arXiv:2601.01032v1 [math.CA] 3 Jan 2026

多线性乘子与伪微分算子加权估计的必要条件

BAE JUN PARK 和 NAOHITO TOMITA

Abstract. 我们研究多线性傅里叶乘子和多线性伪微分算子加权理论中的最优多重权假设。对于多线性傅里叶乘子，我们重新考察 Li and Sun [24],提出的加权 H¨ormander 型定理，该定理是 Kurtz and Wheeden [20], 结果的多线性版本，并证明其多重权条件是尖锐的。这给出了多线性情形下的尖锐必要条件，同时改进了 Kurtz and Wheeden [21]建立的经典线性必要性。在伪微分情形下，我们考察作者 [33, 34] 针对多线性 H¨ormander 类中的符号所得到的近期加权估计，并证明其多重权假设同样是最优的。作为推论，我们可以得到 [33, 34] 中多线性伪微分算子锐极大函数估计的最优性；这类估计最初由 Chanillo and Torchinsky [7]提出。

1. Introduction

设 $w\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ 是一个局部可积函数。对于 $1 < p < \infty$，若 w属于 Muckenhoupt 类 $A_p(\mathbb{R}^n)$，则称

$$[w]_{A_p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big(w(x)\big)^{1-p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

其中 $p' = \frac{p}{p-1}$表示 ¨older 共轭的 p，上确界取遍所有边平行于坐标轴的立方体$Q \subset \mathbb{R}^n$ 。量 $[w]_{A_p}$ 称为权重 w的A_p 常数。对于 $p = 1$，类 $A_1(\mathbb{R}^n)$由所有满足以下条件的权重构成:

$$\mathcal{M}w(x) \le C\, w(x) \qquad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $\mathcal{M}$ 表示在边平行于坐标轴的立方体上取值的 Hardy–Littlewood极大算子，而满足条件的最小常数 C 记为 $[w]_{A_1}$。等价地， $w \in A_1$ 当

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\,dy \;\le\; [w]_{A_1} \inf_{x\in Q} w(x) \qquad \text{for all cubes } Q \subset \mathbb{R}^n.$$

由此可得

$$A_p(\mathbb{R}^n) \subset A_q(\mathbb{R}^n) \quad \text{if } 1 \le p \le q < \infty. \tag{1.1}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 42B20、42B25、47H60。

Key words and phrases. 加权估计、Muckenhoupt 权、多重权空间、多线性乘子、多线性伪微分算子。B. Park 获得 National Research Foundation（大韩民国）项目 RS-2025-20512969 及 Korea Institute for Advanced Study 的 Open KIAS Center 资助。N. Tomita 获得 JSPS KAKENHI Grant Number 25 K07086 资助。

给定权重 w，加权勒贝格空间 $L^p(w)$，$1<p<\infty$，由定义在 $\mathbb{R}^n$ 上且满足以下条件的所有可测函数 f 构成

$$\|f\|_{L^p(w)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

穆肯豪普特的一项经典结果 [31]断言了这一基本等价关系

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p(w)} \lesssim \|f\|_{L^p(w)} \quad \Longleftrightarrow \quad w\in A_p(\mathbb{R}^n), \qquad (1<p<\infty), \tag{1.2}$$

它构成了现代 Calder´on-Zygmund 算子加权理论的基础。事实上，众所周知，对于所有 $1<p<\infty$,

(1.3) 任意 Calder´on-Zygmund 算子 T 在 $L^p(w)$ 上有界，当且仅当 $w\in A_p(\mathbb{R}^n)$。

随着研究领域不断发展，人们对多线性算子的理解日益深入，因此有必要为权重组建立适当的 $A_p(\mathbb{R}^n)$ 理论类比。这一多线性推广由 Lerner、Ombrosi、P´érez、Torres 和 Trujillo-Gonz´alez 提出 [23], ; 他们定义了与指数 $1\le p_1,\dots,p_l<\infty$ 相关的多重权重类 $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)= A_{(p_1,\dots,p_l)}(\mathbb{R}^n)$。定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 l 元权重组 $\vec{\boldsymbol{w}}=(w_1,\dots,w_l)$ 属于 $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$，当且仅当

$$[\vec{\boldsymbol{w}}]_{A_{\vec{\boldsymbol{p}}}} := \sup_Q \left[\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v_{\vec{\boldsymbol{w}}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{l}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big(w_j(x)\big)^{1-p_j'}\,dx\right)^{\frac{1}{p_j'}}\right] < \infty, \tag{1.4}$$

其中，指数 p 由 $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_l}$ 决定，且

$$v_{\vec{\boldsymbol{w}}}(x) = \prod_{j=1}^{l} w_j(x)^{\frac{p}{p_j}}.$$

当 $p_j=1$ 时，$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \big(w_j(x)\big)^{1-p_j'}\,dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$ 可理解为 $\big(\inf_Q w_j\big)^{-1}$。

[23] 最引人注目的成就之一，是发现 $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$ 可以通过一种最大不等式来刻画，该不等式完全类似于线性情形的刻画（1.2）。对于多次次线性Hardy-Littlewood极大算子

$$\mathbf{M}(f_1,\dots,f_l)(x) := \sup_{Q\ni x}\left(\frac{1}{|Q|^l}\int_{Q^l}\prod_{j=1}^{l}|f_j(u_j)|\,d\vec{\boldsymbol{u}}\right)$$

其中 $Q^l := Q\times\cdots\times Q$、$d\vec{\boldsymbol{u}} := du_1\cdots du_l$，上确界取遍包含 x 的 $\mathbb{R}^n$ 中所有立方体 Q；文献 [23] 证明了

$$\big\|\mathbf{M}(f_1,\dots,f_l)\big\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})} \lesssim \prod_{j=1}^{l}\|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{w}}\in A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n) \tag{1.5}$$

当某些 p_j 为 1 时，作通常的修改。该结果表明，$A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$ 类是多线性调和分析加权理论的自然框架。然而，$A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$ 的内部结构比线性情形复杂得多。例如，这些类不满足经典 A_p 权重所具有的单调性 (1.1)，且各分量权重之间的相互作用相当微妙；参见 [23, 注 7。3]中的一个关键分解定理表明，任意多重权重$\vec{\boldsymbol{w}}\in A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$都可以完全用标量 A_q 条件刻画：每个分量

权重 w_j 满足适当的线性穆肯豪普特条件，而组合权重 $v_{\vec{w}}$属于另一个标量类（见引理 G）。这一分解阐明了$A_{\vec{P}}(\mathbb{R}^n)$的几何结构，并将对我们的工作至关重要，尤其是在构造反例以确立主要结果的尖锐性方面。

多线性傅里叶乘子。在线性情形下，设 σ 是定义在$\mathbb{R}^n$ 上的有界函数，并将相应的乘子算子 T_σ 定义为

$$T_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi \tag{1.6}$$

对所有属于 $\mathbb{R}^n$的施瓦茨函数 f 均成立。追溯至 Mikhlin [26] 和 H¨ormander [16], 的经典理论表明，若

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|\sigma(2^k\cdot)\widehat{\psi}\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)} < \infty, \qquad s > \frac{n}{2},$$

那么，对于任意 $1 < p < \infty$， T_σ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$上有界。这里， ψ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的施瓦茨函数，其傅里叶变换支撑于环域 $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \ 2^{-1} \le |\xi| \le 2\}$，并满足$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(2^j\xi) = 1$ （ $\xi \neq 0$），而索博列夫空间 $L^2_s(\mathbb{R}^n)$的范数定义为

$$\|f\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+4\pi^2|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

已知正则性条件 $s > \frac{n}{2}$ 是保证–L^p 有界性的最优条件。Kurtz and Wheeden [20], 对这一结果作了加权推广，证明同样的索博列夫型正则性条件足以保证算子在加权空间 $L^p(w)$上有界，其中 $w \in A_{\frac{ps}{n}}(\mathbb{R}^n)$（ $p > \frac{n}{s}$）。

定理 A. [20] 假设

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left\|\sigma(2^k\cdot)\widehat{\psi}\right\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)} < \infty, \quad \frac{n}{2} < s \le n. \tag{1.7}$$

对于任意的 $\frac{n}{s} < p < \infty$ 和 $w \in A_{\frac{ps}{n}}(\mathbb{R}^n)$，有

$$\left\|T_\sigma\right\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \lesssim_w \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left\|\sigma(2^k\cdot)\widehat{\psi}\right\|_{L^2_s(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.8}$$

根据 (1.3)，人们可能会猜想，在保持定理 A 中的其他所有假设不变的情况下，较弱的条件 $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ 仍足以保证$L^p(w)$ 有界性 T_σ。然而，Kurtz and Wheeden [21]证明事实并非如此。

定理 B. [21] 设 s 为满足$\frac{n}{2} < s < n$的整数。那么，对于任意的 $\frac{n}{s} \le p \le (\frac{n}{s})'$，存在 $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ 和满足 (1.7) 的 σ，使得 (1.8) 不成立。

尽管这表明， A_p 权不足以保证加权估计，但它们仍远弱于定理 A 中要求的 $A_{\frac{ps}{n}}$ 权，其中指数 $\frac{ps}{n}$ 严格小于 p。因此，确定最优权条件的问题仍未解决。

本文将通过证明条件 $w \in A_{\frac{ps}{n}}(\mathbb{R}^n)$ 确实是加权 L^p 有界性的最优条件，彻底解决这一问题。事实上，我们将在更广泛的框架下，通过在多线性情形中证明这一点来确立其最优性。（见下文定理 1）

乘子理论的多线性推广由 Coifman 和 Meyer[9], 开创，他们引入了如下形式的算子

$$T_\sigma(f_1,\dots,f_l)(x)=\int_{(\mathbb{R}^n)^l}\sigma(\xi_1,\dots,\xi_l)\Big(\prod_{j=1}^{l}\widehat{f_j}(\xi_j)\Big)e^{2\pi i\langle x,\xi_1+\cdots+\xi_l\rangle}\,d\vec{\boldsymbol{\xi}}$$

其中 $d\vec{\boldsymbol{\xi}}:=d\xi_1\cdots d\xi_l$。他们的工作推广了 Mihklin 的经典结果 [26], ，该结果确立了 $L^{p_1}\times\cdots\times L^{p_l}\to L^p$ 对 $1<p_1,\ \dots,\ p_l<\infty$ 及 $1\le p<\infty$ 的有界性，其中 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_l}=\frac{1}{p}$，前提是符号 σ 满足足够强的正则性条件。随后，Kenig 和 Stein [19] 以及 Grafakos 和 Torres [15] 将有界性结果推广到所有参数 $\frac{1}{l}<p<\infty$。之后，Tomita [35] 给出了 T_σ 的尖锐估计，作为 H¨ormander 关于 $1<p<\infty$ 的结果的多线性对应；后来 Grafakos 和 Si [14] 将其推广到范围 $\frac{1}{l}<p\le 1$。设 Ψ 是定义在 $\mathbb{R}^{nl}$ 上的施瓦茨函数，它是 ψ 的多线性对应，并满足 $\operatorname{supp}\widehat{\Psi}\subset\{\vec{\boldsymbol{\xi}}\in(\mathbb{R}^n)^l:\ 2^{-1}\le|\vec{\boldsymbol{\xi}}|\le 2\}$ 且 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\Psi}(2^j\vec{\boldsymbol{\xi}})=1$，其中 $\vec{\boldsymbol{\xi}}\neq\vec{0}$。

定理 C ([14, 35])**.** 设 $1<p_1,\dots,p_l<\infty$ 满足 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_l}=\frac{1}{p}$。假设多线性符号 σ 满足

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\big\|\sigma(2^{k}\cdot)\widehat{\Psi}\big\|_{L^2_s(\mathbb{R}^{nl})}<\infty,\qquad s>\frac{nl}{2}.$$

对于任意 $\frac{nl}{s}<p_1,\dots,p_l<\infty$，有

$$\big\|T_\sigma\big\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{p_l}(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)}\lesssim\sup_{k\in\mathbb{Z}}\big\|\sigma(2^{k}\cdot)\widehat{\Psi}\big\|_{L^2_s(\mathbb{R}^{nl})}.\tag{1.9}$$

众所周知，定理 C 中的估计 (1.9) 对更广范围的指数 $p_1,\dots,p_l$成立，而本文仅讨论 $\frac{nl}{s}<p_1,\dots,p_l<\infty$ 的情形，因此定理采用上述形式表述。关于指数的完整可容许范围的精确描述，请读者参阅 [14, 35]；关于涵盖完整范围 $0<p_1,\dots,p_l<\infty$ 的一个版本，请参阅 [22]。

关于多线性乘子定理的加权结果有许多重要研究，其中我们着重介绍与本文最相关的两项代表性成果。Fujita 和 Tomita [11]采用经典的穆肯豪普特 $A_p(\mathbb{R}^n)$ 权，得到了定理 C 所述多线性乘子定理的加权估计。随后，Li and Sun [24]在完整的多权框架下，为相同的多线性乘子结果建立了加权估计，从而进一步发展并改进了这一方向。关于双线性情形下的相关结果，另请参阅 Bui 和 Duong [4] 的工作。

定理 D. [24]设 $1<p_1,\dots,p_l<\infty$满足 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_l}=\frac{1}{p}$。假设多线性符号 σ 满足

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|\sigma(2^{k}\cdot)\widehat{\Psi}\|_{L^2_s(\mathbb{R}^{nl})}<\infty,\quad \frac{nl}{2}<s\le nl.$$

对于任意 $\frac{nl}{s}<p_1$、.....、 $p_l<\infty$ 和 $\vec{\boldsymbol{w}}\in A_{(\frac{p_1 s}{nl},\dots,\frac{p_l s}{nl})}(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\big\|T_\sigma\big\|_{L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_l}(w_l)\to L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})}\lesssim_{\vec{\boldsymbol{w}}}\sup_{k}\big\|\sigma(2^{k}\cdot)\widehat{\Psi}\big\|_{L^2_s(\mathbb{R}^{nl})}.\tag{1.10}$$

我们的第一个主要定理表明，上述加权估计对于更大的权重类 $A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$（其中 $q<\frac{nl}{s}$）无法成立。我们注意到，当 $l\geq 2$ 时，类 $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$ 通常不会按照指数 $(p_1,\dots,p_l)$ 上的自然偏序递增，这一点不同于 (1.1)；但它们在一致缩放下满足递增性质：对于缩放后的指数 $(rp_1,\dots,rp_l)$（其中 $r>1$），类 $A_{(rp_1,\dots,rp_l)}$ 会随着 r 的增大而变大。更多细节请参见[32, 引理 5]。

定理 1. 设 $l\in\mathbb{N}$, $\frac{nl}{2}<s\leq nl$, $0<q<\infty$, $\max\{q,\frac{nl}{s}\}\leq p_1,\dots,p_l<\infty$, 和 $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_l}=\frac{1}{p}$。假设对所有多线性符号 σ 以及所有 $\vec{w}\in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$，(1.10) 均成立。那么必要条件是

$$q\geq\frac{nl}{s}.$$

这一结果不仅改进了线性情形 $l=1$ 下的定理 B，而且还给出了完整的多线性类比。

多线性伪微分算子。 给定 $m\in\mathbb{R}$和 $0\leq\delta\leq\rho\leq 1$，H¨ormander 符号类 $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 由所有满足下列条件的定义在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数 $a(x,\xi)$ 构成

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right|\lesssim(1+|\xi|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}\qquad x,\xi\in\mathbb{R}^n$$

对于任意多重指标 α，$\beta\in\mathbb{N}_0^n$。对于 $a\in S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$，相应的（线性）伪微分算子最初定义在施瓦茨类 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上，定义如下：

$$T_{[a]}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi.$$

用 $\mathrm{Op}S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 表示符号属于 $S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 的伪微分算子类。与 (1.6) 相比，当 a 与 x 无关时，这就退化为一个（线性）傅里叶乘子算子，因此，$\mathrm{Op}S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 类可以视为对先前讨论的乘子算子的变系数推广。

此类算子的有界性由 H¨ormander[17, Theorem 3.5], Calder´on、Vaillancourt [5], 和 Fefferman [10] 系统地发展。特别是，对于 $0\leq\delta\leq\rho<1$ 和 $1<p<\infty$，条件

$$m\leq-n(1-\rho)\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|$$

当符号属于 $S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 时，足以保证 L^p-有界性。这一阶数条件通常被视为后续许多伪微分估计的线性原型。

线性伪微分算子的加权估计始于 Chanillo 和 Torchinsky [7],，他们证明，若 $a\in S^{-\frac{n}{2}(1-\rho)}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 对 $0\leq\delta<\rho<1$ 成立，且 $w\in A_{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^n)$ 对 $2\leq p<\infty$成立，则 $T_{[a]}$ 在 $L^p(w)$ 上有界。他们的证明主要依赖于用锐极大函数对$T_{[a]}f$ 进行逐点控制。随后，Miyachi 和 Yabuta[30], 改进了这一方法，将基础逐点估计推广到带有$1<r\leq 2$的 L^r-锐极大函数，从而为加权不等式提供了更灵活的框架。最近，作者 [33, 34]建立了一个加权估计，统一了上述所有结果。由于该结果不仅适用于线性情形，也适用于一般的多线性情形，我们首先介绍多线性伪微分算子的一些有界性结果，然后陈述 [33, 34] 的结果。

多线性 H¨ormander 符号类 $\mathbb{M}_l S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 由所有定义在 $(\mathbb{R}^n)^{l+1}$ 上的光滑函数 a 构成，这些函数具有如下性质：对于所有多重指标 $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_l \in (\mathbb{N}_0)^n$，存在常数 $C_{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_l} > 0$，使得

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_{\xi_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{\beta_l}^{\beta_l} a(x, \xi_1, \dots, \xi_l)\right| \le C_{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_l} \big(1 + |\xi_1| + \cdots + |\xi_l|\big)^{m+\delta|\alpha|-\rho(|\beta_1|+\cdots+|\beta_l|)},$$

现在令 $T_{[a]}$ 表示与 $a \in \mathbb{M}_l S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 相关联的多线性伪微分算子，其定义为

$$T_{[a]}\big(f_1, \dots, f_l\big)(x) := \int_{(\mathbb{R}^n)^l} a(x, \xi_1, \dots, \xi_l) \Big(\prod_{j=1}^{l} \widehat{f}_j(\xi_j) \Big) e^{2\pi i \langle x, \xi_1 + \cdots + \xi_l \rangle} \, d\vec{\boldsymbol{\xi}}$$

对于 $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。与 L^2 线性算子有界性相反，$a \in S^0_{0,0}(\mathbb{R}^n)$ 在 [5], B´enyi 和 Torres 证明，与之相关联的双线性算子未必在任何合理的勒贝格空间乘积上有界。这种有界性的失败促使人们广泛研究双线性和多线性伪微分算子所需的精确阶数条件。

B´enyi、Maldonado、Naibo 和 Torres 建立了双线性算子的符号演算；Michalowski、Rule 和 Staubach 的一系列工作，以及 B´enyi、Bernicot、Maldonado、Naibo 和 Torres 的工作，确立了次临界区域 $m < m_\rho(p_1, p_2)$ 中 $1 \le p, p_1, p_2 \le \infty$ 的 $L^{p_1} \times L^{p_2} \to L^p$ 界。最近，Miyachi 和 Tomita [27, 28, 29] 通过获得 Fefferman 有界性的双线性对应结果，确定了最优临界阶数 $m = m_\rho(p_1, p_2)$。对于一般的多线性算子，Kato、Miyachi 和 Tomita [18] 通过研究局部 Hardy 空间 h^p 及其端点对应空间 bmo，在情形 $\rho = 0$ 下获得了完整刻画。

在一般的 l 线性情形下，对于 $0 \le \delta \le \rho < 1$ 和指数 $0 < p_1, \dots, p_l \le \infty$，满足 $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p}$，令

$$m_0(\vec{\boldsymbol{p}}) := -n\bigg(\sum_{j=1}^{l} \max\Big(\frac{1}{p_j}, \frac{1}{2}\Big) - \min\Big(\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\Big)\bigg), \qquad m_\rho(\vec{\boldsymbol{p}}) := (1-\rho)\, m_0(\vec{\boldsymbol{p}}),$$

使得在 $\rho = 0$ 的情形下，$m_0(\vec{\boldsymbol{p}})$ 是临界阶数，而 $m_\rho(\vec{\boldsymbol{p}})$ 是其对 $0 < \rho < 1$ 的自然 $(1-\rho)$ 伸缩。如 [33, 命题 1.3], 所述，结合 [18]的结果、标准的 Littlewood-Paley 分解和伸缩论证，可以得到以下无权估计。

定理 E。 [18, 33] *令 $0 \le \delta \le \rho < 1$, $0 < p_1, \dots, p_l \le \infty$, 且 $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p}$。假设*

$$m < m_\rho(\vec{\boldsymbol{p}}) = (1-\rho)\, m_0(\vec{\boldsymbol{p}}),$$

and

$$a \in \mathbb{M}_l S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Then

$$T_{[a]} : H^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times H^{p_l}(\mathbb{R}^n) \to X^p(\mathbb{R}^n)$$

是有界的，其中 H^p 表示 $0 < p < \infty$的（实）*Hardy* 空间，我们采用约定$H^\infty = L^\infty$，并且

$$X^p := \begin{cases} L^p, & 0 < p < \infty, \\ BMO, & p = \infty. \end{cases}$$

特别地，若 $1 < p_1, \dots, p_l < \infty$，则

$$T_{[a]} : L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{p_l}(\mathbb{R}^n) \to L^{p}(\mathbb{R}^n)$$

在相同假设 $m < m_\rho(\vec{\boldsymbol{p}})$ 下有界。

最近，作者 [33, 34] 在多权重情形下建立了多线性伪微分算子的加权估计。

定理 F. [33, 34] 设 $0 \le \delta \le \rho < 1$、$1 < r \le 2$ 和 $r < p_1, \dots, p_l < \infty$ 满足 $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p}$。若 $a \in \mathbb{M}_l S^{\frac{nl}{r}}_{(1-\rho),\,\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\vec{\boldsymbol{w}} = (w_1, \dots, w_l) \in A_{(\frac{p_1}{r}, \dots, \frac{p_l}{r})}(\mathbb{R}^n)$，则存在常数 $C_{a,\,\vec{\boldsymbol{w}}} > 0$ 使得

$$\big\|T_{[a]}\big\|_{L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_l}(w_l)\to L^{p}(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})} \le C_{a,\vec{\boldsymbol{w}}}.$$

一个基本问题是，类比多线性傅里叶乘子情形中提出的问题，定理 F 中的权重条件是否可以弱化。我们的第二个主要定理表明这是不可能的。

定理 2。 设 $l \in \mathbb{N}$、$0 \le \rho < 1$、$1 < r \le 2$、$0 < q < \infty$、最大值$\{r, q\} \le p_1$、……、$p_l < \infty$，以及$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p}$。假设对于所有 $a \in \mathbb{M}_l S^{\frac{nl}{r}}_{(1-\rho)\rho,\,0}(\mathbb{R}^n)$ 以及对于所有 $\vec{\boldsymbol{w}} = (w_1, \dots, w_l) \in A_{(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$，存在一个常数 $C_{a,\,\vec{\boldsymbol{w}}} > 0$，使得加权范数不等式

$$\big\|T_{[a]}\big\|_{L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_l}(w_l)\to L^{p}(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})} \le C_{a,\vec{\boldsymbol{w}}} \tag{1.11}$$

成立。则必要条件是

$$r \le q.$$

注。 在定理 *2* 的证明中，我们实际上将证明，在对符号作较弱假设的情况下，条件 $r \le q$ 仍然是必要的，即加权不等式(1.11) 对所有与 x 无关的符号 a成立，因此，即使在这一受限情形下，上述必要条件仍然成立。

利用 Rubio de Francia 外推定理，Chen [8] 得到了满足$l = 1$的定理 2。我们将在不使用外推定理的情况下证明多线性情形（包括线性情形）。

与 Chanillo and Torchinsky [7], 证明定理 F 的方式相同，我们利用以下多线性伪微分算子的尖锐极大函数估计（[33, 34]）。若$1 < r \le 2$、$0 \le \delta \le \rho < 1$和 $a \in \mathbb{M}_l S^{\frac{nl}{r}}_{(1-\rho)\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$，则

$$\mathcal{M}^{\sharp}_{\frac{r}{l}}\big(T_{[a]}(f_1, \dots, f_l)\big)(x) \lesssim_a \mathbf{M}_r\big(f_1, \dots, f_l\big)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$

对所有定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的施瓦茨函数 $f_1, \dots f_l$，其中

$$\mathcal{M}^{\sharp}_t g(x) = \sup_{Q \ni x} \inf_{c_Q \in \mathbb{C}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |g(y) - c_Q|^t \, dy \right)^{\frac{1}{t}}, \quad 0 < t < \infty$$

以及 $\mathbf{M}_r\big(f_1, \dots, f_l\big)(x) = \big(\mathbf{M}\big(|f_1|^r, \dots, |f_l|^r\big)(x)\big)^{\frac{1}{r}}$。作为定理 2 的推论，我们得到估计 (1.12) 的最优性。

推论 3。设 $0 \le \rho < 1$ 和 $1 < r \le 2$。若存在 $q > 0$ 使得

$$\mathcal{M}^{\sharp}_{\frac{r}{l}}\big(T_{[a]}(f_1,\dots,f_l)\big)(x) \lesssim_a \mathbf{M}_q\big(f_1,\dots,f_l\big)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.13}$$

对所有 $a \in \mathbb{M}_l S^{-\frac{nl}{r}-(1-\rho)\,\rho,0}(\mathbb{R}^n)$，则 $r \le q$。

事实上，由于定理 2 在限制为 x-独立符号时仍然成立，因此即使假设 (1.13) 仅对这类符号成立，上述推论也依然成立；参见该推论的证明。

定理 1 和定理 2 的证明遵循一个共同的基本思路。我们构造显式的多重权与模型乘子（或伪微分符号）族，使其充分反映相应加权估计的临界行为，并比较通过适当选取的测试函数得到的上界和下界。

对于定理 1，我们利用引理 G 中对 $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}$ 的结构刻画，构造如下形式的一族权重

$$\vec{\boldsymbol{w}} = (w_{\beta_1,\gamma},\dots,w_{\beta_l,\gamma}) \qquad \text{with} \qquad w_{\beta_j,\gamma}(x) = \frac{|x|^{\beta_j}}{|x-e_1|^{\gamma}}.$$

适当选择参数 $\beta_1,\dots,\beta_l$ 和 γ 后，这些权重属于 $A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$。见下文引理 6。接着，我们将它们与由贝塞尔势核构造的原型乘子结合起来，并将假设的不等式应用于局部化凸起函数。比较指数后得到条件 $q \ge \frac{nl}{s}$，这表明该假设是尖锐的。定理 2 的证明在伪微分情形下采用类似策略。利用插值以及多重权的自我改善性质，通过 Littlewood-Paley 分解可将问题归约到 (0,0) 型符号。接着，我们将同一族多重权与和 σ_{nl} 相关联的伪微分算子结合，并在先前引入的局部化函数上考察假设的估计。由此得到的指数比较给出条件 $r \le q$，从而确立该加权伪微分估计的尖锐必要性。

结构安排。本文安排如下。第 2 节汇总证明中将用到的穆肯豪普特权和多重权的基本性质。第 3 节介绍支撑我们锐性论证的多重权、乘子和测试函数的显式族，并为这些例子建立关键的加权估计。第 4 节证明定理 1，其中利用第 3 节中的构造，推导出（多线性）乘子情形下权重假设的最优性。最后，第 5 节证明定理 2 和推论 3。

2. 预备知识

2.1. 穆肯豪普特权空间 $A_p(\mathbb{R}^n)$。我们回顾穆肯豪普特类 $A_p(\mathbb{R}^n)$ 的若干标准性质，这些性质将在本文后续部分用到。首先，对于 $1 < p < \infty$，对偶关系

$$w \in A_p(\mathbb{R}^n) \quad \Longleftrightarrow \quad w^{1-p'} \in A_{p'}$$

这是 A_p 条件定义和 H¨older 不等式的直接推论。

另一个有用的事实是，两个合适的 A_1 权重的组合会得到一个 A_p 条件。若 w_0, $w_1 \in A_1(\mathbb{R}^n)$，则

$$w_0\, w_1^{1-p} \in A_p(\mathbb{R}^n), \tag{2.1}$$

也就是说，$A_1(\mathbb{R}^n)A_1^{1-p}(\mathbb{R}^n) \subset A_p(\mathbb{R}^n)$。

作为一个基本模型类，考虑幂权重 $w(x) = |x|^\alpha$。众所周知，这类权重满足

$$|x|^\alpha \in A_p(\mathbb{R}^n) \iff \begin{cases} -n < \alpha < n(p-1), & p > 1, \\ -n < \alpha \le 0, & p = 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

这完全刻画了 $A_p(\mathbb{R}^n)$ 中所有径向幂权重。

我们还回顾一下 [12, 第四章。定理 2。7] 经典的反向 H¨older 自改善性质：

$$w \in A_p(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad w^{1+\epsilon} \in A_p(\mathbb{R}^n) \quad \text{for some } \epsilon > 0. \tag{2.3}$$

最后，标量 A_p 条件在伸缩变换下保持不变。对于任意 $\lambda > 0$ ，

$$w \in A_p(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad w(\lambda\cdot) \in A_p(\mathbb{R}^n), \tag{2.4}$$

并且，$w(\lambda\cdot)$ 的 A_p 常数保持不变，等于 w 的常数。下一小节将把这一不变性推广到多重权。

2.2. 多重权空间 $A_{(p_1,\dots,p_l)}$。接下来，我们概述多重权类 $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$ 的结构和基本性质，它们在多线性算子的分析中起着核心作用。根据 (1.4)，其定义涉及组合权重

$$v_{\vec{\boldsymbol{w}}} := \prod_{j=1}^{l} w_j^{\frac{p}{p_j}}, \qquad \text{where} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_l}.$$

下面的引理通过经典标量 A_p 权重，对 $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$ 给出了精确而完整的刻画。

引理 G. [23, 定理 3.6] 设 $\vec{\boldsymbol{w}} = (w_1, \dots, w_l)$ 且 $1 \le p_1, \dots, p_l < \infty$。则

$$\vec{\boldsymbol{w}} \in A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n) \iff \begin{cases} w_j^{1-p_j'} \in A_{lp_j'}(\mathbb{R}^n), & j = 1, \dots, l, \\ v_{\vec{\boldsymbol{w}}} \in A_{lp}(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

约定当 $p_j = 1$ 时，条件 $w_j^{1-p_j'} \in A_{lp_j'}(\mathbb{R}^n)$ 替换为$w_j^l \in A_1(\mathbb{R}^n)$。

–

这种结构分解表明，多线性类 $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$ 完全由标量 A_p 条件决定。因此，一旦分析了各分量权重和组合权重$v_{\vec{\boldsymbol{w}}}$，许多经典的 $A_p(\mathbb{R}^n)$ 类性质便可直接推广到多线性情形。事实上，引理 G 是第 3 章中使用的关键工具之一；该章构造了明确的多重权，并通过检验相应的标量条件来验证它们在 $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}$ 中的可容许性。

经典 A_p 权重的自我改善性质 (2.3) 在多线性情形下也成立。事实上，根据引理 G，条件 $\vec{\boldsymbol{w}} \in A_{\vec{\boldsymbol{p}}}$ 可归结为对每个w_j 以及组合权重 $v_{\vec{\boldsymbol{w}}}$的估计。将 (2.3) 应用于这些权重，可得到一致的 $\epsilon > 0$，从而得到以下引理。

引理 4. [32, 引理 4] 设 $1 \le p_1, \dots, p_l < \infty$，并假设 $\vec{\boldsymbol{w}} \in A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$。那么存在 $\epsilon > 0$，使得

$$\vec{\boldsymbol{w}}^{1+\epsilon} := (w_1^{1+\epsilon}, \dots, w_l^{1+\epsilon}) \in A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n).$$

多重权的另一项重要性质是在伸缩变换下保持不变，这是（2.4）的多线性类比。此外，这种不变性是均匀成立的： $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}$ 常数与伸缩参数无关。

引理 5. 对于任意 $\vec{\boldsymbol{w}} \in A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\vec{\boldsymbol{w}}(\lambda\cdot) := (w_1(\lambda\cdot), \dots, w_l(\lambda\cdot)) \in A_{\vec{\boldsymbol{p}}}(\mathbb{R}^n)$$

关于 $\lambda > 0$ 一致成立；也就是说， $\vec{\boldsymbol{w}}(\lambda\cdot)$ 的 $A_{\vec{\boldsymbol{p}}}$ 常数可以选取为与 λ 无关。

该引理可直接由下式推出

$$[\vec{\boldsymbol{w}}(\lambda\cdot)]_{A_{\vec{\boldsymbol{p}}}} = [\vec{\boldsymbol{w}}]_{A_{\vec{\boldsymbol{p}}}},$$

它是定义（1.4）的直接推论。

2.3. **贝塞尔势**。 固定 $N \in \mathbb{N}$ 并考虑定义在 $\mathbb{R}^N$上的函数。对于 $t > 0$，贝塞尔势核 G_t 定义为以下函数的傅里叶变换:

$$(1 + 4\pi^2|x|^2)^{-\frac{t}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

本文只需要考察 G_t 在原点附近且 $0 < t \le N$时的行为，此时

$$G_t(\xi) \sim_{t,N} \begin{cases} |\xi|^{-(N-t)}, & 0 < t < N \\ \ln\left(2|\xi|^{-1}\right), & t = N \end{cases} \tag{2.5}$$

当 $|\xi| \le 1$时。因此，对于 $0 < t < N$，核 G_t 在原点附近的行为类似于齐次函数 $|\xi|^{-(N-t)}$；而在临界情形 $t = N$ 下，它具有对数奇点。当 $t > N$时，核 G_t 在原点处没有奇点。更多详情请参见 [13, 第 1.2 章。2]

3. Key Estimates

固定多线性度 $l \in \mathbb{N}$，并构造权、算子和函数的例子，这些将在定理 1 和定理 2 的证明中用到。

3.1. **（多重）权的构造**。 令 $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$。令 $0 < p_1, \dots, p_l < \infty$、 $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p}$，并令 $0 < q \le$取最小值 $\{p_1, \dots, p_l\}$。对于任意 $\beta_1, \dots, \beta_l \ge 0$和 $\gamma > 0$，定义

$$w_{\beta_j,\gamma}(x) = \frac{|x|^{\beta_j}}{|x - e_1|^{\gamma}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

引理 6. 假设 $0 < \gamma < n$，并且对每个 j，我们令 $0 < \beta_j < n(\frac{p_j}{q} - 1)$，当 $p_j > q$ 时；而在 $p_j = q$ 的情形下，我们假设 $\beta_j = 0$。那么有

$$\vec{\boldsymbol{w}} := (w_{\beta_1,\gamma}, \dots, w_{\beta_l,\gamma}) \in A_{(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

证明。 根据引理 G，断言 (3.2) 等价于

$$\begin{cases} \big(w_{\beta_j,\gamma}\big)^{1-(\frac{p_j}{q})'} \in A_{l(\frac{p_j}{q})'}(\mathbb{R}^n), \quad j=1,\dots,l, \\ v_{\vec{\boldsymbol{w}}} \in A_{\frac{lp}{q}}(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{3.3}$$

其中，在$p_j = q$的情形下，条件$\big(w_{\beta_j,\gamma}\big)^{1-(\frac{p_j}{q})'} \in A_{l(\frac{p_j}{q})'}(\mathbb{R}^n)$理解为$\big(w_{\beta_j,\gamma}\big)^{\frac{1}{l}} = \big(w_{0,\gamma}\big)^{\frac{1}{l}} \in A_1(\mathbb{R}^n)$。

若 $q < p_j$，则

$$0 < \beta_j\Big(\big(\frac{p_j}{q}\big)' - 1\Big) < n \quad \text{and} \quad 0 < \gamma\frac{\big(\frac{p_j}{q}\big)' - 1}{l\big(\frac{p_j}{q}\big)' - 1} \le \gamma < n,$$

因此，由 (2.2) 得

$$|x|^{-\beta_j((\frac{p_j}{q})'-1)} \in A_1(\mathbb{R}^n) \quad \text{and} \quad |x-e_1|^{-\gamma\frac{(\frac{p_j}{q})'-1}{l(\frac{p_j}{q})'-1}} \in A_1(\mathbb{R}^n).$$

结合 (2.1)，可推出

$$\big(w_{\beta_j,\gamma}(x)\big)^{1-(\frac{p_j}{q})'} = |x|^{-\beta_j((\frac{p_j}{q})'-1)}\Big(|x-e_1|^{-\gamma\frac{(\frac{p_j}{q})'-1}{l(\frac{p_j}{q})'-1}}\Big)^{1-l(\frac{p_j}{q})'} \in A_{l(\frac{p_j}{q})'}(\mathbb{R}^n).$$

若 $q = p_j$，则

$$\big(w_{\beta_j,\gamma}(x)\big)^{\frac{1}{l}} = \big(w_{0,\gamma}(x)\big)^{\frac{1}{l}} = |x-e_1|^{-\frac{\gamma}{l}} \in A_1(\mathbb{R}^n)$$

因为 $0 < \frac{\gamma}{l} \le \gamma < n$。这就证明了 (3.3) 的第一个条件。

为验证 (3.3) 的第二个条件，我们写出

$$v_{\vec{\boldsymbol{w}}}(x) = \frac{|x|^{\frac{p}{p_1}\beta_1+\cdots+\frac{p}{p_l}\beta_l}}{|x-e_1|^{\gamma}}. \tag{3.4}$$

显然，由 (2.2) 可知，

$$\frac{1}{|x-e_1|^{\gamma}} \in A_1(\mathbb{R}^n). \tag{3.5}$$

若 $p_1 = \cdots = p_l = q$，则

$$v_{\vec{\boldsymbol{w}}}(x) = \frac{1}{|x-e_1|^{\gamma}} \in A_1(\mathbb{R}^n) = A_{\frac{lp}{q}}(\mathbb{R}^n).$$

若 $q < \max\{p_1,\dots,p_l\}$，则

$$0 < \frac{p}{p_1}\beta_1 + \cdots + \frac{p}{p_l}\beta_l < \sum_{j=1}^{l}\frac{pn}{p_j}\big(\frac{p_j}{q} - 1\big) = n\Big(\frac{lp}{q} - 1\Big),$$

这意味着

$$0 < \frac{\frac{p}{p_1}\beta_1 + \cdots + \frac{p}{p_l}\beta_l}{\frac{lp}{q} - 1} < n$$

因此

$$|x|^{-\frac{\frac{p}{p_1}\beta_1+\cdots+\frac{p}{p_l}\beta_l}{\frac{lp}{q}-1}} \in A_1(\mathbb{R}^n). \tag{3.6}$$

结合（3.4）、（3.5）和（3.6），由性质（2.1）可推得

$$v_{\vec{\boldsymbol{w}}}(x)=\frac{1}{|x-e_1|^{\gamma}}\Big(|x|^{-\frac{\frac{p}{p_1}\beta_1+\cdots+\frac{p}{p_l}\beta_l}{\frac{lp}{q}-1}}\Big)^{1-\frac{lp}{q}}\in A_{\frac{lp}{q}}(\mathbb{R}^n),$$

这就完成了（3.3）的证明，因此（3.2）也成立。 □

3.2. **（多线性）乘子的构造**。对于 $0<\mu\le nl$ 我们定义函数σ_μ 在（$\mathbb{R}^n$）^{l} 上为

$$\sigma_\mu(\vec{\boldsymbol{\xi}})=\frac{1}{(1+4\pi^2|\vec{\boldsymbol{\xi}}|^2)^{\frac{\mu}{2}}}e^{-2\pi i\langle e_1,\xi_1+\cdots+\xi_l\rangle}$$

其中 $\vec{\boldsymbol{\xi}}=(\xi_1,\ldots,\xi_l)\in(\mathbb{R}^n)^l$。我们首先断言

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\Big\|\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\Big\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^{nl})}\lesssim 1. \tag{3.7}$$

事实上，取满足 $0<\mu<2M$ 的正整数 M，并利用普朗歇尔定理和 H¨older 不等式以及 $\binom{2M}{\mu}>1$，可得

$$\begin{aligned}\Big\|\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\Big\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^{nl})}&=\Big\|\big(1+4\pi^2|\vec{\cdot}|^2\big)^{\frac{\mu}{2}}\Big(\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\Big)^{\vee}\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^{nl})}\\&\le\Big\|\Big(\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\Big)^{\vee}\Big\|^{1-\frac{\mu}{2M}}_{L^2(\mathbb{R}^{nl})}\Big\|\big(1+4\pi^2|\vec{\cdot}|^2\big)^{M}\Big(\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\Big)^{\vee}\Big\|^{\frac{\mu}{2M}}_{L^2(\mathbb{R}^{nl})}\\&=\Big\|\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\Big\|^{1-\frac{\mu}{2M}}_{L^2(\mathbb{R}^{nl})}\Big\|\big(\vec{I}-\vec{\Delta}\big)^{M}\big(\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\big)\Big\|^{\frac{\mu}{2M}}_{L^2(\mathbb{R}^{nl})}.\end{aligned}$$

由于

$$\Big|\sigma_\mu(2^k\vec{\boldsymbol{\xi}})\widehat{\Psi}(\vec{\boldsymbol{\xi}})\Big|\sim 2^{-\mu k}\chi_{|\vec{\boldsymbol{\xi}}|\sim 1},$$

我们有

$$\Big\|\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^{nl})}\sim 2^{-\mu k}.$$

同样，经过直接计算可得

$$\Big|\big(\vec{I}-\vec{\Delta}\big)^{M}\big(\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\big)(\vec{\boldsymbol{\xi}})\Big|\sim 2^{-\mu k}2^{2Mk}\chi_{|\vec{\boldsymbol{\xi}}|\sim 1},$$

这意味着

$$\Big\|\big(\vec{I}-\vec{\Delta}\big)^{M}\big(\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\big)\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^{nl})}\sim 2^{-\mu k}2^{2Mk}.$$

由此可得

$$\Big\|\sigma_\mu(2^{k\vec{\cdot}})\widehat{\Psi}\Big\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^{nl})}\lesssim 2^{-\mu k(1-\frac{\mu}{2M})}\big(2^{-\mu k}2^{2Mk}\big)^{\frac{\mu}{2M}}=1,$$

这就完成了 (3.7) 的证明。

此外，直接计算可得

$$\sigma_\mu\in\mathbb{M}^l S^{-\mu}_{(0,0)}(\mathbb{R}^n). \tag{3.8}$$

接下来，我们考虑相应的（多线性）乘子算子 T_{σ_μ}，定义为

$$T_{\sigma_\mu}(f_1,\ldots,f_l)(x)=\int_{(\mathbb{R}^n)^l}\sigma_\mu(\xi_1,\ldots,\xi_l)\Big(\prod_{j=1}^{l}\widehat{f}_j(\xi_j)\Big)\,e^{2\pi i\langle x,\xi_1+\cdots+\xi_l\rangle}\,d\vec{\boldsymbol{\xi}}$$

其中 $f_1,\dots,f_l\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。此时，算子 T_{σ_μ} 可写为

$$T_{\sigma_\mu}(f_1,\dots,f_l)(x)=\int_{(\mathbb{R}^n)^l}G_\mu(x-e_1-y_1,\dots,x-e_1-y_l)\prod_{j=1}^{l}f_j(y_j)\,d\vec{\boldsymbol{y}}$$

其中回顾一下， G_μ 是 $\mathbb{R}^{nl}$上的贝塞尔势核，已在第 2 节 2.3 小节中讨论。

3.3. 主要加权估计。设 ϕ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的施瓦茨函数，满足 $\operatorname{supp}(\phi)\subset\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|\le 2\}$, $0\le\phi\le 1$，且对所有满足 $|x|\le 1$ 的 x，都有 $\phi(x)=1$。对于任意的 $0<\epsilon<\frac{1}{4l}$，我们定义 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f^ϵ 为

$$f^\epsilon(x)=\phi(\epsilon^{-1}x)$$

使得 $0\le f^\epsilon\le 1$，并且

$$f^\epsilon(x)=\begin{cases}1 & |x|\le\epsilon\\ 0 & |x|\ge 2\epsilon\end{cases}.$$

令

$$f_1(x)=\cdots=f_l(x)=f^\epsilon(x)=\phi(\epsilon^{-1}x),\tag{3.9}$$

我们有

$$\begin{aligned}T_{\sigma_\mu}(f^\epsilon,\dots,f^\epsilon)(x)&=\int_{(\mathbb{R}^n)^l}G_\mu(x-e_1-y_1,\dots,x-e_1-y_l)\prod_{j=1}^{l}f^\epsilon(y_j)\,d\vec{\boldsymbol{y}}\\&\ge\int_{|y_1|,\dots,|y_l|<\epsilon}G_\mu(x-e_1-y_1,\dots,x-e_1-y_l)\,d\vec{\boldsymbol{y}}.\end{aligned}$$

若 $|y_1|,\dots,|y_l|<\epsilon$ 且 $|x-e_1|<3\epsilon$，则

$$\big|(x-e_1-y_1,\dots,x-e_1-y_l)\big|\le\sum_{j=1}^{l}|x-e_1-y_j|<4l\epsilon<1,$$

对于该条件

$$G_\mu(x-e_1-y_1,\dots,x-e_1-y_l)\gtrsim\begin{cases}\frac{1}{\epsilon^{nl-\mu}} & \mu<nl\\ \ln(\frac{1}{2l\epsilon}) & \mu=nl\end{cases},$$

根据 (2.5)。由此可得，对于 $|y_1|,\dots,|y_l|<\epsilon$ 且 $|x-e_1|<3\epsilon$,

$$G_\mu(x-e_1-y_1,\dots,x-e_1-y_l)\gtrsim\frac{1}{\epsilon^{nl-\mu}}$$

因此

$$T_{\sigma_\mu}(f^\epsilon,\dots,f^\epsilon)(x)\gtrsim\epsilon^\mu\quad\text{for }\ |x-e_1|<3\epsilon.\tag{3.10}$$

设 $\vec{\boldsymbol{w}}$ 为 (3.2) 中的（多重）权。则对于 $2\epsilon<|x-e_1|<3\epsilon$,

$$v_{\vec{\boldsymbol{w}}}(x)\sim\frac{1}{|x-e_1|^\gamma}\sim\epsilon^{-\gamma}$$

因此，利用（3.10），我们得到

$$\big\|T_{\sigma_\mu}(f^\epsilon,\dots,f^\epsilon)\big\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})}\ge\left(\int_{2\epsilon<|x-e_1|<3\epsilon}\big|T_{\sigma_\mu}(f^\epsilon,\dots,f^\epsilon)(x)\big|^p v_{\vec{\boldsymbol{w}}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\gtrsim\epsilon^\mu\epsilon^{-\frac{\gamma}{p}}\epsilon^{\frac{n}{p}}.\tag{3.11}$$

此外，对于每个 $j=1,\dots,m$，若 $|x|\le 2\epsilon$，则

$$w_{\beta_j,\gamma}(x)\sim_\gamma |x|^{\beta_j}\lesssim \epsilon^{\beta_j},$$

因此

$$\|f^\epsilon\|_{L^{p_j}(w_{\beta_j,\gamma})}\le\left(\int_{|x|\le 2\epsilon} w_{\beta_j,\gamma}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p_j}}\lesssim \epsilon^{\frac{\beta_j}{p_j}}\epsilon^{\frac{n}{p_j}}. \tag{3.12}$$

4. Proof of Theorem 1

我们假设 $q<\frac{nl}{s}$，并将导出一个矛盾。选取常数 $\delta>0$，使得

$$s+\frac{2\delta}{p}<\frac{nl}{q}\quad\text{and}\quad \delta<n\min_{1\le j\le l}\left\{\left(\frac{p_j}{q}-1\right),1\right\}. \tag{4.1}$$

Take

$$\gamma=n-\delta>0$$

并令 β_1、.....、$\beta_l\ge 0$ 为

$$\beta_j=\begin{cases}0 & \text{if } p_j=q,\\ n(\frac{p_j}{q}-1)-\delta & \text{if } p_j>q,\end{cases} \tag{4.2}$$

然后我们设

$$\vec{\boldsymbol{w}}=(w_{\beta_1,\gamma},\dots,w_{\beta_l,\gamma}).$$

由于参数 γ，β_1，.....，β_l 满足引理 6 中的假设，我们有

$$\vec{\boldsymbol{w}}\in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n). \tag{4.3}$$

现在我们设

$$\sigma(\vec{\boldsymbol{\xi}})=\sigma_s(\vec{\boldsymbol{\xi}}),\quad \vec{\boldsymbol{\xi}}=(\xi_1,\dots,\xi_l)\in(\mathbb{R}^n)^l.$$

根据 (3.7),

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left\|\sigma(2^k\vec{\cdot})\widehat{\Psi}\right\|_{L^2_s(\mathbb{R}^{nl})}\lesssim 1. \tag{4.4}$$

对于任意 $0<\epsilon<\frac{1}{4l}$，我们设

$$f_1(x)=\cdots=f_l(x)=f^\epsilon(x)$$

如 (3.9) 中所示。由此，根据 (3.11)、(1.10)、(4.4) 和 (3.12)，可得

$$\epsilon^s\epsilon^{-\frac{\gamma}{p}}\epsilon^{\frac{n}{p}}\lesssim\left\|T_\sigma(f^\epsilon,\dots,f^\epsilon)\right\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})}\lesssim\prod_{j=1}^{l}\|f^\epsilon\|_{L^{p_j}(w_{\beta_j,\gamma})}\lesssim\epsilon^{\frac{\beta_1}{p_1}+\cdots+\frac{\beta_l}{p_l}}\epsilon^{\frac{n}{p}}.$$

因此，由于 $\frac{\beta_1}{p_1}+\cdots+\frac{\beta_l}{p_l}\ge\frac{nl}{q}-\frac{n}{p}-\frac{\delta}{p}$，

$$1\lesssim\epsilon^{\frac{\beta_1}{p_1}+\cdots+\frac{\beta_l}{p_l}}\epsilon^{-s}\epsilon^{\frac{\gamma}{p}}\le\epsilon^{\frac{nl}{q}-s-\frac{2\delta}{p}},$$

由于（4.1）中的第一项，当 ϵ 趋于 0 时，这显然会导致矛盾。

证明至此完成。

5. Proof of Theorem 2 and Corollary 3

5.1. 化归为 (0,0) 型符号。 假设对于所有 x-独立的 $nl(1-\rho)$ 符号 $a \in \mathbb{M}_l S_{\rho 0}^{r}(\mathbb{R}^n)$ 以及所有（多重）权重 $\vec{w} \in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$，(1.11) 均成立。那么我们声称，对于所有 x-独立符号 $b \in \mathbb{M}_l S_0^{r,0}(\mathbb{R}^n)$ 以及所有（多重）权重 $\vec{w} \in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$，存在一个常数 $C_{b,\vec{w}} > 0$ 使得

$$\big\|T_{[b]}\big\|_{L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_l}(w_l)\to L^p(v_{\vec{w}})} \le C_{b,\vec{w}} \tag{5.1}$$

成立。由于当 $\rho = 0$ 时，这恰好就是估计 (1.11)，因此对于该结论，我们只需考虑 $0 < \rho < 1$ 的情形。设 $\{\Phi_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ 是定义在 $(\mathbb{R}^n)^l$ 上、相对于依赖于 ρ 的二进缩放构造的一族（非齐次）Littlewood-Paley 函数，使得 $\operatorname{supp}(\widehat{\Phi_0}) \subset \{\vec{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^l : |\vec{\xi}| \le 2\}$，$\operatorname{supp}(\widehat{\Phi_k}) \subset \{\vec{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^l : 2^{k-1} \le |\vec{\xi}| \le 2^{k+1}\}$，且 $\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\Phi_k}(2^{k\rho}\vec{\xi}) = 1$。这种系统可按通常方式构造：选取一个满足 $\widehat{\Phi_0}(\vec{\xi}) = 1$（对 $|\vec{\xi}| \le 1$）且 $\operatorname{supp}(\widehat{\Phi_0}) \subset \{\vec{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^l : |\vec{\xi}| \le 2\}$ 的光滑截断函数 $\widehat{\Phi_0}$，并定义 $\widehat{\Phi}(\vec{\xi}) = \widehat{\Phi_0}(\vec{\xi}) - \widehat{\Phi_0}(2^{1-\rho}\vec{\xi})$ 以及 $\widehat{\Phi_k}(\vec{\xi}) = \widehat{\Phi}(2^{-k}\vec{\xi})$（对 $k \ge 1$）。对每个 $k \in \mathbb{N}_0$，令

$$\lambda_k(\vec{\xi}) := \widehat{\Phi_k}(2^{k\rho}\vec{\xi}),$$

然后我们定义 $b_k(\vec{\xi}) := \lambda_k(\vec{\xi})b(\vec{\xi})$，使得

$$b(\vec{\xi}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\vec{\xi}).$$

现在令

$$a_k(\vec{\xi}) := b_k(2^{-k\rho}\vec{\xi}) = \lambda_k(2^{-k\rho}\vec{\xi})b(2^{-k\rho}\vec{\xi}) = \widehat{\Phi_k}(\vec{\xi})b(2^{-k\rho}\vec{\xi}).$$

于是有

$$\operatorname{supp}(a_k) \subset \big\{\vec{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^l : 2^{k-1} \le |\vec{\xi}| \le 2^{k+1}\big\},$$

其中，当 $k = 0$ 时，将 $\{2^{k-1} \le |\vec{\xi}| \le 2^{k+1}\}$ 替换为 $\{|\vec{\xi}| \le 2\}$；对于任意多重指标 $\vec{\alpha} \in (\mathbb{N}_0^n)^l$，存在一个与 k 无关的常数 $C_{b,\vec{\alpha}}$，使得

$$\big|\partial_{\vec{\xi}}^{\vec{\alpha}} a_k(\vec{\xi})\big| \le C_{b,\vec{\alpha}}\big(1 + |\vec{\xi}|\big)^{-\frac{nl(1-\rho)}{r} - \rho|\vec{\alpha}|},$$

也就是说，

$$a_k \in \mathbb{M}_l S_{\rho,0}^{-\frac{nl(1-\rho)}{r}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{uniformly in } k \in \mathbb{N}_0.$$

假设 $\vec{w} \in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$，并应用引理 4，取 $\epsilon > 0$，使得 $\vec{w}^{1+\epsilon} = (w_1^{1+\epsilon}, \dots\dots, w_l^{1+\epsilon}) \in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$。根据有界性假设 (1.11)，

$$\big\|T_{[a_k]}(f_1,\dots,f_l)\big\|_{L^p(v_{\vec{w}^{1+\epsilon}})} \lesssim_{b,\vec{w}} \prod_{j=1}^{l} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j^{1+\epsilon})}.$$

由于 $r \le \min\{p_1,\dots,p_l,2\}$，我们可以看到

$$\sum_{j=1}^{l} \max\left(\frac{1}{p_j},\frac{1}{2}\right) - \min\left(\frac{1}{p},\frac{1}{2}\right) < \frac{l}{r},$$

这意味着 $-\frac{nl(1-\rho)}{r} \leq m_\rho(\vec{\boldsymbol{p}})$。因此，由定理 E 可得

$$\big\|T_{[a_k]}(f_1,\dots,f_l)\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim_b 2^{-\epsilon_0 k}\prod_{j=1}^{l}\|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)}$$

对于某个 $\epsilon_0>0$，其取决于 $\rho, p_1, \dots, p_l$。然后我们在 [6,中应用复插值定理 3，1] 得到

$$\big\|T_{[a_k]}(f_1,\dots,f_l)\big\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})} \lesssim_{b,\vec{\boldsymbol{w}}} 2^{-\epsilon_0 \frac{\epsilon}{1+\epsilon}k}\prod_{j=1}^{l}\|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}. \tag{5.2}$$

现在我们写作

$$T_{[b]}\big(f_1,\dots,f_l\big)=\sum_{k=0}^{\infty}T_{[b_k]}\big(f_1,\dots,f_l\big).$$

对于每个 $k\in\mathbb{N}_0$，令 $f_j^\rho(x):=f_j(2^{k\rho}x)$，其中 $1\le j\le l$，我们有

$$\begin{aligned}
T_{[b_k]}\big(f_1,\dots,f_l\big)(x)&=\int_{(\mathbb{R}^n)^l} b_k(\vec{\boldsymbol{\xi}})\Big(\prod_{j=1}^{l}\widehat{f_j}(\xi_j)\Big)e^{2\pi i\langle x,\xi_1+\cdots+\xi_l\rangle}\,d\vec{\boldsymbol{\xi}}\\
&=\int_{(\mathbb{R}^n)^l} a_k(\vec{\boldsymbol{\xi}})\Big(\prod_{j=1}^{l}\Big(2^{-k\rho n}\widehat{f_j}(2^{-k\rho}\xi_j)\Big)\Big)e^{2\pi i\langle 2^{-k\rho}x,\xi_1+\cdots+\xi_l\rangle}\,d\vec{\boldsymbol{\xi}}\\
&=T_{[a_k]}\big(f_1^\rho,\dots,f_l^\rho\big)(2^{-k\rho}x).
\end{aligned}$$

注意到 $\big(w_1(2^{k\rho}\cdot)\dots,w_l(2^{k\rho}\cdot)\big)\in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$ 关于 $k\in\mathbb{N}_0$ 一致成立（见引理 5），因此估计式 (5.2) 得出

$$\begin{aligned}
\big\|T_{[b_k]}\big(f_1,\dots,f_l\big)\big\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})}&=2^{\frac{k\rho n}{p}}\Big\|T_{[a_k]}\big(f_1^\rho,\dots,f_l^\rho\big)\Big\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}}(2^{k\rho}\cdot))}\\
&\lesssim_{b,\vec{\boldsymbol{w}}} 2^{\frac{k\rho n}{p}}2^{-\epsilon_0\frac{\epsilon}{1+\epsilon}k}\prod_{j=1}^{l}\big\|f_j^\rho\big\|_{L^{p_j}(w_j(2^{k\rho}\cdot))}\\
&=2^{-\epsilon_0\frac{\epsilon}{1+\epsilon}k}\prod_{j=1}^{l}\big\|f_j\big\|_{L^{p_j}(w_j)}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\big\|T_{[b]}(f_1,\dots,f_l)\big\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})}\le\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\big\|T_{[b_k]}\big(f_1,\dots,f_l\big)\big\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})}^{\min\{1,p\}}\Big)^{\frac{1}{\min\{1,p\}}}\lesssim_{b,\vec{\boldsymbol{w}}}\prod_{j=1}^{l}\big\|f_j\big\|_{L^{p_j}(w_j)},$$

由此完成了（5.1）的证明。

5.2. 类型 (0,0) 符号的定理 2 证明。由于上文已进行了约化，我们不妨假设 $\rho=0$。具体而言，假设对于所有 x-独立符号 $b\in\mathbb{M}_l S_{0\,0}^{\,r}(\mathbb{R}^n)$，估计 (5.1) 成立，其中 $\vec{\boldsymbol{w}}\in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$。在此假设下，我们将证明必有 $r\le q$。为此，反设 $r>q$。首先，我们选取 $\delta>0$ 使得

$$\frac{nl}{r}+\frac{2\delta}{p}<\frac{nl}{q}\quad\text{and}\quad\delta<n\min_{1\le j\le l}\Big\{\Big(\frac{p_j}{q}-1\Big),1\Big\}.$$

并取

$$\gamma = n - \delta > 0$$

以及 $\beta_1, \dots, \beta_l > 0$ 满足 (4.2)。随后，(4.3) 中已经验证了

$$\vec{\boldsymbol{w}} = (w_{\beta_1,\gamma}, \dots, w_{\beta_l,\gamma}) \in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$$

其中$w_{\beta_j,\gamma}$ 的定义见 (3.1)。

令 $0 < \epsilon < \frac{1}{4l}$，并设 $b(x, \vec{\boldsymbol{\xi}}) = \sigma_r^{nl}(\vec{\boldsymbol{\xi}})$，以及

$$f_1(x) = \cdots = f_l(x) = f^\epsilon(x) = \phi(\epsilon^{-1}x),$$

我们可以使用 (3.8)、(3.11) 和 (3.12)，得到

$$T_{[b]}(f_1, \dots, f_l) = T_{\sigma_{\frac{nl}{r}}}(f^\epsilon, \dots, f^\epsilon).$$

换言之，

$$b \in \mathbb{M}S^{-\frac{nl}{r}}_{(0,0)}(\mathbb{R}^n)$$

而估计式 (5.1) 得出

$$\epsilon^{\frac{nl}{r}}\epsilon^{-\frac{\gamma}{p}}\epsilon^{\frac{n}{p}} \lesssim \left\|T_{[b]}(f^\epsilon, \dots, f^\epsilon)\right\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{p}}})} \lesssim \prod_{j=1}^{l} \|f^\epsilon\|_{L^{p_j}(w_j)} \lesssim \epsilon^{\frac{\beta_1}{p_1}+\cdots+\frac{\beta_l}{p_l}}\epsilon^{\frac{n}{p}},$$

由此可得

$$1 \lesssim \epsilon^{\frac{\beta_1}{p_1}+\cdots+\frac{\beta_l}{p_l}+\frac{\gamma}{p}-\frac{nl}{r}} \le \epsilon^{\frac{nl}{q}-\frac{nl}{r}-\frac{2\delta}{p}}$$

对所有 $0 < \epsilon < \frac{1}{4l}$ 均成立。当 $\epsilon > 0$ 任意小时，这就构成矛盾。

证明至此完成。

5.3. 推论 3 的证明。 设 ρ, r 满足推论 3 的假设，并假设对于某个 $q > 0$，(1.13) 成立。取满足 $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p}$ 的 $r, q < p_1, \dots, p_l < \infty$ 和 $0 < p < \infty$。若能证明对于所有 x-独立符号 $a \in \mathbb{M}_l S^{-\frac{nl}{r}}_{(1-\rho)\rho,0}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $\vec{\boldsymbol{w}} = (w_1, \dots, w_l) \in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$，(1.11) 均成立，那么根据定理 2，$r \le q$。

设 a 是 $\mathbb{M}_l S^{-\frac{nl}{r}}_{(1-\rho)\rho,0}(\mathbb{R}^n)$ 中一个与 x 无关的符号，$\vec{\boldsymbol{w}} = (w_1, \dots, w_l) \in A_{(\frac{p_1}{q},\dots,\frac{p_l}{q})}(\mathbb{R}^n)$，且 $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。由引理 G 可得 $v_{\vec{\boldsymbol{w}}} \in A_{lp}(\mathbb{R}^n)$。取 $0 < t < \min\left\{1, p, \frac{r}{l}, \frac{q}{l}\right\}$。注意到 $1 < \frac{p}{t} < \infty$ 和 $\frac{lp}{q} < \frac{p}{t}$，后者由 (1.1) 得出 $v_{\vec{\boldsymbol{w}}} \in A_{\frac{p}{t}}$。因此，Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 在 $L^{\frac{p}{t}}(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})$ 上有界，进而 $\mathcal{M}(|T_{[a]}(f_1, \dots, f_l)|^t) \in L^{\frac{p}{t}}(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})$。于是

$$\begin{aligned}
\|T_{[a]}(f_1, \dots, f_l)\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})} &= \left\||T_{[a]}(f_1, \dots, f_l)|^t\right\|^{\frac{1}{t}}_{L^{\frac{p}{t}}(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})} \le \left\|\mathcal{M}\left(|T_{[a]}(f_1, \dots, f_l)|^t\right)\right\|^{\frac{1}{t}}_{L^{\frac{p}{t}}(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})} \\
&\lesssim \left\|\mathcal{M}^\sharp\left(|T_{[a]}(f_1, \dots, f_l)|^t\right)\right\|^{\frac{1}{t}}_{L^{\frac{p}{t}}(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})} = \left\|\left(\mathcal{M}^\sharp\left(|T_{[a]}(f_1, \dots, f_l)|^t\right)\right)^{\frac{1}{t}}\right\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})},
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{M}^\sharp = \mathcal{M}_1^\sharp$，在第二个不等式中，我们用到了这样一个事实：若 $\mathcal{M}f \in L^{p_0}(w)$ 且 $w \in A_\infty$，则 $\|\mathcal{M}f\|_{L^{p_0}(w)} \lesssim \|\mathcal{M}^\sharp f\|_{L^{p_0}(w)}$（参见 [12, 第四章，定理 2.20]）。我们

注意到，对于 $0<t<1$，$\left(\mathcal{M}^{\sharp}(|f|^t)(x)\right)^{\frac{1}{t}} \le \mathcal{M}^{\sharp}_t f(x)$，因为 $\big||f(y)|^t - |c_Q|^t\big| \le |f(y) - c_Q|^t$。因此，利用 H¨older 不等式，其中 $t<\frac{r}{l}$，并结合我们的假设 (1.13)，可得

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{M}^{\sharp}\left(\left|T_{[a]}(f_1,\dots,f_l)\right|^t\right)(x)\right)^{\frac{1}{t}} &\le \mathcal{M}^{\sharp}_t\big(T_{[a]}(f_1,\dots,f_l)\big)(x)\\ &\le \mathcal{M}^{\sharp}_{\frac{r}{l}}\big(T_{[a]}(f_1,\dots,f_l)\big)(x) \lesssim \mathbf{M}_q\big(f_1,\dots,f_l\big)(x),\end{aligned}$$

这与 (1.5) 一起推出

$$\big\|T_{[a]}(f_1,\dots,f_l)\big\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})} \lesssim \big\|\mathbf{M}_q(f_1,\dots,f_l)\big\|_{L^p(v_{\vec{\boldsymbol{w}}})} \lesssim_{a,\vec{\boldsymbol{w}}} \prod_{j=1}^{l}\|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}.$$

证明完毕。

References

[1] ´A. B ´ *On the Hörmander classes of bilinear pseudodifferential operators II* **62** 2013 1733 1764 enyi、F. Bernicot、D. Maldonado、V. Naibo 和 R. Torres, 《印第安纳大学数学杂志》（），-。[2] ´A. B ´ *On the Hörmander classes of bilinear pseudodiffer-* enyi、D. *ential operators* **67** 2010 341 364 Maldonado、V. Naibo 和 R. Torres, 《积分方程与算子理论》（），-。[3] ´A. B ´ *Almost orthogonality and a class of bounded bilinear pseudodifferential opera-* enyi 和 R. *tors* **11** 2004 1 11 Torres, ,《数学研究快报》（）, -。[4] T. A. Bui 和 X. T. Duong, *Weighted norm inequalities for multilinear operators and applications to multilinear Fourier multipliers* **137** 2013 63 75 ,《数学科学通报》（），-。[5] A. P. Calder´on 和 R. Vaillancourt, *A class of bounded pseudo-differential operators*,《美国国家科学院院刊》69（1972），1185-1187。[6] M. Cao、A. Olivo 和 K. Yabuta, *Extrapolation for multilinear compact operators and applications*,《美国数学会汇刊》375（2022），5011-5070。[7] S. Chanillo 和 A. Torchinsky, *Sharp function and weighted L^p estimates for a class of pseudo-differential operators* **24** 1985 1 25 ,《Arkiv för Matematik》（），-。[8] W. Y. Chen, *Weighted modulus estimates for pseudodifferential operators and the conjecture of Chanillo-Torchinsky* **12** 1991 6 11 ,《中国数学年刊》A辑（），增刊，-（中文）。[9] R. R. Coifman 和 Y. Meyer, *Commutateurs d' intégrales singulières et opérateurs multilinéaires*,《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》28（1978），177-202。[10] C. Fefferman, *L^p bounds for pseudo-differential operators*,《以色列数学杂志》14（1973），413-417。[11] M. Fujita 和 N. Tomita, *Weighted norm inequalities for multilinear Fourier multipliers*,《美国数学会汇刊》364（2012），6335-6353。[12] J. Garcia-Cuerva 和 J.-L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*,《荷兰数学研究丛书》第116卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1985。[13] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, 第 3 版,《数学研究生教材》第 250 卷，Springer，纽约，2014。[14] L. Grafakos 和 Z. Si, *The Hörmander multiplier theorem for multilinear operators*,《纯粹与应用数学杂志》668（2012），133-147。[15] L. Grafakos 和 R. H. Torres, *Multilinear Calderón-Zygmund theory*,《数学进展》165（2002），124-164。[16] L. H¨ormander, *Estimates for translation invariant operators in L_p spaces*,《数学学报》104（1960），93-140。[17] L. H¨ormander, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*,《奇异积分研讨会论文集》，美国数学会，第10卷（1967），138-183。[18] T. Kato、A. Miyachi 和 N. Tomita, *Boundedness of multilinear pseudo-differential operators with symbols in the Hörmander class $S_{0\,0}$* **282** 2022 109329, 28 ,《泛函分析杂志》（）第号论文，第页。[19] C. Kenig 和 E. M. Stein, *Multilinear estimates and fractional integration*,《数学研究快报》6（1999），1-15。[20] D. Kurtz 和 R. Wheeden, *Results on weighted norm inequalities for multipliers*,《美国数学会汇刊》255（1979），343-362。

[21] D. Kurtz 和 R. Wheeden, *Results on weighted norm inequalities for multipliers*, 《美国数学会汇刊》**255** (1979), 343-362。[22] J. Lee、Y. Heo、S. Hong、J. B. Lee、B. Park 和 C. Yang, *The Hörmander multiplier theorem for n-linear operators*, 《数学年刊》**381** 2021 499 555 （）-。[23] A. Lerner、S. Ombrosi、C. P´erez、R. Torres 和 R. Trujillo-Gonzalez, *New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderón-Zygmund theory*, 《数学进展》**220** 2009 1222 1264 （），-。[24] K. Li 和 W. Sun, *Weighted estimates for multilinear Fourier multipliers*, 《数学论坛》**27** (2015), 1101-1116。[25] N. Michalowski、D. Rule 和 W. Staubach, *Multilinear pseudodifferential operators beyond Calderón-Zygmund theory*, 《数学分析及其应用杂志》**414** 2014 149 165 （），-。[26] S. G. Mihlin, *On the multipliers of Fourier integrals*, 苏联科学院院刊（新辑）**109** (1956), 701-703（俄文）。[27] A. Miyachi 和 N. Tomita, *Calderón-Vaillancourt type theorem for bilinear operators*, 《印第安纳大学数学杂志》**62** (2013), 1165-1201。[28] A. Miyachi 和 N. Tomita, *Bilinear pseudo-differential operators with exotic symbols II*, 《伪微分算子应用杂志》**10** (2019), 397-413。[29] A. Miyachi 和 N. Tomita, *Bilinear pseudo-differential operators with exotic symbols*, 《傅里叶研究所年刊》**70** (2020), 2737-2769。[30] A. Miyachi 和 K. Yabuta, *Sharp function estimates for pseudo-differential operators of class $S^m_{\rho,\delta}$*, 《茨城大学理学部通报》A辑**19** (1987), 15-30。[31] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, 《美国数学会汇刊》**165** (1972), 207-226。[32] B. Park, *Weighted estimates for multilinear singular integrals with rough kernels*, 已投稿。[33] B. Park 和 N. Tomita, *Sharp maximal function estimates for linear and multilinear pseudo-differential operators*, 《泛函分析杂志》**287** 2024 110661, 45 （）第。页。[34] B. Park 和 N. Tomita, *Sharp maximal function estimates for multilinear pseudo-differential operators of type $0, 0$*, 《伦敦数学会通报》**57** 2025 854 870 （），-。[35] N. Tomita, *A Hörmander type multiplier theorem for multilinear operators*, 《泛函分析杂志》**259** (2010), 2028-2044。

B. Park, Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Republic ofKorea*Email address*: bpark43@skku.eduN. Tomita, Graduate School of Science, The University of Osaka, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan*Email address*: tomita@math.sci.osaka-u.ac.jp