arXiv:2601.01029v1 [stat.ML] 3 Jan 2026

超越需求估计：通过累积倾向权重评估消费者剩余

Zeyu Bian* †[1]，Max Biggs‡[2]，Ruijiang Gao§[3]和Zhengling Qi¶[4]

[1]佛罗里达州立大学[2]弗吉
尼亚大学[3]德克萨斯大学达拉斯
分校[4]乔治·华盛顿大学

摘要

本文提出一个实用框架，利用观察性数据审计人工智能驱动的决策对消费者剩余的影响，尤其是定向定价和算法贷款领域。传统方法先估计需求函数，再通过积分计算消费者剩余，但在实践中，这些方法可能难以实施，因为参数化需求形式可能存在模型设定错误，而灵活的非参数方法或机器学习方法又需要大量数据且收敛缓慢。为此，我们利用现代算法定价中固有的随机性——这种随机性源于平衡探索与利用的需要——并提出一种无需明确估计需求函数或进行数值积分的估计量。每个在随机化价格下观察到的购买结果都是需求的无偏估计；通过使用新颖的累积倾向权重（CPW）对购买结果进行精心加权，我们可以在汇总这些结果时重构积分，即需求曲线下方的面积。在此基础上，我们提出一种名为增广累积倾向加权（ACPW）估计量的双重稳健变体，它只要求需求模型或历史定价策略分布二者之一设定正确。此外，该方法还便于使用灵活的机器学习方法估计消费者剩余，因为即使机器学习估计的收敛速率较慢，通过纳入需求估计，它仍能实现快速收敛。这两种估计量都不是离策略评估技术的标准应用，因为目标估计量——消费者剩余——通常无法直接观测。为处理算法公平性问题，我们将该框架扩展至考虑不平等的剩余度量，使监管机构和企业能够量化企业利润与公平性之间的权衡。最后，我们开展了全面的数值研究，以验证所提方法的理论性质。

*按字母顺序排列。
†电子邮箱：zeyu.bian@fsu.edu
‡电子邮件：biggsm@darden.virginia.edu§电子邮件：ruijiang.gao@utdallas.edu
¶电子邮件：qizhengling@email.gwu.edu

1 引言

随着消费者行为数据日益丰富以及复杂人工智能（AI）的发展，企业越来越多地采用自主定向算法策略来为商品定价并提供个性化贷款。例如，许多电子商务公司会根据个人的购买历史、人口统计特征，甚至浏览行为动态调整价格（例如，Hannak 等人（2014）），而金融公司则采用类似的定向算法，为汽车贷款、抵押贷款和信用卡设定利率。事实上，利率设定被广泛认为是一种定向定价形式，近期研究利用汽车贷款数据集实证展示了算法定价策略的有效性（Ban 和 Keskin 2021，Elmachtoub 等人 2023，Miao 等人 2023，Phillips 等人 2015）。尽管这些处方性人工智能技术有望提升市场效率、增加企业收入，并通过个性化服务扩大普惠范围，但人们也担忧它们可能对消费者产生不利影响。

一个主要担忧是，定向算法带来的企业收入增加是以牺牲消费者剩余为代价的，学术文献中的近期模型表明，这种负担可能会不公平地分配（Cohen 等 2022年，Kallus 和 Zhou 2021a）。此外，人们越来越担心边缘化群体可能会受到这些定价实践的不成比例影响，面临更高的价格和更低的剩余。例如，研究发现，在非白人人口比例较高且贫困程度较高的社区，网约车服务收取的费用也更高，这表明由于算法定价策略，这些社区面临着更大幅度的价格上涨（Pandey 和 Caliskan 2021）。这些担忧引起了政策制定者和媒体的广泛关注（Flitter 2023）。例如，一份白宫报告（白宫 2015年）强调了定价中的算法决策制定所带来的风险；美国联邦贸易委员会（FTC）最近通过要求采用个性化定价方案的企业提高透明度，启动了对潜在歧视性定价实践的调查（K&L Gates 2024、Sisco2024），立法者也呼吁审查大型零售商的定价实践（Warren 和 Casey 2024）。尽管相关领域受到广泛关注，但更具针对性的算法定价政策将产生何种影响，目前仍不清楚（白宫 2015年）。

这些发展凸显了对强大审计工具的需求，这类工具能够评估算法定价对消费者剩余及其在顾客之间分配的影响。对于 FTC 等监管机构而言，这类工具有助于确保企业遵守相关法律法规，例如禁止基于性别的定价歧视的《1995年性别税废除法案》（俗称“粉红税”）（立法机构 1995 ），或禁止债权人基于人口统计因素实施歧视的《平等信贷机会法》（ ECOA ）。这类工具还可以帮助政策制定者了解各种算法定价方式的影响，以及哪些人会受到不利影响，从而制定更完善的指导方针和规则。它们也能帮助企业评估现有算法带来的监管风险或声誉风险，并模拟结果，以确保未来合规。此外，这类工具还有助于在短期利润与长期客户关系之间实现更好的平衡，确保所有客户类型的消费者剩余维持在可持续水平。

尽管存在这种需求，现有消费者剩余估计方法的有效性仍面临一些问题。通常，估计技术依赖于先估计需求，再

对需求进行积分以计算剩余（例如，Bhattacharya (2024)），因此剩余估计的准确性高度依赖于需求估计的准确性。这种方法本质上是间接的，即使目标剩余只是一个简单的标量，也需要将需求估计为价格的潜在复杂函数。经典需求模型依赖参数型假设（Dagsvik 和 Karlstr¨om 2005、McFadden1981、Shiller 等（2013）、Small 和 Rosen 1981a），当行为偏离假设形式时，可能会产生偏差（Bhattacharya 2024、Jagabathula 和 Rusmevichientong 2017）。更灵活的非参数方法和机器学习方法（如神经网络（Farrell 等（2020）、2021））放宽了函数形式假设，但通常需要极大的数据集和仔细调优，才能达到可靠的准确性，而且收敛速率通常较慢。鉴于这些不足，探索对准确需求估计依赖较低的消费者剩余估计直接替代方法，并研究如何融入机器学习估计，同时仍实现快速收敛，具有重要意义。

许多成功的现代定价算法有一个关键特征，可用于开发新的剩余估计方法：它们会在一定程度上进行价格实验。在实践中，市场状况、竞争对手行为和消费者偏好会随时间变化，因此，定价算法必须持续探索需求曲线，而不能只利用当前价格，才能维持最优性（Besbes 和 Zeevi，2009年，Rana 和 Oliveira，2014年）。近期的实证研究（Bray 等，2024年）发现，与实验数据相比，使用相对静态的历史定价数据会严重扭曲一家大型连锁超市的价格敏感度估计；而Dub´e 和 Misra (2023年) 则证明，在进行一段时间的价格实验后设定价格，大幅提升了 ZipRecruiter 的盈利能力。这些例子也表明，企业参与实验的意愿有所增强。随着电子商务平台使价格能够持续更新，价格实验也日益普遍。虽然这种内在的随机化主要旨在支持利润最大化，但它也提供了丰富的准实验变异，可用于估计消费者剩余。

利用这类数据并可能避免显式需求估计的一种自然方法，是将因果推断中的逆倾向评分加权（逆倾向加权）加以改造（Beygelz- imer 和 Langford 2009，Rosenbaum 和 Rubin 1983）。然而，仅有准实验数据并不能解决衡量消费者福利这一根本难题。与完全由价格和观测到的购买决策决定的收入不同，消费者剩余取决于顾客的估值，而估值本质上是一个潜在变量。在观察性数据中，我们无法观测到剩余，只能观测到二元购买决策，它只能粗略地表明估值高于价格。由于我们始终无法直接观测真正感兴趣的结果，因此无法直接应用对观测结果进行加权等标准因果推断技术。

受这些挑战的启发，我们提出了新的累积倾向权重（CPW）估计量，它能够直接估计消费者剩余，无需显式建立需求模型。该方法利用了观察性数据中已有的随机性，这种随机性源于许多现代算法定价策略需要在探索与利用之间取得平衡。直观地说，在随机化价格下观测到的每个购买结果，都是对需求的无偏估计。通过根据目标

定价策略为类似顾客提供不高于观测价格的价格的频率，相对于该价格水平在历史上出现的频率，对观测结果进行精心加权；汇总这些加权结果后，我们便能够重构消费者剩余，即需求曲线下的积分或面积。当历史定价策略已知或有充分记录时，该方法易于实施，且完全无需模型。当历史定价策略未知时，则可根据交易数据估计累积权重。

基于累积权重的思路，我们提出了一种采用交叉拟合的双重稳健估计量，即使需求模型或历史定价分布存在误设，也能得出可靠的剩余估计。具体而言，当历史定价策略已知或能够被准确估计时，即使需求模型存在偏差，一致性仍然成立。相反，当需求模型渐近无偏时，即使历史定价模型存在误设，一致性仍然成立。此外，与因果推断中标准的双重稳健估计量类似，我们的估计量在较弱的速率条件下即可达到效率，且无需对需求或累积权重估计施加Donsker条件。这种灵活性使得采用现代机器学习技术和复杂的非参数模型成为可能。我们从理论上证明，所提出的估计量与有效影响函数渐近等价，因此达到了可能的最低渐近方差。最后，我们证明了所提出估计量的渐近正态性，从而能够构造有效的置信区间，帮助政策制定者评估这些估计结果的可靠性。

为应对公平性问题，我们将目标从估计标准消费者剩余扩展为估计考虑不平等的剩余。这一新目标通过一个预先指定的参数，同时体现策略所创造的剩余规模及其在不同客户类型之间的分布。在基准情形下，该参数对应于顾客剩余的标准算术平均值；随着参数减小，处境较差群体的结果将获得越来越大的权重。这种方法基于广义均值聚合，其研究见Bergson(1954年)和 Atkinson等人 (1970年)。为实现这一目标，我们推导了这一新目标的有效影响函数，并调整累积权重方法，以构造一个有效估计量。由于目标函数具有非线性，该估计量不具备完全的双重稳健性。相反，它针对需求模型具有单重稳健性：只要需求模型设定正确，即使累积权重设定错误，一致性仍然成立。与前一种情形相比，这改变了建立渐近性质的理论要求：虽然纳入累积权重仍具有放宽速率条件的优势，即允许采用灵活的机器学习模型，但需求估计需要受到更严格的控制，具体而言，须满足标准的非参数收敛率。尽管如此，我们仍为这一新估计量推导出了有效的渐近性质，并证明它在所有正则估计量中具有最小渐近方差，从而使审计人员能够为总量剩余和对公平性敏感的剩余报告有效的置信区间。

我们的实验验证了所提框架的可靠性和稳健性。对于标准的总剩余，即使需求模型或定价模型存在误设，我们的双重稳健估计量仍能准确恢复真实剩余；当两者均设定正确时，它还能达到最佳收敛速率。我们进一步评估了考虑不平等的剩余，研究其估计误差和置信区间覆盖率。尽管对于这一非线性目标函数，理论上的稳健性转为单重

稳健性，我们的结果表明，该估计量依然十分有效，在不同公平性场景下均能生成准确的点估计和有效的置信区间。

为进一步展示这一框架的优势，我们将其应用于美国汽车贷款的大规模金融数据集。全球汽车市场规模在2025年估计为2.75万亿美元，预计到2030年将达到3.26万亿美元（Mordor Intelligence2025）。汽车市场是影响家庭金融稳定的重要因素，且日益由算法化信贷审核主导。我们比较了历史定价策略与经训练的人工智能定价代理所产生的福利结果。分析揭示了总消费者剩余—公平性权衡：个性化定价降低了消费者剩余总量，同时缩小了不同信用状况和政治群体之间的差距，体现了该框架在审计和监管评估方面的价值。

2 相关工作

2.1 消费者剩余估计

关于离散选择环境中的消费者剩余评估，已有大量研究；在这类环境中，消费者通常从一组备选项中选择一个（例如，Bhattacharya (2015年）、McFadden (1972）、Small and Rosen (1981b）），以及连续需求情境中的消费者剩余评估（例如，Hausman(1981）、Hausman and Newey (1995、2017）、Vartia (1983）），例如汽油购买（Poterba2017）。我们的研究与离散选择模型更为接近，但我们关注的是单一商品情境：在该情境中，我们观测到个体客户特征以及表明其是否购买该商品的二元结果。最初，研究者使用需求参数模型估计剩余（Dagsvik and Karlstr¨om 2005、Herriges and Kling 1999、McFadden 1981），例如广泛使用的logsum公式（SmallandRosen1981b）。这类方法依赖于关于偏好和客户异质性的强假设，例如加性极值误差分布；如果模型设定有误，可能会得出误导性的福利结论。

为克服这类限制性假设，并在更广泛的情形下进行推断，研究者开发了许多用于需求估计的半参数和非参数方法（Berry 和 Haile（2021）、Bhattacharya（2015）、Hausman 和 Newey（1995）、Matzkin（2016））。这些方法通常先采用灵活的非参数回归直接拟合需求函数，再通过积分计算剩余。例如，在连续情形下，Hausman 和 Newey (1995) 使用级数估计量和核估计量拟合需求，并据此求解一个基于 Shephard引理的微分方程。后续研究着重于将未观测消费者异质性纳入这些模型（Hausman 和 Newey（2016）、Lewbel 和 Pendakur（2017））。类似地，在离散选择情形下，Bhattacharya (2015、2018) 针对每种商品估计购买的条件非参数概率（在此情形下即需求），再通过积分估计消费者剩余。近期的机器学习方法采用神经网络，以灵活地估计需求和剩余，并将函数形式假设降至最低（Farrell 等（2020）、2021），也包括离散选择模型（Aouad 和 D´esir2025）。此外，也有研究提出树集成方法（Chen 等（2019）、Chen 和 Mi˘si´c（2022））。关于非参数消费者剩余估计的全面综述可参见Hausman

以及 Newey(2017年) 和 Bhattacharya (2024年)。

这些非参数需求估计方法面临的一个关键权衡是，其收敛速度可能较慢，因此有限样本表现可能不如设定正确的参数模型。无论哪种情况，消费者剩余估计的准确度都取决于需求模型的准确度。相比之下，我们提出的方法完全不需要对需求进行建模，并表明，当需求模型收敛较慢时，我们能够实现更快的收敛。

近期消费者剩余估计的应用案例包括Shiller 等人(2013)，他们使用有序Probit分析 Netflix 数据。 Dub´e 和 Misra (2023年) 采用贝叶斯参数框架，利用 ZipRecruiter 的大规模随机价格实验估计剩余。其他研究则利用价格中的准实验变异。例如，Cohen 等人(2016) 使用回归不连续设计，根据 Uber 动态加价数据估计价格弹性和剩余。

这类文献大多着眼于纳入收入效应，而这并非本文的研究重点。我们关注的是支出仅占消费者总预算较小比例的情形。在这种情况下，收入效应可以忽略不计，马歇尔消费者剩余几乎可以精确近似希克斯补偿变差（Willig1976）。或者，也可以将我们的分析理解为适用于消费者效用准线性的情形。

2.2 因果推断与离策略评估

近期关于定价算法审计的许多研究，都可以从离策略评估（OPE）的视角来理解。OPE 文献最初主要聚焦于逆倾向加权（IPW）框架：每个观测到的结果都按照其处理分配概率（在我们的场景中即价格分配概率）的倒数，也就是倾向得分进行加权；当倾向模型正确时，由此得到的反事实奖励估计是无偏的（Beygelzimer 和 Langford 2009，Rosenbaum 和 Rubin 1983）。另一条互补的研究路线提倡直接法（DM），即用结果模型的拟合值替代缺失的反事实。当该模型设定正确时，DM 的效率可能高于 IPW（Qian 和 Murphy 2011，Shalit 等，2017）。鉴于实际应用中任一组成部分都可能设定错误，双重稳健估计量（Dud´ık 等，2011；Robins 等，1994；Zhou 等，2023）将这两种思路结合起来，只要倾向模型或结果模型中的任一个估计不存在系统性误差，估计量就仍然是一致的。实证证据表明，当至少一个干扰模型具有较高准确度时，双重稳健估计量的均方误差低于单独使用 IPW 或 DM（Dud´ık 等，2014）。双重稳健方法的思想源于缺失数据文献（Robins 等，1994；Tsiatis 2006），如今已广泛应用于因果推断（Bang 和 Robins 2005；Cher-nozhukov 等，2018；Hern´an 和 Robins 2010；Kennedy 2024）以及策略学习与评估（Bian 等，2023；Kallus 和 Uehara 2020；Liao 等，2022；Robins 2004；Shi 等，2018；Wallace 和 Moodie 2015；Zhou 等，2023）。

在管理科学领域，越来越多的研究开始运用离策略学习技术来估计定价场景中的收入。这一研究方向通常以“从预测到决策”的分析学框架为基础（Bertsimas 和 Kallus

2020年），该框架将机器学习预测与优化模型正式结合起来，从观察性数据中推导决策策略。在这一方法论基础上，近期研究为个性化收益管理构建了严谨的统计学习框架（Chen 等，2022、Kallus 和 Zhou，2018），并通过大规模现场实验展示了这些数据驱动定价算法的实际成效（Ferreira 等，2016）。具体而言，研究人员运用离线策略评估技术，处理二元需求的定价场景（Biggs，2022、Biggs 等，2021、Elmachtoub 等人 2023），以及由库存短缺导致的删失需求（Ban，2020、Bu 等，2022、Tang 等，2025）和未观测混杂（Kallus 和 Zhou，2021b、Miao 等人 2023）。与这些研究不同，我们的主要目标是估计消费者剩余，而非收入。这一转变显著改变了估计问题：不同于结果可直接观测的标准离线策略评估场景，消费者剩余取决于无法观测到的消费者估值。在我们的情境中，我们只能观测到二元购买决策这一粗略代理指标，它表明估值是否高于价格，而非估值本身的连续数值。由于真实结果变量是潜在的，传统因果推断技术无法直接应用，因此有必要开发本文所提出的新方法工具。

2.3 文章结构

本文其余部分安排如下。第 3 节形式化定义消费者剩余估计问题。第 4 节介绍累积倾向加权（CPW）估计量，这是一种新方法，利用算法定价中的随机性，无需显式积分需求即可估计剩余。第 5 节提出增广 CPW（ACPW）估计量，并证明其具有双重稳健性。第 6 节将该框架扩展至不平等感知型剩余度量，并引入一个参数，用于权衡总剩余与公平性。第 7 节开展理论分析，证明所提出估计量的渐近正态性与效率。第 8 节通过数值实验验证该方法的稳健性，并展示其在大规模美国汽车贷款数据集上的应用。最后，第 9 节总结管理启示。附录包含所有定理和辅助引理的证明。最后，我们在附录 10 中针对违反重叠假设的情形，进一步讨论部分识别界的扩展。

3 问题表述

考虑一群具有特征 $X \in \mathcal{X}$、估值（即支付意愿）为 $V \in \mathbb{R}^+$，且有意购买某商品至多一件的异质消费者。对于固定价格 p，平均消费者剩余可定义为每位消费者的估值超过其支付价格的部分的平均值，

$$\mathcal{S}(p) = \mathbb{E}\left[(V-p)_+\right],$$

其中 $x_+ = \max(x, 0)$。或者，在贷款场景中，我们可以将 p 视为定期利息支付，并将 V 解释为顾客愿意支付的最高利息，

两者之差为正时即为剩余。请注意，为了比较，我们可能会关注特定感兴趣群体的条件剩余 $\mathcal{S}(p|X) = \mathbb{E}_V[(V-p)_+ \mid X]$，也可能关注总体剩余 $\mathcal{S}(p) = \mathbb{E}_X\mathbb{E}_V[(V-p)_+ \mid X]$，即所有顾客的剩余。为简化符号，我们着重讨论后者；除非另有说明，我们的结果对前者同样成立。我们强调，这一定义与传统的"需求曲线下方面积"消费者剩余计算方法一致（Bhattacharya2024），其中需求曲线定义为购买概率，如第3.1节所述。我们不在模型中纳入收入效应，而是关注支出仅占消费者总预算一小部分的商品。在这种情况下，收入效应可以忽略不计（Willig 1976）。或者，采用另一种表述但得到相同的框架，我们关注具有拟线性效用的顾客。

一般而言，企业有兴趣提供并评估既可定向又具有随机性的定价策略。在此类策略下，向具有特征 X 的消费者提供的价格与定价策略 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta(\mathcal{P})$相关联；该策略表示给定特征 $X \in \mathcal{X}$时，价格空间 $\mathcal{P}$ 上的条件概率质量/密度。随后，定价策略 π 下的平均消费者剩余定义为

$$\mathcal{S}(\pi) = \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{P}} \pi(p \mid X)\,(V-p)_+ \,\mathrm{d}p\right], \tag{1}$$

其中，底层期望是相对于 $(X,\ V)$ 的联合分布取的。如果可以观测到 V，那么可以直接使用样本均值近似公式（1）中的期望，从而估计 $\mathcal{S}(\pi)$。然而在实践中，消费者估值 V 通常无法观测，这给估计带来了挑战。虽然消费者估值V往往无法观测，但通常会记录消费者在所提供价格 $P \in \mathcal{P}$下的二元购买决策 Y。该购买决策取决于其估值是否超过所提供的价格 P:

$$Y = \mathbb{I}(V > P). \tag{2}$$

其中，$\mathbb{I}(\cdot)$ 表示指示函数。这里，$Y = 1$ 表示购买（满足该条件），$Y = 0$ 表示未购买。除了 V 无法观测之外，我们还经常面临分布偏移：我们可能希望评估某一定价策略下的剩余，而该策略不同于生成数据的历史策略。一般而言，我们考虑三个目标：(i) 评估新定价策略（也称为目标策略） π下的消费者剩余；(ii) 根据历史数据评估当前或先前使用的定价策略（也称为行为策略） π_D 下的消费者剩余；以及 (iii) 评估历史策略与新策略之间的剩余变化：

$$\Delta(\pi) = \mathbb{E}\left[\int_{\mathcal{P}} \left(\pi(p \mid X) - \pi_D(p \mid X)\right)(V-p)_+ \,\mathrm{d}p\right], \tag{3}$$

我们注意到，历史定价分布 π_D 可能已知，也可能未知，而 π 始终是已知的。当企业采用算法定价时，历史定价策略通常以数字形式编码，因此是已知的。当其未知时，通常可以

根据数据进行估计。一般而言，评估 (i) 和 (ii) 之间的差异源于未知的 π_D，这可能会给估计带来额外挑战。除非另有说明，在评估 (ii) 时，我们将聚焦于这种情况。因此，离线数据集可以表示为 $(X_i,\ P_i,\ Y_i)_{i=1}^n$，它由在历史定价策略 π_D 下生成的 $(X,\ P,\ Y)$ 的独立同分布样本组成。

接下来，我们介绍在观测数据生成分布下识别平均消费者剩余 $\mathcal{S}(\pi)$ 所需的一些条件。首先，我们给出识别的正式定义。

定义1 (可识别性)。 如果感兴趣参数 θ 在概率模型 $\{\mathcal{P}_\theta :\ \theta \in \Theta\}$中的映射 $\theta \mapsto \mathcal{P}_\theta$ 是单射，即 $\mathcal{P}_{\theta_1} = \mathcal{P}_{\theta_2} \implies \theta_1 = \theta_2$，则称该参数可识别。

在此设定下，要实现识别，我们要求满足以下两个条件：

假设1。 （不可忽略性） $P \perp\!\!\!\perp V|X$。

假设2。 （重叠性）对于所有 $p \in \mathcal{P}$ 和每个 $x \in \mathcal{X}$，价格数据生成分布满足 $\pi_D(p\,|\,x) > 0$。此外，估值 V 的支撑集包含在支撑集 $\mathcal{P}$ 中。要识别 $\Delta(\pi)$，我们只要求 π_D 的支撑集包含 π 的支撑集。

假设1与经典因果假设中的不可忽略性或可交换性类似，例如参见 Hern´an 和 Robins (2010)、Rosenbaum 和 Rubin(1983）。该假设指出，在给定消费者特征 X的条件下，估值分布不受所提供价格的影响，从而便于识别消费者剩余。只要历史定价决策的影响因素均已记录并包含在观测数据中，该假设通常就能满足。值得注意的是，假设1并未对消费者估值模型施加任何参数结构。假设2要求每个可能的价格 $p \in \mathcal{P}$ 在观察性数据中都有正概率被观测到。这意味着先前的定价策略必须包含一定程度的随机化；如前所述，这是定价策略实现并维持最优性所必需的。该条件类似于因果推断中用于识别平均处理效应的正性条件。若不满足这一覆盖假设，则若不依赖强外推假设，就无法非参数识别需求函数，进而也无法识别绝对消费者剩余。不过，我们注意到，在评估两种策略之间的剩余差时，所需条件显著宽松。在此情形下，我们只要求新策略 π提出的价格具有重叠性，而非整个价格空间都满足重叠性。识别绝对剩余需要观测极端价格下的需求（以涵盖总支付意愿），而估计策略差异通常已足以支持决策制定，也符合文献中的标准做法（Bhattacharya 2024）。虽然我们对这两个量都建立了识别和估计结果，但我们承认，实际应用中，估计策略差异更容易实施。

为处理假设2不成立的情形，附录 10 介绍了一种扩展方法，该方法利用需求函数性质（具体而言，单调性和对数凹性）来界定剩余。附录 10.3 中的实验结果证实了这些部分识别界的有效性，并表明与根据购买概率的自然 $[0,\,1]$ 支撑集推导出的朴素界相比，这些界更为紧致。

接下来，我们介绍一种常用的基准方法，用于估计 $\mathcal{S}(\pi)$，并讨论其局限性。不失一般性，我们假设 $\mathcal{P} = [0, \infty)$。

3.1 基准方法：直接法

计算消费者剩余的一种经典方法，是计算需求曲线上某一特定价格以上的面积（例如，Bhattacharya（2015年））。我们证明，在假设1下，对于随机定价策略情形，这种形式等价于我们的消费者剩余定义（1）

$$\mathcal{S}(\pi) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \pi(p \mid X) \int_{z=p}^\infty \mu(X, z) dz dp\right], \tag{4}$$

其中，$\mu(x, z) \equiv \mathbb{E}[Y \mid X = x, P = z] \equiv \mathbb{P}[V > z \mid X = x]$ 是购买概率，在此情形下可视为需求函数。附录1.1中的命题3给出了简要证明，说明两者等价；证明通过仔细调整积分次序得出。虽然推导这一恒等式并不严格要求假设2，但要在积分区间内识别并估计 $\mu(x, z)$，则必须满足该假设。这个方程表明，即使估值 V 不可观测，仍然可以通过先计算需求函数 $\mu(x, z)$在高于 p 的价格范围内的积分，再根据目标策略 π对价格取加权平均，来识别剩余。当我们关注行为策略 π_D下的剩余或剩余差时，该式可简化为

$$\mathcal{S}(\pi_D) = \mathbb{E}_{X,P\sim\pi_D}\left[\int_P^\infty \mu(X, z) dz\right], \quad \Delta(\pi) = \mathcal{S}(\pi) - \mathcal{S}(\pi_D). \tag{5}$$

在实践中，需求函数 $\mu(x, p)$ 通常未知，必须通过对 Y 关于 X 和 P 进行回归来估计，从而得到估计量 $\widehat{\mu}(x, p)$。然后，直接法（DM）使用样本均值近似方程（4）和（5），得到

$$\widehat{\mathcal{S}}_{DM}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_0^\infty \pi(p|X_i) \int_p^\infty \widehat{\mu}(X_i, z) dz dp, \quad \widehat{\mathcal{S}}_{DM}(\pi_D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_{P_i}^\infty \widehat{\mu}(X_i, z) dz, \tag{6}$$

$$\widehat{\Delta}_{DM}(\pi) = \widehat{\mathcal{S}}_{DM}(\pi) - \widehat{\mathcal{S}}_{DM}(\pi_D), \tag{7}$$

其中，$\widehat{\mu}(\cdot, \cdot)$ 是需求函数的估计量。我们注意到，与将 $\widehat{\pi}_D$ 代入 $\widehat{\mathcal{S}}_{DM}(\pi)$ 的朴素方法相比，历史剩余估计量 $\mathcal{S}_{DM}(\pi_D)$ 的优势在于，无需估计历史定价策略分布 $\widehat{\pi}_D$（当其未知时），这凸显了每种估计量在各自任务中的适用性。

如前所述，直接模型估计量的表现关键取决于结果模型的准确性 $\widehat{\mu}(x, p)$，而在实践中，准确估计结果模型可能颇具挑战。传统需求估计量采用固定的参数形式，只要实际购买行为偏离这些假设，就可能得出有偏结果。相比之下，神经网络需求模型（等现代非参数技术（Farrell 等（2020），2021）避免了函数形式设定错误，但通常需要非常大的样本才能达到可靠的准确度，因此在许多观察性场景中的实用性有限。此外，

直接模型依赖于对估计函数进行数值积分。这一步要求底层估计在整个 $\mathcal{P}$ 范围内都具有一致的准确性。最后，数值积分过程本身可能引入偏差并增加计算负担，因为必须针对每个数据点对所有价格进行积分。

DM 估计量的这些局限性促使我们探索其他方法。在下一节中，我们将介绍新提出的用于识别和估计 $\mathcal{S}(\pi)$ 的解决方案。

4 累积倾向权重表示与估计

接下来，我们将介绍一种用于消费者剩余估计的替代方法，该方法避免了估计需求函数和进行数值积分所面临的挑战。该估计量利用了现代算法定价中已有的价格变动，这种变动源于平衡探索与利用的需要。该估计量并非通过对估计得到的需求曲线下方面积进行显式积分来求值，而是将该面积近似为加权购买结果的总和，其中每个结果都是对给定价格下需求的无偏估计。通过对观测值进行恰当加权，我们可以在期望意义下恢复消费者剩余。形式上，我们的估计量由以下替代性识别结果所启发。

定理 1. 在假设 *1* 和 *2* 下，我们有

$$\mathcal{S}(\pi) = \mathbb{E}\left[\frac{F^{\pi}(P \mid X)}{\pi_D(P \mid X)} Y\right], \tag{8}$$

其中，$F^{\pi}(p|x)$ 表示目标策略下的累积分布函数，即 $F^{\pi}(p|x) \equiv \int_0^p \pi(u|x)du$。

证明。证明依据迭代期望定律和积分次序变换：

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\mathbb{E}\left[\int_{p=0}^{\infty} \pi(p \mid X) \int_{z=p}^{\infty} \mu(X,z)\, dz\, dp\right]}_{\text{Equation (4)}} = \mathbb{E}\left[\int_{p=0}^{\infty} \int_{z=p}^{\infty} \pi(p \mid X)\, \mu(X,z)\, dz\, dp\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{z=0}^{\infty} \int_{p=0}^{z} \pi(p \mid X)\, \mu(X,z)\, dp\, dz\right] = \mathbb{E}\left[\int_{z=0}^{\infty} \Big(\int_{p=0}^{z} \pi(p \mid X)\, dp\Big)\, \mu(X,z)\, dz\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{z=0}^{\infty} \frac{F^{\pi}(z \mid X)}{\pi_D(z \mid X)}\, \mu(X,z)\, \pi_D(z \mid X)\, dz\right] = \mathbb{E}\left[\frac{F^{\pi}(P \mid X)}{\pi_D(P \mid X)}\, Y\right].
\end{aligned}$$

□

类似地，将公式 (8) 中的 π 替换为 π_D，并计算两者之差，即可识别历史消费者剩余和剩余变化：

$$\mathcal{S}(\pi_D) = \mathbb{E}\left[\frac{F^{\pi_D}(P \mid X)}{\pi_D(P \mid X)} Y\right], \text{ and } \Delta(\pi_D) = \mathbb{E}\left[\frac{(F^{\pi}(P \mid X) - F^{\pi_D}(P \mid X))}{\pi_D(P \mid X)} Y\right]. \tag{9}$$

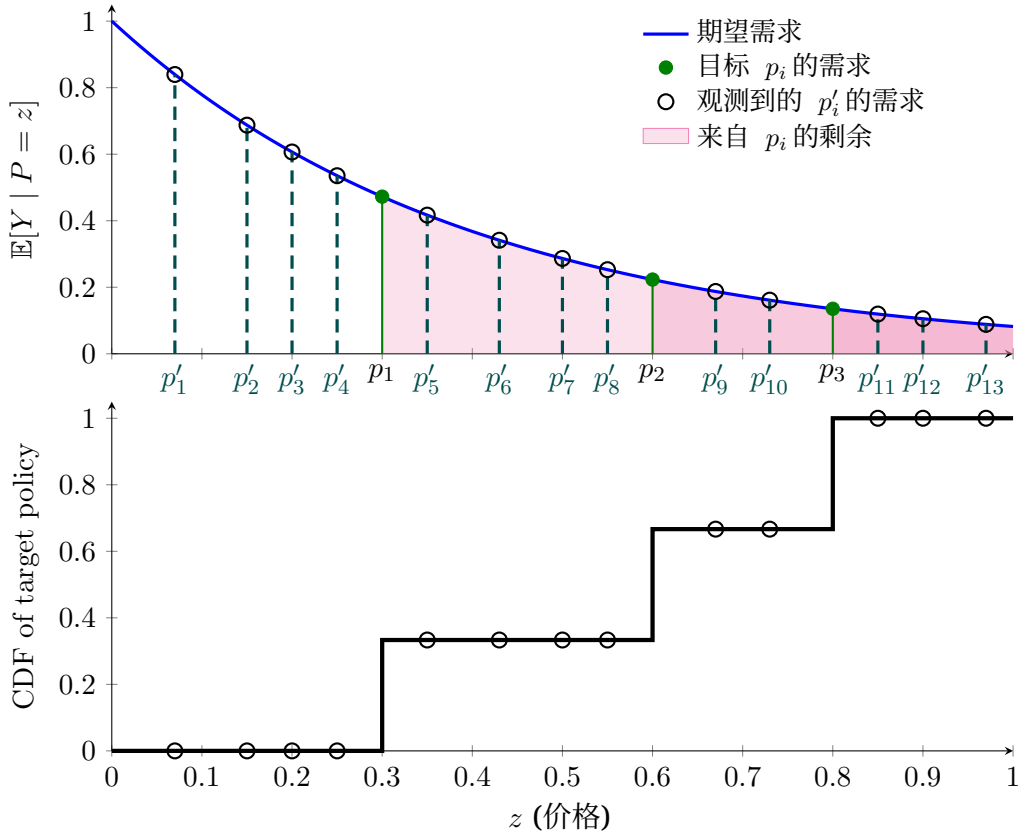


图 1：示意图展示了累积倾向权重及其与需求曲线下方面积之间的关系。更多详情请参见示例 1。

根据定理 1，我们提出的 CPW 估计量可通过对公式 (8) 取样本均值得出：

$$\widehat{\mathcal{S}}_{CPW}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{F^{\pi}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}Y_i, \quad \widehat{\mathcal{S}}_{CPW}(\pi_D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\widehat{F}^{\pi_D}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}Y_i, \tag{10}$$

$$\widehat{\Delta}_{CPW}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(F^{\pi}(P_i|X_i) - \widehat{F}^{\pi_D}(P_i|X_i))}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}Y_i, \tag{11}$$

其中，$\widehat{\pi}_D$ 和 F^{π_D} 分别是历史策略的密度和累积密度估计量。

接下来，我们通过图 1 所示的一个简单示例，进一步帮助读者直观理解 CPW 估计量。

示例 1. 假设我们正在估算一种目标定价策略下的消费者剩余，该策略以相同的概率分配给三个离散价格 $p_1 < p_2 < p_3$，相应的期望需求以绿色圆圈表示。假设所有顾客的上下文都相同。该目标策略下的消费者剩余可表示为：需求曲线下、策略价格右侧三个区域面积的平均值乘以一个缩放系数：$\mathcal{S}(\pi) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}\pi(p\,|\,X)\int_{z=p}^{\infty}\mu(X,z)dzdp\right] = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3}\int_{z=p_i}^{\infty}\mathbb{E}[Y\,|\,P=z]dz.$ 在图 *1* 中，这些就是三个粉色区域。重叠部分的颜色更深，反映出 p_3 右侧的面积会计入全部三个积分，p_2 与 p_3 之间的区域会计入两个积分，而

p_1 与 p_2 之间的区域会计入一个积分。

现在假设历史数据由一个（已知的）历史定价策略生成，该策略的价格在 *0* 到 *1* 之间均匀分布。在历史数据中，我们恰好观测到 *13* 个随机实际价格 $\{p'_i\}_{i=1}^{13}$，这稀疏地呈现了样本量更大时会出现的情况。每个实际观测对 (p'_i, Y_i) 都提供了该阈值下期望需求的无偏快照，即 $\mathbb{E}[Y \mid P = p'_i]$；其中黑色圆点表示条件期望，在每个价格点有充足数据时，经验平均值会收敛于这些条件期望。如果我们汇总结果Y_i （或者在数据充足时汇总期望结果），就能近似得到需求曲线下的总面积。然而，要通过汇总来近似计算目标定价策略的消费者剩余，我们需要使用不同的权重。具体而言，为了重现前述剩余计算，我们必须将价格为 $p'_{11}, p'_{12}, p'_{13}$ 的观测值赋予价格为 p'_5, p'_6, p'_7, p'_8 的观测值三倍的权重，因为在目标策略的三个价格下，曲线在 $[p_3, 1)$ 下方的面积都会计入消费者剩余计算（深粉色）；而 $[p_1, p_2)$ 只会计入一次（浅粉色）。 $[0, p_1)$ 完全不会计入，而 $[p_2, p_3)$ 会计入两次。该权重表示目标策略中消费者剩余包含某个历史价格的价格所占比例，并与目标累计概率质量成正比；对于三点目标策略，该权重为 $F^\pi(p'_i) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} \mathbf{1}\{p'_i \geq p_j\}$ （即 $F^\pi(p'_1) = 0, F^\pi(p'_5) = 1/3, F^\pi(p'_9) = 2/3, F^\pi(p'_{11}) = 1$）。这在图 *1* 的下方面板中有所展示。因此，随着价格区间内采样的价格点增多，加权平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{F^\pi(p'_i)}{\pi_D(p'_i)} Y_i$ 最终将近似于需求曲线下方按其计入目标消费者剩余计算的频率加权后的面积，即 $\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \pi(p_i) \int_{z=p_i}^{\infty} \mathbb{E}[Y \mid P = z]dz$；当样本数量趋于无穷大时，这一近似将成立。 [1]

这种方法与离策略评估中的标准逆倾向加权在两个重要方面有所不同。首先，可观测的 Y 并非我们试图估计的、在新定价策略下不可观测的剩余 $(V - P)_+$。其次，加权项的分子是目标策略累积分布 $F^\pi(P \mid X)$，而不是逆倾向加权中通常出现的、在 P处的目标密度 $\pi(P|X)$。这是因为我们需要估计积分（或面积）的平均值，而非通常的结果平均值。因此，无法应用标准逆概率加权技术。

与直接法（公式 (4)）相比，这一结果需要了解或估计定价分布 π_D，而非需求函数 $\mu(X, P)$。当历史定价策略已知时，该估计量无偏且完全不依赖模型。如果公司正在调查其自身算法定价策略对消费者剩余的影响，或者政策制定者要求公开算法以供审计，就可能出现这种情况。或者，如果历史定价策略相对简单，其估计可能比复杂需求函数容易得多。此外，直接模型（DM）需要针对每个观测在价格空间 P 上进行数值积分，这在计算上可能代价高昂。相比之下，CPW 估计量是简单的加权平均，因此在处理大型数据集时计算效率更高。这种替代估计量为监管机构或企业进行剩余估计提供了至关重要的灵活性。

然而，当无法获得估计的历史定价策略分布时，CPW 估计量的表现仍对其准确性敏感，并可能受到模型设定错误的影响

[1]在这种情况下，历史定价策略服从均匀分布，$\pi(p'_i) = 1$，因此分母不会影响计算；否则，通常会采用逆倾向校正，使历史策略在期望上表现得如同均匀分布。

为进一步解决这一问题，我们提出增广 CPW（ACPW）估计量，它结合了直接模型和 CPW 方法的要素；只要其中任一组成部分设定正确，该估计量就保持一致，因此更为稳健。

5 双重稳健表示与估计

ACPW估计量的构造基于有效影响函数（EIF）理论。EIF 至关重要，主要有两个原因：它刻画了半参数效率界（任何正则估计量的最小渐近方差），并提供了达到该效率界的构造性机制。直观而言，EIF 充当修正项，可消除朴素插件估计量（例如我们在此上下文中使用的直接模型或 CPW 估计量）的一阶偏差。这种修正对于确保最终估计量仍然$\sqrt{n}$一致且渐近正态至关重要，即使干扰分量（如需求函数和累积权重）以较慢的速率收敛。形式上，EIF 定义为目标参数的典范梯度，例如 $\mathcal{S}(\pi)$、 $\mathcal{S}(\pi_D)$ 和 $\Delta(\pi)$，相对于底层数据分布而言。基于该梯度构造估计量，可确保其渐近有效（即极小极大最优）。有关该理论的全面论述，请参阅Tsiatis (2006)。下面我们给出半参数模型 (2) 下推导出的 $\mathcal{S}(\pi)$ 的 EIF。令 $\mathcal{D} = (X, P, Y)$。

定理 2。 假设假设 *1* 和 *2* 成立，则 $\mathcal{S}(\pi)$ 的有效影响函数为

$$\psi^{\pi}(\mathcal{D}) = \int_0^{\infty} \pi(p|X) \int_p^{\infty} \mu(X, z) dz dp + \frac{F^{\pi}(P|X)}{\pi_D(P|X)}(Y - \mu(X, P)) - \mathcal{S}(\pi). \tag{12}$$

若评估行为策略 π_D，则有效影响函数的形式为

$$\psi^{\pi_D}(\mathcal{D}) = \int_P^{\infty} \mu(X, z) dz + \frac{F^{\pi_D}(P|X)}{\pi_D(P|X)}(Y - \mu(X, P)) - \mathcal{S}(\pi_D). \tag{13}$$

最后，剩余差 $\Delta(\pi)$ 的有效影响函数为 $\psi^{\Delta}(\mathcal{D}) = \psi^{\pi}(\mathcal{D}) - \psi^{\pi_D}(\mathcal{D})$。

这一点在附录 2 中得到了严格证明。有效影响函数的一个关键性质是其均值为零。这引出了以下估计量：令方程 (12) 和 (13) 中有效影响函数的经验均值为零，即可定义这些估计量：

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^{\infty} \pi(p|X_i) \int_p^{\infty} \widehat{\mu}(X_i, z) dz dp + \frac{F^{\pi}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}(Y_i - \widehat{\mu}(X_i, P_i))\right], \tag{14}$$

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{ACPW}(\widehat{\pi}_D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{P_i}^{\infty} \widehat{\mu}(X_i, z) dz + \frac{\widehat{F}^{\pi_D}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}(Y_i - \widehat{\mu}(X_i, P_i))\right], \tag{15}$$

$$\widetilde{\Delta}_{ACPW}(\pi) = \widetilde{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi) - \widetilde{\mathcal{S}}_{ACPW}(\widehat{\pi}_D)。 \tag{16}$$

可以观察到，ACPW 估计量融合了直接模型和 CPW 方法的要素，并且可以证明，只要需求函数或行为策略中有一项设定正确，ACPW 估计量就仍然是一致的，这一性质称为双重

稳健性。对于已知目标策略的情况，以下命题正式陈述了双重稳健性；其他情况也成立，且证明几乎相同。

命题1。令 $\bar{\mu}(x,p)$ 和 $\bar{\pi}_D(p|x)$ 分别表示估计量 $\widehat{\mu}(x,p)$和 $\widehat{\pi}_D(p|x)$的总体极限，使得：

$$\sup_{x,p}|\widehat{\mu}(x,p)-\bar{\mu}(x,p)|=o_p(1)\quad and\quad \sup_{x,p}|\widehat{\pi}_D(p|x)-\bar{\pi}_D(p|x)|=o_p(1).$$

如果以下条件中任一项成立：***(i)*** $\bar{\mu}(X,P)=\mu(X,P)$，几乎必然成立；***(ii)*** $\bar{\pi}_D(P|X)=\pi_D(P|X)$，几乎必然成立。那么我们可以得到一致性：

$$\left|\widetilde{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi)-\mathcal{S}(\pi)\right|=o_p(1),$$

其中 $o_p(1)$ 表示一个随着样本量 $n\to\infty$ 增大而依概率收敛至零的量。

命题1的证明见附录3。该性质十分重要，因为它使监管机构能够灵活地进行剩余估计，具体取决于能否实现一致的需求估计或历史定价策略密度估计。除了理想的双重稳健性质外，ACPW估计量的另一项优势是，只要对两个干扰参数估计量（需求函数和行为策略密度）的收敛速率条件要求较低，结合数据拆分或交叉拟合程序，即可达到可能的最低方差界（Chernozhukov 等人，2018）。接下来，我们概述 K折交叉拟合程序，这是对公式（14）和（15）中标准 ACPW 估计量的一项小幅算法修改。具体而言，我们将样本索引 $\{1,\ldots,n\}$ 划分为 K 个大小近似相等且互不相交的折，其中折数 K为任意有限值。对于每个观测 i，令 $k(i)$ 表示包含 i的折。记 $\widehat{\mu}^{-k(i)}(x,p)$ 和 $\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(p\mid x)$ 分别为需求函数和行为策略的估计量，它们仅使用剔除第 $k(i)$ 折后的数据进行训练（因此采用记号 $-k(i)$）。采用交叉拟合得到的 ACPW 估计量记为

$$\widehat{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^\infty\pi(p|X_i)\int_p^\infty\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp+\frac{F^{\pi}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i|X_i)}(Y_i-\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))\right],$$

$$\widehat{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^\infty\pi(p|X_i)\int_p^\infty\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp+\frac{F^{\widehat{\pi}_D,-k(i)}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i|X_i)}(Y_i-\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))\right].$$

这种交叉拟合方法确保每个观测都使用基于独立数据拟合的干扰估计进行评估，从而减少过拟合偏差，并实现有效的渐近推断，即使干扰函数是通过灵活的机器学习方法估计的也是如此，具体内容将在第7节详述。

6 考虑不平等的剩余

政策制定者在评估定价策略时，普遍关心的不仅是总剩余如何变化，还包括其在消费者之间如何分配。尤其是，他们会关注公平性，以及对处境最差者的影响。为解决这些问题，一种常见做法是

在汇总总体的剩余时，着重考察剩余最低的顾客所获得的结果。我们沿着这一思路，将所提出的离策略消费者剩余估计方法扩展到福利度量，使其能够反映剩余在不同客户类型之间的分配情况。

令 $\mathcal{S}(\pi \mid X)$ 表示具有特征 X的顾客的剩余，其中这些特征代表客户类型。前文各节均隐含地使用算术平均值来汇总福利，$\mathcal{S}(\pi) = \mathbb{E}_X[\mathcal{S}(\pi \mid X)]$, 实际上是对所有客户类型进行平均。遵循 Atkinson 传统及相关工作（Atkinson 等（1970）、Bergson（1954）、Dub´e 和 Misra（2023）、Lewbel 和 Pendakur（2017））， 我们转而考虑广义平均数族

$$(\mathcal{S}^r(\pi))^{1/r}, \tag{17}$$

其中 $\mathcal{S}^r(\pi) := \mathbb{E}_X\left[\mathcal{S}(\pi \mid X)^r\right]$。当$r = 1$ 时，这与标准算术平均值一致；随着 r 减小，它会越来越优先考虑剩余较低的群体，从而变得更加不平等厌恶。这提供了一个透明的策略参数 r , 用于在总剩余及其在客户群体之间的离散程度之间进行权衡。在 $r = 0$ 处的连续扩展给出几何平均值，而 $r = -1$ 给出调和平均值。下文为简洁起见，我们聚焦于 $r \neq 0$ ，以避免重复陈述在泛函上相同的结果。对于有限样本 $\{X_i\}_{i=1}^n$，标准 DM 估计量为:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{\mathcal{S}}(\pi \mid X_i)^r\right)^{1/r} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}(X_i,z)dzdp\right)^r\right]^{1/r}, \tag{18}$$

不失一般性，我们将重点估计 $\mathcal{S}^r(\pi)$，估计后可对其进行转换以恢复 $\mathcal{S}^r(\pi)^{1/r}$。接下来，我们推导目标 $\mathcal{S}^r(\pi)$和行为 $\mathcal{S}^r(\pi_D)$政策的有效影响函数及其对应的有效估计量。有效影响函数由以下定理给出。

定理 3. 在假设 *1* 和 *2* 下，对于 $r \neq 0$， $\mathcal{S}^r(\pi)$ 的有效影响函数为

$$\begin{aligned} r\frac{(Y-\mu(X,P))F^{\pi}(P|X)}{\pi_D(P|X)}\left(\int_0^\infty \pi(p|X)\int_p^\infty \mu(X,z)dzdp\right)^{r-1} \\ +\left(\int_0^\infty \pi(p|X)\int_p^\infty \mu(X,z)dzdp\right)^r - \mathcal{S}^r(\pi), \end{aligned} \tag{19}$$

$\mathcal{S}^r(\pi_D)$ 的有效影响函数为

$$\begin{aligned} r\left[\frac{(Y-\mu(X,P))F^{\pi_D}(P|X)}{\pi_D(P|X)}+\int_P^\infty \mu(X,z)dz\right]\left(\int_0^\infty \pi_D(p|X)\int_p^\infty \mu(X,z)dzdp\right)^{r-1} \\ +(1-r)\left(\int_0^\infty \pi_D(p|X)\int_p^\infty \mu(X,z)dzdp\right)^r - \mathcal{S}^r(\pi_D). \end{aligned} \tag{20}$$

根据线性性质， $\Delta^r(\pi)$ 的有效影响函数可由上述两个有效影响函数相减得到。

定理 3 确立了不平等感知剩余 $\mathcal{S}^r(\pi)$、 $\mathcal{S}^r(\pi_D)$ 及其差值 $\Delta_r(\pi)$ 的有效影响函数（EIF），并在附录 4 中给出了证明。更具体地说，公式（19）具有如下结构

与公式（12）中标准剩余的有效影响函数类似： $\int_0^\infty \pi(p|X) \int_p^\infty \mu(X,\ z)dzdp$项对应直接法分量，而 $(Y-\mu(X,\ P))\ F^\pi(P|X)\ \pi_D(P|X)$ 则是一个结合累积权重的均值为零的去偏项，在方差缩减方面发挥着关键作用，使所得估计量能够达到半参数效率界。自然地，定理 3 启发我们采用以下估计量分别估计 $\mathcal{S}^r(\pi)$ 和 $\mathcal{S}^r(\pi_D)$：通过交叉拟合，将有效影响函数的经验均值设为零来求得：

$$\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\frac{(Y_i - \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))F^\pi(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i|X_i)}\left(\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp\right)^{r-1} + \left(\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp\right)^r\right], \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi_D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Bigg[r\left(\frac{(Y_i - \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))\widehat{F}^{\pi_D,-k(i)}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i|X_i)} + \int_{P_i}^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dz\right) \\ \times\left(\int_0^\infty \widehat{\pi}_D^{-k(i)}(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp\right)^{r-1} \\ + (1-r)\left(\int_0^\infty \widehat{\pi}_D^{-k(i)}(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp\right)^r\Bigg]\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$那么 $\Delta^r(\pi) = \mathcal{S}^r(\pi) - \mathcal{S}^r(\pi_D)$。

我们将这类估计量称为不等式感知 ACPW 估计量（IA-ACPW）。$\widehat{\ }$尽管方程（21）中的估计量 $\mathcal{S}^r(\pi)$ 是根据（19）中的有效影响函数推导得出的，并结合了直接模型和 CPW 的要素，但它并不具备 ACPW 估计量通常具有的双重稳健性。这是因为，当 $r \neq 1$ 时，泛函 $S^r(\pi)$ 是非线性的。例如，该泛函会对观测值重新加权，使较小的剩余在 $r < 1$ 中获得更大的影响力。因此，与简单的算术平均值相比，单个数据点对估计量$\widehat{\ }$的影响有所不同。由于这种非线性，只有在需求模型设定正确时， $\mathcal{S}^r(\pi)$ 才具有一致性，尽管历史定价策略 $\widehat{\pi}_D$可能设定错误。方程（21）清楚地表明了需求估计必须具有一致性的原因：当 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,\ P_i)\right)$ 收敛至 0 时，第一项消失，只剩下第二项；显然，只有需求估计具有一致性时，该项才具有一致性。不过，正如我们将在第 7.2 节的渐近分析中所示，累积权重在降低方差方面发挥着重要作用，因此可以使用收敛速率较慢的灵活机器学习策略。–

对行为策略 $\mathcal{S}^r(\pi_D)$ 的考虑不平等的剩余进行估计，面临着更大的挑战。不同于 $\mathcal{S}^r(\pi)$，估计量 $\mathcal{S}^r(\pi_D)$ 甚至不具备单重稳健性；它要求需求模型 $\widehat{\mu}$和倾向模型 $\widehat{\pi}_D$同时满足一致性。这种额外的脆弱性源于 π_D 并非已知，而是需要估计，且它具有双重作用：既作为去偏项中的倾向权重，又明确界定需求项中的积分测度。因此，如果 $\widehat{\pi}_D$ 设定有误，估计量将收敛到错误策略的泛函，即使需求模型

$\widehat{\mu}$ 完美无误。

$\widehat{\ }$接下来给出一个示例，说明在需求模型设定错误时， $\mathcal{S}^r(\pi)$ $\mathcal{S}^r$并不一致。

示例 2. （不等式感知 *ACPW* 估计量对需求设定错误并不稳健）接下来考虑估计该泛函

$$\mathcal{S}^r(\pi) = \left(\int_0^\infty \pi(p) \int_{z=p}^\infty \mu(z)\, dz\, dp \right)^r \quad with \quad r = \tfrac{1}{2},$$

在一个没有协变量的设定中，其中 $\mu(\cdot) \equiv \mathbb{E}[Y \mid P = \cdot]$ 表示需求函数。

假设 $P \sim$ 均匀分布$[0,1],$ ，因此行为策略满足 $\pi_D(p) = 1$ ，对所有 $p \in [0,1]$ 均成立。令目标策略也为 $\pi(p) = 1$，这意味着 $F^\pi(z) = z$，并假设真实需求函数为 $\mu(p) = 1 - p^2$. 在此设定下，定义

$$\theta^* = \int_0^1 \pi(p) \int_p^1 \mu(z)\, dz\, dp = \int_0^1 1 \cdot \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_p^1 dp = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - p + \frac{p^3}{3} \right) dp = \frac{1}{4},$$

使得 $\mathcal{S}^r(\pi) = (\theta^*)^{1/2} = \frac{1}{2}$.

现在，假设分析者使用一个设定错误的线性需求模型，其极限拟合为$\bar{\mu}(p) = 1 - \frac{1}{2}p$. 相应的第一阶段极限为

$$\bar{\theta} = \int_0^1 \pi(p) \int_p^1 \bar{\mu}(z)\, dz\, dp = \int_0^1 1 \cdot \left[z - \frac{z^2}{4} \right]_p^1 dp = \int_0^1 \left(\frac{3}{4} - p + \frac{p^2}{4} \right) dp = \frac{1}{3}.$$

因此，*IA-ACPW*估计量的总体极限为

$$\bar{\theta}^{1/2} + \frac{1}{2}\bar{\theta}^{-1/2} \underbrace{\mathbb{E}\left[\frac{F^\pi(P)}{\pi_D(P)} \left(Y - \bar{\mu}(P) \right) \right]}_{\int_0^1 z(0.5z - z^2)\, dz = -1/12} = \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{24},$$

这与真实值 $1/2$ 不同。因此，即使行为策略设定正确，需求模型设定错误与目标泛函的非线性相结合，也会产生不会消失的二阶余项，并导致偏差。

7 理论分析

本节将证明我们提出的估计量具有渐近正态性，并阐明实现这一性质所需的条件。这些结果尤为重要，因为它们使我们能够进行统计推断，并为剩余估计构造置信区间。在实践中，这使企业能够严谨地评估定价策略的变化是否会显著提升总体剩余或消费者福利。例如，一家电子商务公司可能希望评估，新部署的动态定价算法 π是否比现有定价策略 π_D带来更高的预期消费者剩余。通过为相应的估计量构造置信区间，企业可以正式检验观察到的提升在统计上是否显著，而非销售数据随机波动所致。

我们 因此，我们证明这些估计量达到了半参数效率界。这意味着 s

在所有正则且渐近线性的估计量中，我们提出的估计量实现了最低可能的渐近方差。尽管针对同一目标的所有估计量都能达到这一界限，但达到该界限所需的假设可能有所不同。我们尤其证明，ACPW 所需的条件相对宽松，即使需求函数或历史价格密度的估计收敛较慢，也能实现较快的收敛速率。全文中，我们假设所有推导出的有效影响函数均具有有限的二阶矩， $\widehat{\pi}_D(p|x)$ $> c$ 对于某个常数 c，并且$\widehat{\mu}(x,\ p)$ 对所有 p 和 x均有界。

接下来，我们先讨论标准消费者剩余（$r = 1$），因为在这一情形下可以建立最强的结果；然后再探讨考虑不平等的剩余，后者面临更多挑战。我们重点分析已知策略π的剩余估计量。关于行为策略剩余 $\mathcal{S}(\pi_D)$ 及其差值 $\Delta(\pi)$ 的类似结果可采用相似的方法推导，详见附录 6。为完整起见，我们还给出 DM 方法的结果，这也是我们理论贡献的一部分。

7.1 标准消费者剩余分析 $(r = 1)$

我们针对三种估计量分别提出三组技术条件：CPW、ACPW 和 DM。为简洁起见，关于 DM 的假设将在附录 5.1 中讨论。我们先介绍 CPW 估计量所需的假设。

7.1.1 所需假设

假设 *3*（*CPW* 所需的假设）。（*i*） $\sqrt{\mathbb{E}\left[\widehat{\omega}(X,P) - \omega(X,P)\right]^2} = o_p(1)$，其中 $\omega(x,p) \equiv {}^{F^\pi}(p|x)$ $\pi_D(p|x)$，且 $\widehat{\omega}(x,p) \equiv {}^{F^\pi}(p|x)\,\widehat{\pi}_D(p|x)$ 是 $\omega(x,p)$ 的估计量。（*ii*）使用满足 *Donsker* 性质的函数类来估计行为策略。（*iii*）存在基函数 $\phi(x,p) \in \mathbb{R}^L$ 和一个向量 $\beta \in \mathbb{R}^L$，使得

$$\sup_{x,p} |\mu(x,p) - \phi(x,p)^\top \beta| = O(L^{-s/d}), \tag{22}$$

其中，s是一个固定的正常数，$O(\cdot)$是标准的大-O 项。（*iv*）估计的 *CPW* 权重满足

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi^\pi(X_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widehat{\omega}(X_i,P_i)\phi(X_i,P_i) \right\|_2 = o_p(n^{-1/2}),$$

其中，$\|\cdot\|_2$表示欧几里得范数，$\phi(\cdot,\cdot)$是满足公式（22）的基函数，而 $\phi^\pi(x) = \int_0^\infty \pi(p|x)\int_p \phi(x,z)\,dzdp$。

假设 3 (i) 相对宽松，因为它仅要求 $\widehat{\pi}_D$ 保持一致，而未规定收敛速率。假设 3 (ii) 对用于估计行为策略的函数类施加了复杂度（规模）约束。在进一步讨论该假设之前，我们先正式定义 Donsker 类如下。

定义 2 (P-Donsker 类)。设$(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ 为一个概率空间，且 $\mathcal{F}$ 是一类可测函数。我们用 $L_2(P)$ 表示所有平方可积的可测函数所构成的空间，其中平方可积是指相对于 可积，

其对应的 L_2-范数定义为 $\|\cdot\|_{P,\,2}$。我们定义以下分量来刻画 $\mathcal{F}$ 的复杂度：

- 括区间：对于任意两个函数 $l, u \in L_2(P)$，括区间 $[l,u]$ 是如下函数集合$\{f\colon l(x) \le f(x) \le u(x)$ 对所有 $x \in \mathcal{X}\}$均成立。若 ϵ-括区间属于 $L_2(P)$，则称其为 $[l,u]$，且满足$\|u-l\|_{P,\,2} < \epsilon$。
- 括区间数：括区间数 $N_{[]}(\epsilon, \mathcal{F}, L_2(P))$ 是覆盖 $\mathcal{F}$ 所需的 $L_2(P)$ 中的 ϵ-括区间的最小数量。
- 括区间积分：熵积分定义为

$$J_{[]}(\delta, \mathcal{F}, L_2(P)) = \int_0^{\delta} \sqrt{\log N_{[]}(\epsilon, \mathcal{F}, L_2(P))}\, d\epsilon$$

假设存在一个可测函数 F，使得对所有 $f \in \mathcal{F}$ 和 $x \in \mathcal{X}$，$|f(x)| \le F(x)$ 成立，且 $\mathbb{E}(F^2) < \infty$。那么，如果对于某个 $\delta > 0$，$\mathcal{F}$满足 $J_{[]}(\delta, \mathcal{F}, L_2(P)) < \infty$，则称函数类 $\mathcal{F}$为 P-***Donsker*** 类 。

直观地说，Donsker 类是指规模或复杂度并不过高的一组函数。这有助于确保随着我们收集到更多数据，这些函数的平均行为会趋于稳定。许多常用的机器学习模型都构成 Donsker 类，包括线性模型和广义线性模型等标准参数模型，以及小波和张量积 B 样条等非参数回归方法（综述见Chen 和 Christensen （2015年）第 6 节）。然而，需要注意的是，许多现代黑箱机器学习算法本身并不满足 Donsker 性质。过参数化深度神经网络、未经剪枝的随机森林或梯度提升机等高容量模型，通常在复杂度极高的函数空间中运行。如果没有明确的结构约束（例如稀疏性、范数正则化或有界深度），这些类可能过于丰富，因而无法满足一致中心极限定理。尽管如此，在特定的技术条件下，仍可证明即使是这些最先进模型也满足 Donsker 性质。例如，Breiman 等人 （2017）讨论了决策树的相关条件，而Zhou 等人 （2023年）（引理 4）和 Schmidt-Hieber （2020）（引理 5）则分别给出了决策树和神经网络所需的稀疏性与有界性约束，使其保持在 Donsker 范围内。

假设 3(iii)在策略评估文献中被广泛采用，例如参见Bian 等人（2025年）、Chen 和 Qi（2022）、Shi 等人（2022）。当需求函数 $\mu(x,\ p)$ 属于某个 H¨older 光滑类或 Sobolev 光滑类时，假设 3(iii)会自动满足，其中 s 是函数 ¨的 H $\mu(x,\ p)$ 的 Hölder 光滑参数。在这类情形下，可以使用小波基函数或张量积 B 样条基函数来逼近 $\mu(x,\ p)$。从公式（22）可以看出，函数越光滑、基函数数量越多，逼近误差就越小。

假设 3(iv) 要求估计的 CPW 权重具有近似平衡性质。这一假设相对温和，因为引理1（见附录 1.2）证明，真实的

权重满足

$$\mathbb{E}\left[\phi^{\pi}(X)-\omega(X,P)\phi(X,P)\right]=0.$$

事实上，当基函数的数量 L 固定时（Graham 等人，2012），可以在经验数据上实现精确平衡，即达到 0 而不是以 $o_p(n^{-1/2})$ 的速率收敛。需要注意的是，即使基函数的数量 L 随样本量增长（Wang 等人，2023），仍然可以实现 $o_p(n^{-1/2}$ 平衡；同样可以沿用其中的方法，构造满足假设 3(iv) 的 CPW 估计量。

接下来，我们给出用于证明 ACPW 渐近性质的假设。

假设4 （ACPW 所需的假设）。 假设 $\pi_D\left(p\,|\,x\right) \ > c$，对所有 $p\in\mathcal{P}$ 以及每个 x 均成立，其中某个常数为 c。此外，假设需求函数和行为策略的估计量采用交叉拟合程序构造，并且对于 $k=1$、$\cdots$、K 达到以下收敛速率：

$$\sqrt{\mathbb{E}[(\widehat{\mu}^{-(k)}(X,P)-\mu(X,P))^2]}=O_p(n^{-\alpha_1}),\ \ and\ \ \sqrt{\mathbb{E}[(\widehat{\omega}^{-(k)}(X,P)-\omega(X,P))^2]}=O_p(n^{-\alpha_2}), \tag{23}$$

其中 α_1、$\alpha_2>0$ 和 $\alpha_1+\alpha_2>1/2$。

假设4 允许以低于参数型$O_p(n^{-1/2})$的速率估计干扰项，因此这是一个温和的条件。例如，当两个估计量都达到$o_p(n^{-1/4})$时，该条件便得到满足，从而能够采用灵活的机器学习方法进行消费者剩余估计。在这些假设下，我们能够证明所提出估计量的渐近正态性。

7.1.2 渐近正态性

定理 4。 在假设 *1* 和 *2* 下，以下结果成立：
(i) 假设 *3* 成立，并进一步假设基函数的数量 L满足 $L\gg n^{d/2s}$，则

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\mathcal{S}}_{CPW}(\pi)-\mathcal{S}(\pi)\right)\rightarrow\mathcal{N}\left(0,\Sigma(\pi)\right),$$

其中 $\Sigma(\pi)\equiv Var[\psi^{\pi}(\mathcal{D})]$, 以及 $\psi^{\pi}(\mathcal{D})$ 是由公式 (12)给出的关于 $\mathcal{S}(\pi)$ 的有效影响函数 .

(ii) 在假设*4*下，

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi)-\mathcal{S}(\pi)\right)\rightarrow\mathcal{N}\left(0,\Sigma(\pi)\right),$$

(iii) 在附录 *5.1* 的假设*5*下，

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\mathcal{S}}_{DM}(\pi)-\mathcal{S}(\pi)\right)\rightarrow\mathcal{N}\left(0,\Sigma(\pi)\right).$$

这一结论在附录 5 中得到证明。定理 4 表明，所提出的三个估计量均达到了半参数效率界；也就是说，在所有正则渐近线性估计量中，

它们都达到了最小渐近方差 $\psi^{\pi}(\mathcal{D})$。它们的渐近分布也相同。然而，不同方法达到效率界所需的条件各不相同。具体而言，直接模型和 CPW 估计量要求各自的干扰函数在 Donsker 类中估计，并满足光滑性和平衡等额外要求。相比之下，ACPW 估计量无需此类高层次条件，只要求温和的乘积速率假设，并在估计过程中进行样本分割。这一点意义重大，因为即使直接模型和 CPW 方法的收敛速率较慢（例如采用更复杂的机器学习估计量时），ACPW 估计量仍能实现较快的收敛速率。因此，ACPW 在剩余估计中可灵活应用于更广泛的场景。

此外，讨论为何 CPW 估计量等插件估计量能够以与 ACPW 相同的速率达到渐近正态性，并具有相同的方差，也很有启发性。其直观解释是，假设 3 将 CPW 估计量从一种逆概率加权方法提升为校准估计量。在假设 3 下，$\psi^{\pi}(\mathcal{D})$ 中去偏项的样本均值（即$\int_0^{\infty} \pi(p|X) \int_p^{\infty} \mu(X, z) dzdp - {}^{F^{\pi}}{}_{(P|X)\pi_D(P|X)} \mu(X, P)$）在渐近意义下可忽略不计。具体而言，假设 3(iv) 施加了一项约束，要求估计权重以基函数 ~~ϕ~~ 作为平衡特征，使历史数据的经验矩与目标策略相平衡。这与需求模型直接相关：由于假设 3(iii) 保证真实需求函数 μ 可由这些相同基函数的线性组合准确逼近，因此，平衡 ϕ 实际上就是平衡需求函数本身。从定量角度看，只要基函数的数量 L 选得足够大（具体而言，$L \gg n^{d/2s}$），逼近误差在根号 -n 尺度下便可忽略不计（$o(n^{-1/2})$）。通过校准权重，消除协变量所解释的变异，CPW 估计量便能达到与显式减去控制变量相同的误差降低效果。因此，即使不显式估计需求函数，它也能达到与双重稳健 ACPW 估计量相同的半参数效率界，并具有渐近正态性。

定理 4 的类似结果适用于行为策略剩余 $\mathcal{S}(\pi_D)$ 以及剩余差 $\Delta(\pi)$ 的估计。完整表述请参见附录 6 中的定理 6 和推论 1。

7.1.3 置信区间

基于定理 4 中建立的渐近正态性，我们可以为 $\mathcal{S}(\pi)$ 构造有效的置信$\widehat{\quad}$$\widehat{\quad}$区间。我们分析得出的一个关键理论洞见是，尽管 $\mathcal{S}_{CPW}$、$\mathcal{S}_{ACPW}$、$\widehat{\quad}$和 $\mathcal{S}_{DM}$ 依赖于不同的建模策略，但它们都是由同一个有效影响函数 $\psi^{\pi}(\mathcal{D})$ 所支配的渐近线性估计量。因此，它们具有相同的渐近方差，即 $\Sigma(\pi) = \text{Var}(\psi^{\pi}(\mathcal{D}))$。

为进行推断，我们使用估计得到的有效影响函数的经验二阶矩来估计该方差。这提供了一种统一的方差估计方法，因为无论点估计是通过直接建模还是倾向评分加权得出的，不确定性都由底层影响函数的变异性来量化。方差

各方法的估计量为：

$$\widehat{\Sigma}_{CPW}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}(X_i,z)dzdp + \frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}(Y_i - \widehat{\mu}(X_i,P_i)) - \widehat{\mathcal{S}}_{CPW}(\pi)\right]^2,$$

$$\widehat{\Sigma}_{ACPW}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp \right.$$
$$\left. + \frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i|X_i)}(Y_i - \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i)) - \widehat{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi)\right]^2,$$

$$\widehat{\Sigma}_{DM}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}(X_i,z)dzdp + \frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}(Y_i - \widehat{\mu}(X_i,P_i)) - \widehat{\mathcal{S}}_{DM}(\pi)\right]^2.$$

请注意，对于 $\Sigma_{CPW}(\pi)$，我们使用估计得到的需求函数 $\widehat{\mu}$ 来构造方差估计量，尽管它并未用于点估计 $\mathcal{S}_{CPW}(\pi)$ 本身。同样，对于 $\Sigma_{CPW}(\pi)$，我们使用估计得到的倾向权重 $\widehat{\pi}_D$ 来构造方差估计量。下述命题证明了这些方差估计量的一致性。

命题 2. 在定理 *4* 的假设下，以下一致性结果成立：

$$|\widehat{\Sigma}_{CPW}(\ \pi) - \Sigma(\pi)| = o_p(1), \quad |\widehat{\Sigma}_{ACPW}(\pi) - \Sigma(\pi)| = o_p(1), \quad \textit{and} \quad |\widehat{\Sigma}_{DM}(\pi) - \Sigma(\pi)| = o_p(1).$$

证明见附录 7。因此，可以使用三种估计量中的任意一种，为 $\mathcal{S}(\pi)$ 构造一个 $(1-\alpha)$ 置信区间。例如，使用 ACPW估计量时，区间为：

$$\left[\widehat{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi)\ \pm\ z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\Sigma}_{ACPW}(\pi)/n}\right],$$

其中，$z_{1-\alpha/2}$ 表示标准正态分布的上侧 $(1-\alpha/2)$ 分位数。在大样本下，该区间以概率 $(1-\alpha)$ 包含真实值 $\mathcal{S}(\pi)$。CPW 估计量和 DM 估计量的区间可用类似方法构造。这使企业和监管机构能够判断剩余改善或下降在统计上是否显著，对于严谨评估至关重要。

7.2 不等式感知剩余的渐近正态性 $(r \neq 1)$

接下来，我们将证明 $\mathcal{S}^r(\pi)$ 的渐近正态性，并表明它达到了半参数效率界。

定理 5. 假设假设 *1*、*2* 和 *4* 成立。此外，假设 $\alpha_1 > 1/4$，则对于 $r \neq 0$，有

$$\sqrt{n}(\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi) - \mathcal{S}^r(\pi)) \to \mathcal{N}(0, \Sigma^r(\pi)),$$

其中 $\Sigma^r(\pi)$ 是式 (19) 中有效影响函数的方差。

定理 5 证明了，所提出的不平等感知估计量达到了半参数效率界；证明见附录 8。与之相比，这一结果的一个关键区别是，

定理 4 中提出的总剩余情形（$r = 1$）要求需求模型以快于 $n^{-1/4}$ 的速率收敛（即 $\alpha_1 > 1/4$）。这一条件比乘积速率条件（$\alpha_1 + \alpha_2 > 1/2$）更严格；后者对于标准 ACPW估计量已足够。

这种差异源于目标泛函 $\mathcal{S}^r(\pi) = \mathbb{E}[(\cdot)^r]$ when$r \neq 1$ 的非线性。在对线性总剩余（$r = 1$）的分析中，估计量的余项呈现为需求模型与倾向模型误差的交叉乘积，即（$\widehat{\omega} - \omega$）（$\widehat{\mu} - \mu$）。这种乘积结构使两个干扰函数的准确度可以相互权衡，是双重稳健性的基础。相比之下，通过二阶冯·米塞斯展开对非线性泛函 $\mathcal{S}^r(\pi)$进行展开时，会引入一个与泛函曲率相关的纯二次误差项。因此，余项中包含一个与 $\|\widehat{\mu} - \mu\|^2$ 成正比的分量。为了使估计量达到 $\sqrt{n}$ 一致性并渐近正态，该二次项必须以快于 $n^{-1/2}$的速度趋于零。这就要求$\|\widehat{\mu} - \mu\| = o_p(n^{-1/4})$，从而迫使需求估计量满足更严格的个体收敛速率。这一数学上的必然性与我们的观察完全吻合：
IA-ACPW估计量只有单重稳健性，因为倾向得分无法抵消非线性引入的二次误差，最终估计量的一致性便取决于需求模型的质量。

尽管这一条件更为严格，IA-ACPW估计量相较于结合插件需求模型进行积分、并应用不平等感知聚合的直接方法估计量，仍具有一项重要优势。此类估计量通常会继承需求模型的一阶偏差（即与 $|\widehat{\mu} - \mu|$ 成比例的误差项）。使用灵活的机器学习方法估计需求时，这种偏差的衰减速度往往过慢，无法支持有效的统计推断，导致置信区间不可靠。相比之下，IA-ACP
W估计量利用累积倾向权重进行一步偏差校正。该校正有效消除了一阶偏差，仅留下上述二阶二次余项。因此，即使需求模型以较慢的非参数速率收敛（满足$\alpha_1 > 1/4$的前提下），
IA-ACPW估计量的偏差相对于其方差也会变得可以忽略。对于从业者而言，这一性质十分重要，因为它使得在使用高复杂度机器学习模型进行需求估计的同时，仍能构造有效的置信区间。

我们在附录9中证明了针对行为策略的类似不平等感知结果。然而，要确立 $\mathcal{S}^r(\pi_D)$ 的渐近正态性，对干扰参数估计量提出了比反事实策略 π 所需条件严格得多的要求。具体而言，理论要求需求模型 $\widehat{\mu}$ 和倾向模型 $\widehat{\pi}_D$ 都以快于 $n^{-1/4}$ 的速度在 L_2-范数下收敛（即 $\|\widehat{\mu} - \mu\| = o_p(n^{-1/4})$ 和 $\|\widehat{\pi}_D - \pi_D\| = o_p(n^{-1/4})$）。这一同步要求直接源于该估计量缺乏稳健性。与标准情形不同，在标准情形中，误差项可分解为干扰参数误差的乘积，从而允许在收敛速度之间权衡（例如，较慢的倾向模型可以由较快的需求模型来补偿）；而泛函 $\mathcal{S}^r(\pi_D)$ 关于生成分布的非线性会为两个模型分别引入独立的二次误差项。因此，不存在安全网：如果任一模型的收敛速度慢于 $n^{-1/4}$，二阶偏差项就无法以 $\sqrt{n}$ 速率趋于零，从而使估计量无法达到渐近正态性。这凸显了

—

当行为策略必须根据同一组数据进行估计时，直接在该策略上评估不平等指标本身具有的内在难度。

8 实验

本节介绍实验结果。在第 8.1 节中，我们展示了所提出的估计量具有双重稳健性，而现有的剩余估计量不具备这一性质，并验证了置信区间的有效性。随后，我们在第 8.2 节评估所提出的不平等感知剩余估计量的表现，并在第 8.3 节分析其置信区间。最后，为了说明我们方法的实际应用，第 8.4 节将我们的框架应用于一家汽车贷款公司的数据集，以衡量消费者剩余。

8.1 双重稳健性

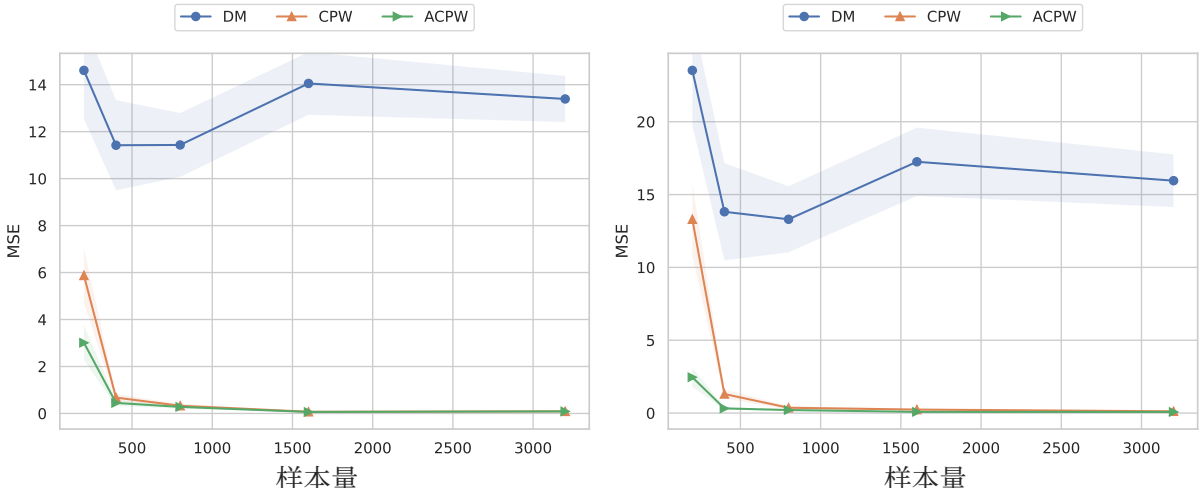
本节通过实证验证所提出的增广累积倾向加权（ACPW）估计量的双重稳健性。通过模拟需求模型或定价（倾向）模型被有意设定错误的情形，我们证明，只要这两个组成部分中至少有一个设定正确，ACPW 估计量就仍然是一致的。

直接模型设定错误：我们假设 $X \sim U[-0.5, 0.5], \beta \sim U[-0.1, 0.1], V = 90 + 3000\beta X^2 + \epsilon$, $\epsilon \sim U[0, 10], P \sim U[\min(V) - 0.05, \max(V) + 0.05], Y = \mathbb{I}[V > P]$。我们使用线性模型来刻画直接模型 $\mu(x, p)$，该模型设定有误。倾向模型则使用顶帽核密度估计量正确设定。

倾向模型设定错误：我们假设 $X \sim U[0, 1]$, $\beta \sim U[-1, 1]$, $V = 100 + 300\beta X + \epsilon$, $\epsilon \sim U[0, 10]$, $P \sim U[\min(V) - 0.05,\ \max(V) + 0.05]$, $Y = \mathbb{I}[V > P]$。我们使用高斯密度模型对倾向模型 $\pi_D(p|x)$ 建模，该模型存在设定错误。直接模型使用线性模型正确设定。

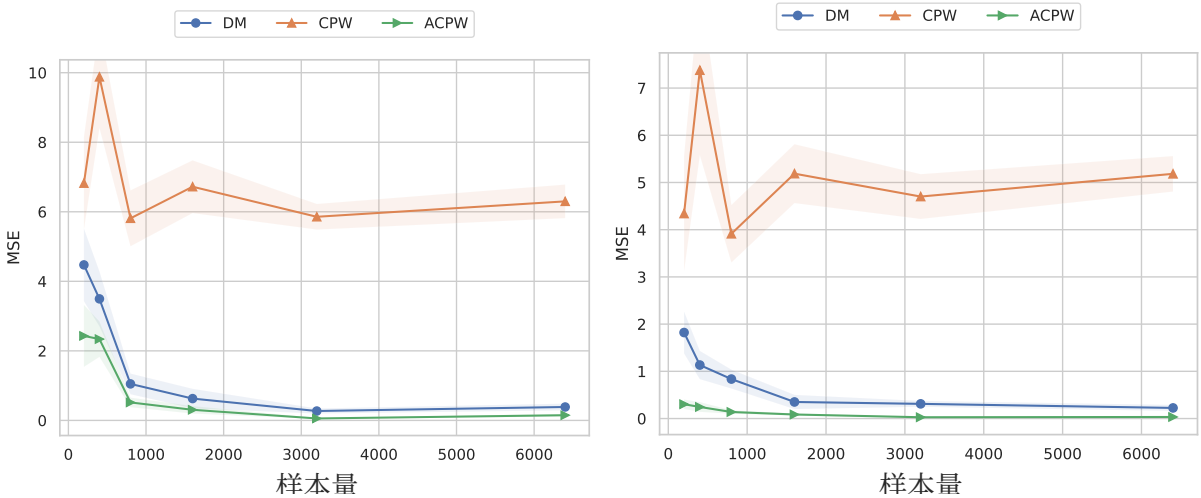
在这两种情形下，我们评估历史“行为”策略和新“目标”个性化定价策略（通过梯度提升树训练）下剩余估计的均方误差（MSE）。具体而言，我们使用梯度提升树（GBT）估计需求函数 $\mu(x,\ p)$。对于目标策略，则通过对离散网格中的五个价格点分别计算的预期收入 $p \cdot \mu(x, p)$ 应用 softmax 变换，以确定最终价格。

结果分别见图 2 和图 3。当需求模型设定错误时，与 CPW 和 ACPW 方法相比，直接法（DM）会产生显著且不会消失的误差，而随着样本量增加，CPW 和 ACPW 的估计误差会趋近于零。当倾向得分设定错误时，DM 和 ACPW 也呈现出类似趋势。CPW 的均方误差（MSE）较大（约为 5），且不会随着样本增加而降低。与 DM 和 CPW 相比，所提出的 ACPW 方法在这两种情况下均表现稳健，为实践中准确识别剩余提供了额外保障。通过结合 DM 和 CPW 的优势，即使底层经济行为或历史定价数据复杂或难以理解，该方法也能确保可靠地识别消费者剩余。



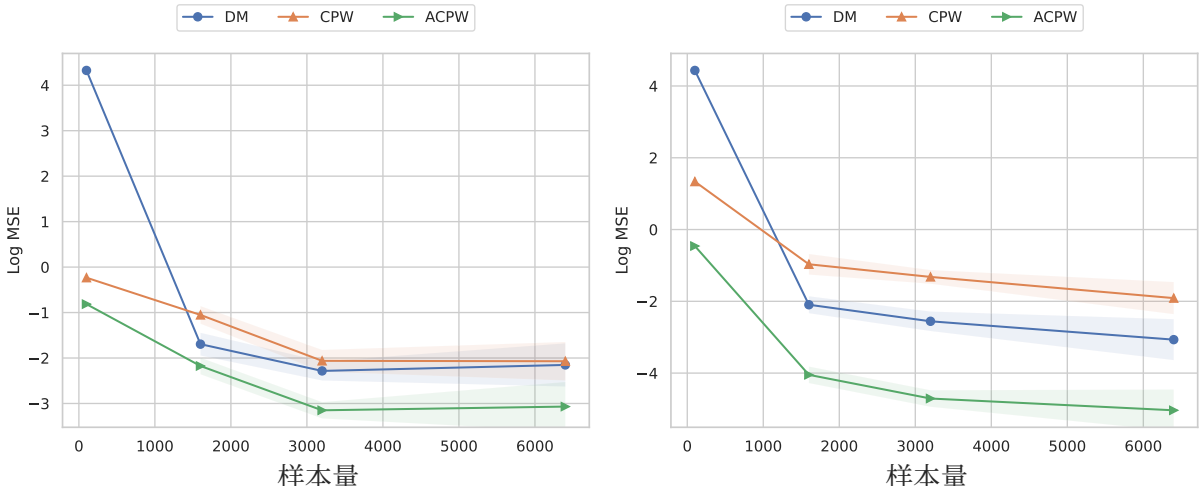
（a）行为　　（b）目标

图 2：直接模型设定错误



（a）行为　　（b）目标

图 3：倾向模型设定错误



(a) 行为　　(b) 目标

图4：直接模型和倾向模型均设定正确。

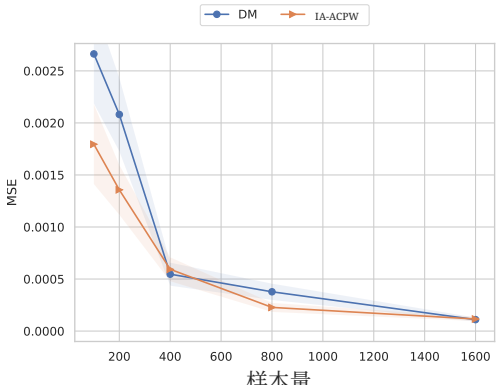
收敛速率： 我们假设 $X \sim U[0,1], \beta \sim U[-1,1], V = 100 + 300\beta X + \epsilon, \epsilon \sim U[0,10]$, $P \sim U[\min(V) - 0.05, \max(V) + 0.05], Y = \mathbb{I}[V > P]$。我们使用采用顶帽核的核密度模型。直接模型采用线性模型，设定正确。如图4所示，如果两个模型都设定正确，ACPW 的收敛速率更快。这里我们采用对数尺度绘图，以便更清晰地展示。ACPW 提供了“两全其美”的解决方案：它既能在一个模型失效时保持稳健，又能在模型准确时实现尽可能快的统计收敛，因此是监管审计中高度可靠的工具。

8.2 考虑不平等的剩余

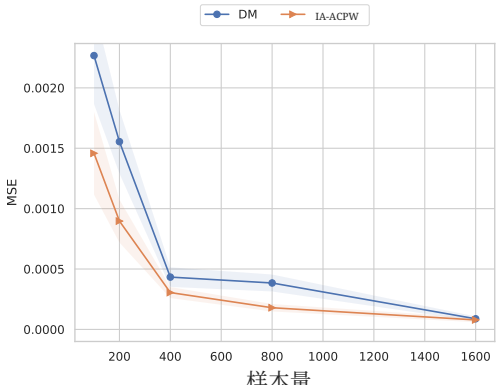
为评估不平等感知剩余估计量的表现，我们在模型设定正确的情况下进行模拟。数据生成过程如下：特征向量 X取自 $U[0,1]$，消费者估值 V是一个线性函数 $V = 100 + 300\beta^T X + \epsilon$，其中系数 $\beta \sim U[-1,1]$，误差 $\epsilon \sim U[0,1]$。价格 P取自 $U[9,12]$，购买结果为 $Y = \mathbb{I}[V > P]$。对于我们的估计量，直接模型被正确设定为线性模型，倾向得分模型则通过使用顶帽核的核密度估计器正确设定。我们报告了 200 次重复试验的结果。

当 $r = 0.5$时，我们评估估计量的均方误差（MSE）。直观而言，参数 r 控制剩余度量对处境最差消费者福利的敏感度。随着 r 减小，估计量会对低剩余结果赋予越来越高的权重。通过选择 $r = 0.5$，我们采取了适度的不平等厌恶。该准则有助于优先考虑更有利于弱势客户群体的政策。

我们将 IA-ACPW估计量与标准直接方法（DM）基准进行比较。结果如图5所示。随着样本量增加，DM 和 IA-ACPW 估计量的均方误差均呈下降趋势。IA-ACPW估计量的估计误差始终低于 DM 基准。这种方差缩减源于估计量基于影响函数的构造方式，该构造利用了累积倾向权重。



(a) $r = 0.5$ 行为



(b) $r = 0.5$ 目标

图5：不平等感知盈余估计的均方误差

8.3 置信区间

本节通过实证检验所提出的剩余估计置信区间的可靠性和覆盖率。稳健的审计工具不仅必须提供点估计，还必须提供数学上严谨的不确定性度量，使监管机构和企业能够判断福利变化在统计上是否显著。

我们使用特征向量 $X \sim U[0,1]$生成数据。估值 V遵循线性模型$V = 10+300\beta^T X+\epsilon$，其中 $\beta \sim U[-1,1]$ 和 $\epsilon \sim U[0,1]$。价格从 $P \sim U[9,11]$中抽取，结果为 $Y = \mathbb{I}[V > P]$。

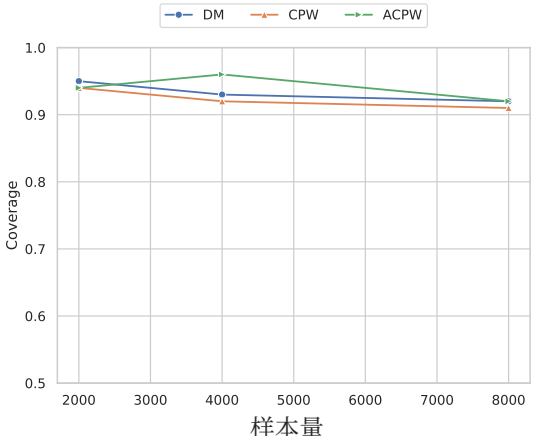
为了评估我们方法的稳健性，我们将倾向得分模型（使用顶帽核的核密度估计器）与直接模型（梯度提升树）结合起来。对于样本量为 2000、4000 和 8000 的情况，我们在 2000 次模拟运行中检验置信区间覆盖率，名义覆盖率为 90%。

使用 $r = 1$ 得到的结果如图6所示，分别对应行为策略和目标策略。我们检验了 DM、CPW 和 ACPW 的置信区间。在行为策略和目标策略下，$r = 0.5$ 的结果如图7所示。对于考虑不平等的剩余，我们检验了 DM 和 IA-ACPW 的置信区间。

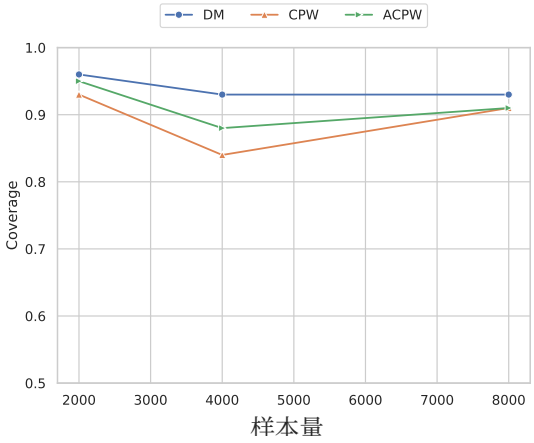
对于行为和目标策略，IA-ACPW估计量的经验覆盖率始终在90%的目标值附近。无论是标准的平均剩余（$r = 1$），还是带有 $r = 0.5$的不平等厌恶变体，这些区间都能保持准确。即使使用梯度提升等灵活模型，这些区间仍能维持适当覆盖率；这对许多应用至关重要。这样一来，企业或监管机构便能构造一个（$1 - \alpha$）置信区间 $[\hat{\mathcal{S}} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{\Sigma}/n}]$，并有充分把握认为，真实的消费者福利影响位于该范围内。

8.4 汽车贷款

为展示我们框架的实用价值，我们将其应用于一份关于个性化定价的真实数据集。我们使用了哥伦比亚大学的 CPRM-12-001：在线汽车贷款数据集，该数据集全面收录了2002年7月至2004年11月的美国汽车贷款申请。数据集包含申请日期、申请人要求的贷款条款（金额

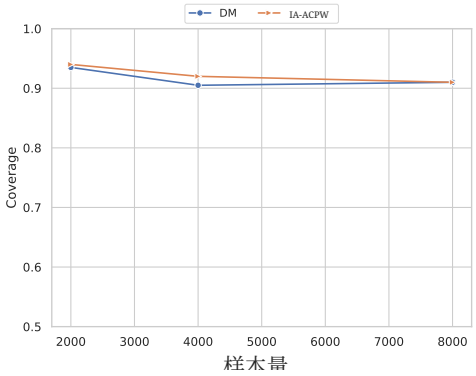


(a) 行为

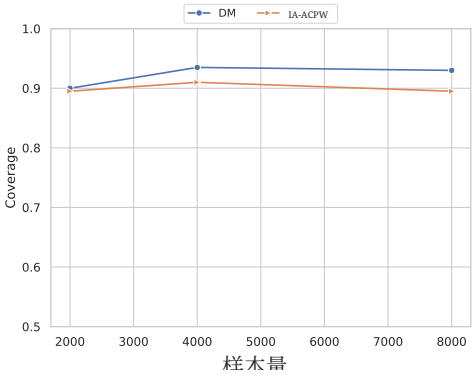


(b) 目标

图6： $r = 1$时的置信区间。



(a) $r = 0.5$ 行为



(b) $r = 0.5$ 目标

图7： $r = 0.5$的置信区间。

以及贷款期限）、申请人个人信息（例如，所在州、汽车类型、FICO评分）、审批状态、获批贷款的年利率（APR），以及最终是否签署了合同。我们剔除了“11/16/2004”之前的最后45天的数据，因为这些记录的结果可能不准确（Ban 和 Keskin 2021）。

价格按未来付款的净现值减去贷款金额计算：

$$p = Monthly\ Payment \times \sum_{\tau=1}^{Term} (1 + Rate)^{-\tau} - Loan\ Amount,$$

其中，$Rate$ 是月度伦敦银行同业拆借利率。按照Ban 和 Keskin (2021)的做法，我们将价格范围设为 $[0, 7500]$。

我们为每项贷款申请定义一组特征。连续预测变量包括申请人的FICO评分、以月为单位的贷款期限、获批贷款金额、一个月期利率以及相对竞争对手利率。这些特征经过标准化处理，使其均值为零、标准差为一。分类预测变量包括贷款期限类别、合作伙伴二元变量、汽车类型、申请类型、客户等级和所在州。这些变量通过标签编码转换为数值表示。最终的特征向量记为 $\boldsymbol{x}$，由标准化后的连续特征和编码后的分类特征拼接而成。

我们根据申请人的信用记录（良好信用与不良信用，以FICO评分作为代理指标）以及其所在州的政治倾向（红州与蓝州），将申请人划分为四组。红州和蓝州的划分依据是各州在2000年美国总统选举中的政治倾向。蓝州包括：加利福尼亚州、康涅狄格州、哥伦比亚特区、特拉华州、夏威夷州、爱荷华州、伊利诺伊州、马萨诸塞州、马里兰州、缅因州、密歇根州、明尼苏达州、新泽西州、新墨西哥州、纽约州、俄勒冈州、宾夕法尼亚州、罗得岛州、佛蒙特州、华盛顿州和威斯康星州。红州则定义为最终数据集中包含的所有其他州。这种分类使我们能够比较不同经济和政治环境下的策略影响。这些不同群体的价格分布如图8所示。尽管历史行为策略显然会为低FICO评分组设定更高的价格，但在同一信用层级内，红州与蓝州所分配的价格并无明显差异。

我们将行为策略（贷款机构的历史定价）下的剩余，与基于数据训练、旨在最大化贷款机构收入的个性化定价策略下的剩余进行比较。首先，我们使用行为策略下的ACPW估计量，为每个群体估计基准的考虑不平等的剩余；这里的行为策略指原始数据集中由保险公司规定的历史价格。接下来，我们展示不平等厌恶参数 $r = 0.5$下的结果。随后，我们评估基于历史数据训练的个性化定价策略所产生的影响。需求函数使用梯度提升树进行训练。然后，通过对预期收入 $p \cdot \mu(x, p)$应用softmax变换，从由五个价格点组成的离散网格中抽取最终价格。结果如表1所示。

8.4.1 实证观察

我们将 ACPW 和 IA-ACPW 估计量应用于汽车贷款数据集，以量化算法个性化对福利的影响，以及总剩余与公平性之间的权衡。我们的分析首先考察总消费者剩余（$r = 1$），并重点关注

历史行为策略下不同地区和信用状况群体之间消费者福利的差异。对于良好信用群体，红州的消费者剩余估计值为 $1,313.00 \pm 47.40$，比蓝州观察到的 $1,204.61 \pm 43.79$ 高约 9%。这种地区溢价在不良信用群体中依然存在，红州的剩余比蓝州高出 7% 以上（952.59 ± 36.12 对比 888.20 ± 36.03）。如图8所示，由于这些州的价格分布相似，这些持续存在的福利差距很可能源于不同地区消费者支付意愿分布的内在差异。

接下来，我们分析引入个性化定价算法的影响。每个人口统计群体的消费者剩余都减少了，其中红州、良好信用群体的降幅最大，约为26%（$1,313.00 \to $965.44），这意味着总剩余显著减少。然而，尽管总剩余有所损失，福利分配却变得更加平等。在历史策略下，最具优势的群体（红州、良好信用）的剩余是最不具优势群体（蓝州、不良信用）的1.48倍。采用个性化定价后，这一比率缩小至1.30倍。这种总剩余下降而不平等程度降低的动态，与Dubé 和 Misra(2023年)的研究发现相似，表明个性化定价可以发挥累进转移机制的作用。

为捕捉最脆弱消费者的细微差异，我们采用考虑不平等的剩余指标（$r = 0.5$）。对于历史策略，各群体之间的排序与标准剩余保持一致，但表现最好（红州、良好信用）与最差（蓝州、不良信用）的结果之间的相对差距明显较小，比例为 1.22，而非 1.48。这表明，无论所属群体标签如何，这些人口统计群体中处境最差的个体所获得的剩余水平本就更加接近。此外，与标准剩余的降幅（红州、不良信用为 12%，红州、良好信用为 26%）相比，个性化定价下考虑不平等的剩余降幅明显较小（红州、不良信用为 7%，红州、良好信用和蓝州、良好信用约为 17%）。这表明，个性化定价造成的剩余损失主要来自高估值客户，而他们在这一指标中的权重较低。因此，在个性化定价下，表现最好与最差者之间考虑不平等的剩余相对差距进一步缩小，比例降至仅 1.11。这进一步表明，个性化定价发挥了均衡作用：它从顶端不成比例地攫取价值，以拉平福利分布，从而保护处境最差者的相对地位。然而，这种不平等程度的降低必须与另一事实权衡：即使按照考虑不平等的剩余衡量，所有群体的绝对剩余都在下降。

	蓝州，良好信用	蓝州，不良信用	红州，良好信用	红州，不良信用
历史剩余	1204.61 ± 43.79	888.20 ± 36.03	1313.00 ± 47.40	952.59 ± 36.12
个性化剩余	892.37 ± 35.79	740.71 ± 30.88	965.44 ± 38.99	839.68 ± 32.16
历史剩余（$r = 0.5$）	29.92 ± 0.57	25.56 ± 0.54	31.26 ± 0.60	26.66 ± 0.56
个性化下的剩余（$r = 0.5$）	24.57 ± 0.41	23.33 ± 0.37	25.82 ± 0.44	24.67 ± 0.36

表1：通过 ACPW 进行的剩余估计（含 90% 置信区间）以及个性化算法下的剩余。

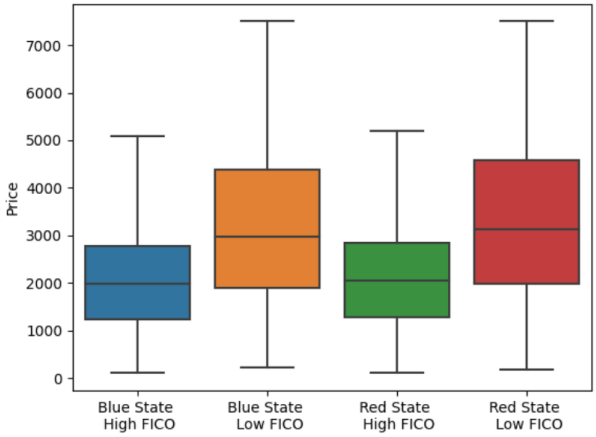


图8：价格分布

9 结论与管理启示

本文提出一种利用交易数据衡量消费者福利的数据驱动方法。我们的累积权重框架提供了一种稳健机制，可用于审计定向定价策略的经济和分配后果，即使需求估计难以实现也是如此。

我们为三种主要估计量奠定了理论基础：累积倾向加权、直接方法插件以及增广累积倾向加权变体，并证明在不同假设下，这三种方法均可达到半参数效率界。尤其是，ACPW估计量为实践者提供了“两全其美”的解决方案：只要需求模型或历史定价策略中的任意一个是一致的，它就能保持一致性。此外，即使使用灵活的机器学习方法以较慢的非参数速率估计干扰函数，它仍能实现快速收敛。我们还将这一框架扩展至不平等感知型剩余度量，从而能够通过可调节的不平等厌恶参数，开展优先考虑弱势客户群体的福利评估。

对于定价经理而言，ACPW估计量是降低算法部署风险的关键内部审计工具。经理如今可以量化特定定价策略对不同客户群体的影响，从而在潜在的公平性问题或差别影响演变为法律纠纷或声誉危机之前，主动识别这些问题。此外，在政策设计阶段整合这些方法，使企业能够模拟新定价策略对平均剩余及其分布的影响。这有助于制定更均衡的长期策略，既优化盈利能力，又维护健康、可持续的客户生态系统。

从监管角度来看，本研究旨在弥合个性化定价日益复杂与可供公共监督使用的工具有限之间的关键鸿沟。ACPW估计量为联邦贸易委员会等机构提供了一种在统计上可靠的方法，用于评估当前定价实践是否损害消费者或特定受保护群体的利益。通过对剩余设定可信的上界和下界，即使价格变动稀少，监管机构也能据实作出判断，从而避免

要求企业开展具有商业风险或无利可图的实验。归根结底，这些基于累积权重的方法提供了透明且可供监管机构使用的工具，用于诊断现代算法定价格局所带来的社会和经济后果。

参考文献

Amine Allouah、Achraf Bahamou 和 Omar Besbes。有限样本下的收入最大化。载于第*22*届*ACM*经济学与计算会议论文集，第51–51页，2021年。Ali Aouad 和 Antoine D´esir。用神经网络表示随机效用选择模型。《管理科学》，2025年。Anthony B Atkinson等人。论不平等的测量。《经济理论杂志》，2(3):244–263，1970年。Mark Bagnoli 和 Ted Bergstrom。对数凹概率及其应用。《经济理论》，26 (2):445–469，2005年。Gah-Yi Ban。存在需求删失时数据驱动库存策略的置信区间。《运筹学》，68(2):309–326，2020年。Gah-Yi Ban 和 N Bora Keskin。借助机器学习实现个性化动态定价：高维特征与异质性弹性。《管理科学》，67(9):5549–5568，2021年。Heejung Bang 和 James M Robins。缺失数据与因果推断模型中的双重稳健估计。《生物统计学》，61(4):962–973，2005年。Abram Bergson。论社会福利的概念。《经济学季刊》，68(2):233–252，1954年。Steven T Berry 和 Philip A Haile。需求估计的基础。载于《产业组织手册》，第4卷，第1–62页。爱思唯尔，2021年。Dimitris Bertsimas 和 Nathan Kallus。从预测分析到处方分析。《管理科学》，66(3):1025–1044，2020年。Omar Besbes 和 Assaf Zeevi。在未知需求函数的情况下进行动态定价：风险界与近最优算法。《运筹学》*style>，57(6):1407–1420，2009*年。*Alina Beygelzimer* 和 *John Langford*。用于部分标签学习的偏移树。载于第*15*届*ACM SIGKDD*知识发现与数据挖掘国际会议论文集，第129–138页，2009年。Debopam Bhattacharya。离散选择的非参数福利分析。《计量经济学》，83(2):617– 649，2015年。Debopam Bhattacharya。离散选择的经验福利分析：一些一般性结果。《定量经济学》，9(2):571–615，2018年。Debopam Bhattacharya。经验福利分析的非参数方法。《经济文献杂志》，62(2):554–593，2024年。Zeyu Bian、Erica EM Moodie、Susan M Shortreed 和 Sahir Bhatnagar。动态治疗方案回归型估计中的变量选择。《生物统计学》，79(2):988–999，2023年。Zeyu Bian、Chengchun Shi、Zhengling Qi 和 Lan Wang。双重非齐次环境中的离策略评估。《美国统计学会杂志》，120(550):1102–1114，2025年。Max Biggs。基于交易数据的情境定价凸代理损失函数。*arXiv*预印本 *arXiv:2202.10944*，2022年。

Max Biggs、Ruijiang Gao 和 Wei Sun。基于观察性数据的离散情境定价损失函数。*arXiv*预印本 *arXiv:2111.09933*，2021年。Robert Bray、Robert Evan Sanders 和 Ioannis Stamatopoulos。扫描仪数据中的观测价格变动无法再现实验价格弹性。可见于 *SSRN 4899765*，2024年。Leo Breiman、Jerome Friedman、Richard A Olshen 和 Charles J Stone。分类与回归树。Chapman and Hall/CRC，2017年。Jinzhi Bu、David Simchi-Levi 和 Li Wang。基于删失数据的离线定价与需求学习。《管理科学》，2022年。Ningyuan Chen、Guillermo Gallego 和 Zhuodong Tang。利用二元选择森林对离散选择进行建模与估计。*arXiv*预印本 *arXiv:1908.01109*，2019年。Xi Chen、Zachary Owen、Clark Pixton 和 David Simchi-Levi。收益管理中个性化的统计学习方法。《管理科学》，68(3):1923–1941，2022年。Xiaohong Chen 和 Timothy M. Christensen。弱依赖和弱条件下级数估计量的一致收敛最优速率与渐近正态性。《计量经济学杂志》，188(2):447–465，2015年。doi: 10.1016/j.jeconom.2015.03.010。Xiaohong Chen 和 Zhengling Qi。离策略评估中非参数 q 函数估计的适定性与极小极大最优速率。载于国际机器学习会议，第3558–3582页。PMLR，2022年。Yi-Chun Chen 和 Velibor V Mi˘si´c。决策森林：一种对非理性选择进行建模的非参数方法。《管理科学》，68(10):7090–7111，2022年。Victor Chernozhukov、Denis Chetverikov、Mert Demirer、Esther Duflo、Christian Hansen、Whitney Newey 和 James Robins。用于治疗效应和结构参数的双重/去偏机器学习，2018年。Maxime C Cohen、Adam N Elmachtoub 和 Xiao Lei。具有公平性约束的价格歧视。《管理科学》，68(12):8536–8552，2022年。Peter Cohen、Robert Hahn、Jonathan Hall、Steven Levitt 和 Robert Metcalfe。利用大数据估计消费者剩余：以 Uber 为例。技术报告，美国国家经济研究局，2016年。Richard Cole 和 Tim Roughgarden。收入最大化的样本复杂度。载于第四十六届*ACM*计算理论研讨会论文集，第243–252页，2014年。John K Dagsvik 和 Anders Karlstr¨om。收入非线性的随机效用模型中的补偿变差与希克斯选择概率。《经济研究评论》，72(1):57–76，2005年。Jean-Pierre Dub´e 和 Sanjog Misra。个性化定价与消费者福利。《政治经济学杂志》，131(1):131–189，2023年。Miroslav Dud´ık、John Langford 和 Lihong Li。双重稳健策略评估与学习。载于第*28*届国际机器学习会议论文集，第1097–1104页，2011年。Miroslav Dud´ık、Dumitru Erhan、John Langford、Lihong Li 等人。双重稳健策略评估与优化。《统计科学》，29(4):485–511，2014年。Adam Elmachtoub、Vishal Gupta 和 Yunfan Zhao。个性化定价的平衡离策略评估。载于国际人工智能与统计会议，第10901–10917页。PMLR，2023年。Max H Farrell、Tengyuan Liang 和 Sanjog Misra。个体异质性的深度学习：自动推断框架。*arXiv*预印本 *arXiv:2010.14694*，2020年。

Max H Farrell、Tengyuan Liang和Sanjog Misra。用于估计与推断的深度神经网络。《计量经济学》，89(1):181–213，2021年。Kris Johnson Ferreira、Bin Hong Alex Lee和David Simchi-Levi。在线零售商的分析学：需求预测与价格优化。《制造与服务运营管理》，18 (1):69–88，2016年。Emily Flitter。保险公司寻求“合适”的客户，却被指控存在歧视。《纽约时报》，2023年10月。URL https://www.nytimes.com/2023/10/30/business/erie-insurance-lawsuit-maryland.html?searchResultPosition=2。访问日期：2024年8月5日。Stuart Geman和Chii-Ruey Hwang。通过筛法进行非参数极大似然估计。《统计学年鉴》，第401–414页，1982年。Bryan S Graham、Cristine Campos de Xavier Pinto和Daniel Egel。针对含缺失数据的矩条件模型的逆概率倾斜。《经济研究评论》，79(3):1053–1079，2012年。Aniko Hannak、Gary Soeller、David Lazer、Alan Mislove和Christo Wilson。衡量电子商务网站上的价格歧视与定向引导。载于《2014年互联网测量会议论文集》，第305–318页，2014年。Jerry A Hausman。精确的消费者剩余与无谓损失。《美国经济评论》，71 (4):662–676，1981年。Jerry A. Hausman和Whitney K. Newey。精确消费者剩余与无谓损失的非参数估计。《计量经济学》，63(6):1445–1476，1995年。Jerry A Hausman和Whitney K Newey。个体异质性与平均福利。《计量经济学》，84(3):1225–1248，2016年。Jerry A Hausman和Whitney K Newey。非参数福利分析。《经济学年度评论》，9(1):521–546，2017年。Miguel A Hern´an和James M Robins。因果推断，2010年。Joseph A Herriges和Catherine L Kling。随机效用模型中的非线性收入效应。《经济学与统计学评论》，81(1):62–72，1999年。Zhiyi Huang、Yishay Mansour和Tim Roughgarden。充分利用样本。《SIAM计算学杂志》，47(3):651–674，2018年。Srikanth Jagabathula和Paat Rusmevichientong。非参数联合品类与价格选择模型。《管理科学》，63(9):3128–3145，2017年。Nathan Kallus和Masatoshi Uehara。用于马尔可夫决策过程高效离策略评估的双重强化学习。《机器学习研究杂志》，21(167):1–63，2020年。Nathan Kallus和Angela Zhou。连续处理下的策略评估与优化。载于《国际人工智能与统计会议论文集》，第1243–1251页。PMLR，2018年。Nathan Kallus和Angela Zhou。个性化定价中的公平性、福利与公平。《2021年ACM公平性、问责性与透明度会议论文集》，第296–314页，2021a年。Nathan Kallus和Angela Zhou。未观测混杂下的极小极大最优策略学习。《管理科学》，67(5):2870–2890，2021b年。Edward H Kennedy。半参数双重稳健目标双重机器学习：综述。《精准医学统计方法手册》，第207–236页，2024年。K&L Gates。监控定价究竟是什么？FTC正试图弄清楚。2024年8月。URL https://www.klgates.com/What-Really-is-Surveillance-Pricing-The-FTC-is-Trying-to-Figure-it-Out-8-2-2024。访问日期：2024

-08-05.

加利福尼亚州议会。1995年性别税废除法案，1995年。URL https://leginfo.legislature.ca.gov/faces/codes_displaySection.xhtml?lawCode=CIV&sectionNum=51.6。《加利福尼亚州民法典》第51.6条。Arthur Lewbel和Krishna Pendakur。使用广义随机系数研究需求中的未观测偏好异质性。《政治经济学杂志》，125(4):1100–1148，2017年。Peng Liao、Zhengling Qi、Runzhe Wan、Predrag Klasnja和Susan A Murphy。平均奖励马尔可夫决策过程的批量策略学习。《统计年鉴》，50(6):3364，2022年。Rosa L Matzkin。非可分模型中的独立性条件：可观测与不可观测工具变量。《计量经济学杂志》，191(2):302–311，2016年。Daniel McFadden。定性选择行为的条件Logit分析。1972年。Daniel McFadden。概率选择的计量经济模型。《计量经济学应用中的离散数据结构分析》，198272，1981年。Rui Miao、Zhengling Qi、Cong Shi和Lin Lin。使用无效工具变量进行个性化定价：识别、估计与策略学习。arXiv预印本 arXiv:2302.12670，2023年。Mordor Intelligence。汽车市场规模、份额与行业报告2030，2025年。URL https://www.mordorintelligence.com/industry-reports/global-automotive-market。访问日期：2025-12- 30。Akshat Pandey和Aylin Caliskan。人工智能偏见对网约车经济中价格歧视算法的差别影响。载于《2021年AAAI/ACM人工智能、伦理与社会会议论文集》，第822–833页，2021年。Robert Phillips、A Serdar S¸im¸sek和Garrett Van Ryzin。现场定价裁量权的有效性：来自汽车贷款的实证证据。《管理科学》，61(8):1741–1759，2015年。James M Poterba。汽油税具有累退性吗？载于《环境与能源政策的分配效应》，第31–50页。Routledge，2017年。Min Qian和Susan A Murphy。个体化治疗规则的性能保证。《统计年鉴》，39(2):1180，2011年。Rupal Rana和Fernando S Oliveira。利用无模型强化学习在非平稳环境中进行实时动态定价。《欧米伽》，47:116–126，2014年。James M Robins。用于最优序贯决策的最优结构嵌套模型。载于《第二届西雅图生物统计学研讨会论文集：相关数据分析》，第189–326页。Springer，2004年。James M Robins、Andrea Rotnitzky和Lue Ping Zhao。当某些回归变量并非总能观测到时回归系数的估计。《美国统计学会杂志》，89(427):846–866，1994年。Paul R Rosenbaum和Donald B Rubin。倾向得分在因果效应观察性研究中的核心作用。《生物统计学》，70(1):41–55，1983年。Johannes Schmidt-Hieber。使用ReLU激活函数的深度神经网络进行非参数回归。《统计年鉴》，48(4):1875–1897，2020年。doi: 10.1214/19-AOS1875。Uri Shalit、Fredrik D Johansson和David Sontag。个体治疗效应估计：泛化界与算法。载于《国际机器学习会议论文集》，第3076–3085页，2017年。Chengchun Shi、Alin Fan、Rui Song和Wenbin Lu。用于最优动态治疗方案的高维A学习。《统计年鉴》，46(3):925，2018年。Chengchun Shi、Sheng Zhang、Wenbin Lu和Rui Song。价值函数的统计推断，适用于

无限时域设定下的强化学习。《皇家统计学会杂志B辑：统计方法学》，84(3):765–793，2022年。Benjamin Reed Shiller 等。使用大数据进行一级价格歧视。布兰代斯大学经济学系，2013年。Josh Sisco。拜登监管机构将着手调查不平等的在线定价方案，2024年7月。URL https://www.politico.com/news/2024/07/19/individualized-pricing-ftc-concerns-00167913。访问日期：2024年8月13日。Kenneth A. Small 和 Harvey S. Rosen。离散选择模型下的应用福利经济学。《计量经济学》，49(1):105–130，1981a。Kenneth A Small 和 Harvey S Rosen。离散选择模型下的应用福利经济学。《计量经济学：计量经济学会杂志》，第105–130页，1981b。Jingwen Tang、Zhengling Qi、Ethan Fang 和 Cong Shi。删失需求下基于特征的离线定价：一种因果推断方法。《制造与服务运营管理》，27(2):535–553，2025年。Anastasios A Tsiatis。半参数理论与缺失数据，第4卷。Springer，2006年。Aad W Van der Vaart。渐近统计学，第3卷。剑桥大学出版社，2000年。Yrj¨o O Vartia。基于普通需求函数高效衡量福利变化和补偿收入的方法。《计量经济学：计量经济学会杂志》，第79–98页，1983年。Michael P Wallace 和 Erica EM Moodie。通过加权最小二乘法进行双重稳健的动态治疗方案估计。《生物统计学》，71(3):636–644，2015年。Jiayi Wang、Zhengling Qi 和 Raymond KW Wong。用于离线强化学习的投影状态-动作平衡权重。《统计学年鉴》，51(4):1639–1665，2023年。Elizabeth Warren 和 Bob Casey。致克罗格公司董事长兼首席执行官 Rodney McMullen的信，2024年8月。URL https://www.warren.senate.gov/imo/media/doc/warren_casey_letter_to_kroger_re_electronic_shelving_and_price_gouging.pdf。访问日期：2024年12月12日。白宫。大数据与差异化定价，2015年。URL https://obamawhitehouse.archives.gov/ sites/default/files/whitehouse_files/docs/Big_Data_Report_Nonembargo_v2.pdf。访问日期：2024年8月5日。Robert D Willig。无需道歉的消费者剩余。《美国经济评论》，66(4):589–597，1976年。Zhengyuan Zhou、Susan Athey 和 Stefan Wager。离线多动作策略学习：泛化与优化。《运筹学》，71(1):148–183，2023年。

1 辅助结果

在全文中，我们使用 C 表示一个可逐行变化的通用常数 .

1.1 需求曲线下的面积与剩余表示的等价性

命题3. 在假设*1*下，

$$\mathbb{E}\big[(V-P)_+\big] = \mathbb{E}_X\left[\int_{p=0}^{\infty} \pi_D(p \mid X) \int_{z=p}^{\infty} \mu(X,z)\, dz\, dp\right].$$

证明。 该结果可通过仔细改变积分次序得出：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(V-P)_+\big] &= \mathbb{E}_X\left[\int_{p=0}^{\infty}\left(\int_{v=p}^{\infty}(v-p)\, f_{V|X}(v \mid X)\, dv\right)\pi_D(p \mid X)\, dp\right] \\
&\overset{s=v-p}{=} \mathbb{E}_X\left[\int_{p=0}^{\infty}\left(\int_{s=0}^{\infty} s\, f_{V|X}(s+p \mid X)\, ds\right)\pi_D(p \mid X)\, dp\right] \\
&= \mathbb{E}_X\left[\int_{p=0}^{\infty}\left(\int_{s=0}^{\infty}\int_{t=0}^{s} f_{V|X}(s+p \mid X)\, dt\, ds\right)\pi_D(p \mid X)\, dp\right] \\
&= \mathbb{E}_X\left[\int_{p=0}^{\infty}\left(\int_{t=0}^{\infty}\int_{s=t}^{\infty} f_{V|X}(s+p \mid X)\, ds\, dt\right)\pi_D(p \mid X)\, dp\right] \\
&= \mathbb{E}_X\left[\int_{p=0}^{\infty}\left(\int_{t=0}^{\infty} \bar{F}_{V|X}(t+p \mid X)\, dt\right)\pi_D(p \mid X)\, dp\right] \\
&\overset{p+t=z}{=} \mathbb{E}_X\left[\int_{p=0}^{\infty}\int_{z=p}^{\infty} \bar{F}_{V|X}(z \mid X)\, \pi_D(p \mid X)\, dz\, dp\right] \\
&= \mathbb{E}_X\left[\int_{p=0}^{\infty} \pi_D(p \mid X) \int_{z=p}^{\infty} \mu(X,z)\, dz\, dp\right].
\end{aligned}$$

最后一个等号用到了恒等式

$$\mu(X,z) = \mathbb{E}[Y \mid X, P=z] = \mathbb{P}[Y=1 \mid X, P=z] = \mathbb{P}[V > z \mid X, P=z].$$

¯根据假设1（$V \perp P \mid X$），我们有 $\mathbb{P}[V > z \mid X, P=z] = \mathbb{P}[V > z \mid X] = F_{V|X}$（$z \mid X$），至此证明完成。 □

1.2 辅助引理

Lemma 1（平衡性质）。 对于任意可测函数 ϕ（X, P），以下内容成立 ds

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \pi(p|X) \int_p^{\infty} \phi(X,a) da dp\right] = \mathbb{E}\left[\frac{F^{\pi}(P|X)}{\pi_D(P|X)}\phi(X,P)\right] \tag{24}$$

证明。

$\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \pi(p|X) \int_p^{\infty} \phi(X,a) da dp\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}\int_0^{a} \pi(p|X) dp\ \phi(X,a) da\right]$ (exchanging the integral order)

$= \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} F^{\pi}(p|X)\ \phi(X,p) dp\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \frac{F^{\pi}(p|X)}{\pi_D(p|X)} \pi_D(p|X) \phi(X,p) dp\right] = \mathbb{E}\left[\frac{F^{\pi}(P|X)}{\pi_D(P|X)}\phi(X,P)\right].$

至此，证明完毕。

□

引理2。 假设存在一个常数 c，使得 $\pi_D(p|x) > c$ 对所有 p 和 x 均成立，那么

$$\mathbb{E}\Big[(\widehat{h}(X) - h(X))^2\Big] \lesssim \mathbb{E}\big[(\widehat{\mu}(X,P) - \mu(X,P))^2\big],$$

其中

$$h(x) = \int F^{\pi}(p \mid x)\, \mu(x,p)\, dp, \qquad \widehat{h}(x) = \int F^{\pi}(p \mid x)\, \widehat{\mu}(x,p)\, dp.$$

证明。我们有

$$\mathbb{E}[(\widehat{h}(X) - h(X))^2] = \mathbb{E}\left[\left(\int F^{\pi}(p \mid X)\big(\widehat{\mu}(X,p) - \mu(X,p)\big)\, dp\right)^2\right].$$

利用恒等式 $F^{\pi}(p \mid X) = \frac{F^{\pi}(p|X)}{\pi_D(p|X)} \pi_D(p \mid X)$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\widehat{h}(X) - h(X))^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\int \frac{F^{\pi}(p \mid X)}{\pi_D(p \mid X)}\, \pi_D(p \mid X)\big(\widehat{\mu}(X,p) - \mu(X,p)\big)\, dp\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}_{P|X}\left[\frac{F^{\pi}(P \mid X)}{\pi_D(P \mid X)}\,(\widehat{\mu}(X,P) - \mu(X,P))\right]\right)^2\right].\end{aligned}$$

对条件期望应用詹森不等式可得

$$\mathbb{E}[(\widehat{h}(X) - h(X))^2] \le \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{P|X}\left[\left(\frac{F^{\pi}(P \mid X)}{\pi_D(P \mid X)}\right)^2 (\widehat{\mu}(X,P) - \mu(X,P))^2\right]\right].$$

根据强重叠条件，$\frac{F^{\pi}(P|X)}{\pi_D(P|X)} \le 1/c$，因此

$$\mathbb{E}[(\widehat{h}(X) - h(X))^2] \le 1/c^2\, \mathbb{E}\left[(\widehat{\mu}(X,P) - \mu(X,P))^2\right].$$

将常数吸收到 $\lesssim$记号中，即完成证明。 □

2 定理 2 的证明：推导消费者剩余的有效影响函数（r=1）

按照 Tsiatis (2006)，为了推导有效影响函数，我们首先求出切空间及其正交补。首先给出以下辅助引理，以便得到相应结果。

引理 3。 观测切空间的正交补为

$$\Lambda^{\perp} = \{M(X,P,Y) : E(M|P,X) = \mathbb{E}(M|V,X) = 0\},$$

任意可测函数 $M(X,P,Y)$。

证明。 我们首先刻画完整数据切空间。可以证明，完整数据切空间 Λ^F是 $\Lambda_X^F \bigoplus \Lambda_V^F \bigoplus \Lambda_P^F$，其中 $\bigoplus$是直和，

$$\begin{aligned}\Lambda_X^F &= \{g_X(X) : \mathbb{E}(g_X(X)) = 0\},\\ \Lambda_P^F &= \{g_P(P,X) : \mathbb{E}(g_P(P,X)|X) = 0\},\\ \text{and } \Lambda_V^F &= \{g_V(V,X) : \mathbb{E}(g_V(V,X)|X) = 0\}.\end{aligned}$$

根据Tsiatis (2006中的定理7.1，观测切空间 Λ 为 $\mathbb{E}(\Lambda^F|P,\ X,\ Y)$。因此，$\Lambda$ 中的一个元素可以写为

$$g_X(X) + g_P(P,X) + \mathbb{E}(g_V(V,X)|Y,P,X),$$

对于 $g_X(X) \in \Lambda_X^F$，$g_P(P,\ X) \in \Lambda_P^F$，以及 $g_V(V,\ X) \in \Lambda_V^F$，

记 $\Delta = \{M(X,P,Y) :\ E(M|P,X) = \mathbb{E}(M|V,X) = 0\}$，目标是证明 $\Delta = \Lambda^\perp$。我们先证明 $\Delta \subseteq \Lambda^\perp$。对于任意 $M(X,P,Y) \in \Delta$，$g_X(X) \in \Lambda_X^F$，$g_P(P,X) \in \Lambda_P^F$，以及 $g_V(V,X) \in \Lambda_V^F$，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[M(X,P,Y)\left(g_X(X) + g_P(P,X) + \mathbb{E}(g_V(V,X)|Y,P,X)\right)\right]\\ =&\mathbb{E}\left(M(X,P,Y)g_X(X)\right) + \mathbb{E}\left(M(X,P,Y)g_P(P,X)\right) + \mathbb{E}\left[M(X,P,Y)\mathbb{E}(g_V(V,X)|Y,P,X)\right]\\ =&\mathbb{E}(g_X(X)\underbrace{\mathbb{E}(M|X)}_{0}) + \mathbb{E}\left(\underbrace{\mathbb{E}(M|P,X)}_{0}g_P(P,X)\right) + \mathbb{E}\left(\underbrace{\mathbb{E}(M|V,X)}_{0}g_V(V,X)\right)\\ =&0.\end{aligned}$$

因此，$\Delta \subseteq \Lambda^\perp$。

接下来证明 $\Lambda^\perp \subseteq \Delta$. 对于任意函数 $h(X,\ P,\ Y) \in \Lambda^\perp$，令 $g_X(X) = \mathbb{E}(h|X)$，$g_P(P,X) = 0$，且 $g_V(V,\ X) = 0$。可以验证，$g_X \in \Lambda_X^F$, $g_P \in \Lambda_P^F$, $g_V \in \Lambda_V^F$。由于 $h(X,\ P,\ Y) \in \Lambda^\perp$，因此 $\mathbb{E}(\mathbb{E}^2(h|X)) = 0$ 当且仅当 $\mathbb{E}(h|X) = 0$。

现在令 $g_X(X) = \mathbb{E}(h|X)$、$g_P(P,X) = \mathbb{E}(h|P,X)$，且 $g_V(V,X) = 0$。可以验证，这样的构造也满足条件 $g_X \in \Lambda_X^F$, $g_P \in \Lambda_P^F$, $g_V \in \Lambda_V^F$。由于$h(X,P,Y) \in \Lambda^\perp$。由于 $h(X,P,Y) \in \Lambda^\perp$，我们有 $\mathbb{E}(\mathbb{E}^2(h|P,X)) = 0$，当且仅当 $\mathbb{E}(h|P,X) = 0$。

最后，令 $g_X(X) = \mathbb{E}(h|X)$、$g_P(P,\ X) = \mathbb{E}(h|P,\ X)$，且 $g_V(V,\ X) = \mathbb{E}(h|V,\ X)$。运用类似的论证，我们有 $\mathbb{E}(h|V,\ X) = 0$。

因此，$\Lambda^\perp = \{M(X,\ P,\ Y) :\ \mathbb{E}(M|P,\ X) = \mathbb{E}(M|V,\ X) = 0\}$. 证明至此完成 .

□

引理 4. 空间 $\{M(P,Y,X) :\ \mathbb{E}(M|V,X) = 0\}$ 中的任意元素都可以写成 $h(P,X) - E(h|X)$，这意味着该空间由仅依赖于 P 和 X的函数构成。

证明。 由于 Y是二元的，任意函数 $M(P,Y,X)$ 都可以写成 $YM_1(P,X) + (1-Y)M_0(P,X) = Y(M_1 - M_0) + M_0$。

对于任意满足 $\mathbb{E}(M|V,X)=0\}$ 的 $M\in\{M(P,Y,X)$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(Y(M_1-M_0)+M_0|V,X)=0,\\\Longrightarrow&\mathbb{E}(Y(M_1-M_0)|V,X)=\mathbb{E}(-M_0|V,X).\end{aligned}$$

由于 $A\perp\!\!\!\perp V|X$，我们有 $\mathbb{E}(M_0(P,\ X)|V,\ X)=\mathbb{E}(M_0|X)$。因此，我们有

$$\mathbb{E}(Y(M_1-M_0)|V,X)=\mathbb{E}(-M_0|X).$$

在上述方程中，左边是 V 和 X的函数，而右边仅是X的函数。因此，上述方程成立当且仅当 $M_1=M_0$，且 $\mathbb{E}(M_0(P,\ X)|X)=0$。证明至此完成。

□

引理 5. 观测切空间是整个希尔伯特空间。

证明. 由于空间 $\{M(P,\ Y,\ X):\mathbb{E}(M|V,\ X)=0\}$ 中的所有元素都仅是$P,\ X$的函数。我们有

$$\{M(P,Y,X):\mathbb{E}(M|V,X)=0\}\bigcap\{M(P,Y,X):\mathbb{E}(M|P,X)=0\}=\{0\}.$$

因此，观测切空间的正交补为 $\{0\}$，这意味着观测切空间就是整个希尔伯特空间。

□

证明. 根据引理 3、4 和 5，切空间是整个希尔伯特空间。因此，存在唯一的影响函数。此外，它就是有效影响函数。

接下来，我们从公式（4）的定义出发，给出消费者剩余的一种等价形式，以便于使用:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_{p=0}^{\infty}\pi(p\mid X)\int_{z=p}^{\infty}\mathbb{E}[Y\mid X,P=z]\,dz\,dp\right]=\mathbb{E}\left[\int_{p=0}^{\infty}\int_{z=p}^{\infty}\pi(p\mid X)\,\mu(X,z)\,dz\,dp\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_{z=0}^{\infty}\int_{p=0}^{z}\pi(p\mid X)\,\mu(X,z)\,dp\,dz\right]=\mathbb{E}\left[\int_{z=0}^{\infty}\Big(\int_{p=0}^{z}\pi(p\mid X)\,dp\Big)\,\mu(X,z)\,dz\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_{z=0}^{\infty}F^{\pi}(z\mid X)\,\mu(X,z)dz\right],\end{aligned}$$

其中 $\mu(X,z)=\mathbb{E}[Y|X,P=z]$ 和 $F^{\pi}(z|X)=\int_0^z\pi(s|X)ds$。我们研究两种情形：(i) 评估目标定价策略 π，此时 $F^{\pi}(z|X)$ 是一个固定且已知的权重函数；(ii) 评估未知的行为定价策略 π_D，此时 $F^{\pi_D}(z|X)$ 也是数据的函数。

情形 *1*：已知的目标定价策略 π

我们定义将要研究的目标估计量如下:

$$\Psi(\mathcal{P})\equiv\mathcal{S}(\pi)=\mathbb{E}_X\left[\int_{z=0}^{\infty}\mu(X,z)F^{\pi}(z|X)dz\right]$$

这是真实观测分布 $\mathcal{P}$ 的一个函数。我们遵循 *Kennedy (2024)* 中寻找有效影响函数（*EIF*）的方法和符号约定。具体而言，我们采用路径可微方法，定义参数子模型 $\mathcal{P}_t = (1-t)\mathcal{P} + t\delta_{\tilde{x},\tilde{y},\tilde{p}}$，其中 δ 是观测数据 $\{\tilde{x},\tilde{y},\tilde{p}\}$ 上的点质量。在此参数模型下，一个一般的联合分布为 $f_{X,Y,P,t}(x,y,p) = (1-t)f_{X,Y,P}(x,y,p) + t\delta_{\tilde{x},\tilde{y},\tilde{p}}$

路径导数为：

$$\frac{d\Psi(\mathcal{P}_t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int f_{X,t}(x)\int_{z=0}^{\infty}\mu_t(x,z)F^{\pi}(z|x)dzdx\Big|_{t=0}$$

首先，我们给出一般条件密度 $\frac{\partial f_t(a|x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \delta_{\tilde{x}}(x)\, f_X(x)\,(\delta_{\tilde{a}}(a) - f(a|x))$ 的导数恒等式。回顾一下，条件密度定义为 $f_t(a|x) = \frac{f_{x,a}(x,a)}{f_t(x)}$。边缘密度的路径导数为 $\frac{\partial f_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \delta_{\tilde{x}}(x) - f_X(x)$。联合密度的路径导数为 $\frac{\partial f_t(x,a)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \delta_{\tilde{x},\tilde{a}}(x,a) - f(x,a)$。在 $t=0$ 处应用商法则：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_t(a|x)}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \frac{f_X(x)\frac{\partial f_t(x,a)}{\partial t} - f(x,a)\frac{\partial f_t(x)}{\partial t}}{f_X(x)^2} \\
&= \frac{f_X(x)[\delta_{\tilde{x}}(x)\delta_{\tilde{a}}(a) - f(x,a)] - f(x,a)[\delta_{\tilde{x}}(x) - f_X(x)]}{f_X(x)^2} \\
&= \frac{\delta_{\tilde{x}}(x)f_X(x)\delta_{\tilde{a}}(a) - f(x,a)\delta_{\tilde{x}}(x)}{f_X(x)^2} \\
&= \frac{\delta_{\tilde{x}}(x)}{f_X(x)}\left(\delta_{\tilde{a}}(a) - \frac{f(x,a)}{f_X(x)}\right) \\
&= \frac{\delta_{\tilde{x}}(x)}{f_X(x)}(\delta_{\tilde{a}}(a) - f(a|x))
\end{aligned}$$

利用乘积法则和这一恒等式，导数可分解为两个主要部分：

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi(\mathcal{P}_t)}{dt}\Big|_{t=0} = &\int\left[\int_0^{\infty}\mu(x,z)F^{\pi}(z|x)dz\right](\delta_{\tilde{x}}(x) - f_X(x))dx \\
&+ \mathbb{E}_X\left[\int_0^{\infty}\frac{\partial\mu_t(X,z)}{\partial t}\Big|_{t=0}F^{\pi}(z|X)dz\right]
\end{aligned}$$

令 $h(X) = \int_0^{\infty}\mu(X,\ z)F^{\pi}(z|X)dz$。计算第一个积分可得 $h(\tilde{x}) - \Psi(\mathcal{P})$。对于第二项，我们对 $\mu(X,\ z) = f_{Y,\ P}(1,\ z|X)\,\pi_D(z|X)$ 应用商法则，其中该等式由贝叶斯定理（以及定义 $f_{Y,\ P}(1,\ z|X) = \mathbb{P}(Y=1,\ P=z|X)$）得出：

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi(\mathcal{P}_t)}{dt}\Big|_{t=0} = &\ h(\tilde{x}) - \Psi(\mathcal{P}) \\
&+ \mathbb{E}_X\left[\frac{\delta_{\tilde{x}}(X)}{f_X(X)}\int_0^{\infty}\frac{F^{\pi}(z|X)}{\pi_D(z|X)}(\delta_{\tilde{y},\tilde{p}}(1,z|X) - f_{Y,P}(1,z|X))dz\right. \\
&\left. - \frac{\delta_{\tilde{x}}(X)}{f_X(X)}\int_0^{\infty}\frac{f_{Y,P}(1,z|X)F^{\pi}(z|X)}{\pi_D(z|X)^2}(\delta_{\tilde{p}}(z|X) - \pi_D(z|X))dz\right]
\end{aligned}$$

在点质量 $(\tilde{y},\ \tilde{p})$ 处计算内部积分可得：

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi(\mathcal{P}_t)}{dt}\Big|_{t=0} &= h(\tilde{x}) - \Psi(\mathcal{P}) + \frac{F^{\pi}(\tilde{p}|\tilde{x})}{\pi_D(\tilde{p}|\tilde{x})}\tilde{y} - \int_0^{\infty} \frac{f_{Y,P}(1,z|\tilde{x})}{\pi_D(z|\tilde{x})} F^{\pi}(z|\tilde{x})dz \\ &\quad - \frac{\mu(\tilde{x},\tilde{p})F^{\pi}(\tilde{p}|\tilde{x})}{\pi_D(\tilde{p}|\tilde{x})} + \int_0^{\infty} \mu(\tilde{x},z)F^{\pi}(z|\tilde{x})dz \\ &= h(\tilde{x}) - \Psi(\mathcal{P}) + \frac{F^{\pi}(\tilde{p}|\tilde{x})}{\pi_D(\tilde{p}|\tilde{x})}(\tilde{y} - \mu(\tilde{x},\tilde{p})) - h(\tilde{x}) + h(\tilde{x})\end{aligned}$$

对于给定的泛函，有效影响函数为：

$$\frac{F^{\pi}(P|X)}{\pi_D(P|X)}(Y - \mu(X,P)) + h(X) - \Psi(\mathcal{P})$$

情形*2*：未知的行为定价策略 π_D

此情形与上述情形类似，但多了一项，该项对应于未知的$F^{\pi_D}(z|X) = \int_0^z \pi_D(s|X)ds$，它现在是 $\mathcal{P}$的一个泛函。

感兴趣的目标估计量定义如下：

$$\Psi(\mathcal{P}) \equiv \mathcal{S}(\pi_D) = \mathbb{E}_X\left[\int_{z=0}^{\infty} \mu(X,z)F^{\pi_D}(z|X)dz\right]$$

路径导数如下：

$$\frac{d\Psi(\mathcal{P}_t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int f_{X,t}(x)\int_{z=0}^{\infty}\mu_t(x,z)F_t^{\pi_D}(z|x)dzdx\Big|_{t=0}$$

利用乘积法则以及条件密度和累积分布的导数恒等式，导数可分解为三个主要部分：

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi(\mathcal{P}_t)}{dt}\Big|_{t=0} &= \int\left[\int_0^{\infty}\mu(x,z)F^{\pi_D}(z|x)dz\right](\delta_{\tilde{x}}(x) - f_X(x))dx \\ &\quad + \mathbb{E}_X\left[\int_0^{\infty}\frac{\partial\mu_t(X,z)}{\partial t}\Big|_{t=0}F^{\pi_D}(z|X)dz\right] \\ &\quad + \mathbb{E}_X\left[\int_0^{\infty}\mu(X,z)\frac{\partial F_t^{\pi_D}(z|X)}{\partial t}\Big|_{t=0}dz\right]\end{aligned}$$

第三项是相对于情形 (i) 中各项新增的项，也是我们将重点讨论的内容。回顾一下，条件累积分布定义为 $F_t^{\pi_D}(z|x) = {}^{H_t(x,\ z)}\,f_t(x)$，其中 $H_t(x,\ z) = \int_{-\infty}^{z} f_t(x,\sout{p})\sout{dp}$ 是联合累积质量。分母的路径导数为$\partial f_t(x)\ \partial t \quad = \delta_{\tilde{x}}(x) - f_X(x)$。分子的路径导数为 ${}^{\partial H_t(x,\ z)}\ {}_{\partial t} \quad = \delta_{\tilde{x}}(x)\mathbb{I}(\tilde{p} \leq$

$z) - H(x, z)$。在 $t = 0$ 处应用商法则：

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_t^{\pi_D}(z|x)}{\partial t} &= \frac{f_X(x)\frac{\partial H_t}{\partial t} - H(x,z)\frac{\partial f_t}{\partial t}}{f_X(x)^2} \\ &= \frac{f_X(x)[\delta_{\tilde{x}}(x)\mathbb{I}(\tilde{p} \le z) - H] - H[\delta_{\tilde{x}}(x) - f_X(x)]}{f_X(x)^2} \\ &= \frac{\delta_{\tilde{x}}(x) f_X(x)\mathbb{I}(\tilde{p} \le z) - H\delta_{\tilde{x}}(x)}{f_X(x)^2} \\ &= \frac{\delta_{\tilde{x}}(x)}{f_X(x)}\left(\mathbb{I}(\tilde{p} \le z) - \frac{H(x,z)}{f_X(x)}\right) \\ &= \frac{\delta_{\tilde{x}}(x)}{f_X(x)}(\mathbb{I}(\tilde{p} \le z) - F^{\pi_D}(z|x))\end{aligned}$$

令 $h_D(X) = \int_0^\infty \mu(X, z)F^{\pi_D}(z|X)dz$。计算第一个积分可得 $h_D(\tilde{x}) - \Psi(\mathcal{P})$；对于第二项，我们像之前一样，对 $\mu(X, z)$ 应用商法则。对于第三项，我们使用恒等式 $\frac{\partial F_t^{\pi_D}(z|X}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\delta_{\tilde{x}})}{(X) f_X(X)}(\mathbb{I}(\tilde{p} \le z) - F^{\pi_D}(z|X))$：

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi(\mathcal{P}_t)}{dt}\Big|_{t=0} &= h_D(\tilde{x}) - \Psi(\mathcal{P}) \\ &\quad + \mathbb{E}_X\left[\frac{\delta_{\tilde{x}}(X)}{f_X(X)}\int_0^\infty \frac{F^{\pi_D}(z|X)}{\pi_D(z|X)}(\delta_{\tilde{y},\tilde{p}}(1, z|X) - f_{Y,P}(1, z|X))dz\right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta_{\tilde{x}}(X)}{f_X(X)}\int_0^\infty \frac{f_{Y,P}(1, z|X)F^{\pi_D}(z|X)}{\pi_D(z|X)^2}(\delta_{\tilde{p}}(z|X) - \pi_D(z|X))dz\right] \\ &\quad + \mathbb{E}_X\left[\frac{\delta_{\tilde{x}}(X)}{f_X(X)}\int_0^\infty \mu(X, z)(\mathbb{I}(\tilde{p} \le z) - F^{\pi_D}(z|X))dz\right]\end{aligned}$$

在点质量 $(\tilde{y}, \tilde{p})$ 处计算内部积分可得：

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi(\mathcal{P}_t)}{dt}\Big|_{t=0} &= h_D(\tilde{x}) - \Psi(\mathcal{P}) + \frac{F^{\pi_D}(\tilde{p}|\tilde{x})}{\pi_D(\tilde{p}|\tilde{x})}\tilde{y} - \int_0^\infty \frac{f_{Y,P}(1, z|\tilde{x})}{\pi_D(z|\tilde{x})}F^{\pi_D}(z|\tilde{x}) - \frac{\mu(\tilde{x}, \tilde{p})F^{\pi_D}(\tilde{p}|\tilde{x})}{\pi_D(\tilde{p}|\tilde{x})}dz \\ &\quad - \int_0^\infty \mu(\tilde{x}, z)\mathbb{I}(\tilde{p} \le z)dz + \int_0^\infty \mu(\tilde{x}, z)F^{\pi_D}(z|\tilde{x})dz - \int_0^\infty \mu(\tilde{x}, z)F^{\pi_D}(z|\tilde{x})dz \\ &= h_D(\tilde{x}) - \Psi(\mathcal{P}) + \frac{F^{\pi_D}(\tilde{p}|\tilde{x})}{\pi_D(\tilde{p}|\tilde{x})}(\tilde{y} - \mu(\tilde{x}, \tilde{p})) + \int_{\tilde{p}}^\infty \mu(\tilde{x}, z)dz - h_D(\tilde{x})\end{aligned}$$

对于给定的泛函，有效影响函数为：

$$\frac{F^{\pi_D}(P|X)}{\pi_D(P|X)}(Y - \mu(X, P)) + \int_P^\infty \mu(X, z)dz - \Psi(\mathcal{P})$$

□

3 命题1的证明：双重稳健性

证明。我们通过考察模型设定的两种条件，证明 $\left|\widetilde{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi) - \mathcal{S}(\pi)\right| = o_p(1)$。

Case 1: 如果需求模型的设定正确，使得 $\sup_{x,p}|\widehat{\mu}(x, p) - \mu(x, p)| = o_p(1$).

我们将估计量分解为:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}(X_i,z)dzdp + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}(Y_i-\widehat{\mu}(X_i,P_i)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \mu(X_i,z)dzdp + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\bar{\pi}_D(P_i|X_i)}(Y_i-\mu(X_i,P_i)) + o_p(1)\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}[Y_i|X_i,P_i]=\mu(X_i,P_i)$，第二项的条件期望为:

$$\mathbb{E}\left[\frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\bar{\pi}_D(P_i|X_i)}(Y_i-\mu(X_i,P_i))\middle| X_i,P_i\right] = \frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\bar{\pi}_D(P_i|X_i)}\big(\mu(X_i,P_i)-\mu(X_i,P_i)\big)=0$$

因此，根据大数定律，第二项收敛于 0。第一项收敛于 $\mathcal{S}(\pi)$，从而即使 $\widehat{\pi}_D$ 收敛于错误的极限 $\bar{\pi}_D\neq\pi_D$，也能确保一致性。

情形*2*: 如果行为策略是正确设定的，即 $\sup_{x,\ p}|\widehat{\pi}_D(p|x)\ -\pi_D(p|x)|=o_p(1)$。我们重写估计量，以分离干扰需求模型$\mu$的影响:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}Y_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}(X_i,z)dzdp - \frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}\widehat{\mu}(X_i,P_i)\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\pi_D(P_i|X_i)}Y_i + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \pi(p|X)\int_p^\infty \bar{\mu}(X,z)dzdp - \frac{F^\pi(P|X)}{\pi_D(P|X)}\bar{\mu}(X,P)\right]}_{0 \text{ by Lemma 1}} + o_p(1)\end{aligned}$$

根据定理 1，剩余项收敛于 $\mathcal{S}(\pi)$。 □

4 定理 3 的证明：考虑不平等的剩余的有效影响函数推导

证明。 引理 5 证明，观测切空间构成整个希尔伯特空间。由于切空间就是整个希尔伯特空间，因此存在唯一的影响函数。此外，它就是有效影响函数。

接下来需要计算泛函 $\mathcal{S}^r(\pi)$的典范梯度。按照定理 2 证明中概述的步骤，可以用类似的方法推导该梯度。

情形 *1*: 目标策略评估。

将内部泛函定义如下:

$$h(X)=\int_0^\infty \pi(p|X)\int_p^\infty \mu(X,z)dzdp = \int_0^\infty \mu(X,z)F^\pi(z|X)dz,$$

其中 $\mathcal{S}^r(\pi)\ =\ \Psi(\mathcal{P})$。感兴趣的完整目标估计量为 $\Psi(\mathcal{P})\ =\ \mathbb{E}_X[h(X)^r]$。我们定义参数子模型 $\mathcal{P}_t=(1-t)\mathcal{P}+t\delta_{\tilde{x},\ \tilde{y},\ \tilde{p}}$。那么，完整泛函的路径导数为:

$$\left.\frac{d\Psi(\mathcal{P}_t)}{dt}\right|_{t=0} = (h(\tilde{x})^r-\Psi(\mathcal{P})) + \mathbb{E}_X\left[rh(X)^{r-1}\left.\frac{dh_t(X)}{dt}\right|_{t=0}\right]$$

我们关注条件导数 $\frac{dh_t(X)}{dt}$。由于 F^π 固定，只有 $\mu(X,\ z)$ 会发生扰动。注意，$\mu(X,\ z) = f_{Y,\ P}(1,\ z|X)\,\pi_D(z|X)$。对扰动应用链式法则：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\mu_t(X,z)}{dt}\right|_{t=0} &= \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{f_{Y,P,t}(1,z|X)}{\pi_{D,t}(z|X)}\right)\right|_{t=0} \\
&= \frac{\pi_D(z|X)\frac{d}{dt}f_{Y,P,t}(1,z|X) - f_{Y,P}(1,z|X)\frac{d}{dt}\pi_{D,t}(z|X)}{\pi_D(z|X)^2} \\
&= \frac{1}{\pi_D(z|X)}\left(\delta_{\tilde{y},\tilde{p}}(1,z|X) - f_{Y,P}(1,z|X)\right) \\
&\quad - \frac{\mu(X,z)}{\pi_D(z|X)}\left(\delta_{\tilde{p}}(z|X) - \pi_D(z|X)\right)
\end{aligned}$$

现在，将其代入 $h(X)$ 的积分中：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dh_t(X)}{dt}\right|_{t=0} &= \int_0^\infty \frac{d\mu_t(X,z)}{dt}F^\pi(z|X)dz \\
&= \mathbb{I}(X=\tilde{x})\left[\frac{F^\pi(\tilde{p}|X)}{\pi_D(\tilde{p}|X)}\tilde{y} - \int \mu(X,z)F^\pi(z|X)dz\right] \\
&\quad - \mathbb{I}(X=\tilde{x})\left[\frac{\mu(X,\tilde{p})F^\pi(\tilde{p}|X)}{\pi_D(\tilde{p}|X)} - \int \mu(X,z)F^\pi(z|X)dz\right]
\end{aligned}$$

注意，积分项 $\int \mu(X,\ z)F^\pi(z|X)dz$（等于 $h(X)$）相互抵消：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dh_t(X)}{dt}\right|_{t=0} &= \mathbb{I}(X=\tilde{x})\left[\frac{F^\pi(\tilde{p}|X)}{\pi_D(\tilde{p}|X)}\tilde{y} - \frac{\mu(X,\tilde{p})F^\pi(\tilde{p}|X)}{\pi_D(\tilde{p}|X)}\right] \\
&= \mathbb{I}(X=\tilde{x})\left[\frac{F^\pi(\tilde{p}|X)}{\pi_D(\tilde{p}|X)}(\tilde{y} - \mu(X,\tilde{p}))\right]
\end{aligned}$$

最后，将其代回 $\Psi(\mathcal{P})$ 的导数中，并与边际 X 变化项合并，得到的有效影响函数为：

$$h(X)^r - \mathcal{S}^r(\pi) + rh(X)^{r-1}\left[\frac{F^\pi(P|X)}{\pi_D(P|X)}(Y - \mu(X,P))\right]$$

情形2：行为策略评估。
目标估计量为 $\Psi(\mathcal{P}) = \mathbb{E}_X[h(X)^r]$，其中 $h(X) = \int_0^\infty \mu(X,\ z)F_P(z|X)dz$。路径导数为：

$$\left.\frac{d\Psi(\mathcal{P}_t)}{dt}\right|_{t=0} = (h(\tilde{x})^r - \Psi(\mathcal{P})) + \mathbb{E}_X\left[rh(X)^{r-1}\left.\frac{dh_t(X)}{dt}\right|_{t=0}\right]$$

现在，我们对两个未知分量 μ 和 F_P 应用乘积法则，推导条件导数 $\frac{dh}{dt}$：

$$\left.\frac{dh_t(X)}{dt}\right|_{t=0} = \underbrace{\int_0^\infty \frac{d\mu_t(X,z)}{dt}F_P(z|X)dz}_{\text{Part A: Outcome variation}} + \underbrace{\int_0^\infty \mu(X,z)\frac{dF_{P,t}(z|X)}{dt}dz}_{\text{Part B: CDF variation}}$$

计算 A 部分（如前所推导）：

$$\text{Part A} = \frac{\delta_{\tilde{x}}(X)}{f_X(X)} \left[\frac{F_P(\tilde{p}|X)}{\pi_D(\tilde{p}|X)} (\tilde{y} - \mu(X, \tilde{p})) \right]$$

评估 B 部分（使用累积分布函数 $\frac{dF_{P,t}\ z|X}{dt} = \delta_{\tilde{x}}() (X) f_X(X) (\mathbb{I}(\tilde{p} \leq z) - F_P(z|X))$ 的导数）：

$$\begin{aligned} \text{Part B} &= \frac{\delta_{\tilde{x}}(X)}{f_X(X)} \int_0^\infty \mu(X, z)(\mathbb{I}(\tilde{p} \leq z) - F_P(z|X))dz \\ &= \frac{\delta_{\tilde{x}}(X)}{f_X(X)} \left[\int_{\tilde{p}}^\infty \mu(X, z)dz - h(X) \right] \end{aligned}$$

将这些代回关于 X 的期望中，$\delta_{\tilde{x}}(X)\ f_X(X)$ 项会将表达式筛选到观测点 $\tilde{x}$:

$$\text{EIF}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}) = h(\tilde{x})^r - \Psi(\mathcal{P}) + rh(\tilde{x})^{r-1} \left[\frac{F_P(\tilde{p}|\tilde{x})}{\pi_D(\tilde{p}|\tilde{x})} (\tilde{y} - \mu(\tilde{x}, \tilde{p})) + \int_{\tilde{p}}^\infty \mu(\tilde{x}, z)dz - h(\tilde{x}) \right]$$

去掉波浪号，得到一般形式（X, Y, P）：

$$\text{EIF} = h(X)^r + rh(X)^{r-1} \left[\frac{(Y - \mu(X, P))F_P(P|X)}{\pi_D(P|X)} + \int_P^\infty \mu(X, z)dz - h(X) \right] - \mathcal{S}^r(\pi_D)$$

□

5 定理 4 的证明：目标策略的渐近正态性

我们将在以下各节证明 CPW、ACPW 和直接模型的结果。首先，我们陈述证明直接模型这一结果所需的假设，

5.1 直接法的假设

假设5（直接模型所需的假设）。*(i)* $\sqrt{\mathbb{E}[\widehat{\mu}\ (X, P)\ - \mu\ (X, P)\ ]^2} = o_p\ (1)$ 。*(ii)* 使用满足 *Donsker* 性质的函数类 $\mathcal{R}$ 估计需求函数。

（*iii*）估计的需求函数满足

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega(X_i, P_i) \left(\widehat{\mu}(X_i, P_i) - Y_i \right) = o_p(n^{-1/2}),\ \ where\ \omega(x, p) = \frac{F^\pi(p|x)}{\pi_D(p|x)}.$$

（*iv*）假设 $\pi_D\ (p\,|\,x)\ > c,$ 对所有 $p \in \mathcal{P}$ 以及某个常数 c 对每个 x 均成立。

假设5 (i) 相对宽松，因为它仅要求 $\widehat{\mu}$ 具有一致性，而不指定收敛速率。假设5 (ii) 对用于估计需求函数的函数类施加了复杂度（规模）约束。直观而言，Donsker 类是规模或复杂度不会过高的一类函数。这有助于确保随着我们收集更多数据，这些函数的平均行为趋于稳定。假设5 (iii) 较为宽松；当比值 $\omega(x,\ p)$ 属于函数类 $\mathcal{R}$ 时，该假设成立。例如，当 $\mathcal{R}$ 包含 H¨ older

光滑函数时，基于筛逼近方法的级数逻辑回归估计量（Geman 和 Hwang 1982年）满足假设 5 (iii)。

5.2 第（iii）部分的证明：用于目标策略评估的 CPW

证明。 记 $\epsilon_i \equiv Y_i - \mu(X_i, P_i)$。回顾一下，有效影响函数为

$$h(X_i) + \omega(X_i, P_i)(Y_i - \mu(X_i, P_i)) - \mathcal{S}(\pi) = h(X_i) + \omega(X_i, P_i)\epsilon_i - \mathcal{S}(\pi),$$

其中 $h(X) \equiv \int_0^\infty \pi(p|X) \int_p^\infty \mu(X, z)dzdp$.

那么，CPW 估计量 $S_{CPW}(\pi)$ 为

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_{CPW}(\pi) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\mu(X_i, P_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\phi(X_i, P_i)^\top \beta + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i + \underbrace{O(L^{-s/d})}_{o_p(n^{-1/2}) \text{ by Assumption 3}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \phi^\pi(X_i)^\top \beta + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i + o_p(n^{-1/2}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_0^\infty \pi(p|X_i) \int_p^\infty \mu(X_i, z)dzdp + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i + o_p(n^{-1/2}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(X_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega(X_i, P_i)\epsilon_i}_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi^\pi(\mathcal{D}_i) + S(\pi)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega(X_i, P_i)\epsilon_i + o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

因此，接下来只需证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega(X_i, P_i)\epsilon_i = o_p(n^{-1/2}).$$

根据 Vander Vaart (2000年) 中的引理19.24，注意到以下结论成立： $\widehat{w}$ 属于 Donsker 类，且满足

$$\sqrt{\mathbb{E}\left[\widehat{\omega}(X, P) - \omega(X, P)\right]^2} = o_p(1),$$

以及 $\mathbb{E}\left[(\widehat{\omega}(X, P) - \omega(X, P))\epsilon\right] = 0$。

重新整理各项可得 $\sqrt{n}(\widehat{S}_{CPW}(\pi) - S(\pi)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \psi^\pi(\mathcal{D}_i) + o_p(1)$。由于有效影响函数 $\psi^\pi(\mathcal{D}_i)$ 独立同分布、均值为零且方差有限，根据中心极限定理，这个主导项依分布收敛于一个方差为 $\text{Var}(\psi^\pi(\mathcal{D}))$ 的正态随机变量。证明完毕。

□

5.3 第（ii）部分的证明：目标策略的 ACPW

该证明基于交叉拟合技术（Chernozhukov 等人，2018），具体步骤如下。我们将数据划分为 K 个大小大致相等的折。对于每个观测i，仅使用不包含观测 $\widehat{\pi}_D$的$P \mid X$所在折的数据，训练干扰模型，即行为策略$\widehat{\mu}(X)$ 和奖励模型 $P(\ i)$，该折记为 $-k(i)$。由此得到估计量 $\widehat{\pi}_D^{-k(i)}$ ($P_i \mid X_i$) 和 $\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,\ P_i)$，并在留出观测 i上进行评估。该过程确保干扰估计与用于评估的数据相互独立，从而减轻过拟合并实现有效的统计推断。

给定通过交叉拟合得到的倾向得分模型 $\widehat{\pi}_D^{-k(i)}$ $(P_i|X_i)$ 和奖励模型 $\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,\ P_i)$，相应的经验估计量为

$$\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp + \frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i|X_i)}(Y_i - \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))\right] \tag{25}$$

令 Oracle 估计量为

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ACPW}}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^\infty \pi(p|X_i)\int_p^\infty \mu(X_i,\ z)dzdp + \frac{F^\pi(P_i|X_i)}{\pi_D(P_i|X_i)}(Y_i - \mu(X_i,P_i))\right] \tag{26}$$

我们有以下引理:

引理 6. 在定理 *4 (ii)* 的假设下，我们有

$$\left|\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi) - \bar{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi)\right| = o_p(n^{-1/2}),$$

其中 $\mathcal{S}_{\mathrm{ACPW}}(\pi)$ 表示 *oracle ACPW* 估计量。

证明。设 $\{I_k\}_{k=1}^K$为索引 $\{1,\ldots,n\}$的一个划分，使得 $|I_k| = n/K$。我们记作$n_k = |I_k|$。我们将差分解为:

$$\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi) - \bar{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi) = D_1(\pi) + D_2(\pi) + D_3(\pi)$$

其中每个 $D_j(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^K \sum_{i\in I_k}\psi_{j,\ i}$ 对应适当的被加项 $\psi_{j,\ i}$。

$$D_1(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i\in I_k}\underbrace{\left(\frac{F^\pi(P_i \mid X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i \mid X_i)} - \frac{F^\pi(P_i \mid X_i)}{\pi_D(P_i \mid X_i)}\right)(Y_i - \mu(X_i,P_i))}_{\psi_{1,i}}.$$

$$D_2(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i\in I_k}\underbrace{\left[\frac{F^\pi(P_i \mid X_i)}{\pi_D(P_i \mid X_i)}(\mu(X_i,P_i) - \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i)) - \int F^\pi(z \mid X_i)(\mu(X_i,z) - \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z))dz\right]}_{\psi_{2,i}}$$

$$D_3(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i\in I_k}\underbrace{\left(\frac{F^\pi(P_i \mid X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i \mid X_i)} - \frac{F^\pi(P_i \mid X_i)}{\pi_D(P_i \mid X_i)}\right)\left(\mu(X_i, P_i) - \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i, P_i)\right)}_{\psi_{3,i}}.$$

项 $D_1(\pi)$。对于固定的一折 k，令 $\mathcal{D}_k^c$ 表示用于估计 $\widehat{\pi}_D^{-k(i)}$ 的数据。对于 $i \in I_k$，被加项如下：

$$\psi_{1,i} = \left(\frac{F^\pi(P_i \mid X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i \mid X_i)} - \frac{F^\pi(P_i \mid X_i)}{\pi_D(P_i \mid X_i)}\right)(Y_i - \mu(X_i, P_i))$$

给定 $\mathcal{D}_k^c$，各项 $\{\psi_{1,i}\}_{i\in I_k}$ 相互独立同分布，且：

$$\mathbb{E}[\psi_{1,i} \mid \mathcal{D}_k^c] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\psi_{1,i} \mid X_i, P_i, \mathcal{D}_k^c] \mid \mathcal{D}_k^c\right] = 0$$

因为 $\mathbb{E}[Y_i - \mu(X_i,\ P_i) \mid X_i,\ P_i] = 0$。$D_1(\pi)$ 的方差满足：

$$\mathrm{Var}(D_1(\pi)) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{K}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i\in I_k}\psi_{1,i}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{K} n_k \mathbb{E}[\psi_{1,i}^2].$$

在 $\widehat{\pi}_D^{-k(i)}$ 的 L_2-一致性和有界重叠性条件下，$\mathbb{E}[\psi_{1,i}^2] = o(1)$。因此，$\mathrm{Var}(D_1(\pi)) = o(n^{-1})$，由切比雪夫不等式可得 $D_1(\pi) = o_p(n^{-1/2})$。

项 $D_2(\pi)$。对于 $i \in I_k$，定义：

$$\psi_{2,i} = \frac{F^\pi(P_i \mid X_i)}{\pi_D(P_i \mid X_i)}\Delta\mu_i - \int F^\pi(z \mid X_i)\Delta\mu(X_i, z)dz$$

其中 $\Delta\mu(X_i,\ \cdot) = \mu(X_i,\ \cdot) - \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,\ \cdot)$。根据平衡性质（引理1）：

$$\mathbb{E}\left[\frac{F^\pi(P_i \mid X_i)}{\pi_D(P_i \mid X_i)}\Delta\mu_i \;\middle|\; X_i, \mathcal{D}_k^c\right] = \int F^\pi(z \mid X_i)\Delta\mu(X_i, z)dz$$

因此 $\mathbb{E}[\psi_{2,i} \mid \mathcal{D}_k^c] = 0$。与步骤1类似，交叉拟合确保这些量在$i \in I_k$之间不相关。鉴于 $\widehat{\mu}$ 的 L_2-一致性，我们还有 $\int F^\pi(z \mid X_i)\widehat{\mu}(X_i,\ z)dz$ 的 L_2-一致性（引理2）。同样，通过对第一项进行界定，我们有 $\mathbb{E}[\psi_{2,i}^2] = o(1)$，从而得到 $D_2(\pi) = o_p(n^{-1/2})$。

项 $D_3(\pi)$。这是“乘积”误差项。对于每一折 k：

$$|D_{3,k}(\pi)| \le \left\|\frac{F^\pi}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}} - \frac{F^\pi}{\pi_D}\right\|_{L_{2,P_k}} \left\|\mu - \widehat{\mu}^{-k(i)}\right\|_{L_{2,P_k}}$$

其中 $L_{2,\ P_k}$ 表示在第 k 折上的经验 L_2 范数。假设 $\|\widehat{\mu} - \mu\|_{L_2}$ =

$O_p(n^{-\alpha_1})$ 和 $\|\widehat{\omega}-\omega\|_{L_2}=O_p(n^{-\alpha_2})$，我们有：

$$|D_3(\pi)|\leq\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{n}O_p(n^{-(\alpha_1+\alpha_2)})=O_p(n^{-(\alpha_1+\alpha_2)})$$

由于 $\alpha_1+\alpha_2>1/2$，可得 $D_3(\pi)=o_p(n^{-1/2})$。

该结果由 $D_1(\pi)+D_2(\pi)+D_3(\pi)=o_p(n^{-1/2})$ 得出。

观察 Oracle 估计量 $\mathcal{S}_{\mathrm{ACPW}}(\pi)$ 的定义可知，它恰好等于有效影响函数的样本均值加上真实参数：

$$\bar{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi)=\mathcal{S}(\pi)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi^{\pi}(\mathcal{D}_i)$$

其中 $\psi^{\pi}(\mathcal{D}_i)$ 是均值为零、方差为 $\Sigma(\pi)=\mathrm{Var}(\psi^{\pi}(\mathcal{D}))$ 的独立同分布随机变量。根据中心极限定理，$\sqrt{n}(\bar{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi)-\mathcal{S}(\pi))\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,\Sigma(\pi))$。根据斯卢茨基定理，由于经验估计量与 Oracle 估计量之间的差为 $o_p(n^{-1/2})$，因此经验估计量 $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi)$ 具有相同的渐近分布：

$$\sqrt{n}(\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi)-\mathcal{S}(\pi))\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,\Sigma(\pi)).$$

□

5.4 第 (iii) 部分的证明：目标策略的直接模型

证明。 直接方法估计量 $S_{DM}(\pi)$ 由以下方式得到

$$\widehat{S}_{DM}(\pi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{h}(X_i),$$

其中

$$\widehat{h}(x)=\int_0^{\infty}\pi(p|x)\int_p^{\infty}\widehat{\mu}(x,a)dadp.$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\widehat{S}_{DM}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{h}(X_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i) \\
=\ & \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{h}(X_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i) - \mathbb{E}\left[\widehat{h}(X) - h(X)\right]}_{o_p(n^{-1/2}) \text{ by Lemma 19.24 in Van der Vaart (2000)}} + \mathbb{E}\left[\widehat{h}(X) - h(X)\right] \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i) \\
=& \mathbb{E}\left[\widehat{h}(X) - h(X)\right] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i) + o_p(n^{-1/2}) \\
=& \mathbb{E}\left[\omega(X,P)\left(\widehat{\mu}(X,P) - \mu(X,P)\right)\right] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i) + o_p(n^{-1/2}),
\end{aligned}
$$

其中，最后一个等式直接由引理1中的公式（24）得出。记为 $\epsilon_i \equiv Y_i - \mu(X_i,\ P_i)$。于是可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\omega(X,P)\left(\widehat{\mu}(X,P) - \mu(X,P)\right)\right] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i) + o_p(n^{-1/2}) \\
=& \underbrace{\mathbb{E}\left[\omega(X,P)\left(\widehat{\mu}(X,P) - \mu(X,P)\right)\right] - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\left(\widehat{\mu}(X_i,P_i) - \mu(X_i,P_i)\right)}_{o_p(n^{-1/2}) \text{ by Lemma 19.24 in Van der Vaart (2000)}} \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\left(\widehat{\mu}(X_i,P_i) - \mu(X_i,P_i)\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i) + o_p(n^{-1/2}) \\
=& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\left(\widehat{\mu}(X_i,P_i) - \mu(X_i,P_i)\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i) + o_p(n^{-1/2}) \\
=& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\left(\widehat{\mu}(X_i,P_i) - Y_i + \epsilon_i\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i) + o_p(n^{-1/2}) \\
=& \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\left(\widehat{\mu}(X_i,P_i) - Y_i\right)}_{o_p(n^{-1/2}) \text{ by Assumption 5}} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\epsilon_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i)}_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi^{\pi}(\mathcal{D}_i) + S(\pi)} + o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\widehat{S}_{DM}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi^{\pi}(\mathcal{D}_i) + o_p(n^{-1/2}).
$$

由于有效影响函数 $\psi^{\pi}(\mathcal{D}_i)$ 独立同分布、均值为零且方差有限，中心极限定理表明，该主导项依分布收敛于一个方差为 $\mathrm{Var}(\psi^{\pi}(\mathcal{D}))$ 的正态随机变量。至此，证明完毕。

□

6 行为策略的渐近正态性

本节展示行为剩余估计的结果。为保持简洁，省略了遵循标准步骤或重复先前论证的证明。

由于行为策略 π_D 未知，累积分布函数 $F^{\pi_D}(p|x)$ 也必须根据数据进行估计。因此，估计权重函数定义为 $\widehat{\omega}(p|x) = \widehat{F}^{\pi_D}(p|x)\,\widehat{\pi}_D(p|x)$。为方便起见，我们继续将该比率记为 $\widehat{\omega}$，以体现它作为真实比率的插件估计量的作用。现在，我们为 CPW 估计量引入以下假设。

假设 6（*CPW* 所需的假设）。（*i*） $\sqrt{\mathbb{E}\left[\widehat{\omega}(X,P) - \omega(X,P)\right]^2} = o_p(1)$，其中 $\omega(x,p) \equiv F^{\pi_D}(p|x)\,\pi_D(p|x)$，且 $\widehat{\omega}(x,p) \equiv \widehat{F}^{\pi_D}(p|x)\,\widehat{\pi}_D(p|x)$ 是 $\omega(x,p)$ 的估计量。（*ii*）使用满足 *Donsker* 性质的函数类来估计比率 $\widehat{\omega}$。（*iii*）存在基函数 $\phi(x,p) \in \mathbb{R}^L$ 和向量 $\beta \in \mathbb{R}^L$，使得

$$\sup_{x,p} |\mu(x,p) - \phi(x,p)^\top \beta| = O(L^{-s/d}), \tag{27}$$

其中 s是一个固定的正常数。
(iv) 估计的 *CPW* 权重满足

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int_{P_i} \phi(X_i, z)dz - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widehat{\omega}(X_i, P_i)\phi(X_i, P_i) \right\|_2 = o_p(n^{-1/2}),$$

其中 $\phi(\cdot,\cdot)$ 是满足方程 (27) 的基函数。

接下来，我们给出行为策略下的渐近正态性结果。

定理 6. 假设定理 *3* 中的假设成立，则有以下结果：*(i)* 假设假设 *6* 成立，并进一步假设基函数的数量 L满足 $L \gg n^{d/2s}$，则 *CPW* 估计量 $\widehat{\mathcal{S}}_{CPW}(\pi_D)$ 达到半参数效率界，

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\mathcal{S}}_{CPW}(\pi_D) - \mathcal{S}(\pi_D)\right) \to \mathcal{N}\left(0,\, Var[\psi^{\pi_D}(\mathcal{D})]\right).$$

(ii) 在假设 *7* 下，*ACPW*估计量 $\mathcal{S}_{ACPW}(\pi_D)$ 达到半参数效率界：

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi_D) - \mathcal{S}(\pi_D)\right) \to \mathcal{N}\left(0,\, Var[\psi^{\pi_D}(\mathcal{D})]\right).$$

(iii) 在假设*5*下，*DM* 估计量 $\mathcal{S}_{DM}$（π_D）达到了半参数效率界，

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\mathcal{S}}_{DM}(\pi_D) - \mathcal{S}(\pi_D)\right) \to \mathcal{N}\left(0,\, Var[\psi^{\pi_D}(\mathcal{D})]\right),$$

其中 $\psi^{\pi_D}(\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{S}(\pi_D)$的有效影响函数。

6.1 行为策略的 CPW 证明

证明。 记为 $\epsilon_i \equiv Y_i - \mu(X_i, P_i)$。回顾一下，有效影响函数为

$$g(X_i, P_i) + \omega(X_i, P_i)(Y_i - \mu(X_i, P_i)) - S(\pi_D) = g(X_i, P_i) + \omega(X_i, P_i)\epsilon_i - S(\pi_D),$$

其中 $g(X, P) \equiv \int_P^\infty \mu(X, z)dz$.

那么，CPW 估计量 $\widehat{S}_{CPW}(\pi_D)$ 为

$$\begin{aligned}
&\widehat{S}_{CPW}(\pi_D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\mu(X_i, P_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\phi(X_i, P_i)^\top \beta + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i + \underbrace{O(L^{-s/d})}_{o_p(n^{-1/2}) \text{ by Assumption 6}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_{P_i} \phi(X_i, z)^\top \beta dz + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i + o_p(n^{-1/2}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_{P_i}^\infty \mu(X_i, z)dz + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i + o_p(n^{-1/2}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(X_i, P_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega(X_i, P_i)\epsilon_i}_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \psi^{\pi_D}(\mathcal{D}_i) + S(\pi)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega(X_i, P_i)\epsilon_i + o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

因此，剩下要证明的是

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}(X_i, P_i)\epsilon_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega(X_i, P_i)\epsilon_i = o_p(n^{-1/2}).$$

根据 Vander Vaart (2000年) 中的引理19.24，通过注意到 $\widehat{w}$ 属于 Donsker 类且满足

$$\sqrt{\mathbb{E}\left[\widehat{\omega}(X, P) - \omega(X, P)\right]^2} = o_p(1),$$

并且 $\mathbb{E}\left[\widehat{\omega}(X, P) - \omega(X, P))\epsilon\right] = 0$。

重新整理各项可得 $\sqrt{n}(\widehat{S}_{CPW}(\pi_D) - S(\pi_D)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \psi^{\pi}(\mathcal{D}_i) + o_p(1)$。由于有效影响函数 $\psi^{\pi_D}(\mathcal{D}_i)$ 是均值为零且方差有限的独立同分布随机变量，中心极限定理表明，该主导项依分布收敛于方差为 $\mathrm{Var}(\psi^{\pi_D}(\mathcal{D}))$ 的正态随机变量。证明完毕。

□

6.2 行为策略的 ACPW 证明

假设 7 （ACPW 所需的假设）。 假设 $\pi_D(p \mid x) > c$，对所有 $p \in \mathcal{P}$ 和每个 x 均成立，其中常数为 c。假设需求函数和行为策略的估计量通过交叉拟合程序构造，并且达到

以下收敛速率：

$$\sqrt{\mathbb{E}[(\widehat{\mu}(X,P)-\mu(X,P))^2]}=O_p(n^{-\alpha_1}),\ \textit{and}\ \sqrt{\mathbb{E}[(\widehat{\omega}(X,P)-\omega(X,P))^2]}=O_p(n^{-\alpha_2}),\quad (28)$$

其中 α_1、$\alpha_2>0$ 和 $\alpha_1+\alpha_2>1/2$。请注意，$\widehat{\omega}=F^{\pi_D}/\widehat{\pi}_D$.

证明。我们采用交叉拟合技术。设 $\{I_k\}_{k=1}^K$ 为索引 $\{1,\dots,n\}$ 的一个划分，使得 $|I_k|=n/K$。记 $n_k=|I_k|$。

行为型 ACPW 估计量为：

$$\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i\in I_k}\left[\frac{\widehat{F}^{\pi_D,-k(i)}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i|X_i)}(Y_i-\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))+\int_{P_i}^{\infty}\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dz\right]$$

我们将其与 Oracle 估计量进行比较（该估计量使用真实的干扰参数，但具有相同的观测积分结构）：

$$\bar{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{F^{\pi_D}(P_i|X_i)}{\pi_D(P_i|X_i)}(Y_i-\mu(X_i,P_i))+\int_{P_i}^{\infty}\mu(X_i,z)dz\right]$$

我们将差值分解如下：

$$\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)-\bar{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)=D_1(\pi_D)+D_2(\pi_D)+D_3(\pi_D)$$

项 $D_1(\pi_D)$：

$$D_1(\pi_D)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i\in I_k}\underbrace{\left(\frac{\widehat{F}^{\pi_D,-k(i)}(P_i\mid X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i\mid X_i)}-\frac{F^{\pi_D}(P_i\mid X_i)}{\pi_D(P_i\mid X_i)}\right)(Y_i-\mu(X_i,P_i))}_{\psi_{1,i}}.$$

以干扰参数训练数据 $\mathcal{D}_k^c$ 为条件，项 $\{\psi_{1,i}\}_{i\in I_k}$ 独立同分布且均值为零，因为 $\mathbb{E}[Y_i-\mu(X_i,P_i)\mid X_i,\ P_i]=0$。$D_1$ 的方差由权重的期望平方误差决定：$\mathbb{E}\left[(\widehat{\omega}-\omega)^2\right]$。然后，根据 $\widehat{\omega}$ 的 L_2-一致性（假设 7），我们有 $\mathbb{E}[\psi_{1,i}^2]=o(1)$；由切比雪夫不等式可得，$D_1(\pi_D)=o_p(n^{-1/2})$。

项 $D_2(\pi_D)$：

$$D_2(\pi_D)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i\in I_k}\underbrace{\left[\frac{F^{\pi_D}(P_i\mid X_i)}{\pi_D(P_i\mid X_i)}(\mu(X_i,P_i)-\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))-\int_{P_i}^{\infty}(\mu(X_i,z)-\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z))dz\right]}_{\psi_{2,i}}.$$

令 $\Delta\mu(X,z)=\mu(X,z)-\widehat{\mu}^{-k(i)}(X,z)$。为证明 $\mathbb{E}[\psi_{2,i}\mid\mathcal{D}_k^c]=0$，我们检验期望。积分项的期望（使用富比尼定理交换积分次序）为：

$$\mathbb{E}\left[\int_{P_i}^{\infty}\Delta\mu(X_i,z)dz\ \middle|\ X_i\right]=\int_0^{\infty}\pi_D(p|X_i)\int_p^{\infty}\Delta\mu(X_i,z)dzdp=\int_0^{\infty}\Delta\mu(X_i,z)F^{\pi_D}(z|X_i)dz.$$

加权项的期望为：

$$\mathbb{E}\left[\frac{F^{\pi_D}(P_i|X_i)}{\pi_D(P_i|X_i)}\Delta\mu(X_i,P_i)\;\middle|\;X_i\right]=\int_0^\infty\frac{F^{\pi_D}(z|X_i)}{\pi_D(z|X_i)}\Delta\mu(X_i,z)\pi_D(z|X_i)dz=\int_0^\infty\Delta\mu(X_i,z)F^{\pi_D}(z|X_i)dz.$$

由于期望相同，$\mathbb{E}[\psi_{2,i}\mid\mathcal{D}_k^c]=0$。根据 $\widehat{\mu}$ 的 L_2-一致性，$\mathbb{E}[\psi_{2,i}^2]=o(1)$，得出 $D_2(\pi_D)=o_p(n^{-1/2})$。

项 $D_3(\pi_D)$：

$$\begin{aligned}D_3(\pi_D)&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^K\sum_{i\in I_k}\left(\frac{\widehat{F}^{\pi_D,-k(i)}}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}}-\frac{F^{\pi_D}}{\pi_D}\right)(\mu-\widehat{\mu}^{-k(i)})\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^K\sum_{i\in I_k}\underbrace{\left(\widehat{\omega}^{-k(i)}-\omega_i\right)(\mu_i-\widehat{\mu}^{-k(i)})}_{\psi_{3,i}}.\end{aligned}$$

根据柯西-施瓦茨不等式，$|D_3|$ 由该权重差的 L_2 范数与需求误差 $\|\mu-\widehat{\mu}\|_{L_2}$ 的 L_2 范数的乘积所界定。代入假设 7 中的收敛速率：

$$|D_3(\pi_D)|\lesssim\|\widehat{\omega}-\omega\|_{L_2}\|\mu-\widehat{\mu}\|_{L_2}=O_p(n^{-\alpha_2})\times O_p(n^{-\alpha_1})=O_p(n^{-(\alpha_1+\alpha_2)}).$$

由于 $\alpha_1+\alpha_2>1/2$，可得 $D_3(\pi_D)=o_p(n^{-1/2})$。

我们已证明 $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)=\bar{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)+o_p(n^{-1/2})$。根据 Oracle 估计量 $\bar{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)$ 的定义可知，它恰好等于有效影响函数的样本均值加上真实参数：

$$\bar{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)=\mathcal{S}(\pi_D)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\psi^{\pi_D}(\mathcal{D}_i)$$

其中，$\psi^{\pi_D}(\mathcal{D}_i)$ 是均值为零、方差为 $\Sigma(\pi_D)=\mathrm{Var}(\psi^{\pi_D}(\mathcal{D}))$ 的独立同分布随机变量。根据中心极限定理，$\sqrt{n}(\bar{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)-\mathcal{S}(\pi_D))\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,\ \Sigma(\pi_D))$。根据斯卢茨基定理，经验估计量 $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)$ 具有相同的渐近分布：

$$\sqrt{n}(\widehat{\mathcal{S}}_{\mathrm{ACPW}}(\pi_D)-\mathcal{S}(\pi_D))\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,\Sigma(\pi_D)).$$

□

6.3 行为策略的直接模型证明

证明。直接方法估计量 $S_{DM}(\pi_D)$ 通过以下方式得到

$$\widehat{S}_{DM}(\pi_D)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\widehat{g}(X_i,P_i),$$

其中

$$\widehat{g}(x,p)=\int_p^{\infty}\widehat{\mu}(x,z)dz.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\widehat{S}_{DM}(\pi_D)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{g}(X_i,P_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)\\
=&\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{g}(X_i,P_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)-\mathbb{E}\left[\widehat{g}(X,P)-g(X,P)\right]}_{o_p(n^{-1/2})\text{ by Lemma 19.24 in Van der Vaart (2000)}}+\mathbb{E}\left[\widehat{g}(X,P)-g(X,P)\right]\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)\\
=&\,\mathbb{E}\left[\widehat{g}(X,P)-g(X,P)\right]+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)+o_p(n^{-1/2})\\
=&\,\mathbb{E}\left[\omega(X,P)\left(\widehat{\mu}(X,P)-\mu(X,P)\right)\right]+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)+o_p(n^{-1/2}),
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式只需在令 $\pi=\pi_D$的情况下应用引理1中的公式（24）即可得到。进而可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\omega(X,P)\left(\widehat{\mu}(X,P)-\mu(X,P)\right)\right]+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)+o_p(n^{-1/2})\\
=&\underbrace{\mathbb{E}\left[\omega(X,P)\left(\widehat{\mu}(X,P)-\mu(X,P)\right)\right]-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\left(\widehat{\mu}(X_i,P_i)-\mu(X_i,P_i)\right)}_{o_p(n^{-1/2})\text{ by Lemma 19.24 in Van der Vaart (2000)}}\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\left(\widehat{\mu}(X_i,P_i)-\mu(X_i,P_i)\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)+o_p(n^{-1/2})\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\left(\widehat{\mu}(X_i,P_i)-\mu(X_i,P_i)\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)+o_p(n^{-1/2})\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\left(\widehat{\mu}(X_i,P_i)-Y_i+\epsilon_i\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)+o_p(n^{-1/2})\\
=&\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\left(\widehat{\mu}(X_i,P_i)-Y_i\right)}_{o_p(n^{-1/2})\text{ by Assumption 5}}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(X_i,P_i)\epsilon_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i,P_i)}_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi^{\pi}(\mathcal{D}_i)+S(\pi_D)}+o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\widehat{S}_{DM}(\pi_D)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi^{\pi}(\mathcal{D}_i)+o_p(n^{-1/2}).$$

由于有效影响函数 $\psi^{\pi}(\mathcal{D}_i)$独立同分布、均值为零且方差有限，

根据中心极限定理，这个首要项依分布收敛于一个方差为 Var($\psi^{\pi}(\mathcal{D})$) 的正态随机变量。证明至此完成。

□

推论 1. 假设定理 *3* 中的条件成立，则有以下结果：*(i)* 在假设*5*下，*DM* 估计量 $\Delta_{DM}(\pi)$ 达到半参数效率界，

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\Delta}_{DM}(\pi)-\Delta(\pi)\right)\to\mathcal{N}\left(0,\,Var[\psi^{\Delta}(\mathcal{D})]\right),$$

其中 $\psi^{\Delta}(\mathcal{D})=\psi^{\pi}(\mathcal{D})-\psi^{\pi_{\mathcal{D}}}(\mathcal{D})$。

(ii) 假设 *3* 成立，并进一步假设基函数的数量 L满足 $L\gg n^{d/2s}$，则 *CPW* 估计量 $\widehat{\Delta}_{CPW}(\pi)$ 达到半参数效率界，

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\Delta}_{CPW}(\pi)-\Delta(\pi)\right)\to\mathcal{N}\left(0,\,Var[\psi^{\Delta}(\mathcal{D})]\right).$$

(iii) 在假设*4*下，*ACPW*估计量 $\Delta_{ACPW}(\pi)$ 达到半参数效率界：

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\Delta}_{ACPW}(\pi)-\Delta(\pi)\right)\to\mathcal{N}\left(0,\,Var[\psi^{\Delta}(\mathcal{D})]\right).$$

这直接源于有效影响函数的线性性质，以及定理4和定理6中所确立的渐近正态性。

7 Pr命题 2 的证明：方差估计量的一致性 s

证明。 回想一下，这三个方差估计量具有相似的结构，

$$\widehat{\Sigma}_{CPW}(\pi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^{\infty}\pi(p|X_i)\int_p^{\infty}\widehat{\mu}(X_i,z)dzdp+\frac{F^{\pi}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}(Y_i-\widehat{\mu}(X_i,P_i))-\widehat{\mathcal{S}}_{CPW}(\pi)\right]^2,$$

$$\widehat{\Sigma}_{ACPW}(\pi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^{\infty}\pi(p|X_i)\int_p^{\infty}\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp+\frac{F^{\pi}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i|X_i)}(Y_i-\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))-\widehat{\mathcal{S}}_{ACPW}(\pi)\right]^2,$$

$$\widehat{\Sigma}_{DM}(\pi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^{\infty}\pi(p|X_i)\int_p^{\infty}\widehat{\mu}(X_i,z)dzdp+\frac{F^{\pi}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}(Y_i-\widehat{\mu}(X_i,P_i))-\widehat{\mathcal{S}}_{DM}(\pi)\right]^2.$$

因此，这三个估计量都可以表示为

$$\widehat{\Sigma}_j(\pi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\widehat{h}_j(X_i)+\widehat{\omega}_j(X_i,P_i)(Y_i-\widehat{\mu}_j(X_i,P_i))-\widehat{\mathcal{S}}_j(\pi)\right]^2,$$

对于 $j\in$ {CPW、ACPW、直接模型}。

为展示 其中 ow $\Sigma_j(\pi)$ 是相合估计量，只需证明 $\Sigma_j(\pi)-\Sigma(\pi)=o_p(1)$, e

$\bar{\Sigma}(\pi)$ 是 Oracle 估计量：

$$\bar{\Sigma}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[h(X_i) + \omega(X_i, P_i)(Y_i - \mu(X_i, P_i)) - \mathcal{S}(\pi)\right]^2.$$

$\widehat{\Sigma}_j(\pi)$ 与 $\bar{\Sigma}(\pi)$ 为证明 $\widehat{\Sigma}_j(\pi)$ 的一致性，我们分析差值 $\widehat{\Sigma}_j(\pi) - \bar{\Sigma}(\pi)$：

$$\widehat{\Sigma}_j(\pi) - \bar{\Sigma}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\left[\widehat{h}_j(X_i) + \widehat{\omega}_j(X_i, P_i)(Y_i - \widehat{\mu}_j(X_i, P_i)) - \widehat{\mathcal{S}}_j(\pi)\right]^2 - \left[h(X_i) + \omega(X_i, P_i)(Y_i - \mu(X_i, P_i)) - \mathcal{S}(\pi)\right]^2\Bigg).$$

利用恒等式 $a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2b(a-b)$，我们令观测 i的估计项与预言项之差为：

$$D_{j,i} = \left[\widehat{h}_j(X_i) - h(X_i)\right] + \left[\widehat{\omega}_j(X_i, P_i) - \omega(X_i, P_i)\right](Y_i - \mu(X_i, P_i)) - \widehat{\omega}_j(X_i, P_i)(\widehat{\mu}_j(X_i, P_i) - \mu(X_i, P_i)) - (\widehat{\mathcal{S}}_j(\pi) - \mathcal{S}(\pi)).$$

于是，方差估计量之差变为：

$$\widehat{\Sigma}_j(\pi) - \bar{\Sigma}(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_{j,i}^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[h(X_i) + \omega(X_i, P_i)(Y_i - \mu(X_i, P_i)) - \mathcal{S}(\pi)\right] D_{j,i}.$$

根据柯西-施瓦茨不等式，第二项可界定为：

$$2\sqrt{\bar{\Sigma}(\pi)}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_{j,i}^2}.$$

因此，只需证明$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_{j,i}^2 = o_p(1)$。

在定理 4 的假设下，所有干扰参数估计量均为 L_2-相合的，因此得到的估计量 $\mathcal{S}_j(\pi)$ 是 $\mathcal{S}(\pi)$ 的相合估计量。现在我们应用柯西-施瓦茨不等式

$(a+b+c+d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$，得到：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_{j,i}^2 \leq & \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{h}_j(X_i)-h(X_i))^2 \\
& + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\omega}_j(X_i,P_i)-\omega(X_i,P_i))^2(Y_i-\mu(X_i,P_i))^2 \\
& + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{\omega}_j^2(X_i,P_i)(\widehat{\mu}_j(X_i,P_i)-\mu(X_i,P_i))^2 \\
& + 4(\widehat{\mathcal{S}}_j(\pi)-\mathcal{S}(\pi))^2 \\
\lesssim & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{h}_j(X_i)-h(X_i))^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\omega}_j(X_i,P_i)-\omega(X_i,P_i))^2 \\
& + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\mu}_j(X_i,P_i)-\mu(X_i,P_i))^2 + \underbrace{(\widehat{\mathcal{S}}_j(\pi)-\mathcal{S}(\pi))^2}_{o_p(1) \text{ by Theorem 4}}.
\end{aligned}$$

对于 $j \in$ {CPW、直接模型}，由于 $\widehat{\omega}_j$、以及 $\widehat{\mu}_j$ 属于一个 Donsker 类，根据 VanderVaart （2000年）中的引理19.24以及 Slutsky 定理，我们有：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\mu}_j(X_i,P_i)-\mu(X_i,P_i))^2 = \underbrace{\mathbb{E}[(\widehat{\mu}_j(X,P)-\mu(X,P))^2]}_{o_p(1)} + o_p(n^{-1/2}) = o_p(1),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\omega}_j(X_i,P_i)-\omega(X_i,P_i))^2 = \underbrace{\mathbb{E}[(\widehat{\omega}_j(X,P)-\omega(X,P))^2]}_{o_p(1)} + o_p(n^{-1/2}) = o_p(1).$$

根据引理2，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{h}_j(X_i)-h(X_i))^2 = \underbrace{\mathbb{E}[(\widehat{h}_j(X)-g(X,P))^2]}_{o_p(1)} + o_p(n^{-1/2}) = o_p(1).$$

因此，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_{j,i}^2 = o_p(1).$$

对于 $j =$ ACPW，证明过程与定理 4 类似；为简洁起见，此处省略细节。至此，证明完成。

□

8 定理 5 的证明：考虑不平等的剩余的渐近正态性

证明。只需证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\frac{(Y_i-\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))F^{\pi}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D^{-k(i)}(P_i|X_i)}\left(\int_0^{\infty}\pi(p|X_i)\int_p^{\infty}\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp\right)^{r-1}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^{\infty}\pi(p|X_i)\int_p^{\infty}\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp\right)^{r}\right]$$
$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\frac{(Y_i-\mu(X_i,P_i))F^{\pi}(P_i|X_i)}{\pi_D(P_i|X_i)}\left(\int_0^{\infty}\pi(p|X_i)\int_p^{\infty}\mu(X_i,z)dzdp\right)^{r-1}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^{\infty}\pi(p|X_i)\int_p^{\infty}\mu(X_i,z)dzdp\right)^{r}\right]=o_p(n^{-1/2}),$$

回顾

$$\widehat{h}(X_i)=\int_0^{\infty}\pi(p|X_i)\int_p^{\infty}\widehat{\mu}(X_i,z)dzdp,\ \text{and}\ \widehat{\omega}(X_i,P_i)=\frac{F^{\pi}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)}$$

下文中，我们令 μ_i、 ω_i 和 h_i 分别表示 $\mu(X_i,P_i)$、 $\omega(X_i,P_i)$ 和 $h(X_i)$。在上下文明确时，这些符号也适用于相应的估计量。

由此可得

$$\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\widehat{\omega}^{-k(i)}(X_i,P_i)(Y_i-\widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}+\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^r\right]$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r(\widehat{\omega}^{-k(i)}-\omega_i+\omega_i)(\mu_i+\varepsilon_i-\widehat{\mu}^{-k(i)})\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}+\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^r\right]$$
$$=\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r(\widehat{\omega}^{-k(i)}-\omega_i)(\mu_i-\widehat{\mu}^{-k(i)})\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}\right]}_{J_1}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r(\widehat{\omega}^{-k(i)}-\omega_i)\varepsilon_i\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}\right]}_{J_2}$$
$$+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\omega_i\varepsilon_i\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}\right]}_{J_3}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\omega_i(\mu_i-\widehat{\mu}^{-k(i)})\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}\right]+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^r}_{J_4}.$$

这里， J_1 表示乘积误差项，因为 $\widehat{h}^{-k(i)}$ 有界，所以可采用与定理 4 证明中处理 D_3 类似的论证来界定 J_1 。

至于 J_2，其均值为零。还需注意，项 $\widehat{h}^{-k(i)}$ 有界，因此可以按照同一证明中处理 D_1 的思路来界定 J_2 。由此可得， J_1 和 J_2 的阶均为 $o_p(n^{-1/2})$。

现在我们来处理 J_3。通过对 $\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}$应用中值定理，我们得到 ve

$$\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}=h_i^{r-1}+(r-1)\dot{h}_i^{r-2}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)-h_i),$$

其中 $\dot{h}_i$ 是中间值，即对于某个 $0 < t < 1$，有 $\dot{h}_i = t\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) + (1-t)h_i$。因此我们得到

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\omega_i\varepsilon_i\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\omega_i\varepsilon_i h_i(X_i)^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r(r-1)\omega_i\varepsilon_i\dot{h}_i^{r-2}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) - h_i). \end{aligned}$$

由于 $\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)$和 h_i 均一致有界， $\dot{h}_i$ 也有界。因此，上述等式中的第二项为 $o_p(n^{-1/2})$，因为其均值为零，且 $\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)$具有 L_2 一致性（论证与上文对 J_2 的界定类似）。由此我们证明了

$$J_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\omega_i\varepsilon_i h_i(X_i)^{r-1} + o_p(n^{-1/2}).$$

最后，我们处理 J_4。回顾

$$J_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\omega_i(\mu_i - \widehat{\mu}^{-k(i)})\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}\right] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^r.$$

我们首先对 $\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^r$应用中值定理，

$$\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^r = h_i^r + r\bar{h}_i^{r-1}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) - h_i), \tag{29}$$

其中 $\bar{h}_i$ 为中间值。

接着，我们再次对 $\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}$应用中值定理，得到

$$\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1} = \bar{h}_i^{r-1} + (r-1)\widetilde{h}_i^{r-2}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) - \bar{h}_i), \tag{30}$$

其中 $\widetilde{h}_i$ 是 $\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)$与 $\bar{h}_i$之间的中间值。

现在将公式（29）和（30）代入项 J_4，可得

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\omega_i(\mu_i - \widehat{\mu}^{-k(i)})\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^{r-1}\right] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{h}^{-k(i)}(X_i)^r \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\omega_i(\mu_i - \widehat{\mu}^{-k(i)})(\bar{h}_i^{r-1} + (r-1)\widetilde{h}_i^{r-2}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) - \bar{h}_i))\right] \\ &\quad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\bar{h}_i^{r-1}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) - h_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^r \\ &= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\omega_i(\mu_i - \widehat{\mu}^{-k(i)})\bar{h}_i^{r-1}}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r(r-1)\omega_i(\mu_i - \widehat{\mu}^{-k(i)})\widetilde{h}_i^{r-2}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) - \bar{h}_i)\right]}_{I_2} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\bar{h}_i^{r-1}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) - h_i)}_{I_3} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^r. \end{aligned}$$

~我们先处理第二项 I_2。由于 ω_i 和 h_i 均有界，应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$I_2 \le C\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \widehat{\mu}^{-k(i)})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) - \bar{h}_i)^2}$$
$$\le C\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \widehat{\mu}^{-k(i)})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) - h_i)^2} = O_p(n^{-2\alpha_1}) = o_p(n^{-1/2}),$$

因为 $\alpha_1 > 1/4$.

尚需证明 $I_1 + I_3 = o_p(\sqrt{1/n})$。根据引理1中的平衡性质，$I_1 + I_3$的均值为零。因此，只需证明

$$\mathbb{E}\left[r\omega_i(\mu_i - \widehat{\mu}^{-k(i)})\bar{h}_i^{r-1}\right]^2 = o(1), \text{ and } \mathbb{E}\left[r\bar{h}_i^{r-1}(\widehat{h}^{-k(i)}(X_i) - h_i)\right]^2 = o(1).$$

与前面对 J_2 的界定类似，由于 $\widehat{\mu}^{-k(i)}$ 和 $\widehat{h}^{-k(i)}$ 都是 L_2 相合的（引理2），上述两个等式成立。因此，我们有 $J_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^r + o_p(\sqrt{1/n})$。

总而言之，我们已经证明

$$\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi) = J_3 + J_4 + o_p(n^{-1/2}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\underbrace{h_i^r + r\omega_i\varepsilon_i h_i(X_i)^{r-1}}_{\text{uncentered EIF for } \mathcal{S}^r(\pi)}\right] + o_p(n^{-1/2}).$$

由此完成证明。 □

9 行为策略下考虑不平等的剩余的渐近正态性

接下来，我们给出行为策略的考虑不平等的剩余的结果。

假设8。假设 $\pi_D(p\,|\,x) > c$ 对所有 $p \in \mathcal{P}$ 以及每个 x 均成立，其中某个常数为 c。此外，假设需求函数和行为策略的估计量是通过交叉拟合程序构造的，并且达到以下收敛速率：

$$\sqrt{\mathbb{E}[(\widehat{\mu}(X,P) - \mu(X,P))^2]} = O_p(n^{-\alpha_1}),\ and\ \sqrt{\mathbb{E}[(\widehat{\pi}_D(P|X) - \pi_D(P|X))^2]} = O_p(n^{-\alpha_2}), \quad (31)$$

其中 $\alpha_1 > 1/4$，且 $\alpha_2 > 1/4$。

定理7。假设假设*1*、*2*和*8*成立，则

$$\sqrt{n}(\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi_D) - \mathcal{S}^r(\pi_D)) \to \mathcal{N}(0, \Sigma^r(\pi_D)),$$

其中 $\Sigma^r(\pi_D)$ 是 $\mathcal{S}^r(\pi_D)$ 的有效影响函数（*EIF*）的方差。

^证明。为确立 $\mathcal{S}^r(\pi_D)$ 的渐近正态性，我们证明该估计量等价于其有效影响函数（EIF）的样本均值，且相差一个 $o_p(n^{-1/2})$ 余项。

回顾

$$\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi_D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\left(\frac{(Y_i - \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,P_i))\widehat{F}^{\pi_D}(P_i|X_i)}{\widehat{\pi}_D(P_i|X_i)} + \int_{P_i} \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dz \right) \right.$$
$$\left. \times \left(\int_0^\infty \widehat{\pi}_D(p|X_i) \int_p^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp \right)^{r-1} + (1-r)\left(\int_0^\infty \widehat{\pi}_D(p|X_i) \int_p^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp \right)^{r} \right].$$

Let

$$\widehat{g}_i = \int_{P_i} \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dz,$$
$$\widehat{h}_i = \int_0^\infty \widehat{\pi}_D(p|X_i) \int_p^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp,$$
$$\widetilde{h}_i = \int_0^\infty \pi_D(p|X_i) \int_p^\infty \widehat{\mu}^{-k(i)}(X_i,z)dzdp.$$

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ 注意到 $|h - h|_{L_2} = |\widehat{\pi}_D - \pi_D|_{L_2} = O_p(n^{-\alpha_2})$，因此 $|h_i - h_i|_{L_2} = O_p(n^{-\alpha_1} + n^{-\alpha_2})$

为简化记号，我们省略 $-k(i)$ 下标，并注意到干扰函数始终基于样本外观测进行训练。

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi_D) =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\left((Y_i - \widehat{\mu}_i)\widehat{\omega}_i + \widehat{g}_i \right)\widehat{h}_i^{r-1} + (1-r)\widehat{h}_i^r \right] \\
=& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[r\left((\varepsilon_i + \mu_i - \widehat{\mu}_i)(\widehat{\omega}_i - \omega_i + \omega_i) + \widehat{g}_i \right)\widehat{h}_i^{r-1} + (1-r)\widehat{h}_i^r \right] \\
=& \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\varepsilon_i(\widehat{\omega}_i - \omega_i)\widehat{h}_i^{r-1}}_{o_p(n^{-1/2})} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r(\mu_i - \widehat{\mu}_i)(\widehat{\omega}_i - \omega_i)\widehat{h}_i^{r-1}}_{o_p(n^{-1/2})} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\varepsilon_i\omega_i\widehat{h}_i^{r-1}}_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\varepsilon_i\omega_i h_i^{r-1} + o_p(n^{-1/2})} \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\omega_i(\mu_i - \widehat{\mu}_i)\widehat{h}_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\widehat{g}_i\widehat{h}_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-r)\widehat{h}_i^r.
\end{aligned}$$

上述方程的前三项可以通过应用定理 5 的证明中用于项 J_1、J_2 和 J_3 的完全相同的技术进行界定。

由此可得

$$\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi_D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\varepsilon_i\omega_i h_i^{r-1} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\omega_i(\mu_i - \widehat{\mu}_i)\widehat{h}_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\widehat{g}_i\widehat{h}_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-r)\widehat{h}_i^r}_{Q_1} + o_p(n^{-1/2}).$$

现在我们分析 Q_1.

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\omega_i(\mu_i - \widehat{\mu}_i)\widehat{h}_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\widehat{g}_i\widehat{h}_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-r)\widehat{h}_i^{r} \\
&= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\omega_i(\mu_i - \widehat{\mu}_i)\widehat{h}_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r(\widehat{g}_i - g_i)\widehat{h}_i^{r-1}}_{E_1} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} rg_i\widehat{h}_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-r)\widehat{h}_i^{r}}_{E_2}
\end{aligned}
$$

接下来我们展示第一项 $E_1 = o_p(n^{-1/2})$。请注意， E_1 的均值为零，因为:

$$
\mathbb{E}[\omega(\mu - \hat{\mu})] = \mathbb{E}[h - \widetilde{h}] = \mathbb{E}[g - \hat{g}],
$$

其中，第一个等号由引理1得出，第二个等号则源于需求的两种不同表示。由切比雪夫不等式可知，只需证明

$$
\mathbb{E}\left[r\omega(\mu - \widehat{\mu})\widehat{h}^{r-1} + r(\widehat{g} - g)\widehat{h}^{r-1}\right]^2 = o(1).
$$

由于 $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$，因此只需证明

$$
\mathbb{E}\left[r\omega(\mu - \widehat{\mu})\widehat{h}^{r-1}\right]^2 = o(1), \text{ and } \mathbb{E}\left[r(\widehat{g} - g)\widehat{h}^{r-1}\right]^2 = o(1).
$$

由于 r、 ω 和 h 有界，且 $\widehat{\mu}$ 和 $\widehat{g}$ 是 L_2 一致的，上述两个等式成立。因此，我们有

$$
Q_1 = E_2 + o_p(n^{-1/2}).
$$

现在我们来处理 E_2。由此可得

$$
\begin{aligned}
E_2 =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} rg_i\widehat{h}_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-r)\widehat{h}_i^{r} \\
=& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} rg_i\left[h_i^{r-1} + (r-1)\dot{h}_i^{r-2}(\widehat{h}_i - h_i)\right] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-r)\left[h_i^{r} + r\bar{h}_i^{r-1}(\widehat{h}_i - h_i)\right],
\end{aligned}
$$

其中， h_i 和 $\bar{h}_i$ 是介于 h_i 和 $\widehat{h}_i$之间的中间值。由此可得 th at

$$
E_2 = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} rg_ih_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-r)h_i^{r}}_{\text{part of the EIF of}\mathcal{S}^r(\pi_D)} + r(r-1)\left[\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i\dot{h}_i^{r-2}(\widehat{h}_i - h_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{h}_i^{r-1}(\widehat{h}_i - h_i)}_{G_1}\right],
$$

接下来只需证明 $G_1 = o_p(n^{-1/2})$。由此可得

$$\begin{aligned} G_1 =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{h}_i - h_i)\left(g_i\dot{h}_i^{r-2} - \bar{h}_i^{r-1}\right) \\ =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{h}_i - h_i)\left[g_i\left(h_i^{r-2} + (r-2)\ddot{h}_i^{r-3}(\dot{h}_i - h_i)\right) - \left(h_i^{r-1} + (r-1)\check{h}_i^{r-2}(\bar{h}_i - h_i)\right)\right], \end{aligned}$$

其中 $\ddot{h}_i$ 和 $\check{h}_i$ 再次表示中间值。于是我们有

$$\begin{aligned} G_1 =& \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{h}_i - h_i)(g_i h_i^{r-2} - h_i^{r-1})}_{H_1} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r-2)g_i\ddot{h}_i^{r-3}(\widehat{h}_i - h_i)(\dot{h}_i - h_i)}_{H_2} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r-1)\check{h}_i^{r-2}(\widehat{h}_i - h_i)(h_i - \bar{h}_i)}_{H_3} \end{aligned}$$

这里， H_1 的均值为零，因为 $\mathbb{E}(g|X) = h(X)$。因此，我们有

$$\mathbb{E}[(\widehat{h}_i - h_i)^2(g_i h_i^{r-2} - h_i^{r-1})^2] \leq C\mathbb{E}[(\widehat{h}_i - h_i)^2(g_i h_i^{r-2} - h_i^{r-1})^2] = o(1),$$

根据切比雪夫不等式， $H_1 = o_p(n^{-1/2})$

于是，我们有

$$\begin{aligned} H_2 =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r-2)g_i\ddot{h}_i^{r-3}(\widehat{h}_i - h_i)(\dot{h}_i - h_i) \\ \lesssim& \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{h}_i - h_i)^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\dot{h}_i - h_i)^2} \\ \lesssim& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{h}_i - h_i)^2 = O_p\left(n^{-2\alpha_1}\right) + O_p\left(n^{-2\alpha_2}\right). \end{aligned}$$

这里，$|\widehat{h}_i - h_i|_{L_2} = O_p(n^{-\alpha_1} + n^{-\alpha_2})$，因为估计 h_i 也需要估计π_D。根据假设8，$\alpha_1 > 1/4$，且 $\alpha_2 > 1/4$。因此， $H_2 = o_p(n^{-1/2})$。

类似地，我们有

$$H_3 = O_p\left(n^{-2\alpha_1}\right) + O_p\left(n^{-2\alpha_2}\right) = o_p(n^{-1/2}).$$

综上所述，我们有

$$\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi_D) = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r\varepsilon_i\omega_i h_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r g_i h_i^{r-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-r)h_i^r + \mathcal{S}^r(\pi_D)}_{\text{EIF for } \mathcal{S}^r(\pi_D)} + o_p(n^{-1/2})$$

根据中心极限定理和斯卢茨基定理，我们有

$$\sqrt{n}(\widehat{\mathcal{S}}^r(\pi_D) - \mathcal{S}^r(\pi_D)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma^r(\pi_D)).$$

□

10 部分识别

在实践中，当企业不愿进行大量价格实验时，要求我们希望评估的每个价格在历史策略下都有正概率被选中的重叠假设（假设2）可能无法成立。当定期调整价格在后勤上颇具挑战时（例如在实体零售中），当价格变动可能引发顾客不满，或企业不愿牺牲短期利润时，都可能出现这种情况。在这种情况下，剩余无法点识别——正式定义请参见定义1。另一种做法是为剩余估计建立部分识别界。例如，如果历史数据中只包含10美元至20美元之间的价格，而我们希望评估的目标策略却包含5美元或25美元的价格，那么这些未观测区域的需求就是未知的。部分识别为真实剩余提供一个可信范围（即可能值的最小值和最大值），而不是一个不可靠的单一点估计。为缩小识别区域，我们对估值分布施加一个温和的正则条件。

假设 9 (对数凹性)。 对于所有 x，需求函数 $\mu(x, \cdot)$ 都是对数凹的。

对数凹性假设意味着风险率是单调的，这也是定价文献中的一项常见假设（Allouah 等（2021）、Cole 和 Roughgarden（2014）、Huang 等（2018））。它涵盖了广泛的估值分布，包括正态分布、指数分布和均匀分布（Bagnoli 和 Bergstrom（2005））。重要的是，它排除了病态的“厚尾”信念，因为这类信念会导致未观测价格区域的剩余大得不切实际。我们还注意到，公式（2）直接意味着购买概率单调递减，这进一步限制了可行需求函数的集合。在这些条件下，接下来我们将说明当重叠假设不成立时，如何构造部分识别界。

10.1 部分识别界

我们先简要概述核心思路：考虑购买概率曲线 $\mu(x,\ z)$。在企业进行实验的区域，我们以非参数方式估计这条曲线。在没有进行实验的区域，曲线虽未知，但必须位于满足假设 9 且经过观测点的最小区域内。

10.1.1 下包络

我们将协变量值 x 对应的 z 左右两侧最近的观测价格分别记为 z_1 和 z_2。如果 z 左侧没有观测，我们便采用边界条件 $z_1 = 0$，这意味着对于所有 x，$\mu(x,0) = 1$。反之，如果 z 右侧没有观测，我们就设定 $z_2 = V_{\max}$，

其中， $V_{\max}$ 是使 $Y=0$ 几乎必然成立的最小价格，因此对于所有 x， $\mu(x,V_{\max})=0$。由于 $\log\ \mu(x,\cdot)$ 是凹函数，连接 $(z_1,\log\ \mu(x,z_1))$ 和 $(z_2,\mu(x,z_2))$ 的任意弦都位于图像下方。将该弦与左侧最后一个观测点取最大值，即可得到 z 处最紧的可行下界。形式上，引理 7 确立了这个下界。

引理 7 （下界）。 在方程 （2）中的二元购买模型、假设 *1* 和 *9* 下，对于所有 x，我们有 $F_l(z,z_1,z_2,x)\equiv e^{l(z,z_1,z_2,x)}\le\mu(x,z)$，其中

$$l(z,z_1,z_2,x)=\frac{z-z_2}{z_1-z_2}\log(\mu(x,z_1))+\frac{z_1-z}{z_1-z_2}\log(\mu(x,z_2)). \tag{32}$$

证明见附录 10.4。直观地说，该界允许需求曲线以凹性约束所允许的最大陡度下降，同时仍经过相邻的数据点。图 9 展示了下界的示意图。

10.1.2 上包络

上界结合了两个凹性约束：一个在左侧最近的一对数据点（z_1， z_2）之间进行插值，另一个在右侧最近的一对数据点（z_3， z_4）之间进行插值。正如引理 8 所示， z 处的界是这两个外推值中的较小者。当只观测到一侧时，我们依靠 0 或 $V_{\max}$ 处的边界条件来填补空缺。由此得到的包络可防止曲线未观测到的部分向下弯曲得过于缓慢，否则会产生不切实际的高额剩余。

现在设 $z_1\le z_2\le z\le z_3\le z_4$，如果不存在小于（大于）$z$ 的经验观测点，那么 $z_1=$ NA $z_2=0$ $(z_3=V_{\max},\ z_4=$ NA$)$。如果只有一个点 z' 小于（大于） z，那么我们可以设 $z_1=0$， $z_2=z'$ $(z_3=z',\ z_4=V_{\max})$。定义

$$u_1(z_1,z_2,x)=\log(\mu(x,z_2))+\frac{z-z_2}{z_2-z_1}(\log(\mu(x,z_2))-\log(\mu(x,z_1))),$$
$$u_2(z_3,z_4,x)=\log(\mu(x,z_3))-\frac{z_3-z}{z_4-z_3}(\log(\mu(x,z_4))-\log(\mu(x,z_3))).$$

我们将在下一个引理中正式陈述上界。

引理 8 (上界)**.** 在引理 *7* 的假设下，对于所有 x，我们有 $\mu(x,z)\le F_u(z_1,z_2,z_3,z_4,x)$，其中

$$F_u(z_1,z_2,z_3,z_4,x)=\begin{cases}\min(e^{u_1},e^{u_2}) & z_1,z_2,z_3,z_4\ne NA\\ \min(e^{u_1},\mu(x,z_2)) & z_1,z_2,z_3\ne NA,z_4=NA\\ \min(e^{u_2},\mu(x,z_2)) & z_2,z_3,z_4\ne NA,z_1=NA\\ 1 & otherwise\end{cases}.$$

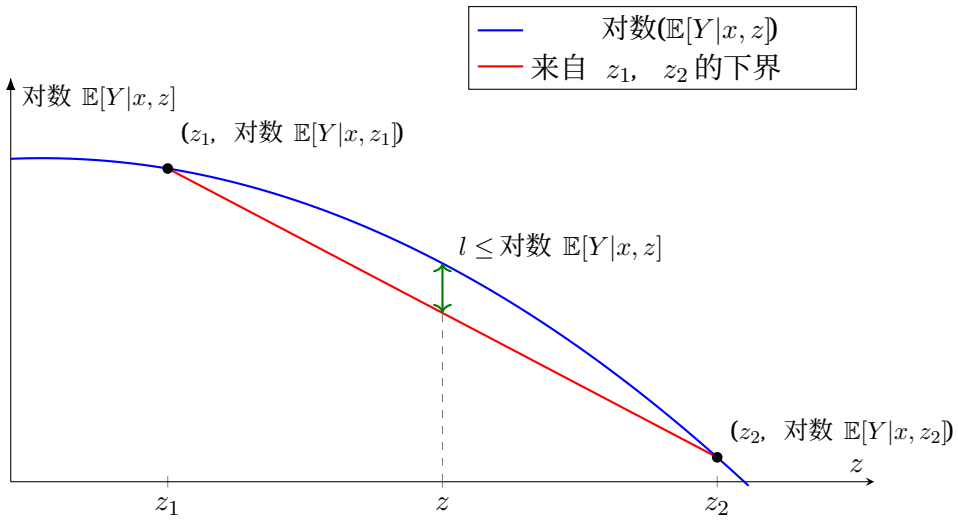


图9：下界

10.1.3 组合界

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$根据引理7和引理8，随后可分别通过 $\mathcal{S}_-$ 和 $\mathcal{S}_+$估计下界和上界，定义如下：

$$\widehat{\mathcal{S}}_- = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{z=0}^{\infty}\Big\{\mathbb{I}[\pi_D(z|X_i)\neq 0]\hat{\mathbb{E}}(Y|P=z,X_i)F^{\pi}(z|X_i)+\mathbb{I}[\pi_D(z|X_i)=0]\widehat{F}_l(z_2(z),z_3(z),X_i)F^{\pi}(z|X_i)\Big\}dz,$$

$$\widehat{\mathcal{S}}_+ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{z=0}^{\infty}\Big\{\mathbb{I}[\pi_D(z|X_i)\neq 0]\hat{\mathbb{E}}(Y|P=z,X_i)F^{\pi}(z|X_i) + \mathbb{I}[\pi_D(z|X_i)=0]\widehat{F}_u(z_1(z),z_2(z),z_3(z),z_4(z),X_i)F^{\pi}(z|X_i)\Big\}dz$$

其中，$z_1(z) \le z_2(z) \le z \le z_3(z) \le z_4(z)$ 是围绕 z given$\frown$ $\frown x$ 的最近经验观测值。这里，F_l 和 F_u 使用估计的需求函数 $\widehat{\mu}$，而 F_l 和 F_u使用的是另一种需求函数。如果没有经验观测，我们可以使用 0 和 $V_{\max}$ 作为 z_2 和 z_3，并将 z_1，z_4 设为 NA。当$\pi_D(z|X)\neq 0$时，通过替换估计量的第一部分，可以得到类似的 CPW 和 ACPW 估计量。上界的图示见图10。

10.2 统计性质

接下来，我们给出估计所得部分识别界的估计误差。令 $z_1 = \max_{\pi_D(\tilde{z})>0,\tilde{z}\le z}\tilde{z}$ 和 $z_2 = \min_{\pi_D(\tilde{z})>0,\tilde{z}\ge z}\tilde{z}$，并定义

$$\mathcal{S}_-^* = \mathbb{E}\int_{z=0}^{\infty}\Big\{\mathbb{I}[\pi_D(z|X)\neq 0]\mathbb{E}[Y\mid P=z,X]F^{\pi}(z|X)+\mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0]F_l(z_1,z_2F^{\pi}(z|X)\Big\}dz,$$

$$\mathcal{S}_+^* = \mathbb{E}\int_{z=0}^{\infty}\Big\{\mathbb{I}[\pi_D(z|X)\neq 0]\mathbb{E}[Y\mid P=z,X]F^{\pi}(z|X)+\mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0]F_u(z_1,z_2,z_3,z_4)F^{\pi}(z|X)\Big\}dz.$$

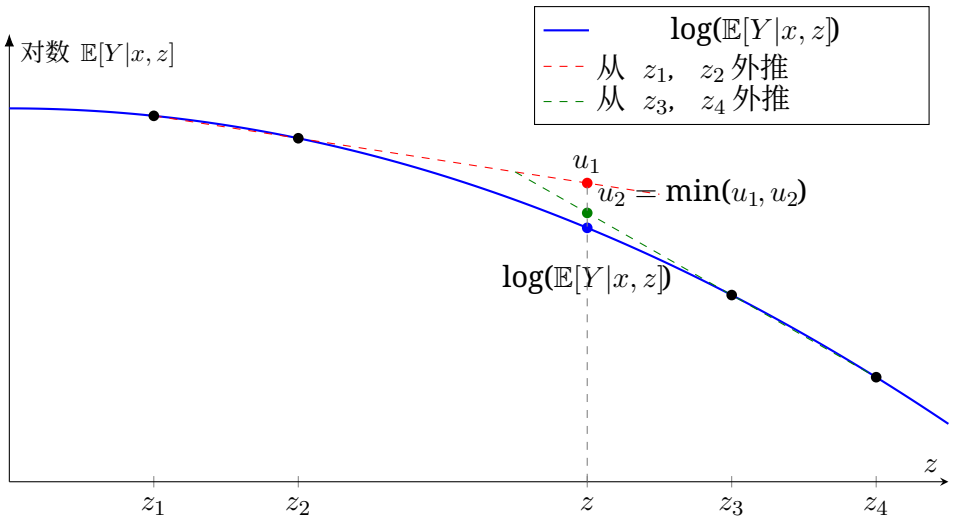


图10：上界

于是我们得到以下结果。

定理8。 假设引理 7 中的条件成立。此外，假设干扰参数满足以下收敛速率：

1. $\sqrt{\mathbb{E}[(\widehat{\mu}(x,p) - \mu(x,p))^2]} = O(n^{-\alpha_1})$, 2. $\sqrt{\mathbb{E}[(\widehat{F}_l(z_1,z_2,x) - F_l(z_1,z_2,x))^2]} = O(n^{-\alpha_2})$, 且 $\sqrt{\mathbb{E}[(\widehat{F}_u(z_1,z_2,z_3,z_4,x) - F_u(z_1,z_2,z_3,z_4,x))^2]} = O(n^{-\alpha_2})$, 3. 匹配差异满足 $\sqrt{\mathbb{E}[(F_l(z_1,z_2,x) - F_l(z_1(z)\ z_2(z)\ x))^2]} = O(n^{-\alpha_3})$, 且 $\sqrt{\mathbb{E}[(F_u(z_1,z_2,z_3,z_4,x) - F_u(z_1(z)\ z_2(z)\ z_3(z)\ z_4(z)\ x))^2]} = O(n^{-\alpha_3})$ 。

因此，我们有：

$$(i); |\widehat{\mathcal{S}}_- - \mathcal{S}_-| = O_p(n^{-\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,1/2\}});\ (ii); |\widehat{\mathcal{S}}_+ - \mathcal{S}_+| = O_p(n^{-\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,1/2\}}).$$

定理8确立了我们提出的估计量在重叠假设不成立区域内对上界和下界的一致性，证明见附录10.5。实际上，对于希望评估涉及历史上未经测试的价格点的未来定价政策影响的管理者而言，这一结果至关重要。不过，收敛性质存在一个关键区别。对于点识别区域，ACPW估计量凭借正交性可达到 $O_p(n^{-1/2})$的参数速率；而定理8中的部分识别界则依赖直接法。在缺乏重叠性的情况下，我们无法利用倾向得分对估计进行去偏。因此，界估计量的收敛速率由底层干扰函数的估计误差决定：需求学习器$\widehat{\mu}$、界学习器 F_l，以及匹配差异（靠近边界的数据样本）。具体而言，误差速率为 $O_p(n^{-\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,1/2)})$，其中这些 alpha 表示干扰分量的收敛速率。正如假设4所述，灵活的非参数机器学习模型通常只能达到慢于 $n^{-1/2}$的速率。因此，所得界

通常会以较慢的非参数速率收敛，相较于重叠区域内的点估计而言。

10.3 部分识别实验

为评估我们的部分识别方法，我们设计了一项模拟实验，其中有意违反重叠性假设。在此设置中，我们生成一个特征向量 $X \sim U\{0,1\}^d$，$\beta \sim U[-1,1]^d$，$d = 10$，$V = 100 + 300\beta^T X + \epsilon$，$\epsilon \sim U[0,10]$，$Y = \mathbb{I}[V > P]$。$U\{0,1\}^d$表示随机抽取的 d 个伯努利变量，其概率为 0.5。我们使用线性模型正确设定直接模型。

关键在于，价格 P 是从支撑集中存在间隙的分布中抽取的，$P \sim U$（$[9, 9.5] \cup [10, 10.5]$），从而形成重叠性缺失区域 $[9.5, 10]$。目标定价策略是从 $[9.1, 9.425, 9.75, 10.075, 10.4]$ 中抽取的均匀策略，因此 9.75 会落入重叠性缺失区域。随后，购买决策由 $Y = \mathbb{I}[V > P]$ 给出。我们的估计正确地假设估值模型采用线性函数形式。我们报告了 50 次运行的结果。

我们将所提出的方法与两种基准方法进行比较，以供参考：

- 朴素基准方法会在重叠区域之外，将需求填补为极端值（下界为 0，上界为 1）。

- Oracle 基准方法使用已知的真实需求函数，作为理论基准。

我们报告覆盖区间长度，即每种方法所得部分识别区间的长度。结果见 11。朴素方法的区间长度（橙色线）始终较大，且不受样本量影响。这是预期之中的。由于没有形状约束，朴素基准方法直接将 0 和 1 分别作为需求的下界和上界，因此得到的区间很宽，无法提供有效信息。

结果表明，我们提出的界限（蓝色线）明显比朴素方法更紧，并且经验覆盖率接近完美，证实了我们方法的稳健性。Oracle 方法利用真实需求信息，因此不受样本量影响。从经验结果来看，我们的方法和 Oracle 方法的覆盖率均接近完美；不过，我们注意到，由于有限样本中的随机性，仍可能出现未覆盖的情况。

10.4 引理 7 的证明

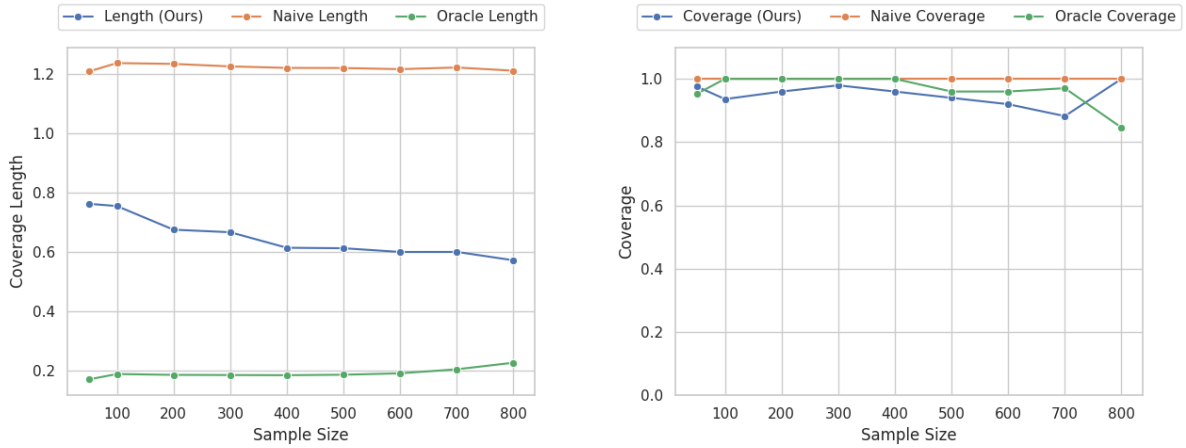
证明。 为简洁起见，我们省略对 x部分的条件化。假设 9 蕴含

$$\log(\bar{F}(\theta x + (1-\theta))y) \geq \theta \log(\bar{F}(x)) + (1-\theta)\log(\bar{F}(y)) \tag{33}$$

令 $\theta = \frac{z-z_2}{z_1-z_2}$, 则有

$$\log(\bar{F}_V(z)) \geq \frac{z-z_2}{z_1-z_2}\log(\bar{F}(z_1 \mid x)) + \frac{z_1-z}{z_1-z_2}\log(\bar{F}(z_2 \mid x)). \tag{34}$$

利用单调性即可完成证明。 □



(a) 长度界　　(b) 覆盖界

图11：部分识别界。

10.5 定理8的证明

证明。 这里我们用 θ 表示主论文中的 S 。定义

$$\tilde{\theta}_- = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{z=0}^{\infty}\Big\{\mathbb{I}[\pi_D(z|X)\neq 0]\mu(z)F^{\pi}(z|X)+\mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0]F_l(z,z_1,z_2,X)F^{\pi}(z|X)\Big\}dz \tag{35}$$

$$\mathbb{E}(\widehat{\theta}_- - \theta^*_-)^2 = \mathbb{E}(\widehat{\theta}_- - \tilde{\theta}_- + \tilde{\theta}_- - \theta^*_-)^2 \leq \mathbb{E}\underbrace{2(\widehat{\theta}_- - \tilde{\theta}_-)^2}_{\text{(i)}} + \mathbb{E}\underbrace{2(\tilde{\theta}_- - \theta^*_-)^2}_{\text{(ii)}} \tag{36}$$

我们将 $\widehat{F}_l(z,z_1,z_2,X)$ 简写为 $\widehat{F}_l$，将 $\widehat{F}_l(z,z_1(z)$ $z_2(z)$ $X)$ 简写为 $\widehat{F}^o_l$，并将 $F_l(z,z_1,z_2,X)$ 简写为 F_l。$z_{1,2}(z)$ 是经验观测，而$z_{1,2}$ 是总体中距离最近的点。

$$\text{(i)} \leq \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\int_{z=0}^{\infty}\mathbb{I}[\pi_D(z|X)\neq 0](\mu(z)-\widehat{\mu}(z))F^{\pi}(z|X)+\mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0](F_l-\widehat{F}^o_l)F^{\pi}(z|X)\Big)^2 \tag{37}$$

$$\leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\int_{z=0}^{\infty}\mathbb{I}[\pi_D(z|X)\neq 0](\mu(z)-\widehat{\mu}(z))F^{\pi}(z|X)\Big)^2 \tag{38}$$

$$+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\int_{z=0}^{\infty}\mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0](F_l-\widehat{F}^o_l)F^{\pi}(z|X)\Big)^2$$

第一个和第二个不平等式来自柯西-施瓦茨不等式。将第一项记为 (iii)，第二项记为 (iv)。

$$\text{(iii)} \leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\int_{z=0}^{P^D_{\max}}(\mu(z)-\widehat{\mu}(z))^2\Big)\int_{z=0}^{P^D_{\max}}(\mathbb{I}[\pi_D(z|X)\neq 0]F^{\pi}(z|X))^2 \tag{39}$$

$$\leq 4P^D_{\max}P^D_{\max}\sup_z \mathbb{E}(\bar{F}_V-\widehat{\mu})^2 = C_1\epsilon_n \tag{40}$$

~我们将 $\sup_z \mathbb{E}(\bar{F}_V - \bar{F}_V)^2 = \epsilon_n$ 和 $C_1 = 4P_{\max}^D P^D$ 最大值记作。

$$\text{(iv)} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\int_{z=0}^{\infty}\mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0](\bar{F}_l - \bar{F}_l^o + \bar{F}_l^o - \widehat{\bar{F}}_l^o)F^\pi(z|X)\Big)^2 \tag{41}$$

$$\leq \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\int_{z=0}^{\infty}\mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0](\bar{F}_l - \bar{F}_l^o)F^\pi(z|X)\Big)^2 \tag{42}$$

$$+ \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\int_{z=0}^{\infty}\mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0](\bar{F}_l^o - \widehat{\bar{F}}_l^o)F^\pi(z|X)\Big)^2$$

将第一项记为 (v)，第二项记为 (vi)。

$$\text{(v)} \leq \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\int_{z=0}^{P_{\max}^D}(\bar{F}_l - \bar{F}_l^o)\Big)^2\Big(\int_{z=0}^{P_{\max}^D}(\mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0]F^\pi(z|X))^2\Big) \tag{43}$$

$$\leq 8{P_{\max}^D}^2\mathbb{E}\sup_z((\bar{F}_l - \bar{F}_l^o))^2 = 2C_1\xi_n \tag{44}$$

假设 $\mathbb{E}$ 上确界$_z((\bar{F}_l - \bar{F}_l^o))^2 \leq \xi_n$,

$$\text{(vi)} \leq \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\int_{z=0}^{P_{\max}^D}(\bar{F}_l^o - \widehat{\bar{F}}_l^o)\Big)^2\Big(\int_{z=0}^{P_{\max}^D}(\mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0]F^\pi(z|X))^2\Big) \tag{45}$$

$$\leq 8{P_{\max}^D}^2 \text{上确界}_z\ \mathbb{E}(\bar{F}_l^o - \widehat{\bar{F}}_l^o)^2 = 2C_1\delta_n. \tag{46}$$

记作上确界$_z\,\mathbb{E}(\bar{F}_l^0 - \widehat{\bar{F}}_l^o)^2 = \delta_n$。

$$\text{(ii)} = \frac{1}{n}2\text{Var}\left(\int_{z=0}^{\infty}\Big\{\mathbb{I}[\pi_D(z|X)\neq 0]\mu(z)F^\pi(z|X) + \mathbb{I}[\pi_D(z|X)=0]F_l(\bar{F}_V, z_1(z), z_2(z))F^\pi(z|X)\Big\}dz\right) \tag{47}$$

根据 Popoviciu 不等式，有

$$\text{(ii)} \leq \frac{2}{n}. \tag{48}$$

Then

$$\mathbb{E}(\widehat{\theta}_- - \theta_-^*)^2 \leq 2C_1(\epsilon_n + \xi_n + \delta_n) + \frac{2}{n}. \tag{49}$$

根据这些假设，我们有

$$|\widehat{\theta}_- - \theta_-^*| = O_p\left(n^{-\alpha_1} + n^{-\alpha_2} + n^{-\alpha_3} + n^{-1/2}\right) = O_p(n^{-\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,1/2\}})$$

上界的证明可以用类似的方法构造。 □

11 个性化定价策略的实施

个性化定价策略的实施方式如下。我们首先拟合需求函数 $\widehat{\ \ \ \