R = 0, \qquad m_\psi^2 = \frac{1}{6\alpha}, \tag{165}$$

在德西特背景上。标量扰动 δR 对应于额外标量自由度，它存在于广义相对论通常的张量模之外。

我们首先在德西特背景的局部闵可夫斯基区域内进行研究，这对于尺寸远小于背景曲率半径的干涉仪探测器是合适的。随后我们将展示，当计算完全在德西特 FRW 背景上表述时，会出现相同的偏振结构。

7.1 德西特的局部闵可夫斯基坐标片

一般的测地线偏离方程为

$$\frac{D^2\xi^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu{}_{\alpha\nu\beta}\,\xi^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}, \tag{166}$$

其中， ξ^μ 是相邻测地线之间的分离矢量， τ 是固有时。对于引力波探测器，我们采用弱场、慢运动极限：探测器在所选坐标系中静止，且远离源，因此

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx^\mu}{d\tau} \approx (1,0,0,0), \tag{167}$$

我们可以将固有时与坐标时等同，

$$\tau \simeq t. \tag{168}$$

在此情形下，式（166）中的协变导数可化为普通时间导数，测地线偏离方程的空间分量变为

$$\ddot{\xi}_i = -R_{i0j0}\,\xi^j, \tag{169}$$

其中，点号表示关于 t 的导数。

在线性化引力中，黎曼张量为

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\Big(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}\Big), \tag{170}$$

其中， $h_{\mu\nu}$ 是局部闵可夫斯基背景$\eta_{\mu\nu}$上的度规扰动。我们将 $h_{\mu\nu}$分解为横向无迹张量部分 $h_{\mu\nu}^{TT}$和与标量曲率扰动 δR相关的标量部分。

对于标量模，在一种便于计算且与第4节所用的牛顿（纵向）规范相容的规范下，标量扰动可取为与背景度规成正比：

$$h_{\mu\nu}^{(s)} = C\,\delta R\,\eta_{\mu\nu}, \tag{171}$$

其中 C 是一个整体常数，只会重新缩放振幅，不会影响偏振模式。为简便起见，下面令 $C = 1$ 。

显式地，

$$h_{00}^{(s)} = -\delta R, \tag{172}$$

$$h_{0i}^{(s)} = 0, \tag{173}$$

$$h_{ij}^{(s)} = \delta R\,\delta_{ij}. \tag{174}$$

代入 黎曼张量的表达式，并聚焦于 R_{i0j0}，可得

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2}(\partial_0\partial_0 h_{ij} + \partial_i\partial_j h_{00}) = -\frac{1}{2}\Big(\delta_{ij}\,\ddot{\delta R} - \partial_i\partial_j\delta R\Big). \tag{175}$$

现在考虑一个沿 $+z$ 方向传播的标量波，

$$\delta R = \delta R(t, z). \tag{176}$$

在横向方向 x 和 y上，

$$\partial_x\delta R = \partial_y\delta R = 0, \tag{177}$$

因此

$$R_{x0x0} = R_{y0y0} = -\frac{1}{2}\ddot{\delta R}. \tag{178}$$

沿纵向方向，

$$R_{z0z0} = -\frac{1}{2}\Big(\ddot{\delta R} - \partial_z^2\delta R\Big). \tag{179}$$

在局部闵可夫斯基区域中，对额外的标量模使用有质量克莱因–戈尔登方程，

$$(\Box - m_\psi^2)\,\delta R = 0, \tag{180}$$

这意味着

$$\ddot{\delta R} = \partial_z^2\delta R - m_\psi^2\delta R, \tag{181}$$

我们得到

$$R_{x0x0} = R_{y0y0} = -\frac{1}{2}(\partial_z^2\delta R - m_\psi^2\delta R), \tag{182}$$

$$R_{z0z0} = +\frac{1}{2}m_\psi^2\delta R. \tag{183}$$

对于单色平面波

$$\delta R(t, z) = A\,e^{i(k_z z - \omega t)}, \qquad \omega^2 = k_z^2 + m_\psi^2, \tag{184}$$

潮汐分量变为

$$R_{x0x0} = R_{y0y0} = -\frac{1}{2}\omega^2\,\delta R, \tag{185}$$

$$R_{z0z0} = +\frac{1}{2}m_\psi^2\,\delta R. \tag{186}$$

测地偏离方程

$$\ddot{\xi}_i = -R_{i0j0}\,\xi^j \tag{187}$$

然后得到

$$\ddot{X} = -\frac{1}{2}\omega^2\,\delta R\,X, \tag{188}$$

$$\ddot{Y} = -\frac{1}{2}\omega^2\,\delta R\,Y, \tag{189}$$

$$\ddot{Z} = -\frac{1}{2}m_\psi^2\,\delta R\,Z. \tag{190}$$

这些方程表明，额外标量自由度会同时产生横向呼吸模（沿 X 和 Y 方向）以及纵向模（沿 Z 方向）。这正是有质量标量模预期的偏振内容。

在纯广义相对论中，仅存在横向无迹张量 h_{ij}^{TT}，$\delta R = 0$ 和标量诱导的贡献均为零；只剩下熟悉的 $\oplus$ 和 $\otimes$ 张量模。在度规 $f(R)$ 引力中，非零的 δR 会在广义相对论的张量模之外产生额外的呼吸偏振和纵向偏振。

7.2 德西特弗里德曼–罗伯逊–沃克背景上的测地线偏离

现在，我们简要说明，不显式转到闵可夫斯基坐标片、而是直接在德西特背景上进行计算时，如何得到相同的偏振结构。在空间平直 FRW 坐标中，德西特度规可写为

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,\delta_{ij}dx^i dx^j, \qquad a(t) = e^{H_d t}, \tag{191}$$

在四维时，哈勃参数 $H_d = \sqrt{R_d/12}$ 为常数。

我们在牛顿规范下考虑该背景周围的小扰动。首先将讨论限制在标量扇区，扰动度规的形式为

$$ds^2 = -(1+2\Phi)\,dt^2 + a^2(t)(1-2\Psi)\,\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{192}$$

其中，巴丁势相等 $\Phi = \Psi$ 这一条件适用于度规 $f(R)$ 引力中的德西特背景（第4节），其中

$$\Phi = \Psi = -\frac{\delta R}{6m_\psi^2}. \tag{193}$$

因此，额外的标量自由度直接体现在度规的时间扰动和各向同性空间扰动中。

为了将测地线偏离方程与探测器参考系联系起来，方便的做法是引入一个适配于共动观测者的正交归一标架，

$$e_{\hat{0}}{}^\mu = (1,0,0,0), \tag{194}$$

$$e_{\hat{i}}{}^\mu = \frac{1}{a(t)}\,\delta_i{}^\mu, \tag{195}$$

因此，物理（固有）空间间隔由带帽指标测量。在这个正交归一参考系中，测地线偏离方程的形式为

$$\frac{d^2\xi^{\hat{i}}}{dt^2} = -R^{\hat{i}}{}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}}\,\xi^{\hat{j}}. \tag{196}$$

潮汐张量自然分解为背景德西特项，以及由标量模和张量模诱导的扰动，

$$R^{\hat{i}}{}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}} = R^{\hat{i}}{}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}}\big|_{\rm dS} + \delta R^{\hat{i}}{}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}}. \tag{197}$$

对于空间平直的德西特背景，非零的克里斯托费尔符号为 $\Gamma^0{}_{ij} = a\dot{a}\,\delta_{ij}$和 $\Gamma^i{}_{0j} = H_d\,\delta^i{}_j$，这些符号可直接由 FRW线元得到。由此可得与测地线偏离相关的坐标基黎曼分量：

$$R^i{}_{0j0} = \frac{\ddot{a}}{a}\,\delta^i{}_j. \tag{198}$$

对于精确的德西特膨胀 $a(t) = e^{H_d t}$，有 $\ddot{a}/a = H_d^2$，因此得到

$$R^i{}_{0j0}\big|_{\rm dS} = H_d^2\,\delta^i{}_j. \tag{199}$$

投影到正交归一标架上，$R^{\hat{i}}{}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}} = e^{\hat{i}}{}_k\, e_{\hat{j}}{}^\ell\, R^k{}_{0\ell 0}$，标架中的 $a(t)$ 因子与度规中隐含的因子相消，剩下

$$R^{\hat{i}}{}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}}\big|_{\rm dS} = H_d^2\,\delta^i{}_j. \tag{200}$$

现在我们纳入微扰。恢复标量模和张量模后，微扰FRW度规可写为

$$ds^2 = -(1+2\Phi)\,dt^2 + a^2(t)\Big[(1-2\Psi)\,\delta_{ij} + h^{\rm TT}_{ij}(t,\mathbf{x})\Big]dx^i dx^j, \tag{201}$$

其中 $h^{\rm TT}_{ij}$表示横向无迹张量微扰。引入闵可夫斯基度规$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,\ 1,\ 1,\ 1)$，所有微扰均可归并为单个张量

$$h_{00} = 2\Phi, \qquad h_{0i} = 0, \qquad h_{ij} = 2\Psi\,\delta_{ij} + h^{\rm TT}_{ij}, \tag{202}$$

从而度规呈现共形形式

$$g_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = a^2(t)\,[\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(t,\mathbf{x})]. \tag{203}$$

将黎曼张量展开至一阶，$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R^{(0)}_{\mu\nu\rho\sigma} + \delta R_{\mu\nu\rho\sigma}[h]$，线性化部分仅依赖于 $h_{\mu\nu}$ 的导数。由于共形因子同时乘在背景和扰动上，可得

$$\delta R_{\mu\nu\rho\sigma}[g] = a^2(t)\,\delta R^{(\rm Mink)}_{\mu\nu\rho\sigma}[h]. \tag{204}$$

升高指标并投影到正交归一标架上，得到

$$\delta R^{\hat{i}}{}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}} = \frac{1}{a^2(t)}\,\delta R^{(\rm Mink)}_{i0j0}, \tag{205}$$

其中 $\delta R^{(\rm Mink)}_{i0j0}$ 正是第 7.1 小节中得到的潮汐矩阵。

因此，对于有质量标量传播模，我们可以直接沿用闵可夫斯基结果，但需特别注意整体符号，

$$\delta R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}} = \delta R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}} = -\frac{1}{2a^2}\,\omega^2\,\delta R, \tag{206}$$

$$\delta R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} = +\frac{1}{2a^2}\,m_\psi^2\,\delta R, \tag{207}$$

对于单色模，以及使用克莱因–戈尔登方程（180）处理一般波包时，结论也类似。整体因子 $1/a^2(t)$ 会因宇宙膨胀而使潮汐振幅衰减，但不改变偏振模式。

物理间距的测地偏离方程 $\xi^{\hat{i}}$ 因此为

$$\ddot{\xi}^{\hat{X}} = -\left[H_d^2 + \delta R^{\hat{x}}{}_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}}\right]\xi^{\hat{X}}, \tag{208}$$

$$\ddot{\xi}^{\hat{Y}} = -\left[H_d^2 + \delta R^{\hat{y}}{}_{\hat{0}\hat{y}\hat{0}}\right]\xi^{\hat{Y}}, \tag{209}$$

$$\ddot{\xi}^{\hat{Z}} = -\left[H_d^2 + \delta R^{\hat{z}}{}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}}\right]\xi^{\hat{Z}}. \tag{210}$$

背景项产生各向同性的德西特膨胀，而波引起的部分则再次产生与局部闵可夫斯基分析中相同的横向呼吸和纵向运动模式。因此，宇宙膨胀会改变振幅，但不会改变偏振内容。

7.3 通过 R_{i0j0} 进行偏振分类

上文推导的测地偏离方程明确表明，我们的 $f(R)$ 模型中的额外标量自由度会使测试粒子产生呼吸和纵向运动。为求完整起见，我们现在按照 [1, 40]，回顾一种利用 R_{i0j0} 的分量对偏振模进行分类的更形式化方法。

在时空的局部惯性（闵可夫斯基）区域内，扰动度规可用标量、矢量和张量扰动表示为

$$ds^2 = -(1+2\Phi)\,dt^2 + 2E_i\,dt\,dx^i + \left[(1-2\Psi)\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}\right]dx^i dx^j, \tag{211}$$

其中，Φ 和 Ψ 是标量Bardeen势（在当前语境下，$\Phi = \Psi$），E_i 表示矢量（剪切）微扰，而 h_{ij}^{TT}是横向无迹张量模。对微扰取线性阶后，测地线偏离方程中涉及的黎曼张量分量为

$$R_{i0j0} = \partial_i\partial_j\Psi - \frac{1}{2}\delta_{ij}\,\partial_0^2\Phi - \frac{1}{2}(\partial_0\partial_i E_j + \partial_0\partial_j E_i) - \frac{1}{2}\partial_0^2 h_{ij}^{TT}. \tag{212}$$

六种可能的引力波偏振模可以通过将潮汐张量 R_{i0j0} 写成一个对称的 3×3 矩阵来表示，

$$R_{i0j0} = \begin{bmatrix} P_4 + P_6 & P_5 & P_2 \\ P_5 & -P_4 + P_6 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_1 \end{bmatrix}, \tag{213}$$

其中 P_1，……，P_6 是六个独立的偏振振幅（标量纵向模、两个矢量模、两个张量模和标量呼吸模）。它们对应于图1所示的六种标准偏振模式。[2]

对于沿着 z 方向传播的平面波，将式（212）与矩阵形式进行比较

[2]这张名为“引力波的六种偏振模”的图片转载自 [40],，依据知识共享署名4.0国际许可协议授权（https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/）。

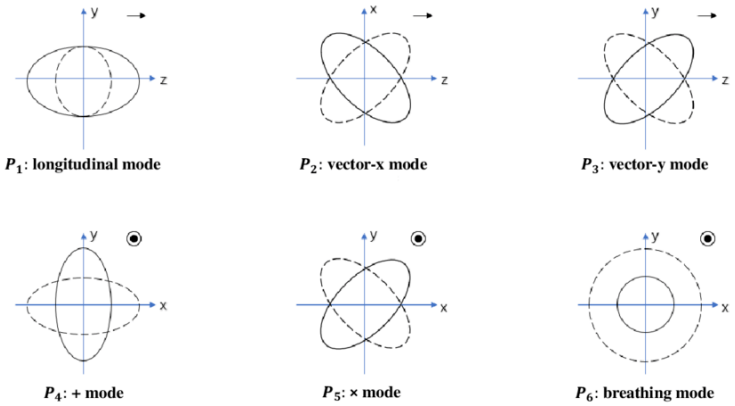


图 1：引力波的六种偏振模。

(213) 得出

$$P_1 = \partial_3\partial_3\Psi - \frac{1}{2}\partial_0\partial_0\Phi, \tag{214}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\partial_0\partial_3 E_1, \tag{215}$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\partial_0\partial_3 E_2, \tag{216}$$

$$P_4 = -\frac{1}{2}\partial_0\partial_0 h_{11}^{TT}, \tag{217}$$

$$P_5 = -\frac{1}{2}\partial_0\partial_0 h_{12}^{TT}, \tag{218}$$

$$P_6 = -\frac{1}{2}\partial_0\partial_0\Phi. \tag{219}$$

其中， E_1 和 E_2 编码矢量（剪切）偏振态， h_{ij}^{TT}表示通常的 $\oplus$ 和 $\otimes$ 张量模，而 Φ， Ψ 则是标量Bardeen势。

在度规 $f(R)$ 引力中，真空下存在一般的矢量扰动 $V_i = 0$ ，因此矢量模不存在，且 $P_2 = P_3 = 0$。张量模 P_4 和 P_5 与广义相对论中的张量模相同，对应于 $\oplus$ 和 $\otimes$ 偏振态。其余标量模由 P_1（纵向模，同时涉及 Φ 和 Ψ）以及 P_6 （呼吸模，仅涉及 Φ）表示。由于在我们的模型中$\Phi = \Psi \neq 0$ ，并且它们与额外的标量自由度相关：

$$\Phi = \Psi = -\frac{\delta R}{6m_\psi^2}, \tag{220}$$

P_1 和 P_6 均不为零，这证实该模型除了两种张量偏振外，还呈现混合的纵向和呼吸标量偏振。

总之，测地线偏离分析——无论是在局部闵可夫斯基区域，还是在完整的德西特背景上——都表明度规 $f(R)$ 模型 $f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda$ 支持：

- 两个无质量张量模（$\oplus$， $\otimes$），与广义相对论中的完全相同；
- 一个有质量标量模（有质量标量传播模），它分解为横向呼吸偏振和沿传播方向的纵向偏振。

这一模式与度规 f（R）引力的一般预期相符，并提供了偏振内容，当前及未来的引力波观测可据此检验这一类模型。

8 结论与未来展望

在本研究中，我们对度规 $f(R)$ 引力中的引力波偏振态进行了统一且完全规范不变的分析，重点考察了修正的 Starobinsky 模型$f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda$. 在常曲率德西特背景下，我们利用Bardeen规范不变量和标量曲率扰动 δR重新表述了线性化场方程，从而明确揭示了有质量标量传播模。通过直接由扰动迹方程推导 δR 的克莱因–戈尔登方程，我们验证了在德西特背景下，标量模表现为质量为 $m_\psi^2 = 1/(6\alpha)$ 的有质量传播场。这表明，标量曲率扰动 δR 是广义相对论中所缺失的额外呼吸和纵向偏振态的来源。

我们通过对扰动里奇张量进行完整的（$3+1$）分解（包括物质源的存在），补充了巴丁变量分析。这一方法明确揭示了标量、矢量和张量扰动如何进入修正的场方程，以及标量扇区如何偏离其广义相对论行为。特别是，该分解表明：（i）矢量扇区仍然是非动力学的，并且与广义相对论中的情况相同；（ii）张量扇区继续满足标准的横向无迹波动方程；（iii）所有修正均通过动力学曲率扰动 δR 编码在标量扇区中。由此得到的关于 Φ、 Ψ 和 δR 的耦合方程，阐明了 $f(R)$ 模型所特有的引力滑移、修正泊松方程以及宇宙学扰动的尺度依赖演化的起源。

在德西特时空的局部闵可夫斯基区域以及完整的协变德西特背景中，均进行了互补的测地线偏离分析。在这两种情况下，潮汐张量R_{i0j0} 都取决于标量曲率扰动 δR ，并呈现出特征性的偏振模式：两种张量模（$\oplus$ 和 $\otimes$）、呼吸模以及纵向模。这与允许至多六种偏振态的度规理论的一般分类相符，并通过两种独立方法验证了度规 $f(R)$ 引力恰好预言三种可观测的偏振扇区：两种张量模和一种有质量标量。

从宇宙学视角来看，有质量标量传播模的质量 m_ψ 决定了高波数下类广义相对论行为与大尺度上修正引力效应之间的转变尺度。由于同一有质量标量传播模控制着晚期背景演化、结构增长率以及引力波的传播，未来结合大尺度结构、弱引力透镜、宇宙微波背景各向异性、脉冲星计时阵列和引力波观测台的多探针观测，将为检验$f(R)$引力在天体物理和宇宙学尺度上的可行性提供一套连贯方案。

未来展望

由本文构建的框架可自然引出若干拓展方向：

- **超越德西特背景：**此处采用的方法可推广到缓慢演化的 FLRW 背景，从而在现实宇宙学中，直接建立引力波传播与有质量标量传播模质量 m_ψ 的时间变化之间的联系。

- **模态混合与引力波传播：**下一步是研究张量扇区与标量扇区之间的模态混合，包括晚期低密度环境中的振幅阻尼和潜在色散效应。

- **即将开展的巡天观测所带来的约束：** 当前及未来的任务（Euclid、LSST、SKA、LISA、脉冲星计时阵列）将显著提升对引力滑移、标量模质量以及宇宙学扰动的尺度依赖增长的约束。本文提出的规范不变形式体系非常适合用于将理论预言与即将获得的数据集联系起来。

•向更广泛的修正引力理论族扩展： 本文发展的技术——扰动里奇张量的分解、有质量标量传播模的分离、完全协变的引力波偏振提取以及测地线偏离分析——可应用于更一般的高曲率理论，例如 $f(G)$ 引力、标量–张量霍恩德斯基理论以及爱因斯坦–膨胀子–高斯–博内模型。

总体而言，规范不变的标量–矢量–张量分析、里奇张量分解与测地线偏离的结合，为识别和解释度规 $f(R)$ 引力中引力波的偏振内容提供了一个稳健框架。这为未来开展观测检验建立了一条一致的路径，从而能够区分广义相对论与其最简单且理论动机最充分的扩展。

附录 A：弯曲时空中的达朗贝尔算子

达朗贝尔 算子作用于弯曲时空中的标量场 φ 时，定义为

$$\Box\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right) = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi. \tag{221}$$

我们考虑用空间平直的弗里德曼–罗伯逊–沃克（FRW）坐标表示的德西特时空：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{222}$$

其中，尺度因子为 $a(t) = e^{Ht}$ ， H 是常数哈勃参数。

度规的行列式为

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -a^6(t), \tag{223}$$

从而

$$\sqrt{-g} = a^3(t). \tag{224}$$

将这些代入 $\Box$ 的定义中，我们得到

$$\Box\varphi = \frac{1}{a^3(t)}\partial_\mu\left[a^3(t)\, g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right] \tag{225}$$

$$= \frac{1}{a^3(t)}\left[\partial_t\left(a^3 g^{tt}\partial_t\varphi\right) + \partial_i\left(a^3 g^{ij}\partial_j\varphi\right)\right]. \tag{226}$$

由于 $g^{tt} = -1$ 和 $g^{ij} = a^{-2}(t)\delta^{ij}$，且 $a(t)$ 仅依赖于 t，因此 $a^3(t)$ 的空间导数为零。于是，

$$\Box\varphi = -\frac{1}{a^3}\partial_t\left(a^3\partial_t\varphi\right) + \frac{1}{a^3}\partial_i\left(a^3 a^{-2}\delta^{ij}\partial_j\varphi\right) \tag{227}$$

$$= -\frac{1}{a^3}\left(a^3\partial_t^2\varphi + 3a^2\dot{a}\partial_t\varphi\right) + \frac{1}{a^2}\nabla^2\varphi \tag{228}$$

$$= -\partial_t^2\varphi - 3\frac{\dot{a}}{a}\,\partial_t\varphi + \frac{1}{a^2}\nabla^2\varphi. \tag{229}$$

对于德西特 时空， $a(t) = e^{Ht}$，因此 $\dot{a}/a = H$。所以，达朗贝尔算子简化为 o

$$\boxed{\Box\varphi = -\partial_t^2\varphi - 3H\,\partial_t\varphi + e^{-2Ht}\,\nabla^2\varphi} \tag{230}$$

其中 $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ 是平直空间拉普拉斯算子。

这是用 FRW 坐标表示的空间平直德西特时空中达朗贝尔算子作用于标量场的标准表达式。

参考文献

[1] Douglas M. Eardley、David L. Lee 和 Alan P. Lightman。将引力波观测作为检验相对论引力的工具。《物理评论*D*》，8：3308–3321，1973。[2] C. Brans 和 R. H. Dicke。马赫原理与一种相对论引力理论。*Phys.Rev.*，124：925–935，1961。[3] Márcio E. S. Alves。利用引力波的规范不变偏振态检验引力：理论与脉冲星计时灵敏度。《物理评论*D*》，109(10)：104054，2024。[4] E.E. Flanagan 和 S.A. Hughes。引力波理论基础。《物理评论*D*》，72：042001，2005。[5] A. A. Starobinsky。一种无奇点的新型各向同性宇宙学模型。*Phys.Lett. B*，91：99–102，1980。[6] Antonio De Felice 和 Shinji Tsujikawa。f(r)理论。《相对论生活评论》，13：3，2010。[7] Thomas P. Sotiriou 和 Valerio Faraoni。f(r)引力理论。*Rev. Mod. Phys.*，82：451–497，2010。[8] Yungui Gong 和 Shaoqi Hou。f(r)引力与标量-张量理论中的引力波偏振态。*EPJ Web of Conferences*，168：01003，2018。[9] Tomohiro Inagaki 和 Masahiko Taniguchi。修正高斯–博内引力中的引力波。*International Journal of Modern Physics D*，29(10)：2050072，2020。[10] Maud Jaccard、Michele Maggiore 和 Ermis Mitsou。线性化 massive 引力中的Bardeen变量与隐藏规范对称性。《物理评论*D*》，87：044017，2013。[11] Pratik Wagle、Alexander Saffer 和 Nicolás Yunes。二次引力中的引力波偏振模。《物理评论*D*》，100：124007，2019。

[12] Maxim Khlopov 和 Sourav Roy Chowdhury。修正引力中的引力波偏振。Symmetry，15(4)，2023。[13] Christopher P. L. Berry 和 Jonathan R. Gair。线性化 $f(r)$ 引力：引力辐射与太阳系检验。Phys. Rev. D，83：104022，2011。[14] Dicong Liang、Yungui Gong、Shaoqi Hou 和 Yunqi Liu。 $f(r)$引力中的引力波偏振态。Phys. Rev. D，95：104034，2017。[15] Kip S. Thorne 和 Sándor J. Kovacs。引力波的产生。一：弱场源。The Astrophysical Journal，200：245–262，1975。[16] A Higuchi。宇宙学事件视界内标量场和矢量场的量子化及其在霍金效应中的应用。Classical and Quantum Gravity，4(3)：721，1987。[17] B. Bonga 和 A. Ashtekar。de Sitter 空间中引力波的合成定律。Class. Quant. Grav.，32：194001，2015。[18] Ramesh Radhakrishnan、Patrick Brown、Jacob Matulevich、Eric Davis、Delaram Mirfendereski 和 Gerald Cleaver。f(r)引力理论中的稳定可穿越虫洞综述。Symmetry，16(8)，2024。[19] V. Mukhanov。《宇宙学物理基础》。剑桥大学出版社，2005。[20] Steven Weinberg。《宇宙学》。牛津大学出版社，2008。[21] Justin Khoury 和 A manda Weltman。变色龙场：等待太空引力检验带来的意外发现。Phys. Rev. Lett.，93：171104，2004。[22] Philippe Brax、Carsten van de Bruck、Anne-Christine Davis 和 Douglas J. Shaw。f(r)引力与变色龙理论。Phys. Rev. D，78：104021，2008。[23] Clare Burrage 和 Jeremy Sakstein。变色龙引力检验。《相对论生活评论》，21：1，2018。[24] A. A. Starobinsky。由初始无奇点德西特宇宙演化而来的微扰谱与微波背景各向异性。Sov. Astron. Lett.，9：302，1983。[25] Robert M. Wald。《广义相对论》。芝加哥大学出版社，1984。[26] M. Chaichian、A. Ghalee 和 J. Klusoň。受限 $f(r)$ 引力中的宇宙学扰动。Phys. Rev. D，95：084009，2017。[27] Sean M. Carroll。《时空与几何：广义相对论导论》。Addison-Wesley，2004。[28] V. F. Mukhanov、H. A. Feldman 和 R. H. Brandenberger。宇宙学微扰理论。Phys. Rept.，215：203–333，1992。[29] Hideo Kodama 和 Misao Sasaki。宇宙学微扰理论。Prog. Theor. Phys. Suppl.，78：1–166，1984。[30] Salvatore Capozziello 和 Mariafelicia De Laurentis。引力扩展理论。Physics Reports，509：167–321，2011。

[31] V. F. Mukhanov 和 G. V. Chibisov。量子涨落与无奇点宇宙。《*JETP*快报》，33:532–535，1981。[32] Laura Iacconi 和 David J. Mulryne。采用有效场论方法，利用大尺度结构对哈勃常数的约束。*J. Cosmol. Astropart. Phys.*，2023:033，2023。[33] Steven Weinberg。宇宙学常数问题。*Rev. Mod. Phys.*，61:1–23，1989。[34] Fabio Moretti、Flavio Bombacigno 和 Giovanni Montani。用于引力波的度规 $f(r)$ 引力规范不变表述。《物理评论*D*》，100:084014，2019。[35] Shinji Tsujikawa。暗能量修正引力模型中的物质密度扰动和有效引力常数。《物理评论*D*》，76(2):023514，2007。[36] Yun-Song Piao。慢膨胀期间的原初扰动。《物理评论*D*》，76:083505，2007。[37] Rachel Bean 和 Matipon Tangmatitham。当前对宇宙增长历史的约束。*Physical Review D*，81(8)，2010。[38] Lei Yang、Wei-Qiang Yang 和 Li-Xin Xu。约束暗物质的状态方程：纳入弱引力透镜*。*Chinese Physics Letters*，32(5):059801，2015。[39] Charles W. Misner、Kip S. Thorne 和 John A. Wheeler。《引力》。W. H. Freeman，1973。[40] Yu-Qi Dong、Yu-Qiang Liu 和 Yu-Xiao Liu。广义 Proca 理论中的引力波偏振模。《物理评论*D*》，109:024014，2024。