arXiv:2601.01035v1 [math.AP] 3 Jan 2026

多凸梯度流中的非规则扩散与正则性丧失

BIN GUO、SEONGHAK KIM 和 Y AN

Abstract. 我们研究一类扩散型偏微分方程。这类方程具有非规则性，即使给定光滑数据，也存在处处不光滑的弱解。通过将这些方程重新表述为一阶偏微分关系，并改进凸积分方法，我们基于称为 $\mathcal{T}_N$-构型的新几何结构，提出了一种构造方案，同时对扩散函数提出了简化的结构假设，称为条件 O_N。在此条件下，我们证明，对于某些光滑初边值数据，相应的初边值问题存在无穷多个处处不 C^1的 Lipschitz 弱解。我们进一步分析特定的 $\mathcal{T}_N$-构型，并建立验证条件 O_N所必需的非退化条件。作为应用，我们构造了强多凸能量泛函的实例，其梯度流会生成非规则扩散方程，由此揭示了即便在多凸梯度流这一类中，正则性和唯一性也会失效。

1. Introduction

设 $m, n \geq 1$ 为整数，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域，$T > 0$ 为固定值。我们研究如下形式的扩散型偏微分方程

$$\partial_t u(x,t) = \operatorname{div} \sigma(Du(x,t)) \quad \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \tag{1.1}$$

其中 $\sigma\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ 是给定函数，表示扩散通量，且

$$u = u(x,t) = (u^1, \dots, u^m)\colon \Omega_T \to \mathbb{R}^m$$

是未知函数，其时间导数为 $\partial_t u(x,t) = (\partial_t u^1, \dots, \partial_t u^m) \in \mathbb{R}^m$，空间梯度矩阵为 $Du(x,t) = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. —

此处及下文中，$\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示实 $m \times n$ 矩阵构成的欧几里得空间，配备标准内积 $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$及相应的范数 $|A| = \langle A, A\rangle^{1/2}$.

注意，当 $m = 1$时，方程 (1.1) 表示单个方程；而当 $m \geq 2$, 时，它就成为一个由 m 个方程组成的方程组。一般而言，函数

$$u \in L^1_{loc}(0,T; W^{1,1}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^m))$$

若满足 $\sigma(Du) \in L^1_{loc}(\Omega_T; \mathbb{R}^{m\times n})$，则称其为 (非常) 弱解 （对应方程 (1.1)），并且

$$\int_{\Omega_T} \big(u \cdot \partial_t \varphi - \langle \sigma(Du), D\varphi\rangle\big)\, dxdt = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega_T; \mathbb{R}^m). \tag{1.2}$$

对于许多偏微分方程，标准 弱解通常需要满足额外的结构条件；而在实际中，它们所表现出的正则性往往高于仅凭这些条件所能预期的水平。这类方程称为正则方程。 相反，如果某个方程的标准弱解没有表现出任何更高的正则性，则称该方程不规则 。

本文主要关注方程 (1.1) 中这种不规则现象。我们不详细讨论方程 (1.1) 的标准弱解的精确定义（参见例如 [7, 17, 31, 33]），而是着重研究 *Lipschitz* 弱解

$$u \in W^{1,\infty}(\Omega_T; \mathbb{R}^m),$$

这些解在任何合理意义下都可称为标准弱解。

Date: 2026年1月2日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35K40、35K51、35D30。次要分类：35F50、49A20。*Key words and phrases.* 非规则扩散方程、 $\mathcal{T}_N$-构型、条件 O_N、凸积分、处处非 C^1 Lipschitz 弱解、多凸梯度流。

在研究方程 (1.1) 时，除了对函数 σ 施加标准的光滑性和增长条件外，关于 σ 的某些结构性假设也起着至关重要的作用，尤其对于具有 $m,\ n\geq 2$ 的方程组。例如，如果 σ 满足秩一强单调性，则

$$\langle \sigma(A+p\otimes a)-\sigma(A),\, p\otimes a\rangle \geq \nu|p|^2|a|^2 \tag{1.3}$$

对所有 $A\in\mathbb{R}^{m\times n},\ p\in\mathbb{R}^m$ 和 $a\in\mathbb{R}^n$，其中 $\nu>0$ 是一个常数。在这种情况下，(1.1) 通常称为（强）抛物型。此外，σ 称为强拟单调，如果

$$\int_\Omega \langle \sigma(A+D\phi),\, D\phi\rangle\, dx \geq \nu\int_\Omega |D\phi|^2\, dx \tag{1.4}$$

对所有 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\phi\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$；参见 [7, 21, 43]。变分法中的标准结论是，(1.4) 蕴含条件 (1.3)。此外，如果 σ 是（完全）强单调的，则 (1.4) 自动成立，其含义是

$$\langle \sigma(A+B)-\sigma(A),\, B\rangle \geq \nu|B|^2 \quad \forall\, A,\, B\in\mathbb{R}^{m\times n}. \tag{1.5}$$

当 $m=1$ 或 $n=1$时，三个条件 (1.3)–(1.5) 等价。

在完全单调性 (1.5) 下，可以利用标准抛物型理论分析方程 (1.1)；参见 [4, 8, 17, 31, 33]。在拟单调性 (1.4) 和适当的增长假设下，[7] 中的结果表明，方程 (1.1) 的每个标准（因而也是每个 Lipschitz）弱解 u 都具有更好的部分正则性。具体而言，对于某个 $\alpha\in(0,\ 1)$ 以及某个满测度开集 $U\subset\Omega_T$（即 $|\Omega_T\setminus U|=0$），有 $Du\in C^{\alpha,\ \alpha/2}{}_{\rm loc}(U;\mathbb{R}^{m\times n})$。从这个意义上说，该方程被认为是正则的。

目前，C^1 利普希茨弱解仅在 [35, 36, 38] 二维的某些椭圆型和抛物型方程组中借助凸积分方法 [20]被构造出来（$n=2$）。此后，这一方法被改用于构造形如（1.1）的标量方程的高度不规则解，其中扩散函数为某些正反向扩散函数 σ；参见 [26, 27, 28, 44]。该方法还被推广到形如（1.1）的方程组，其中 σ 满足更强的抛物性条件；参见 [40, 41]。

凸积分方法在众多重要的偏微分方程及其应用中也取得了显著成功。其中包括不可压缩欧拉方程和纳维–斯托克斯方程 [9, 15, 16, 23], 、多孔介质方程 [11], 、Monge-Amp`ère 方程[32], 、主动标量方程 [37], ，以及最近针对椭圆型方程构造野弱解，其中包括 p-拉普拉斯方程 [10, 25]。

本文调整了 [26, 40, 44] 中提出的凸积分方案，以研究方程 (1.1) 作为一阶偏微分关系

$$u=\operatorname{div} v \quad\text{and}\quad (Du,\partial_t v)\in\mathcal{K} \ \text{ a.e. in } \Omega_T \tag{1.6}$$

对 $(u,\ v)$：$\Omega_T\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $\mathcal{K}=\{(A,\ \sigma(A))\colon\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}\}$ 是扩散函数 σ.的图

方程 (1.6) 的凸积分的关键在于构造一个一致有界开集序列 $\{\mathcal{U}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$，它们属于 $\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}$，并以适当的意义收敛到图集 $\mathcal{K}$，同时构造相应的利普希茨函数序列 $\{(u_\nu,\ v_\nu)\}_{\nu=1}^\infty$，使其满足

$$u_\nu=\operatorname{div} v_\nu \quad\text{and}\quad (Du_\nu,\partial_t v_\nu)\in\mathcal{U}_\nu \ \text{ a.e. in } \Omega_T \tag{1.7}$$

使得序列 $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ 在 $W^{1,\ 1}(\Omega_T;\ \mathbb{R}^m)$中为柯西序列。极限函数 u 由此给出方程 (1.1) 的 Lipschitz 弱解。此外，若 $\{Du_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ 在 Ω_T 中的每一点的本性振荡都一致地大于某个正的常数，则所得解 u在 Ω_T中处处C^1 。

现在我们阐明集合 $\{\mathcal{U}_\nu\}$ 和序列 $\{(u_\nu,\ v_\nu)\}$. 的构造方案。假设给定一个函数 $(u,\ v)$：$\Omega_T\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}$，满足 $u=$散度 v，并且 $(Du,\ \partial_t v)\in\mathcal{U}$几乎处处成立于 Ω_T，，其中 $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}$ 是一个有界开集。为了构造一个新的有界˜开集 $\mathcal{U}$ 以及一个满足以下条件的新函数 $(\tilde u,\ \tilde v)$

$$\tilde u=\operatorname{div}\tilde v \quad\text{and}\quad (D\tilde u,\partial_t\tilde v)\in\tilde{\mathcal{U}} \ \text{ a.e. in } \Omega_T, \tag{1.8}$$

˜，其中 $\mathcal{U}$ 比 $\mathcal{U}$ 更接近图集 $\mathcal{K}$（以适当的意义而言），我们引入如下形式的扰动

$$\tilde u=u+\varphi \quad\text{and}\quad \tilde v=v+\psi+g,$$

其中，$(\varphi,\ \psi,\ g)\in C_0^\infty(\Omega_T;\ \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n})$ 的选取满足

$$\operatorname{div}\psi=0 \quad\text{and}\quad \operatorname{div} g=\varphi. \tag{1.9}$$

这保证了 $\tilde{u} =$ 散度 $\tilde{v}$. 为确保

$$(D\tilde{u}, \partial_t \tilde{v}) = (Du + D\varphi, \partial_t v + \partial_t \psi + \partial_t g) \in \tilde{\mathcal{U}},$$

扰动（$D\varphi$, $\partial_t \psi$）必须经过精心设计以满足 (1.9)，同时 $\|\partial_t g\|_{L^\infty}$ 保持足够小。

用于构造这些集合的一些基本构件是通过处理（$\varphi, \tilde{\psi}$）的完整时空梯度，以及相关的所谓 τ_N-构型，并结合适当的反散度算子而构造出来的；该算子通过求解 $\operatorname{div} g = \varphi$ 生成修正项 g；参见 [40, 41, 42]。然而，这些工作对完整梯度结构的高度依赖，使得最终的构造相当繁复。

本文研究由如下形式的扰动（φ, ψ, g）所启发的新型且更简单的基本构件

$$\varphi = (a \cdot Dh)p, \quad \psi = (a \cdot Dh)B - (BDh) \otimes a, \quad \text{and} \quad g = hp \otimes a, \tag{1.10}$$

其中 $p \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足 $Ba = 0$, 且 $h \in C_0^\infty(\Omega_T)$。我们重点关注局部化平面波的情形，此时

$$h = \zeta(x,t) f(a \cdot x + st),$$

其中，$\zeta \in C_0^\infty(\Omega_T)$ 在其支集上大部分为常数，而 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 具有高度振荡性和周期性，f'' 大多等于两个固定常数中的一个，同时始终处于这两个常数之间。在这些选择下，量 $(D\varphi, \partial_t \psi)$ 将位于沿 $\gamma = (p \otimes a, B)$ 方向的线段附近（见引理 3.1）。利用这些方向 $\gamma = (p \otimes a, B)$，我们引入 $\mathcal{T}_N$-构型（见定义 3.1），它们比 [40, 41, 42] 中研究的 τ_N-构型简单得多。

基于这些更简单的 $\mathcal{T}_N$-构型，我们为微分关系 (1.6) 开发了一种更高效的构造方案。我们还重新表述了关于函数σ，的一项关键结构性假设，将其称为 条件 O_N（见定义 3.3）；这大幅简化了 [41, 42] 中引入的早期条件 $(OC)_N$。

本文的第一个主要结果涉及与方程（1.1）相关的初边值问题（IBVP）

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div} \sigma(Du) & \text{in } \Omega_T, \\ u = \bar{u} & \text{on } \partial' \Omega_T, \end{cases} \tag{1.11}$$

其中 $\bar{u} \in W^{1,\,1}(\Omega_T; \mathbb{R}^m)$ 是给定函数，表示初边值数据，并且

$$\partial' \Omega_T = (\Omega \times \{0\}) \cup [\partial\Omega \times [0,T)] \subset \partial \Omega_T$$

是 Ω_T. 的抛物型边界。所谓 IBVP（1.11）的弱解，是指函数 $u \in W^{1,\,1}(\Omega_T; \mathbb{R}^m)$，它是方程（1.1）的弱解，并且在 $\partial' \Omega_T$ 上满足初边值条件$u = \bar{u}$，这里的条件是按迹的意义在 $W^{1,\,1}(\Omega_T; \mathbb{R}^m)$. 中理解的。

在定理 2.1 中，我们证明，若 σ 满足条件 O_N，则对于某些光滑的初边值数据 $\bar{u}.$，IBVP（1.11）（事实上，甚至是整个 $\partial\Omega_T$ 上预先给定 $u = \bar{u}$ 的完整狄利克雷问题）存在无穷多个处处不 C^1 的 Lipschitz 弱解。这表明这类方程具有内在不规则性。

第二个主要结果涉及一类特殊形式的方程 (1.1)，其中 m, $n \geq 2$, 它们是如下形式的能量泛函的 L^2-梯度流：

$$I(u) = \int_\Omega F(Du(x))\, dx, \tag{1.12}$$

其中 $F\colon\ \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ 是一个 C^1 函数。在这种情形下，$I(u)$ 的 L^2-梯度流恰好就是方程 (1.1)，其扩散通量为 $\sigma = DF$.

对于这类梯度流，条件 (1.5) 等价于 F 的一致强凸性，而条件 (1.3) 等价于 $F.$ 的一致强秩一凸性（或*Legendre–Hadamard* 条件）。此外，(1.3) 与 (1.4) 之间还有另一个重要的结构性假设，即 F 的一致强*Morrey* 拟凸性，可表示为

$$\int_\Omega [F(A + D\phi) - F(A)]\, dx \geq \frac{\nu}{2} \int_\Omega |D\phi|^2 dx \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m). \tag{1.13}$$

众所周知，若 F 是按以下意义定义的强多凸函数，则该条件尤其成立：

$$F(A) = \frac{\nu}{2}|A|^2 + G(J(A)), \tag{1.14}$$

其中， $G(J)$ 是关于 $J \in \mathbb{R}^q$ 的 C^1 凸函数，而 $J(A) \in \mathbb{R}^q$ 表示q 子式的一个固定排列。有关这些概念在变分法和非线性弹性力学中的进一步结果与应用，请参阅 [1, 3, 12, 18, 34] 。

与凸泛函相关的梯度流可以使用标准的分析方法进行研究；例如，参见 [6, 29]。相比之下，对一般非凸泛函的梯度流进行研究，尤其是在存在性、唯一性和正则性方面，仍然极具挑战性；有关一般理论，参见 [2] 。文献 [19] 研究了一类微分同胚解中的特殊多重凸梯度流。

在本文中，我们证明，对于所有 $m,\ n \geq 2,$ ，存在定义在 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的光滑强多凸函数F，使得能量泛函 $I(u)$的梯度流在(1.12)中的初边值问题，对于某些光滑初边值数据，同时具有一个光滑解和无穷多个处处 C^1 的Lipschitz 弱解；参见推论2.3。这显著加强了 [35], 的结果，其中构造了具有零初边值条件的抛物型方程组的处处 C^1 Lipschitz 弱解 u

$$\partial_t u - \operatorname{div} DF(Du) = f$$

在 $m = n = 2$, 具有光滑的强拟凸 F 的情形下： $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ 并且具有小的 H¨older 强迫项 f，其中 $\|f\|_{C^\alpha} < \eta$，对给定的 $\alpha,\ \eta \in (0,\ 1)$。相比之下，我们的结果适用于所有 $m,\ n \geq 2$，并采用光滑的强多凸 F 和零强迫项 $f \equiv 0$；这表明，即使在多凸梯度流的框架下，正则性和唯一性也会从根本上失效。

最后，我们概述本文的结构。主要结果在第 2 节中陈述，必要的记号则在后续各节中引入。在第3节中，我们给出 $\mathcal{T}_N$-构型和条件 O_N 的定义，并介绍若干关于凸积分的重要结果。第 4 节用于证明定理 2.1，该定理建立在凸积分的主阶段定理（定理 4.1）之上。在第5节中，我们分析某些特定的 $\mathcal{T}_N$-构型，并建立验证条件 O_N 所必需的非退化条件；尽管本节篇幅较长，但主要由基础准备和计算组成。最后，在第 6 节中，我们构造光滑的强多凸函数 F on $\mathbb{R}^{2\times n}$ ，使得通量函数 $\sigma = DF$ 满足条件 O_5，从而完成定理 2.2 的证明。

2. Statement of Main Results

我们在下文陈述主要结果，并请读者参见第3节，了解相关定义和记号。定理 2.1 和 2.2 的证明分别见第4节和第6节。

定理 2.1。 设 σ: $\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ 局部 *Lipschitz* 且满足条件 O_N ，其中某个$N \geq 2$使得 $\Sigma(1)$ 表示定义 *3.3* 中相应的开集。

假设 $(\bar{u}, \bar{v}) \in C^1(\bar{\Omega}_T;\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n})$ 满足

$$\bar{u} = \operatorname{div} \bar{v} \quad and \quad (D\bar{u}, \partial_t \bar{v}) \in \Sigma(1) \ \ on\ \bar{\Omega}_T. \tag{2.1}$$

那么对任意 $\delta \in (0,1)$，该狄利克雷问题

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div} \sigma(Du) \quad in\ \Omega_T, \\ u|_{\partial\Omega_T} = \bar{u} \end{cases} \tag{2.2}$$

存在一个 *Lipschitz* 弱解 u，满足 $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty} + \|\partial_t u - \partial_t \bar{u}\|_{L^\infty} < \delta$，且 Du 在 Ω_T. 中处处非本质连续

特别地，问题(2.2) 存在无穷多个*Lipschitz* 弱解 u ，其中 Du 在Ω中处处不本质连续$_T$.

注2.1。 根据定义 3.3 中条件 O_N 的定义，显然，$(O, O) = \pi_1(0) \in S_1^{r_0}(0) \subset \Sigma(1)$；因此，$(\bar{u}, \bar{v}) \equiv (0,0)$ 满足条件 (2.1)。

更一般地，若 $(A, B) \in \Sigma(1)$，且 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$，则函数 $(\bar{u}, \bar{v})$ 满足条件 (2.1)，其中 $\bar{u} = (\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m)$: $\Omega_T \to \mathbb{R}^m$ ，且 $\bar{v} = (\bar{v}_{ij})$: $\Omega_T \to \mathbb{R}^{m\times n}$ 定义为

$$\bar{u}^i(x,t) = u_0^i(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \ \text{ and } \ \bar{v}_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}a_{ij}x_j^2 + tb_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n). \tag{2.3}$$

对于这样的时间无关数据 $\bar{u}$，问题 (2.2) 显然存在平稳解 $u \equiv \bar{u}$。然而，定理 2.1 表明，该问题还存在无穷多个非平稳利普希茨

弱解，它们处处都不是 C^1。这些依赖时间的解对于扩散问题更有研究意义。

定理2。 **2.** 令 $n \geq 2$. 则存在强多凸函数 F: $\mathbb{R}^{2\times n} \to \mathbb{R}$ *of the for* m

$$F(A) = \frac{\nu}{2}|A|^2 + G(A, \delta(A)) \quad \forall\, A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times n}, \tag{2.4}$$

其中 $\nu > 0$、 G: $\mathbb{R}^{2\times n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 光滑且凸，且 δ（A） $= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，使得函数 $\sigma = DF$ 满足条件 O_5，并且增长条件

$$|D^k F(A)| \leq C_k(|A| + 1) \quad (A \in \mathbb{R}^{2\times n},\ k = 1, 2, \dots)$$

对某些常数 $C_k > 0$.成立

推论2.3。 对于所有 m、 $n \geq 2$，存在定义在 $\mathbb{R}^{m\times n}$上的光滑且强多凸函数 F，满足增长条件

$$|D^k F(A)| \leq C_k(|A| + 1) \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ k = 1, 2, \dots) \tag{2.5}$$

对于某些常数 $C_k > 0$，使得狄利克雷问题

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div} DF(Du) & in\ \Omega_T, \\ u|_{\partial\Omega_T} = \bar{u}, \end{cases} \tag{2.6}$$

具有某些光滑平稳弱解 $\bar{u} = u_0(x)$ 的方程 (1.1)，存在无穷多个在 Ω_T. 中处处都不 C^1 的 *Lipschitz* 弱解

证明。 我们首先讨论情形 $m = 2.$。令 $\tilde{F} = F$: $\mathbb{R}^{2\times n} \to \mathbb{R}$ 是一个光滑且强多凸的˜函数，如定理 2.2 的 (2.4) 中所述。于是 $\sigma = DF$ 满足条件 O_5；相应地，令 Σ(1) 由函数 $\sigma = DF$ 如定义 3.3 所定义。

任取 $(A, B) \in \Sigma(1)$，并按 (2.3) 定义 $(\bar{u}, \bar{v})$。令 $\tilde{u}_*(x, t) = \bar{u}(x, t) = \tilde{u}_0(x) \in \mathbb{R}^2.$。于是，由定理 2.1 和注 2.1，狄利克雷问题

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} = \operatorname{div} D\tilde{F}(D\tilde{u}) & \text{in } \Omega_T, \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega_T} = \tilde{u}_* \end{cases} \tag{2.7}$$

存在无穷多个 Lipschitz 弱解 $\tilde{u}$： $\Omega_T \to \mathbb{R}^2$，它们在 Ω_T. 中处处不 C^1。因此，当 $m = 2.$时，结论成立。

现在假设 $m \geq 3.$。定义 F: $\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$，使得

$$F(A) = \frac{\nu}{2}|A_2|^2 + \tilde{F}(A_1) \quad \forall\, A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},\ A_1 \in \mathbb{R}^{2\times n},\ A_2 \in \mathbb{R}^{(m-2)\times n},$$

并定义 $\bar{u}$: $\Omega_T \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m-2} = \mathbb{R}^m$，使得

$$\bar{u}(x, t) = (\tilde{u}_*(x, t), 0) = (\tilde{u}_0(x), 0) := u_0(x) \in \mathbb{R}^m. \tag{2.8}$$

那么， $\bar{u}$ 是方程 (1.1) 的光滑平稳弱解。此外,

$$DF(A) = \begin{bmatrix} D\tilde{F}(A_1) \\ \nu A_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad F(A) = \frac{\nu}{2}|A|^2 + G(A_1, \delta(A_1)).$$

因此， F 具有形式 (1.14)，并满足增长条件 (2.5)。

令 $u = (\tilde{u},\ 0)$: $\Omega_T \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m-2} = \mathbb{R}^m$，其中 $\tilde{u}$： $\Omega_T \to \mathbb{R}^2$ 是问题 (2.7) 的 Lipschitz 弱解，且在 Ω_T. 中处处不 C^1。那么

$$\partial_t u = (\partial_t \tilde{u},\ 0), \quad Du = \begin{bmatrix} D\tilde{u} \\ O \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad DF(Du) = \begin{bmatrix} D\tilde{F}(D\tilde{u}) \\ O \end{bmatrix}.$$

因此， u 是问题 (2.6) 的 Lipschitz 弱解，其初边值数据为 (2.8) 中给出的 $\bar{u}$，并且它在 Ω
T. □中处处不 C^1

3. Convex Integration, $\mathcal{T}_N$-configurations and Condition O_N

我们先介绍一些记号。设 $q \geq 1$ 为整数。我们用 $|G| = \mathcal{L}_q(G)$ 表示可测集 $G \subset \mathbb{R}^q$ 的勒贝格测度。

给定集合 $S \subset \mathbb{R}^q$ 和数 $\epsilon > 0$，我们用 S_ϵ 表示 S 的 ϵ-邻域；即，

$$S_\epsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^q : \operatorname{dist}(\xi, S) < \epsilon\} = \bigcup_{\eta \in S} \{\xi \in \mathbb{R}^q : |\eta - \xi| < \epsilon\}.$$

给定 ξ, $\eta \in \mathbb{R}^q$，我们用 $[\xi, \eta] = \{\lambda\xi + (1-\lambda)\eta\colon\ \lambda \in [0,1]\}$ 表示连接 ξ 和 η、位于 $\mathbb{R}^q$ 中的闭线段

在本节中，除非另有说明，我们始终假设 m, $n \geq 1$ 和 $N \geq 2$。

3.1. 凸积分引理。以下结果为微分关系 (1.6) 的凸积分提供了初始构造模块。

引理 3.1. 设 $\gamma = (p \otimes a, B) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$, 其中

$$p \in \mathbb{R}^m, \quad a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad B \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{and} \quad Ba = 0.$$

若 $0 \leq \lambda \leq 1$，则对每个有界开集 $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $0 < \epsilon < 1$，存在一个函数$(\varphi, \psi, g) \in C_0^\infty(G;$ $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n})$，满足以下性质：

(a) 散度 $\psi = 0$, 散度 $g = \varphi$ 和 $(D\varphi, \partial_t\psi) \in [-\lambda\gamma, (1-\lambda)\gamma]_\epsilon$ 属于 G;

(b) $\|\varphi\|_{L^\infty(G)} + \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(G)} + \|\partial_t g\|_{L^\infty(G)} < \epsilon$;(c) 存在两个互不相交的开集 $G', G'' \subset\subset G$，使得

$$\begin{cases} |G'| \geq (1-\epsilon)\lambda|G|, & (D\varphi, \partial_t\psi) = (1-\lambda)\gamma \ \text{ in } G'; \\ |G''| \geq (1-\epsilon)(1-\lambda)|G|, & (D\varphi, \partial_t\psi) = -\lambda\gamma \ \text{ in } G''. \end{cases}$$

证明。若 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$成立，则取 $(\varphi, \psi, g) \equiv 0$ 并分别选择 $G' = \emptyset$ 或 $G'' = \emptyset$,即可得到结论。因此，接下来我们假设 $0 < \lambda < 1$.

令 $\zeta \in C_0^\infty(G)$ 满足

$$0 \leq \zeta \leq 1 \text{ in } G, \quad \zeta = 1 \text{ in some open set } \tilde{G} \subset\subset G \text{ with } |\tilde{G}| \geq (1-\epsilon)^{1/3}|G|,$$

并令 I_1 和 I_2 为 (0,1) 中两个不相交的闭区间，使得

$$|I_1| = (1-\epsilon)^{1/3}\lambda \quad \text{and} \quad |I_2| = (1-\epsilon)^{1/3}(1-\lambda).$$

选取一个函数 $q \in C_0^\infty(0,1)$，使得在 $(0,1)$ 上 $-\lambda \leq q \leq 1-\lambda$，并且

$$\{\tau \in (0,1) : q(\tau) = 1-\lambda\} = I_1, \quad \{\tau \in (0,1) : q(\tau) = -\lambda\} = I_2, \quad \int_0^1 q(\tau)d\tau = 0.$$

将 q 延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上，使其成为一个 1-周期函数；于是 $q \in C^\infty(\mathbb{R})$。定义

$$f(\tau) = \int_0^\tau \int_0^t q(s)\,ds\,dt - \tau \int_0^1 \int_0^t q(s)\,ds\,dt \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R}.$$

于是 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 是 1-周期函数，并且对所有 $\tau \in \mathbb{R}$ 都满足 $f''(\tau) = q(\tau)$；因此，

$$\{\tau \in (0,1) : f''(\tau) = 1-\lambda\} = I_1 \quad \text{and} \quad \{\tau \in (0,1) : f''(\tau) = -\lambda\} = I_2.$$

设 $s, \delta > 0$ 为稍后选定的数，并令

$$h = \delta^2\zeta(x,t)f\Big(\frac{a\cdot x + st}{\delta}\Big).$$

然后定义 $Dh = \delta^2 f D\zeta + \delta\zeta f' a.$

$$\begin{cases} \varphi = |a|^{-2}(a\cdot Dh)p, \\ \psi = \frac{1}{s}|a|^{-2}[(a\cdot Dh)B - (BDh)\otimes a], \\ g = |a|^{-2}hp\otimes a, \end{cases}$$

不难验证

$$\begin{cases}\operatorname{div}\psi=0,\ \ \operatorname{div}g=\varphi,\\ \varphi=\delta^2|a|^{-2}(D\zeta\cdot a)fp+\delta\zeta f'p,\\ \psi=\frac{1}{s}[\delta^2|a|^{-2}(D\zeta\cdot a)fB+\delta\zeta f'B-\delta^2 f|a|^{-2}(BD\zeta)\otimes a],\\ g=\delta^2|a|^{-2}\zeta fp\otimes a,\end{cases}$$

其中，在 ψ 的公式中，我们使用了 $Ba=0.$。因此

$$\begin{aligned}D\varphi&=\delta^2|a|^{-2}fp\otimes D(D\zeta\cdot a)+\delta|a|^{-2}(D\zeta\cdot a)f'p\otimes a\\&\quad+\delta f'p\otimes D\zeta+\zeta f''p\otimes a,\\ \partial_t\varphi&=\delta^2|a|^{-2}(D\zeta\cdot a)_t fp+\delta|a|^{-2}(D\zeta\cdot a)f'sp+\delta\zeta_t f'p+\zeta f''sp,\\ \partial_t g&=\delta^2|a|^{-2}\zeta_t fp\otimes a+\delta|a|^{-2}\zeta f'sp\otimes a,\\ \partial_t\psi&=\frac{\delta^2}{s}|a|^{-2}(D\zeta\cdot a)_t fB+\delta|a|^{-2}(D\zeta\cdot a)f'B+\frac{\delta}{s}\zeta_t f'B+\zeta f''B\\&\quad-\frac{\delta^2}{s}f|a|^{-2}((BD\zeta)\otimes a)_t-\delta f'|a|^{-2}(BD\zeta)\otimes a.\end{aligned}$$

现在我们选择 $s\in(0,\ 1)$，使得 $s\|\zeta f''p\|_{L^\infty(G)}<\epsilon/2.$。于是

$$\begin{cases}\varphi=O(\delta),\ \partial_t\varphi=\zeta f''sp+O(\delta),\ \partial_t g=O(\delta),\\ D\varphi=f''\zeta p\otimes a+O(\delta),\ \partial_t\psi=f''\zeta B+O(\delta),\end{cases}$$

其中，$O(\delta)$' 表示满足 $|O(\delta)|\le C\delta$ 的那些项，其中 C 是与 $\delta\in$ 无关的统一常数 $(0,\ 1)$。因此

$$(D\varphi,\partial_t\psi)=f''\zeta(p\otimes a,B)+O(\delta)=f''\zeta\gamma+O(\delta).$$

由于 $f''\zeta\gamma\in[-\lambda\gamma,(1-\lambda)\gamma]$ 在 G 中，因此对所有充分小的 $\delta>0,$

$$\begin{cases}\|\varphi\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t g\|_{L^\infty(G)}<\epsilon,\\ (D\varphi,\partial_t\psi)\in[-\lambda\gamma,(1-\lambda)\gamma]_\epsilon\ \text{ in } G.\end{cases}$$

接下来，令 I_k^o 为 I_k 在 $k=1,\ 2$ 时的内部。令 $\chi_k=\chi_{\tilde{I}_k}$ 为˜开集 $I_k=\bigcup\{j+I_k^o$ 的示性函数：$j\in\{0,\pm1,\pm2,\dots\}\}$ 在 $\mathbb{R},$ 并定义

$$\tilde{G}_k^\delta=\Big\{y\in\tilde{G}:\ \frac{\alpha\cdot y}{\delta}\in\tilde{I}_k\Big\}=\Big\{y\in\tilde{G}:\ \chi_k(\frac{\alpha\cdot y}{\delta})=1\Big\},$$

其中 $y=(x,\ t)$ 和 $\alpha=(a,\ s)$。于是，对于 $k=1,\ 2,\ \tilde{G}_k^\delta$ 是开集，且 $\delta>0.$ 此外，

$$(D\varphi,\partial_t\psi)|_{\tilde{G}_1^\delta}=f''\gamma=(1-\lambda)\gamma\quad\text{and}\quad(D\varphi,\partial_t\psi)|_{\tilde{G}_2^\delta}=f''\gamma=-\lambda\gamma.$$

设 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}.$ 的一组标准正交基，其中 $\alpha_1=\frac{\alpha}{|\alpha|}$。于是，通过变量替换$y=\sum_{i=1}^{n+1}z_i\alpha_i$ 和富比尼定理可得，对于每个 $k=1,\ 2,\ ,$ 有 $\delta'=\delta/|\alpha|,$

$$\begin{aligned}|\tilde{G}_k^\delta|&=\int_{\tilde{G}}\chi_k(\frac{\alpha\cdot y}{\delta})\,dy=\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\chi_{\tilde{G}}(y)\chi_k(\frac{\alpha_1\cdot y}{\delta'})\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\chi_{\tilde{G}'}(z)\chi_k(\frac{z_1}{\delta'})\,dz=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{G'(z_1)}(z')\chi_k(\frac{z_1}{\delta'})\,dz'\Big)\,dz_1\\&=\int_{\mathbb{R}}|G'(z_1)|\chi_k(\frac{z_1}{\delta'})\,dz_1,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{G}'=\{z\in\mathbb{R}^{n+1}:\ y=\sum_{i=1}^{n+1}z_i\alpha_i\in\tilde{G}\}$，且 $G'(z_1)=\{z'\in\mathbb{R}^n:\ (z_1,\ z')\in\tilde{G}'\}.$

由于每个 χ_k 都是 1-周期的，因此序列 $\{\chi_k(m\tau)\}_{m=1}^\infty$ 在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中弱*收敛到常数 $C_k=\int_0^1\chi_k(\tau)\,d\tau=|I_k|$。于是，取 $\delta=\delta_m=\frac{|\alpha|}{m}$，并令$m\to\infty,$ 可得

$$|\tilde{G}_k^{\delta_m}|=\int_{\mathbb{R}}|G'(z_1)|\,\chi_k(mz_1)\,dz_1\to|I_k|\int_{\mathbb{R}}|G'(z_1)|\,dz_1=|I_k||\tilde{G}'|=|I_k||\tilde{G}|\quad(k=1,2).$$

Since $|I_1|=(1-\epsilon)^{1/3}\lambda,\ \ |I_2|=(1-\epsilon)^{1/3}(1-\lambda)$ and $|\tilde{G}|\ge(1-\epsilon)^{1/3}|G|,$ 由此可得

$$|I_1||\tilde{G}|>(1-\epsilon)\lambda|G|\quad\text{and}\quad|I_2||\tilde{G}|>(1-\epsilon)(1-\lambda)|G|.$$

因此，我们取一个充分小的 $\delta = \delta_m > 0$，令 $G' = \tilde{G}_1^\delta$ 和 $G'' = \tilde{G}_2^\delta$.

□，从而完成证明

3.2. $\mathcal{T}_N$**-构形。** 根据引理 3.1，我们定义

$$\Gamma = \big\{(p \otimes a, B) : p \in \mathbb{R}^m,\ a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ B \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ and } Ba = 0\big\} \tag{3.1}$$

为与微分关系 (1.6) 相对应的波锥 。由于 $p \otimes a = |a| p \otimes \frac{a}{|a|}$，显然， Γ是一个闭锥。 —

当 $n = 2$ 时，集合 Γ 等价于由零矩阵以及 $\mathbb{R}^{2m\times 2}$. 中所有秩一矩阵构成的锥。事实上，若 $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ 满足 $Ba = 0$，则对于某个 $q \in \mathbb{R}^m$，有 $B = q \otimes a^\perp$，其中 $a^\perp = (-a_2,\ a_1)$ 若 $a = (a_1,\ a_2) \in \mathbb{R}^2$. 因此，

$$(p \otimes a, B) = (p \otimes a, q \otimes a^\perp)$$

可视为矩阵（p，q）$\otimes a$，属于 $\mathbb{R}^{2m\times 2}$，其中 p，$q \in \mathbb{R}^m$ 且 $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

以下定义推广了 [30, 35, 36, 38, 39] 中研究的 T_N-构型，并大幅简化了 [40, 41, 42] 引入的 τ_N-构型。

定义 3.1 （$\mathcal{T}_N$-构型）。 设 $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$.

若存在 $\rho \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$、 $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \Gamma$ 以及 $\kappa_1, \dots, \kappa_N > 1$，使得.....则称有序 N 元组（$\xi_1, \dots, \xi_N$）是 $\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$ 中的 $\mathcal{T}_N$-构型

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N = 0 \tag{3.2}$$

and

$$\xi_1 = \rho + \kappa_1\gamma_1 \quad \text{and} \quad \xi_i = \rho + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{i-1} + \kappa_i\gamma_i \quad (2 \le i \le N). \tag{3.3}$$

在此情形下，定义 $\pi_1 = \rho$ 和 $\pi_i = \rho + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{i-1}$ （$2 \le i \le N$），并令

$$\mathcal{T}(\xi_1, \dots, \xi_N) = \bigcup_{j=1}^{N} [\xi_j, \pi_j] \quad (\textit{See Figure 1}).$$

此外，如果对所有 $1 \le i \le N$ $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\xi_i \in \mathcal{E}$，我们称 (ξ_1，.....，ξ_N) 支撑于 $\mathcal{E}$.

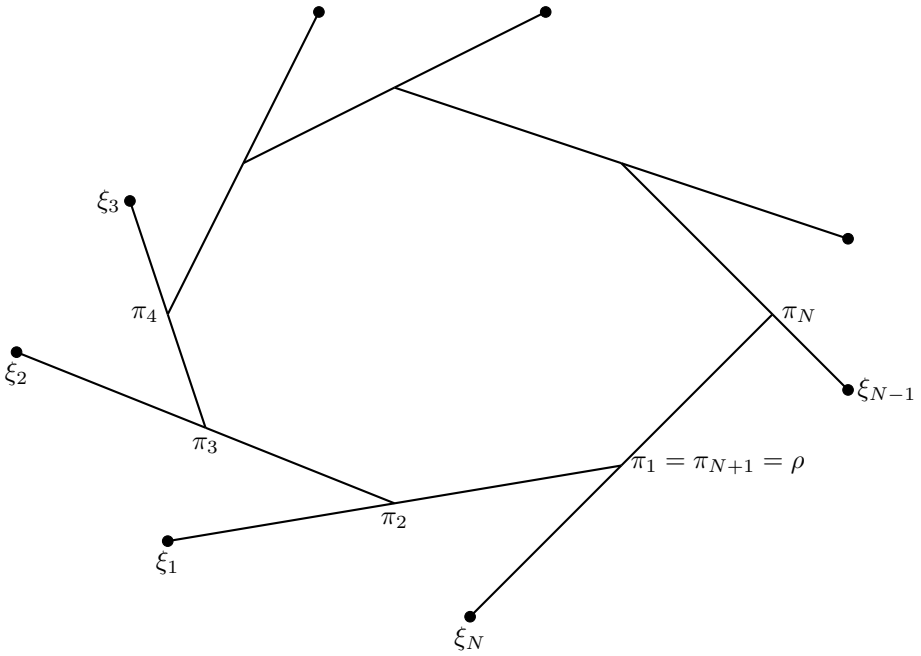


FIGURE 1. $\mathcal{T}_N$-构型（$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$）的示意图，该构型由 $\pi_1 = \pi_{N+1} = \rho$ 和 $\gamma_i = \pi_{i+1} - \pi_i \in \Gamma$ （$1 \le i \le N$）确定。 集合 $\mathcal{T}$（$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$）是图中所有闭线段的并集。

注记 3.2。 设 $(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_N)$ 是一个由上述 $(\rho, \gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_N, \kappa_1, \ldots\ldots, \kappa_N)$ 确定的 $\mathcal{T}_N$-构型。

(i) 对于 $1 \le i \le N$ 定义 $\chi_i = 1/\kappa_i \in (0,1]$，并令 $\pi_{N+1} = \pi_1 = \rho$.。于是

$$\pi_{i+1} = \chi_i \xi_i + (1-\chi_i)\pi_i \quad \forall\, 1 \le i \le N. \tag{3.4}$$

(ii) 假设对于 $1 \le i \le N$ 有 $\chi_i < \lambda_i \le 1$,，并定义 $\xi_i' = \lambda_i \xi_i + (1-\lambda_i)\pi_i$.。于是 $(\xi_1', \ldots, \xi_N')$ 是一个 $\mathcal{T}_N$-构型，由 $(\rho, \gamma_1, \ldots, \gamma_N, \lambda_1\kappa_1, \ldots, \lambda_N\kappa_N)$. 确定。此外，

$$\mathcal{T}(\xi_1', \ldots, \xi_N') \subseteq \mathcal{T}(\xi_1, \ldots, \xi_N).$$

(iii) 对每个 $1 \le i \le N$，考虑循环移位后的 N-元组

$$(\xi_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{i+N-1}),$$

其中指标按模 N. 取值。这也是一个 $\mathcal{T}_N$-构型，此时由以下内容确定

$$(\pi_i, \gamma_i, \ldots, \gamma_{i+N-1}, \kappa_i, \ldots, \kappa_{i+N-1}),$$

其中的指 对 N. 取模。特别地，对于所有 $1 \le i \le N$， $\mathcal{T}(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_N) = \mathcal{T}(\xi_i, \ldots\ldots, \xi_{i+N-1})$.

下面的初等引理阐明了基于 (3.4) 的一些计算；其证明可直接通过简单的迭代循环得到，因此略去。

引理 3.2 . 设 P_k、 X_k 和 $0 < t_k < 1$ 是定义在整数 k 上、模 N 周期的，并满足关系

$$P_{k+1} = t_k X_k + (1-t_k)P_k \quad \forall\, k \mod N.$$

于是 $P_i = \sum_{j=1}^N \nu_i^j X_j$，其中系数 ν_i^j （ i、 j 模 N）由下式给出

$$\begin{aligned} \nu_i^{i-1} &= \frac{t_{i-1}}{1-(1-t_1)\cdots(1-t_N)}, \\ \nu_i^j &= \frac{(1-t_{i-1})(1-t_{i-2})\cdots(1-t_{j+1})t_j}{1-(1-t_1)\cdots(1-t_N)} \quad (i-N \le j \le i-2). \end{aligned} \tag{3.5}$$

注意，对于所有 i 模 N.， $\sum_{j=1}^N \nu_i^j = 1$

以下 结果为基于 $\mathcal{T}_N$-构型进行凸积分提供了基本构件 .

定理 3.3。 设 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ 是一个 $\mathcal{T}_N$-构型，且 $\eta = \lambda\xi_i + (1-\lambda)\pi_i$，其中某个 $1 \le i \le N$和 $0 \le \lambda \le 1$. 满足。则 $\eta = \sum_{j=1}^N \nu_j \xi_j$，其中

$$\nu_i = \lambda + (1-\lambda)\nu_i^i, \quad \nu_j = (1-\lambda)\nu_i^j \quad \forall\, j \ne i,$$

且 $\{\nu_i^j\}_{j=1}^N$ 由公式 (3.5) 给出，其中 $t_k = \chi_k\, (1 \le k \le N)$。

此外，对于每个有界开集 $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $0 < \delta < 1$，存在一个函数 $(\varphi, \psi, g) \in C_0^\infty(G; \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n})$ 满足以下性质：

(a) 散度 $\psi = 0$, 散度 $g = \varphi$ 且 $\eta + (D\varphi, \partial_t\psi) \in [\mathcal{T}(\xi_1, \ldots, \xi_N)]_\delta$ 属于 G;

(b) $\|\varphi\|_{L^\infty(G)} + \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(G)} + \|\partial_t g\|_{L^\infty(G)} < \delta$; (c) 存在两两不相交的开集 $G_1, \ldots, G_N \subset\subset G$，使得 t

$$\eta + (D\varphi, \partial_t\psi) = \xi_j \ \text{in}\ G_j \quad \text{and} \quad |G_j| \ge (1-\delta)\nu_j|G| \quad \forall\, 1 \le j \le N;$$

$$\text{in particular, } |\cup_{j=1}^N G_j| = \sum_{j=1}^N |G_j| \ge (1-\delta)|G|.$$

证明。 如果 $\lambda = 1$，那么 $\eta = \xi_i = \sum_{j=1}^N \nu_j\xi_j$，其中 $\nu_i = 1$ 和 $\nu_j = 0$ （$j \ne i$）。此外，(a)–(c) 对（φ， ψ， g） $\equiv 0$，成立，其中对于 (c) 中的所有 $j \ne i$，都有 $G_j = \emptyset$。

现在假设 $0 \le \lambda < 1$.。不失一般性，假设 $i = 1$；即， $\eta = \lambda\xi_1 +$ （$1-\lambda$） π_1.。由于对于所有 k 模 N， $\pi_{k+1} = \chi_k\xi_k +$ （$1-\chi_k$） π_k，根据引理 3.2，我们有 $\pi_1 = \sum_{j=1}^N \nu_1^j\xi_j$，从而

$$\eta = (\lambda + (1-\lambda)\nu_1^1)\xi_1 + \sum_{j=2}^N (1-\lambda)\nu_1^j\xi_j = \sum_{j=1}^N \nu_j\xi_j,$$

其中 ν_1^j 由 (3.5) 定义，且 $t_k = \chi_k$.。注意，结合 $\tau = (1-\chi_1)$ .....$(1-\chi_N)$,

$$\chi_N = \nu_1^N(1-\tau), \ \chi_{N-j+1}(1-\chi_{N-j+2})\cdots(1-\chi_N) = \nu_1^{N-j+1}(1-\tau) \ (2 \le j \le N). \tag{3.6}$$

设 $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为一个有界开集，且 $0 < \delta < 1$。假设 $\epsilon \in (0, \delta)$ 是一个待定常数。

由于 $\gamma = \xi_1 - \pi_1 = \kappa_1\gamma_1 \in \Gamma$，我们有 $\eta + (1-\lambda)\gamma = \xi_1$ 和 $\eta - \lambda\gamma = \pi_1$. 因此，应用引理 3.1，并取 $0 \le \lambda < 1$、$\gamma \in \Gamma$、$G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $\epsilon \in (0, \delta)$，可得一个光滑函数 (φ_0, ψ_0, g_0)，其紧支撑包含于 $G_0 = G$，且满足该引理的 (a)–(c)。因此

$$\begin{cases} \operatorname{div}\psi_0 = 0,\ \operatorname{div} g_0 = \varphi_0,\ \eta + (D\varphi_0, \partial_t\psi_0) \in [\xi_1, \pi_1]_\epsilon \text{ in } G_0; \\ \|\varphi_0\|_{L^\infty(G_0)} + \|\partial_t\varphi_0\|_{L^\infty(G_0)} + \|\partial_t g_0\|_{L^\infty(G_0)} < \epsilon; \\ \eta + (D\varphi_0, \partial_t\psi_0) = \eta + (1-\lambda)\gamma = \xi_1 \text{ in } G_0'; \\ \eta + (D\varphi_0, \partial_t\psi_0) = \eta - \lambda\gamma = \pi_1 \text{ in } G_0'', \end{cases} \tag{3.7}$$

其中 G_0'，$G_0'' \subset\subset G_0$ 是两两不交的开集，且

$$|G_0'| \ge (1-\epsilon)\lambda|G_0| \quad \text{and} \quad |G_0''| \ge (1-\epsilon)(1-\lambda)|G_0|. \tag{3.8}$$

令 $G_1 = G_{11} = G_0''$；则 $\eta + (D\varphi_0, \partial_t\psi_0) = \pi_1 = \pi_{N+1} = \chi_N\xi_N + (1-\chi_N)\pi_N$. 因此，应用引理 3.1，并取 $\lambda = \chi_N \in (0, 1)$、$\gamma = \xi_N - \pi_N = \kappa_N\gamma_N \in \Gamma$、$G = G_{11}$ 和 $\epsilon \in (0, \delta)$，可得一个光滑函数 $(\varphi_{11}, \psi_{11}, g_{11})$，其紧支撑包含于 G_{11}，且满足该引理的 (a)–(c)。因此，$\pi_1 + (D\varphi_{11}, \partial_t\psi_{11})$ 在 G_{11}中 $\in [\xi_N, \pi_N]_\epsilon$，

$$\pi_1 + (D\varphi_{11}, \partial_t\psi_{11}) = \xi_N \text{ in } G_{11}' \quad \text{and} \quad \pi_1 + (D\varphi_{11}, \partial_t\psi_{11}) = \pi_N \text{ in } G_{11}'',$$

其中 G_{11}'，$G_{11}'' \subset\subset G_{11}$ 是互不相交的开集，且

$$|G_{11}'| \ge (1-\epsilon)\chi_N|G_{11}| \quad \text{and} \quad |G_{11}''| \ge (1-\epsilon)(1-\chi_N)|G_{11}|.$$

令 $G_{12} = G_{11}''$，其中 $\pi_1 + (D\varphi_{11}, \partial_t\psi_{11}) = \pi_N = \chi_{N-1}\xi_{N-1} + (1-\chi_{N-1})\pi_{N-1}$. 因此，重复上述过程，我们得到一个光滑函数 $(\varphi_{12}, \psi_{12}, g_{12})$，其紧支撑包含于 G_{12}，且满足

$$\begin{cases} \pi_N + (D\varphi_{12}, \partial_t\psi_{12}) \in [\xi_{N-1}, \pi_{N-1}]_\epsilon \text{ in } G_{12}, \\ \pi_N + (D\varphi_{12}, \partial_t\psi_{12}) = \xi_{N-1} \text{ in } G_{12}', \text{ and } \pi_N + (D\varphi_{12}, \partial_t\psi_{12}) = \pi_{N-1} \text{ in } G_{12}'', \end{cases}$$

其中 G_{12}'，$G_{12}'' \subset\subset G_{12}$ 是互不相交的开集，且

$$\begin{aligned} |G_{12}'| &\ge (1-\epsilon)\chi_{N-1}|G_{12}| \ge (1-\epsilon)^2\chi_{N-1}(1-\chi_N)|G_{11}|, \\ |G_{12}''| &\ge (1-\epsilon)(1-\chi_{N-1})|G_{12}| \ge (1-\epsilon)^2(1-\chi_{N-1})(1-\chi_N)|G_{11}|. \end{aligned}$$

重复这一过程 N 次，我们得到光滑函数 $(\varphi_{1j}, \psi_{1j}, g_{1j})$，其紧支撑包含于 $G_{1j} = G_{1(j-1)}''$ $(1 \le j \le N)$，其中 $G_{10}'' = G_0''$，且满足

$$\begin{cases} \operatorname{div}\psi_{1j} = 0,\ \operatorname{div} g_{1j} = \varphi_{1j}, \\ \pi_{N-j+2} + (D\varphi_{1j}, \partial_t\psi_{1j}) \in [\xi_{N-j+1}, \pi_{N-j+1}]_\epsilon \text{ in } G_{1j}; \\ \|\varphi_{1j}\|_{L^\infty(G_{1j})} + \|\partial_t\varphi_{1j}\|_{L^\infty(G_{1j})} + \|\partial_t g_{1j}\|_{L^\infty(G_{1j})} < \epsilon; \\ \pi_{N-j+2} + (D\varphi_{1j}, \partial_t\psi_{1j}) = \xi_{N-j+1} \text{ in } G_{1j}'; \\ \pi_{N-j+2} + (D\varphi_{1j}, \partial_t\psi_{1j}) = \pi_{N-j+1} \text{ in } G_{1j}'', \end{cases} \tag{3.9}$$

其中 G_{1j}'，$G_{1j}'' \subset\subset G_{1j}$ 是互不相交的开集，且

$$\begin{aligned} |G_{1j}'| &\ge (1-\epsilon)^j\chi_{N-j+1}(1-\chi_{N-j+2})\cdots(1-\chi_N)|G_{11}|, \\ |G_{1j}''| &\ge (1-\epsilon)^j(1-\chi_{N-j+1})\cdots(1-\chi_N)|G_{11}|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

然后，我们定义函数 $(\varphi_1, \psi_1, g_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n})$ 如下：

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \cdots + \varphi_{1N},\ \ \psi_1 = \psi_{11} + \cdots + \psi_{1N},\ \text{ and } \ g_1 = g_{11} + \cdots + g_{1N}.$$

那么，(φ_1, ψ_1, g_1) 在 G_1 中是紧支撑的，并且满足

$$\begin{cases} \operatorname{div}\psi_1 = 0,\ \operatorname{div} g_1 = \varphi_1,\ \pi_1 + (D\varphi_1, \partial_t\psi_1) \in [\mathcal{T}(\xi_1, \dots, \xi_N)]_\epsilon \text{ in } \tilde{G}_1; \\ \|\varphi_1\|_{L^\infty(\tilde{G}_1)} + \|\partial_t\varphi_1\|_{L^\infty(\tilde{G}_1)} + \|\partial_t g_1\|_{L^\infty(\tilde{G}_1)} < N\epsilon; \\ \pi_1 + (D\varphi_1, \partial_t\psi_1) = \xi_{N-j+1} \text{ in } G_{1j}' \quad \forall\, 1 \le j \le N; \\ (D\varphi_1, \partial_t\psi_1) = 0 \text{ in } G_{1N}'', \end{cases} \tag{3.11}$$

˜其中，根据 (3.6) 和 (3.10)， $G'_{11},\dots,G'_{1N},G''_{1N}\subset\subset G_1$ 两两不相交，且为开集

$$\begin{cases}|G'_{1j}|\geq(1-\epsilon)^j(1-\tau)\nu_1^{N-j+1}|\tilde G_1| \quad (1\leq j\leq N),\\ |G''_{1N}|\geq(1-\epsilon)^N\tau|\tilde G_1|.\end{cases}\tag{3.12}$$

现在我们归纳地迭代方案 (3.11)，得到开集

$$\tilde G_k=G''_{(k-1)N},\quad\text{and}\quad G'_{k1},\dots,G'_{kN},G''_{kN}\subset\subset\tilde G_k\ \text{disjoint},$$

˜和紧支撑于 G_k, 中的光滑函数 (φ_k,ψ_k,g_k)，对所有 $k=1,2,\dots,$ 均满足

$$\begin{cases}\operatorname{div}\psi_k=0,\ \operatorname{div}g_k=\varphi_k,\ \pi_1+(D\varphi_k,\partial_t\psi_k)\in[\mathcal{T}(\xi_1,\dots,\xi_N)]_\epsilon\ \text{in}\ \tilde G_k;\\ \|\varphi_k\|_{L^\infty(\tilde G_k)}+\|\partial_t\varphi_k\|_{L^\infty(\tilde G_k)}+\|\partial_t g_k\|_{L^\infty(\tilde G_k)}<N\epsilon;\\ \pi_1+(D\varphi_k,\partial_t\psi_k)=\xi_{N-j+1}\ \text{in}\ G'_{kj}\ \text{and}\\ |G'_{kj}|\geq(1-\epsilon)^j(1-\tau)\nu_1^{N-j+1}|\tilde G_k| \quad\forall j=1,\dots,N;\\ (D\varphi_k,\partial_t\psi_k)=0\ \text{in}\ G''_{kN}\ \text{and}\ |G''_{kN}|\geq(1-\epsilon)^N\tau|\tilde G_k|.\end{cases}\tag{3.13}$$

注意，对于 $k=1,2,\dots,$

$$|\tilde G_k|=|G''_{(k-1)N}|\geq(1-\epsilon)^N\tau|\tilde G_{k-1}|\geq\cdots\geq(1-\epsilon)^{(k-1)N}\tau^{k-1}|\tilde G_1|;$$

因此，对于所有 $k=1,2,\dots$ 以及 $1\leq j\leq N$,

$$|G'_{kj}|\geq(1-\epsilon)^j(1-\tau)\nu_1^{N-j+1}|\tilde G_k|\geq(1-\epsilon)^{j+(k-1)N}(1-\tau)\nu_1^{N-j+1}\tau^{k-1}|\tilde G_1|.\tag{3.14}$$

令 $\ell\geq2$ 为待定的整数。定义

$$(\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde g)=\sum_{k=1}^{\ell}(\varphi_k,\psi_k,g_k)\quad\text{and}\quad V_j=\cup_{k=1}^{\ell}G'_{kj}\quad\forall\,1\leq j\leq N.$$

˜ ˜那么，$(\tilde\varphi,\psi,\tilde g)$ 是光滑且紧支撑的，并且满足

$$\begin{cases}\operatorname{div}\tilde\psi=0,\ \operatorname{div}\tilde g=\tilde\varphi,\ \pi_1+(D\tilde\varphi,\partial_t\tilde\psi)\in[\mathcal{T}(\xi_1,\dots,\xi_N)]_\epsilon\ \text{in}\ \tilde G_1;\\ \|\tilde\varphi\|_{L^\infty(\tilde G_1)}+\|\partial_t\tilde\varphi\|_{L^\infty(\tilde G_1)}+\|\partial_t\tilde g\|_{L^\infty(\tilde G_1)}<N\ell\epsilon;\\ \pi_1+(D\tilde\varphi,\partial_t\tilde\psi)=\xi_{N-j+1}\ \text{in}\ V_j\ \text{for each}\ 1\leq j\leq N,\end{cases}$$

其中，由 (3.8) 和 (3.14) 可知，对每个 $1\leq j\leq N$,

$$\begin{aligned}|V_j|&=\sum_{k=1}^{\ell}|G'_{kj}|\geq\sum_{k=1}^{\ell}(1-\epsilon)^{j+(k-1)N}(1-\tau)\nu_1^{N-j+1}\tau^{k-1}|\tilde G_1|\\ &\geq(1-\epsilon)^{\ell N}(1-\tau)\nu_1^{N-j+1}\Big(\sum_{k=1}^{\ell}\tau^{k-1}\Big)|\tilde G_1|\\ &=(1-\epsilon)^{\ell N}(1-\tau^\ell)\nu_1^{N-j+1}|\tilde G_1|\\ &\geq(1-\epsilon)^{1+\ell N}(1-\tau^\ell)\nu_1^{N-j+1}(1-\lambda)|G|.\end{aligned}\tag{3.15}$$

现在我们选取充分大的 $\ell\geq2$ ，使得

$$1-\tau^\ell\geq(1-\delta)^{1/2},\tag{3.16}$$

并选取充分小的 $\epsilon\in(0,\delta)$，使得

$$(1+N\ell)\epsilon<\delta\quad\text{and}\quad(1-\epsilon)^{1+\ell N}\geq(1-\delta)^{1/2}.\tag{3.17}$$

最后，我们定义

$$\begin{cases}(\varphi,\psi,g)=(\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde g)+(\varphi_0,\psi_0,g_0),\\ G_1=G'_0\cup V_N,\quad G_j=V_{N-j+1}\quad(2\leq j\leq N).\end{cases}$$

那么，(φ,ψ,g) 在 G 中是光滑且紧支撑的，并且

$$\begin{cases}\operatorname{div}\psi=0,\ \operatorname{div}g=\varphi,\\ \eta+(D\varphi,\partial_t\psi)\in[\mathcal{T}(\xi_1,\dots,\xi_N)]_\epsilon\subset[\mathcal{T}(\xi_1,\dots,\xi_N)]_\delta\ \text{in}\ G;\\ \|\varphi\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t g\|_{L^\infty(G)}<(1+N\ell)\epsilon<\delta;\\ \eta+(D\varphi,\partial_t\psi)=\xi_j\ \text{in}\ G_j\ \text{for each}\ 1\leq j\leq N.\end{cases}$$

此外，由 (3.8)、(3.15)、(3.16) 和 (3.17) 可知

$$\begin{aligned}|G_1| = |G_0'| + |V_N| &\geq (1-\epsilon)\lambda|G| + (1-\epsilon)^{1+\ell N}(1-\tau^\ell)\nu_1^1(1-\lambda)|G| \\ &\geq (1-\delta)(\lambda + (1-\lambda)\nu_1^1)|G| = (1-\delta)\nu_1|G|; \\ |G_j| = |V_{N-j+1}| &\geq (1-\epsilon)^{1+\ell N}(1-\tau^\ell)\nu_1^j(1-\lambda)|G| \\ &\geq (1-\delta)(1-\lambda)\nu_1^j|G| = (1-\delta)\nu_j|G| \quad \forall\, 2 \leq j \leq N.\end{aligned}$$

因此，定理的断言 (a)–(c) 得证。证明至此完成。 □

以下结果本身也很有趣，因为它表明 $\mathcal{T}_N$-构型与拟单调性条件不相容。

命题 3.4. 设 $\sigma\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ 连续，其图为 $\mathcal{K}$.
若存在一个 $\mathcal{T}_N$-构型 $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ 支撑于 $\mathcal{K}$，使得

$$\mathcal{T}(\xi_1, \ldots, \xi_N) \setminus \mathcal{K} \neq \emptyset,$$

则对于任意 $\nu > 0.$， σ 都不满足拟单调性条件 (1.4)

证明。 反设对于某个 $\nu > 0.$， σ 满足条件 (1.4)
令 $\eta = (A,\ B) \in \mathcal{T}(\xi_1,\ \ldots\ldots,\ \xi_N) \setminus \mathcal{K}$. 对于每个 $\delta \in (0,\ 1)$，令 $(\varphi_\delta,\ \psi_\delta,\ g_\delta)$ 为定理 3.3 中由 $G = \Omega_T$ 所确定的函数。令 $V = \cup_{i=1}^N G_i$，并记 $y = (x,\ t)$。由于 $\sigma(A + D\varphi_\delta)$ 在 V 上为 $= B + \partial_t\psi_\delta$，条件 (1.4) 蕴含

$$\begin{aligned}\nu\int_{\Omega_T}|D\varphi_\delta|^2 dy &\leq \int_{\Omega_T}\langle\sigma(A+D\varphi_\delta), D\varphi_\delta\rangle dy \\ &= \int_V \langle\sigma(A+D\varphi_\delta), D\varphi_\delta\rangle dy + \int_{\Omega_T\setminus V}\langle\sigma(A+D\varphi_\delta), D\varphi_\delta\rangle dy \\ &= \int_V \langle B+\partial_t\psi_\delta, D\varphi_\delta\rangle dy + \int_{\Omega_T\setminus V}\langle\sigma(A+D\varphi_\delta), D\varphi_\delta\rangle dy \\ &= \int_{\Omega_T} \langle B+\partial_t\psi_\delta, D\varphi_\delta\rangle dy + \int_{\Omega_T\setminus V}\langle\sigma(A+D\varphi_\delta) - (B+\partial_t\psi_\delta), D\varphi_\delta\rangle dy \\ &= \int_{\Omega_T\setminus V}\langle\sigma(A+D\varphi_\delta) - (B+\partial_t\psi_\delta), D\varphi_\delta\rangle dy \leq M|\Omega_T\setminus V| \leq C\delta,\end{aligned}$$

这里用到了 div $\psi_\delta = 0$ 在 Ω_T， 因此

$$\int_{\Omega_T}\langle B+\partial_t\psi_\delta, D\varphi_\delta\rangle dy = \int_{\Omega_T}\langle\partial_t\psi_\delta, D\varphi_\delta\rangle dy = \int_{\Omega_T}\operatorname{div}\psi_\delta\cdot\partial_t\varphi_\delta\, dy = 0,$$

并且族 $\{[\mathcal{T}(\xi_1,\ \ldots\ldots,\ \xi_N)]_\delta\}_{0<\delta<1}$ 一致有界。因此，

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\Omega_T}|D\varphi_\delta(y)|^2 dy = 0,$$

这意味着

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\Omega_T}|\sigma(A) - (B+\partial_t\psi_\delta)|\, dy = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{\Omega_T}|\sigma(A+D\varphi_\delta) - (B+\partial_t\psi_\delta)|\, dy = 0.$$

另一方面，由于 $\int_{\Omega_T}\partial_t\psi_\delta\, dy = 0$，根据詹森不等式可得

$$|\sigma(A) - B| = \frac{1}{|\Omega_T|}\int_{\Omega_T}|\sigma(A)-B|\, dy \leq \frac{1}{|\Omega_T|}\int_{\Omega_T}|\sigma(A) - (B+\partial_t\psi_\delta)|\, dy,$$

使得 $|\sigma(A) - B| \to 0$ 当 $\delta \to 0^+$. 时。因此 $\sigma(A) = B$，这与 $\eta = (A,\ B) \notin \mathcal{K}$. □的选取矛盾

3.3. **条件** O_N。对于每个 $\rho\in\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $r>0$，我们记 $\rho=(\rho^1,\ \rho^2)$，其中 $\rho^1,\ \rho^2\in\mathbb{R}^{m\times n}$，并分别用 $\mathbb{B}_r(\rho)$ 和 $\mathbb{B}_r(\rho)$ 表示 $\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}$ 中以 ρ 为中心、半径为 r 的开球和闭球。特别地，对于所有 $r>0.$，我们记 $\mathbb{B}_r=\mathbb{B}_r(0)$ 和 $\mathbb{B}_r=\mathbb{B}_r(0)$

定义 3.3。设 $\sigma\colon\ \mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{m\times n}$ 是一个图为 $\mathcal{K}.$ 的连续函数

（I）我们称 σ 满足条件 O_N，如果存在数 $r_0>0$ 和 $0<\delta_1<\delta_2<1$ 以及连续函数

$$(\kappa_i,\gamma_i)\colon\bar{\mathbb{B}}_{r_0}\to[1/\delta_2,1/\delta_1]\times\Gamma\quad(1\le i\le N)\tag{3.18}$$

with

$$\gamma_1(\rho)+\cdots+\gamma_N(\rho)=0\quad\forall\,\rho\in\bar{\mathbb{B}}_{r_0}\tag{3.19}$$

使得令

$$\begin{cases}\pi_1(\rho)=\rho,\ \ \pi_i(\rho)=\rho+\gamma_1(\rho)+\cdots+\gamma_{i-1}(\rho)\ \ (2\le i\le N),\\ \xi_i(\rho)=\pi_i(\rho)+\kappa_i(\rho)\gamma_i(\rho)\ \ (1\le i\le N)\quad\forall\,\rho\in\bar{\mathbb{B}}_{r_0},\end{cases}$$

以下性质成立：

(P1) (i) $\xi_i(\rho)\in\mathcal{K}\quad\forall\,\rho\in\bar{\mathbb{B}}_{r_0}\ \ (1\le i\le N)$;
(ii) $\xi_i^1(\bar{\mathbb{B}}_{r_0})\cap\xi_j^1(\bar{\mathbb{B}}_{r_0})=\pi_i^1(\bar{\mathbb{B}}_{r_0})\cap\pi_j^1(\bar{\mathbb{B}}_{r_0})=\emptyset\ \ (1\le i\ne j\le N).$

（P2）对于 $1\le i\le N$、$0<r\le r_0$ 和 $0\le\lambda\le1$，定义

$$S_i^r(\lambda)=\{\lambda\xi_i(\rho)+(1-\lambda)\pi_i(\rho):\rho\in\mathbb{B}_r\}.$$

那么存在 $\delta_0\in(\delta_2,\ 1)$，使得对每个 $0<r\le r_0$ 和 $\lambda\in\{0\}\cup[\delta_0,1)$，集合 $\{S_i^r(\lambda)\}_{i=1}^N$ 都是开集且两两不相交。

(II) 假设 σ 满足条件 O_N，我们引入若干额外的集合。
对每个 $1\le i\le N,\ \ 0<r\le r_0$ 和 $0\le\lambda\le1$，定义

$$L_i^r(\lambda)=\bigcup_{\substack{(\alpha,\beta)\in S_i^r(\lambda)\times S_i^r(0)\\ \alpha-\beta\in\Gamma}}[\alpha,\beta],\tag{3.20}$$

其中 Γ 是由 (3.1) 定义的闭波锥。此外，对每个 $0<r\le r_0$ 和 $0\le\lambda\le1$，定义

$$S^r(\lambda)=\bigcup_{i=1}^N S_i^r(\lambda)\quad\text{and}\quad L^r(\lambda)=\bigcup_{i=1}^N L_i^r(\lambda).$$

最后，对每个 $0<r\le r_0$ 和 $\delta_0\le\lambda<1$，定义

$$\Sigma^r(\lambda)=\bigcup_{\delta_0\le\lambda'\le\lambda}L^r(\lambda'),$$

并取

$$\Sigma(1)=\bigcup_{\delta_0\le\lambda<1}\Sigma^{r_0}(\lambda).$$

注记 3.4. (i) 条件 O_N 大幅简化了 [41, 42]中的条件 $(OC)_N$。特别是，性质 (P2) 现在只要求 $0<r\le r_0$ 和 $\lambda\in\{0\}\cup[\delta_0,1)$ 的 $\{S_i^r(\lambda)\}_{i=1}^N$ 具有开性。此外，此处引入的集合 $\Sigma^r(\lambda)$ 基于 (3.20) 中的新集合 $L_i^r(\lambda)$（受[35]启发）构造，与 [42, 定义 2.2]中的集合 $\Sigma(\lambda)$ 有显著差异。而且，对于所有 $0<r\le r_0$ 和 $\delta_0\le\lambda<1$，集合 $\Sigma^r(\lambda)$自动为开集（见下文命题 3.5）。

(ii) 下面记录一些基于定义 3.3 的有用观察。设 $\sigma\colon\ \mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{m\times n}$如上所述满足条件 O_N。

¯(a) 对于每个 $1\le i\le N,0\le\lambda\le1$ 和 $\rho\in\mathbb{B}_{r_0}$，令

$$\chi_i(\rho)=1/\kappa_i(\rho)\in[\delta_1,\delta_2]\quad\text{and}\quad\zeta_i(\lambda,\rho)=\lambda\xi_i(\rho)+(1-\lambda)\pi_i(\rho).\tag{3.21}$$

那么 $\pi_{i+1}(\rho)=\chi_i(\rho)\xi_i(\rho)+(1-\chi_i(\rho))\pi_i(\rho)$. 此外，若 $0<r\le r_0$ 且 $\rho\in\mathbb{B}_r$, 则$\zeta_i(\lambda,\rho)\in S_i^r(\lambda)$ $\pi_i(\rho)\in S_i^r(0)$, 且 $\zeta_i(\lambda,\rho)-\pi_i(\rho)=\lambda\kappa_i(\rho)\gamma_i(\rho)\in\Gamma$; 因此,

$$[\zeta_i(\lambda,\rho),\,\pi_i(\rho)]\subset L_i^r(\lambda).$$

(b) 设 $\delta_2 < \lambda \le 1$, $0 < r \le r_0$ 且 $\rho \in \mathbb{B}_r$. 那么点 $X_j = \zeta_j(\lambda, \rho) \in S_j^r(\lambda)$ $(1 \le j \le N)$ 满足

$$\pi_i(\rho) = \sum_{j=1}^{N} \nu_i^j(\lambda, \rho) X_j \quad \forall\, 1 \le i \le N, \tag{3.22}$$

其中系数 $\nu_i^j(\lambda, \rho) = \nu_i^j (1 \le i, j \le N)$ 由公式 (3.5) 给出，且 $t_k = \chi_k(\rho)/\lambda$. 由于对每个 $1 \le k \le N$, $\delta_1/\lambda \le t_k \le \delta_2/\lambda < 1$ 均成立，因此对每个 $1 \le i \le N$，均成立

$$\sum_{j=1}^{N} \nu_i^j(\lambda, \rho) = 1, \quad \text{and} \quad \nu_i^j(\lambda, \rho) \ge (\lambda - \delta_2)^{N-1}\delta_1 \quad \forall\, 1 \le j \le N. \tag{3.23}$$

此外，$(X_1, \ldots, X_N)$ 是一个支撑于 $S^r(\lambda)$ 上的 $\mathcal{T}_N$配置，并且满足

$$\mathcal{T}(X_1, \ldots, X_N) \subset L^r(\lambda).$$

以下结果确立了条件 O_N 的其他重要推论 .

命题 3.5。 设 σ 满足定义 *3.3* 中的条件 O_N 。

(i) 如果 $\delta_0 \le \lambda < 1$ 和 $0 < r \le r_0$，则以下集合均为开集：

$$L_i^r(\lambda)\ (1 \le i \le N),\ \ L^r(\lambda),\ \ \Sigma^r(\lambda)\ \ and\ \ \Sigma(1).$$

(ii) 若 $1 \le k \le N$ 且 $0 < r < s \le r_0$，则

$$\overline{S_k^r(\lambda)} \subset S_k^s(\lambda) \quad \forall\, 0 \le \lambda \le 1, \quad and \quad \overline{\Sigma^r(\lambda)} \subset \Sigma^s(\lambda) \quad \forall\, \delta_0 \le \lambda < 1.$$

(iii) 若 $\Delta \subset \Sigma(1)$ 是紧致集，则 $\Delta \subset \Sigma^r(\lambda)$ 对于某个 $r \in (0, r_0)$ 和 $\lambda \in [\delta_0, 1)$成立。

证明。 1. 设 $1 \le i \le N$且 $A \in L_i^r(\lambda)$。则 $A = q\alpha + (1-q)\beta$对于某个 $q \in [0,1]$、$\alpha \in S_i^r(\lambda)$ 以及 $\beta \in S_i^r(0)$，并且 $\alpha - \beta \in \Gamma$. 根据条件 O_N 的性质 (P2)， $S_i^r(\lambda)$ 和 $S_i^r(0)$ 都是开集；因此，存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\mathbb{B}_\epsilon(\alpha) \subset S_i^r(\lambda)$ 且 $\mathbb{B}_\epsilon(\beta) \subset S_i^r(0)$。对于任意 $C \in \mathbb{B}_\epsilon(A)$，令$D = C - A$. 则

$$C = A + D = q(\alpha + D) + (1-q)(\beta + D) \in [\alpha + D,\, \beta + D].$$

由于 $\alpha + D \in \mathbb{B}_\epsilon(\alpha) \subset S_i^r(\lambda)$， $\beta + D \in \mathbb{B}_\epsilon(\beta) \subset S_i^r(0)$ 且 $(\alpha + D) - (\beta + D) = \alpha - \beta \in \Gamma$，由 (3.20) 可得

$$[\alpha + D,\, \beta + D] \subset L_i^r(\lambda).$$

因此， $\mathbb{B}_\epsilon(A) \subset L_i^r(\lambda)$，这证明了 $L_i^r(\lambda)$ 是开集。由此，集合 $L^r(\lambda)$、$\Sigma^r(\lambda)$ 和 $\Sigma(1)$ 的开性立即得到。

2. (ii) 中的第一个包含关系直接由定义得到。为证明第二个包含关系，令$\delta_0 \le \lambda < 1$， $0 < r < s \le r_0$，且 $X \in \Sigma^r(\lambda)$。取 $\Sigma^r(\lambda)$ 中的一个序列 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ ，使得$X_k \to X$. 于是，对于某个 $1 \le j_k \le N$ 和 $\delta_0 \le \lambda_k \le \lambda$，有 $X_k \in L_{j_k}^r(\lambda_k)$；因此，

$$X_k = q_k\alpha_k + (1 - q_k)\beta_k$$

对某个 $q_k \in [0,1]$, $\alpha_k \in S_{j_k}^r(\lambda_k)$ 和 $\beta_k \in S_{j_k}^r(0)$，且满足 $\alpha_k - \beta_k \in \Gamma$. 假设

$$\alpha_k = \zeta_{j_k}(\lambda_k, \rho_k) \quad \text{and} \quad \beta_k = \pi_{j_k}(\rho_k') \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

其中 $\rho_k, \rho_k' \in \mathbb{B}_r$. 令 $k' = \{k_i\} \to \infty$ 为一个子序列，使得

$$j_{k'} \equiv j \in \{1, \ldots, N\},\ \ \lambda_k \to \lambda' \in [\delta_0, \lambda],\ \ q_{k'} \to q \in [0,1],\ \ \rho_{k'} \to \rho \in \bar{\mathbb{B}}_r,\ \ \rho_{k'}' \to \rho' \in \bar{\mathbb{B}}_r.$$

因此， $\alpha_{k'} \to \alpha = \zeta_j(\lambda', \rho) \in S_j^s(\lambda')$ 且 $\beta_{k'} \to \beta = \pi_j(\rho') \in S_j^s(0)$；此外，由于 Γ 是闭的，$\alpha - \beta \in \Gamma$. 因此，

$$\bar{X} = q\alpha + (1-q)\beta \in [\alpha, \beta] \subset L_j^s(\lambda') \subset \Sigma^s(\lambda),$$

这证明了 $\Sigma^r(\lambda) \subset \overline{\Sigma^s(\lambda)}$。

3. 令 $\Delta \subset \Sigma(1)$ 为紧致集。由于

$$\Sigma(1) = \bigcup_{\substack{0 < r < r_0 \\ \delta_0 \le \lambda < 1}} \Sigma^r(\lambda),$$

集合 $\{\Sigma^r(\lambda):\ r\in(0,\ r_0)\ \ \lambda\in[\delta_0,1)\}$ 构成 $\Delta.$ 的一个开覆盖。因此，存在 $k\geq 1$ 和参数 $r_j\in(0,\ r_0)$、$\lambda_j\in[\delta_0,1)$，使得对于 $1\leq j\leq k$ 有

$$\Delta\subset\cup_{j=1}^{k}\Sigma^{r_j}(\lambda_j)\subset\Sigma^r(\lambda),$$

其中

$$r=\max_{1\leq j\leq k}r_j\in(0,r_0)\quad\text{and}\quad\lambda=\max_{1\leq j\leq k}\lambda_j\in[\delta_0,1),$$

如 (iii) 中所需。 □

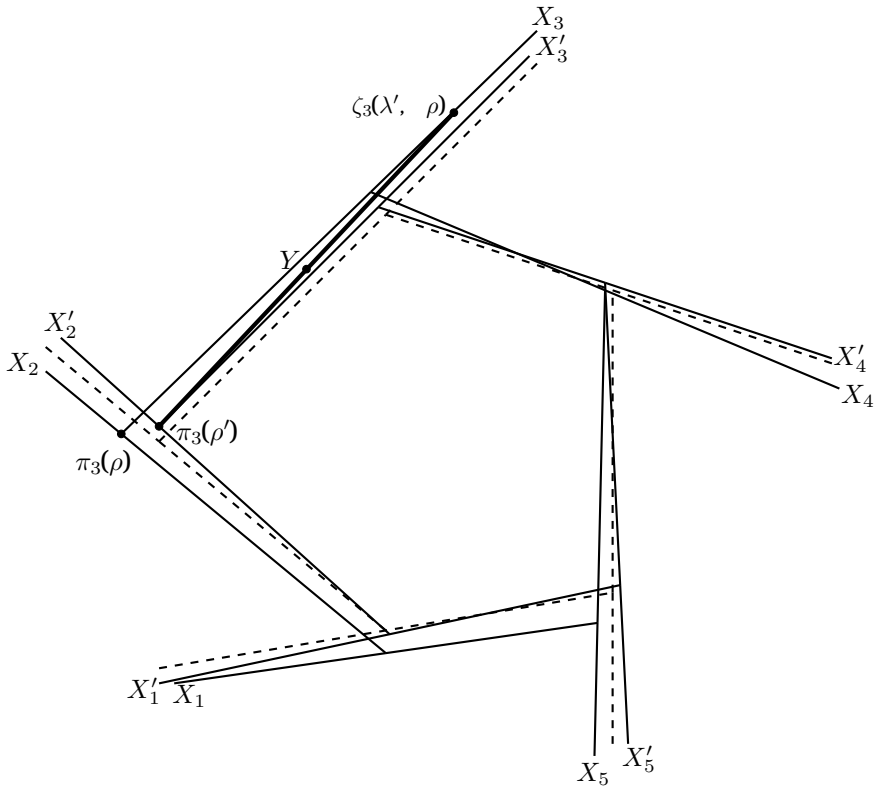


FIGURE 2. 定理 3.6 的示意图（此处展示 $N=5$ 的情形）。
点 Y 位于（超粗的）实线线段 $[\zeta_3(\lambda',\ \rho)\ \pi_3(\rho')]$.
集合 $\mathcal{T}(X_1、.....、X_N)$ 和 $\mathcal{T}(X_1'、.....、X_N')$ 分别用实线线段表示—
线段。虚线线段的并集表示参考集
$\mathcal{T}(X_1^0、.....、X^0{}_N)$，其中 $X_j^0=\zeta_j(\mu,\ 0)$ 对于 $1\leq j\leq N$ （未显示）。
对于每个 $1\leq j\leq N$，，点 $X_j^0,\ X_j$ 和 X_j' 都位于开集 $S_j^r(\mu)$ 中，图中所示的所有线段
都位于开集 $\Sigma^r(\mu)$中。然而，证明中只用到点 X_j 和 $X_j'(1\leq j\leq N)$ 以及实线线段。

以下定理为凸积分的构造提供了关键步骤。

定理 3.6。设 σ 满足条件 $O_N.$。设 $\delta_0\leq\lambda\leq\mu<1$、 $0<r\leq r_0$ 和 $Y\in\Sigma^r\ (\lambda)$。假设

$$Y=q\,\zeta_i(\lambda',\rho)+(1-q)\,\pi_i(\rho'),$$

其中 $q\in[0,1]$、 $1\leq i\leq N$、 $\delta_0\leq\lambda'\leq\lambda$ 和 $\rho、\ \rho'\in\mathbb{B}_r$ 满足 $\zeta_i\ (\lambda'、\ \rho)\ -\pi_i\ (\rho')\ \in\Gamma.$。设

$$X_j=\zeta_j(\mu,\rho)\quad and\quad X_j'=\zeta_j(\mu,\rho')\quad\forall 1\leq j\leq N.$$

那么，对于任意有界开集 $G\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 和 $0<\tau<1$，存在一个函数 $(\varphi,\psi,g)\ \in C_0^\infty(G;\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n})$，满足以下性质：
(a) 散度 $\psi=0$，散度 $g=\varphi$ 且 $Y+(D\varphi,\ \partial_t\psi)\ \in\Sigma^r(\mu)$
在 G; (b) $\|\varphi\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t g\|_{L^\infty(G)}<\tau$;

(c) 存在两两不相交的开集 $G'_1,\dots,G'_N,G''_1,\dots,G''_N\subset\subset G$，使得

$$\begin{cases} Y+(D\varphi,\partial_t\psi)=\chi_{G'_j}X_j+\chi_{G''_j}X'_j\in S^r_j(\mu) \ \ in\ G_j=G'_j\cup G''_j \quad \forall 1\le j\le N,\\ |G_i|\ge(1-\tau)\big[(1-q)\nu^i_i(\mu,\rho')+q\big(\frac{\lambda'}{\mu}+(1-\frac{\lambda'}{\mu})\nu^i_i(\mu,\rho)\big)\big]|G|,\\ |G_j|\ge(1-\tau)\big[(1-q)\nu^j_i(\mu,\rho')+q(1-\frac{\lambda'}{\mu})\nu^j_i(\mu,\rho)\big]|G| \qquad \forall\, j\ne i; \end{cases} \tag{3.24}$$

in particular, $\sum_{j=1}^N|G_j|\ge(1-\tau)|G|$.

证明。 1. 由于 $[\zeta_i(\lambda',\rho)\ \ \pi_i(\rho')]\subset L^r_i(\lambda')\subset\Sigma^r(\mu)$ 且 $\Sigma^r(\mu)$ 是开集，存在 $\epsilon_1>0$ 使得

$$[\zeta_i(\lambda',\rho),\,\pi_i(\rho')]_{\epsilon_1}\subset\Sigma^r(\mu).$$

下文中，令 $0<\delta<1$ 为一个待定常数。

将引理 3.1 应用于 $\gamma=\zeta_i(\lambda',\rho)-\pi_i(\rho')$ $\lambda=q$ 和 $\epsilon=\delta$，得到一个函数 $(\varphi_1,\psi_1,g_1)\in C^\infty_0(G;\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n})$，它具有以下性质：

$$\begin{cases} \operatorname{div}\psi_1=0,\ \operatorname{div}g_1=\varphi_1 \text{ and } Y+(D\varphi_1,\partial_t\psi_1)\in[\zeta_i(\lambda',\rho),\,\pi_i(\rho')]_\delta \text{ in } G;\\ \|\varphi_1\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t\varphi_1\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t g_1\|_{L^\infty(G)}<\delta;\\ \text{there exist disjoint open sets } G',G''\subset\subset G \text{ such that}\\ \begin{cases} Y+(D\varphi_1,\partial_t\psi_1)=\zeta_i(\lambda',\rho) \text{ in } G', & |G'|\ge(1-\delta)q\,|G|,\\ Y+(D\varphi_1,\partial_t\psi_1)=\pi_i(\rho') \text{ in } G'', & |G''|\ge(1-\delta)(1-q)\,|G|. \end{cases} \end{cases} \tag{3.25}$$

2. 如果 $G''=\emptyset$ （必然有 $q=1$），则省略此步骤。假设 $G''\ne\emptyset$. 注意到，由 (3.22)，

$$\pi_i(\rho')=\sum_{j=1}^N\nu^j_i(\mu,\rho')X'_j.$$

由于 $(X'_1,\dots,X'_N)$ 是一个 $\mathcal{T}_N$-构型，且 $\mathcal{T}(X'_1,\dots,X'_N)\subset\Sigma^r(\mu)$，由 $\Sigma^r(\mu)$ 的开性，存在 $\epsilon_2>0$ 使得

$$[\mathcal{T}(X'_1,\dots,X'_N)]_{\epsilon_2}\subset\Sigma^r(\mu).$$

应用定理 3.3，取 $(\xi_1,\dots,\xi_N)=(X'_1,\dots,X'_N)$ 和 $\eta=\pi_i(\rho')$，得到一个函数 $(\varphi_2,\psi_2,g_2)\in C^\infty_0(G'';\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n})$，具有以下性质：

$$\begin{cases} \operatorname{div}\psi_2=0,\ \operatorname{div}g_2=\varphi_2 \text{ and } \pi_i(\rho')+(D\varphi_2,\partial_t\psi_2)\in[\mathcal{T}(X'_1,\dots,X'_N)]_\delta \text{ in } G'';\\ \|\varphi_2\|_{L^\infty(G'')}+\|\partial_t\varphi_2\|_{L^\infty(G'')}+\|\partial_t g_2\|_{L^\infty(G'')}<\delta;\\ \text{there exist pairwise disjoint open sets } G''_1,\dots,G''_N\subset\subset G'' \text{ such that}\\ \begin{cases} \pi_i(\rho')+(D\varphi_2,\partial_t\psi_2)=X'_j \text{ in } G''_j \quad \forall 1\le j\le N,\\ |G''_j|\ge(1-\delta)\nu^j_i(\mu,\rho')\,|G''| \quad \forall 1\le j\le N. \end{cases} \end{cases} \tag{3.26}$$

3. 若 $G'=\emptyset$ （必然有 $q=0$），则跳过此步骤。假设 $G'\ne\emptyset$。注意，由 (3.22) 可得，

$$\zeta_i(\lambda',\rho)=\left(\frac{\lambda'}{\mu}+\Big(1-\frac{\lambda'}{\mu}\Big)\nu^i_i(\mu,\rho)\right)X_i+\sum_{1\le j\le N,\,j\ne i}\Big(1-\frac{\lambda'}{\mu}\Big)\nu^j_i(\mu,\rho)X_j.$$

由于 $(X_1,\dots,X_N)$ 是一个 $\mathcal{T}_N$-构型，且 $\mathcal{T}(X_1,\dots,X_N)\subset\Sigma^r(\mu)$，由 $\Sigma^r(\mu)$ 的开性，存在 $\epsilon_3>0$ 使得

$$[\mathcal{T}(X_1,\dots,X_N)]_{\epsilon_3}\subset\Sigma^r(\mu).$$

现在将定理 3.3 应用于 $(\xi_1,\dots,\xi_N)=(X_1,\dots,X_N)$ 和 $\eta=\zeta_i(\lambda',\rho)$，得到一个函数 $(\varphi_3,\psi_3,g_3)\in C^\infty_0(G';\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n})$，它具有以下性质：

$$\begin{cases} \operatorname{div}\psi_3=0,\ \operatorname{div}g_3=\varphi_3 \text{ and } \zeta_i(\lambda',\rho)+(D\varphi_3,\partial_t\psi_3)\in[\mathcal{T}(X_1,\dots,X_N)]_\delta \text{ in } G';\\ \|\varphi_3\|_{L^\infty(G')}+\|\partial_t\varphi_3\|_{L^\infty(G')}+\|\partial_t g_3\|_{L^\infty(G')}<\delta;\\ \text{there exist pairwise disjoint open sets } G'_1,\dots,G'_N\subset\subset G' \text{ such that}\\ \begin{cases} \zeta_i(\lambda',\rho)+(D\varphi_3,\partial_t\psi_3)=X_j \text{ in } G'_j \quad \forall 1\le j\le N,\\ |G'_i|\ge(1-\delta)\big(\frac{\lambda'}{\mu}+(1-\frac{\lambda'}{\mu})\nu^i_i(\mu,\rho)\big)|G'|,\\ |G'_j|\ge(1-\delta)(1-\frac{\lambda'}{\mu})\nu^j_i(\mu,\rho)\,|G'| \quad \forall\, j\ne i. \end{cases} \end{cases} \tag{3.27}$$

4. 最后，设

$$(\varphi,\psi,g)=(\varphi_1,\psi_1,g_1)\chi_G+(\varphi_2,\psi_2,g_2)\chi_{G''}+(\varphi_3,\psi_3,g_3)\chi_{G'}.$$

那么（φ， ψ， g） $\in C_0^\infty$（G； $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}$），并且根据（3.25）–（3.27），我们有以下性质：

$$\begin{cases}\operatorname{div}\psi=0,\ \operatorname{div}g=\varphi\ \text{ and}\\ Y+(D\varphi,\partial_t\psi)\in[\zeta_i(\lambda',\rho),\,\pi_i(\rho')]_\delta\cup[\mathcal{T}(X_1',\dots,X_N')]_\delta\cup[\mathcal{T}(X_1,\dots,X_N)]_\delta\quad\text{in } G;\\ \|\varphi\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t g\|_{L^\infty(G)}<2\delta;\\ \begin{cases}Y+(D\varphi,\partial_t\psi)=\chi_{G_j'}X_j+\chi_{G_j''}X_j'\in S_j^r(\mu)\ \text{ in } G_j=G_j'\cup G_j'' & \forall\,1\le j\le N,\\ |G_i|\ge(1-\delta)^2\big[(1-q)\nu_i^i(\mu,\rho')+q\big(\frac{\lambda'}{\mu}+(1-\frac{\lambda'}{\mu})\nu_i^i(\mu,\rho)\big)\big]|G|,&\\ |G_j|\ge(1-\delta)^2\big[(1-q)\nu_i^j(\mu,\rho')+q(1-\frac{\lambda'}{\mu})\nu_i^j(\mu,\rho)\big]|G| & \forall\,j\ne i.\end{cases}\end{cases}$$

因此，只要选择 $0<\delta<1$ 使其满足以下条件，定理的所有条件 (a)–(c) 都将成立

$$0<\delta<\min\Big\{\epsilon_1,\,\epsilon_2,\,\epsilon_3,\,\frac{\tau}{2},\,1-\sqrt{1-\tau}\Big\}.$$

□

4. Proof of Theorem 2.1

设 $G\subset\mathbb{R}^d$ 为一个有界开集，且设 f: $G\to\mathbb{R}^q$ 为可测函数，其中 d 和 q 为正整数。对于 $x_0\in G$， f 在 x_0 处的本性振荡定义为

$$\omega_f(x_0)=\inf\big\{\|f(x)-f(y)\|_{L^\infty(U\times U)}:U\subset G,\,U\text{ open},\,x_0\in U\big\}.$$

如果 f 在 x_0 处满足 $\omega_f(x_0)=0.$，则称其在该处本质连续。显然，如果 f 在 x_0处连续，那么它在那里本质连续；然而，反之未必成立。

在 $\mathbb{R}^d$ 中，立方体总是指边平行于坐标轴的开立方体。对于 $y\in\mathbb{R}^d$ 和 $l>0$，我们用 $Q=Q_{y,\,l}$ 表示以 y 为中心、边长为 $2l$ 的立方体，并记作 $l=\mathrm{rad}(Q)$。

4.1. 凸积分阶段定理。 现在，我们在凸积分框架下确立证明定理 2.1 所需的主要阶段定理。

定理 4.1. 设 m、 $n\ge1$ 和 $N\ge2.$。假设 σ： $\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{m\times n}$ 满足条件 O_N.。设 $G\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 为有界开集，且 $(u,v)\in C^1(\bar G;\ \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n})$ 满足

$$u=\operatorname{div}v\quad\textit{and}\quad(Du,\partial_t v)\in\Sigma^r(\lambda)\quad\textit{on }\bar G,\tag{4.1}$$

其中 $0<r<r_0$ 和 $\delta_0\le\lambda<1.$

那么，对任意 $\lambda<\mu<1$、 $r<s<r_0$ 和 $0<\epsilon<1$，存在一个函数 $(\tilde u,\tilde v)\in(u,v)+C_0^\infty(G;\ \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n})$，以及有限多个不相交立方体 Q_1、...、 $Q_M\subset G$，其中 $|G\setminus\cup_{j=1}^M Q_j|<\epsilon|G|$ 满足以下条件：

(a) $0<\mathrm{rad}(Q_j)<\epsilon\ \ \forall\,1\le j\le M$;
(b) $\tilde u=\operatorname{div}\tilde v$ *and* $(D\tilde u,\partial_t\tilde v)\in\Sigma^s(\mu)$ *on* $\bar G$;
(c) $\|\tilde u-u\|_{L^\infty(G)}+\|\partial_t\tilde u-\partial_t u\|_{L^\infty(G)}<\epsilon$;
(d) $|Q_j\cap\{(D\tilde u,\partial_t\tilde v)\in S^s(\mu)\}|\ge(1-\epsilon)|Q_j|\ \ \forall\,1\le j\le M$;
(e) $|\{(D\tilde u,\partial_t\tilde v)\in S^s(\mu)\}|\ge(1-\epsilon)|G|$;
(f) $\begin{cases}|\{(D\tilde u,\partial_t\tilde v)\in S_k^s(\mu)\}|\ge\frac12(\mu-\lambda)(\mu-\delta_2)^{N-1}\delta_1|G|,\\ |\{(D\tilde u,\partial_t\tilde v)\in S_k^s(\mu)\}|\ge\frac{\lambda}{\mu}|\{(Du,\partial_t v)\in S_k^r(\lambda)\}|\end{cases}\quad\forall\,1\le k\le N;$
(g) $\|D\tilde u-Du\|_{L^1(G)}\le C_0\big[|F_0|+(\epsilon+(\mu-\lambda))|G|\big]$, *where*

$$F_0=\{(Du,\partial_t v)\notin S^r(\lambda)\}$$

且 $C_0>0$ 是一个仅取决于 δ_0 和集合 Σ 的直径的常数(1)。

证明。步骤 *1*。 根据命题 3.5(ii)，令 $d'>0$ 表示.....的最小值

$$\operatorname{dist}(\Sigma^r(\mu),\partial\Sigma^s(\mu))\quad\text{and}\quad\min_{1\le k\le N}\operatorname{dist}(S_k^r(\mu),\partial S_k^s(\mu)).$$

定义

$$\begin{cases} G_k = \{y = (x,t) \in G : (Du(y), \partial_t v(y)) \in S_k^r(\lambda)\} \ \ (1 \le k \le N), \\ I = \{1 \le k \le N : G_k \neq \emptyset\}. \end{cases}$$

By 条件 O_N 的 (P2)：集合 $\{G_k\}_{k\in I}$ 非空、开且两两不相交。

对每个 $k \in I$，令 $G_k' \subset G_k$ 为非空开集，使得

$$|\partial G_k'| = 0 \quad \text{and} \quad |G_k \setminus G_k'| \le \epsilon' |G_k|, \tag{4.2}$$

其中 $0 < \epsilon' < 1$ 将在稍后确定，并定义

$$G_0' = G \setminus \overline{\cup_{k\in I} G_k'} = G \setminus \cup_{k\in I} \overline{G_k'}.$$

那么集合 $\{G_k'\}_{k\in I\cup\{0\}}$ 是开集且两两不相交，并且

$$|G \setminus \cup_{k\in I\cup\{0\}} G_k'| = 0. \tag{4.3}$$

步骤 2。令 $\bar{y} \in G$；则 $Y = Y_{\bar{y}} = (Du(\bar{y})\ \partial_t v(\bar{y})) \in \Sigma^r(\lambda)$，使得对某个（可能不唯一的）$1 \le i = i_{\bar{y}} \le N$ 和 $\delta_0 \le \lambda' = \lambda'_{\bar{y}} \le \lambda.$，有 $Y \in L_i^r(\lambda')$。因此，

$$Y = q\zeta_i(\lambda', \rho) + (1-q)\pi_i(\rho') \tag{4.4}$$

对于某个 $0 \le q = q_{\bar{y}} \le 1$ 和 $\rho = \rho_{\bar{y}}$，$\rho' = \rho'_{\bar{y}} \in \mathbb{B}_r$，满足 $\zeta_i(\lambda',\ \rho) - \pi_i(\rho') \in \Gamma$.

特别地，若 $\bar{y} \in G_k'$ 对于某个 $k \in I$，则 $Y \in S_k^r(\lambda)$；因此，对于某个 $\rho \in \mathbb{B}_{r^-}$，$Y = \zeta_k(\lambda,\ \rho)$。在这种情况下，我们令 $q_{\bar{y}} = 1$，$i_{\bar{y}} = k$，$\lambda'_{\bar{y}} = \lambda$ 和 $\rho_{\bar{y}} = \rho'_{\bar{y}} = \rho$.

设对所有 $1 \le j \le N.$，$X_j = \zeta_j(\mu, \rho_{\bar{y}})$ 且 $X_j' = \zeta_j(\mu, \rho'_{\bar{y}})$。我们在立方体 $Q = Q_{\bar{y},l}$ 上应用定理 3.6，其中 $Y = Y_{\bar{y}}$ 和 $\tau = \epsilon'$，$0 < l < \ell_{\bar{y}} := \sup\{l > 0 : Q_{\bar{y},l} \subset G\}$，从而得到一个函数 $(\varphi, \psi, g) = (\varphi_{\bar{y},l}, \psi_{\bar{y},l}, g_{\bar{y},l}) \in C_0^\infty(Q; \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n})$，使得

(i) 散度 $\psi = 0$, 散度 $g = \varphi$ 且 $Y + (D\varphi, \partial_t\psi) \in \Sigma^r(\mu)$ 在 Q上；(ii) $\|\varphi\|_{L^\infty(Q)} + \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(Q)} + \|\partial_t g\|_{L^\infty(Q)} < \epsilon'$；

(iii) 存在两两不交的开集 $P_1', \dots, P_N', P_1'', \dots, P_N'' \subset\subset Q$，使得

$$\begin{cases} Y + (D\varphi, \partial_t\psi) = \chi_{P_j'} X_j + \chi_{P_j''} X_j' \ \text{ in } P_j = P_j' \cup P_j'' & \forall\, 1 \le j \le N, \\ |P_i| \ge (1-\epsilon')\big[(1-q)\nu_i^i(\mu,\rho') + q\big(\frac{\lambda'}{\mu} + (1-\frac{\lambda'}{\mu})\nu_i^i(\mu,\rho)\big)\big]|Q|, & \\ |P_j| \ge (1-\epsilon')\big[(1-q)\nu_i^j(\mu,\rho') + q(1-\frac{\lambda'}{\mu})\nu_i^j(\mu,\rho)\big]|Q| & \forall\, 1 \le j \le N. \end{cases} \tag{4.5}$$

特别地，$\sum_{j=1}^N |P_j| \ge (1-\epsilon')|Q|$.

由 (i) 和 (iii)，我们有

$$\begin{cases} \operatorname{dist}(Y + (D\varphi, \partial_t\psi), \partial\Sigma^s(\mu)) \ge d' \quad \text{on } \bar{Q}, \\ \operatorname{dist}(Y + (D\varphi, \partial_t\psi), \partial S_j^s(\mu)) \ge d' \quad \text{in } P_j \quad \forall\, 1 \le j \le N. \end{cases} \tag{4.6}$$

此外，由于 $\delta_0 \le \lambda' \le \lambda$ 和 $1 - \frac{q\lambda'}{\mu} \ge \mu - \lambda,$，由 (3.23) 可得

$$\begin{aligned} |P_i| &\ge (1-\epsilon')\Big[\frac{q\lambda'}{\mu} + \Big(1 - \frac{q\lambda'}{\mu}\Big)(\mu-\delta_2)^{N-1}\delta_1\Big]|Q|, \\ |P_j| &\ge (1-\epsilon')(\mu-\lambda)(\mu-\delta_2)^{N-1}\delta_1|Q| \qquad \forall\, 1 \le j \le N. \end{aligned} \tag{4.7}$$

定义 $\tilde{u} = u_{\bar{y},l} = u + \varphi$ 和 $\tilde{v} = v_{\bar{y},l} = v + \psi + g$ 在 $Q = Q_{\bar{y},l}$. 则

$$\begin{cases} (\tilde{u}, \tilde{v}) \in (u, v) + C_0^\infty(Q; \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}), \\ \tilde{u} = \operatorname{div} \tilde{v} \ \text{ on } \bar{Q}, \\ \|\tilde{u} - u\|_{L^\infty(Q)} + \|\partial_t\tilde{u} - \partial_t u\|_{L^\infty(Q)} < \epsilon'. \end{cases} \tag{4.8}$$

由 $(Du, \partial_t v)$ 在 $G,$ 上的一致连续性，选取一个数 $\ell' > 0$，使得

$$|Du(y) - Du(y')| + |\partial_t v(y) - \partial_t v(y')| < \min\Big\{\frac{d'}{4}, \epsilon'\Big\} \quad \forall\, y, y' \in \bar{G},\ \ |y - y'| < \ell'.$$

令 $0 < l <$ 最小值$\{\ell_{\bar{y}}, \ell'\}$。那么对所有 $y \in Q = Q_{\bar{y},\ l}$，

$$\begin{aligned} &|(D\tilde{u}(y), \partial_t\tilde{v}(y)) - (Y + (D\varphi(y), \partial_t\psi(y)))| \\ &\qquad \le |Du(y) - Du(\bar{y})| + |\partial_t v(y) - \partial_t v(\bar{y})| + |\partial_t g(y)| < \min\Big\{\frac{d'}{4}, \epsilon'\Big\} + \epsilon'. \end{aligned}$$

现在我们选取 $\epsilon'>0$，使其满足

$$\epsilon' < \min\Big\{\frac{d'}{4}, \frac{\epsilon}{2}\Big\}. \tag{4.9}$$

由 (i)、(iii) 和 (4.6)，对于所有 $0<l<\min\{\ell_{\bar y}, \ell'\}$ 且满足 $Q=Q_{\bar y,\, l}$，

$$\begin{cases} (Du, \partial_t v)\big|_{\bar Q} \in \mathbb{B}_\epsilon(Y), \\ (D\tilde u, \partial_t \tilde v)\big|_{\bar Q} \in \Sigma^s(\mu), \\ (D\tilde u, \partial_t \tilde v)\big|_{P_j} \in S_j^s(\mu) \cap [\mathbb{B}_\epsilon(X_j) \cup \mathbb{B}_\epsilon(X_j')] \quad \forall\, 1\le j\le N, \\ |Q\cap\{(D\tilde u, \partial_t\tilde v)\in S^s(\mu)\}| \ge |\cup_{j=1}^N P_j| \ge (1-\epsilon')|Q|. \end{cases} \tag{4.10}$$

步骤 *3.* 设 $k\in I_0 := I\cup\{0\}$。在 G_k' 中选取一个不相交立方体序列 $\{Q_\nu^k\}_{\nu=1}^\infty$，使得对所有 $\nu\ge 1$，Q_ν^k 的半径 $<\min\{\ell', \epsilon\}$，并且

$$\big|G_k' \setminus \cup_{\nu=1}^\infty Q_\nu^k\big| = 0.$$

取一个足够大的整数 $m_k\ge 1$，使得

$$\big|G_k' \setminus \cup_{\nu=1}^{m_k} Q_\nu^k\big| \le \epsilon' |G_k'|. \tag{4.11}$$

对于每个 $\nu\ge 1$，令 $\bar y_\nu^k$ 表示 Q_ν^k 的中心，$l_\nu^k = \mathrm{rad}(Q_\nu^k)$。

按照步骤 2 中的构造，我们定义

$$(\tilde u, \tilde v) = \sum_{k\in I_0}\sum_{\nu=1}^{m_k} (u_{\bar y_\nu^k, l_\nu^k}, v_{\bar y_\nu^k, l_\nu^k})\chi_{Q_\nu^k} + (u,v)\chi_{G\setminus G'} \quad \text{in } G, \tag{4.12}$$

其中 $G'=\bigcup_{k\in I_0}\bigcup_{\nu=1}^{m_k} Q_\nu^k$. 于是 $(\tilde u,\ \tilde v)\in (u,\ v)+C_0^\infty(G;\, \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n})$ 且

$$|G\setminus G'| = \sum_{k\in I_0} |G_k'\setminus \cup_{\nu=1}^{m_k} Q_\nu^k| \le \epsilon'|G| < \epsilon|G|.$$

我们将立方体 $Q_\nu^k (k\in I_0,\ 1\le\nu\le m_k)$ 重新标记为 $Q_1, \ldots\ldots, Q_M$. 于是条件 (a) 得到满足。由 (4.1)、(4.8)、(4.9)、(4.10) 和 (4.12)，条件 (b) 和 (c) 也随之成立。

此外，利用 (4.3)、(4.9)、(4.10) 和 (4.11)，我们得到

$$\begin{aligned} |\{(D\tilde u, \partial_t\tilde v)\in S^s(\mu)\}| &= \sum_{k\in I_0} |G_k'\cap\{(D\tilde u, \partial_t\tilde v)\in S^s(\mu)\}| \\ &= \sum_{k\in I_0}\sum_{\nu=1}^{\infty} |Q_\nu^k\cap\{(D\tilde u, \partial_t\tilde v)\in S^s(\mu)\}| \ge \sum_{k\in I_0}\sum_{\nu=1}^{m_k} |Q_\nu^k\cap\{(D\tilde u, \partial_t\tilde v)\in S^s(\mu)\}| \\ &\ge (1-\epsilon')\sum_{k\in I_0}\sum_{\nu=1}^{m_k}|Q_\nu^k| = (1-\epsilon')\sum_{k\in I_0}\big(|G_k'| - |G_k'\setminus\cup_{\nu=1}^{m_k}Q_\nu^k|\big) \\ &\ge (1-\epsilon')^2\sum_{k\in I_0}|G_k'| = (1-\epsilon')^2|G| > (1-\epsilon)|G|. \end{aligned}$$

因此，条件 (d) 和 (e) 得到满足。

步骤 *4*。现在我们验证条件 (f)。

首先，由 (4.7) 的第二个关系式和 (4.10) 的第三个关系式可知，对每个 $1\le j\le N$,

$$\begin{aligned} |\{(D\tilde u, \partial_t\tilde v)\in S_j^s(\mu)\}| &\ge \sum_{k\in I_0}\sum_{\nu=1}^{m_k} |Q_\nu^k\cap\{(D\tilde u, \partial_t\tilde v)\in S_j^s(\mu)\}| \\ &\ge (1-\epsilon')(\mu-\lambda)(\mu-\delta_2)^{N-1}\delta_1\sum_{k\in I_0}\sum_{\nu=1}^{m_k}|Q_\nu^k| \\ &\ge (1-\epsilon')^2(\mu-\lambda)(\mu-\delta_2)^{N-1}\delta_1|G| \\ &\ge \frac{1}{2}(\mu-\lambda)(\mu-\delta_2)^{N-1}\delta_1|G|, \end{aligned}$$

其中，$\epsilon'\in(0,1)$ 的选取除满足 (4.9) 外，还需满足

$$(1-\epsilon')^2 \ge 1/2. \tag{4.13}$$

这验证了 (f) 中的第一个不等式。

接下来，令 $1 \le k \le N$. 若 $k \notin I$，则 $G_k = \{y \in G : (Du(y)\ v_t(y)) \in S_k^r(\lambda)\} = \emptyset$；因此，(f) 的第二个不等式自动成立。现在假设 $k \in I$；则

$$\bar{y}_\nu^k \in Q_\nu^k \subset G_k' \subset G_k \neq \emptyset \qquad (1 \le \nu \le m_k).$$

因此，在步骤 2 的 (4.4) 中，我们有 $q = 1, i = k,\ \ \lambda' = \lambda$ 以及 $\rho = \rho' \in \mathbb{B}_r$. 由 (4.2)、(4.7) 的第一个式子、(4.10) 的第三个式子和 (4.11) 可得

$$\begin{aligned}
|\{(D\tilde{u}, \partial_t \tilde{v}) \in S_k^s(\mu)\}| &\ge \sum_{j \in I_0} \sum_{\nu=1}^{m_j} |Q_\nu^j \cap \{(D\tilde{u}, \partial_t \tilde{v}) \in S_k^s(\mu)\}| \\
&\ge \sum_{\nu=1}^{m_k} |Q_\nu^k \cap \{(Du_{\bar{y}_\nu^k, l_\nu^k}, \partial_t v_{\bar{y}_\nu^k, l_\nu^k}) \in S_k^s(\mu)\}| \\
&\ge (1-\epsilon')\Big[\frac{\lambda}{\mu} + \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)(\mu - \delta_2)^{N-1}\delta_1\Big] \sum_{\nu=1}^{m_k} |Q_\nu^k| \\
&\ge (1-\epsilon')^2\Big[\frac{\lambda}{\mu} + \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)(\mu - \delta_2)^{N-1}\delta_1\Big] |G_k'| \\
&\ge (1-\epsilon')^3\Big[\frac{\lambda}{\mu} + \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)(\mu - \delta_2)^{N-1}\delta_1\Big] |G_k|.
\end{aligned}$$

因此，只要令 $\epsilon' \in (0,\ 1)$ 进一步满足 (4.9) 和 (4.13)，便可确保 (f) 的第二个不等式成立，即

$$(1-\epsilon')^3\Big[\frac{\lambda}{\mu} + \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)(\mu - \delta_2)^{N-1}\delta_1\Big] \ge \frac{\lambda}{\mu}, \tag{4.14}$$

这是可行的，因为 $\big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\big)(\mu - \delta_2)^{N-1}\delta_1 > 0$.

步骤*5*。最后，我们验证条件 (g)。下文中，我们用 C 表示任意依赖于 δ_0 和集合 Σ 的直径的常数 (1)。由 (4.2)、(4.9) 和 (4.11) 可知

$$\begin{aligned}
\|D\tilde{u} - Du\|_{L^1(G)} &= \|D\tilde{u} - Du\|_{L^1(F_0)} + \sum_{k \in I} \|D\tilde{u} - Du\|_{L^1(G_k \setminus G_k')} \\
&\quad + \sum_{k \in I} \|D\tilde{u} - Du\|_{L^1(G_k' \setminus \cup_{\nu=1}^{m_k} Q_\nu^k)} + \sum_{k \in I} \sum_{\nu=1}^{m_k} \|D\tilde{u} - Du\|_{L^1(Q_\nu^k)} \\
&\le C(|F_0| + \epsilon'|G|) + \sum_{k \in I} \sum_{\nu=1}^{m_k} \int_{Q_\nu^k} |(D\tilde{u}, \partial_t \tilde{v}) - (Du, \partial_t v)| \\
&\le C(|F_0| + \epsilon|G|) + \sum_{k \in I} \sum_{\nu=1}^{m_k} \int_{P_\nu^k} |(D\tilde{u}, \partial_t \tilde{v}) - (Du, \partial_t v)| \\
&\quad + \sum_{k \in I} \sum_{\nu=1}^{m_k} \int_{Q_\nu^k \setminus P_\nu^k} |(D\tilde{u}, \partial_t \tilde{v}) - (Du, \partial_t v)|,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中 $P_\nu^k \subset\subset Q_\nu^k = Q_{\bar{y}_\nu^k, l_\nu^k} (k \in I, 1 \le \nu \le m_k)$ 是按步骤 2 中的定义所定义的集合，且

$$Y = Y_\nu^k = Y_{\bar{y}_\nu^k} = (Du(\bar{y}_\nu^k), \partial_t v(\bar{y}_\nu^k)) \in S_k^r(\lambda),$$

$Q = Q_\nu^k$, 且 $P_i = P_\nu^k$；因此，在 (4.4) 中，我们有 $q = 1, i = k, \lambda' = \lambda$ 和 $\rho = \rho' = \rho_{\bar{y}_\nu^k} \in \mathbb{B}_r$.。由 (4.14)，可得

$$(1-\epsilon')\Big[\frac{\lambda}{\mu} + \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)(\mu - \delta_2)^{N-1}\delta_1\Big] > \frac{\lambda}{\mu},$$

根据（4.7）中的第一式，可知 $|P_\nu^k| > \frac{\lambda}{\mu}|Q_\nu^k|$. 因此，

$$|Q_\nu^k \setminus P_\nu^k| < \frac{\mu - \lambda}{\mu}|Q_\nu^k| < \frac{\mu - \lambda}{\delta_0}|Q_\nu^k|,$$

从而

$$\int_{Q_\nu^k\setminus P_\nu^k}|(D\tilde u,\partial_t\tilde v)-(Du,\partial_t v)|\le C|Q_\nu^k\setminus P_\nu^k|\le C(\mu-\lambda)|Q_\nu^k|. \tag{4.16}$$

此外，令 $X_\nu^k=\zeta_k(\mu,\ \rho)\in S_k^r(\mu)$ 如步骤 2 中针对 $Y=Y_\nu^k$with$\rho=\rho_{\bar y_\nu^k}\in\mathbb{B}_r$. 所定义。那么 $|X_\nu^k-Y_\nu^k|=(\mu-\lambda)|\xi_k(\rho_{\bar y_\nu^k})-\pi_k(\rho_{\bar y_\nu^k})|\le C(\mu-\lambda)$；因此，由 (4.10) 可得

$$\begin{aligned}&\int_{P_\nu^k}|(D\tilde u,\partial_t\tilde v)-(Du,\partial_t v)|\\ &\le\int_{P_\nu^k}\big(|(D\tilde u,\partial_t\tilde v)-X_\nu^k|+|X_\nu^k-Y_\nu^k|+|(Du,\partial_t v)-Y_\nu^k|\big)\\ &\le C(\epsilon+(\mu-\lambda))|Q_\nu^k|.\end{aligned} \tag{4.17}$$

将 (4.16) 和 (4.17) 代入 (4.15) 即可证明条件 (g)。

证明至此完成。 □

4.2. **定理 2.1 的证明**。假设 $\sigma\colon\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{m\times n}$ 是局部 Lipschitz 的，并满足条件 O_N，其中某个 $N\ge 2.$。此外，假设 $(\bar u,\ \bar v)\in C^1(\bar\Omega_T;\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n})$ 满足

$$\bar u=\operatorname{div}\bar v\quad\text{and}\quad(D\bar u,\partial_t\bar v)\in\Sigma(1)\quad\text{on }\bar\Omega_T.$$

由于集合 $\Delta=(D\bar u,\partial_t\bar v)(\Omega_T)\subset\Sigma(1)$ 是紧致的，根据命题 3.5(iii)，存在 $0<r_1<r_0$和 $\delta_0\le\lambda_1<1$ 使得

$$\Delta=(Du_0,\partial_t v_0)(\bar\Omega_T)\subset\Sigma^{r_1}(\lambda_1), \tag{4.18}$$

其中 $(u_0,v_0):=(\bar u,\bar v)$ 属于 Ω_T.

令 $0<\delta<1$. 定义序列 $\{\lambda_\nu\}_{\nu=2}^\infty$, $\{r_\nu\}_{\nu=2}^\infty$ 和 $\{\epsilon_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ 如下:

$$\begin{cases}\lambda_{\nu+1}=\frac12(1+\lambda_\nu),\\ r_{\nu+1}=\frac12(r_0+r_\nu),\qquad\forall\,\nu=1,2,\dots.\\ \epsilon_\nu=\ \delta/3^\nu,\end{cases} \tag{4.19}$$

那么 $\delta_0\le\lambda_1<\lambda_2<\cdots<1,\quad 0<r_1<r_2<\cdots<r_0,$

$$\lim_{\nu\to\infty}\lambda_\nu=1,\quad\text{and}\quad\lim_{\nu\to\infty}r_\nu=r_0.$$

4.2.1. （*1.6*）的构造方案。现在我们可以按照引言中概述的方式，对微分关系（1.6）实施构造方案。为此，我们选取开集

$$\mathcal{U}_\nu=\Sigma^{r_{\nu+1}}(\lambda_{\nu+1})\quad(\nu=1,2,\dots)$$

a并将用它们构造相应的函数 $(u_\nu,\ v_\nu)$，以满足 (1.7) 的要求 .

我们从 (4.18) 开始。将凸积分的主阶段定理——定理 4.1——应用于集合 $G=\Omega_T$ 上的 $(u,\ v)=(\bar u,\ \bar v)$, 其中

$$\lambda=\lambda_1,\ \ \mu=\lambda_2,\ \ r=r_1,\ \ s=r_2\ \text{ and }\ \epsilon=\epsilon_1,$$

我们得到一个函数 $(u_1,v_1)=(\tilde u,\tilde v)\in(u_0,v_0)+C_0^\infty(\Omega_T;\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n})$，以及有限多个不相交立方体 $Q_1^1,\dots,Q_{M_1}^1\subset\Omega_T$，满足 $|\Omega_T\setminus\cup_{j=1}^{M_1}Q_j^1|<\epsilon_1|\Omega_T|$，使得

$$\begin{cases}0<\operatorname{rad}(Q_j^1)<\epsilon_1\ \ \forall\,1\le j\le M_1;\\ u_1=\operatorname{div}v_1\text{ and }(Du_1,\partial_t v_1)\in\Sigma^{r_2}(\lambda_2)\text{ on }\bar\Omega_T;\\ \|u_1-u_0\|_{L^\infty(\Omega_T)}+\|\partial_t u_1-\partial_t u_0\|_{L^\infty(\Omega_T)}<\epsilon_1;\\ |Q_j^1\cap\{(Du_1,\partial_t v_1)\in S^{r_2}(\lambda_2)\}|\ge(1-\epsilon_1)|Q_j^1|\quad\forall\,1\le j\le M_1;\\ |\{(Du_1,\partial_t v_1)\in S^{r_2}(\lambda_2)\}|\ge(1-\epsilon_1)|\Omega_T|;\\ \begin{cases}|\{(Du_1,\partial_t v_1)\in S_k^{r_2}(\lambda_2)\}|\ge\frac12(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\delta_2)^{N-1}\delta_1|\Omega_T|,\\ |\{(Du_1,\partial_t v_1)\in S_k^{r_2}(\lambda_2)\}|\ge\frac{\lambda_1}{\lambda_2}|\{(Du_0,\partial_t v_0)\in S_k^{r_1}(\lambda_1)\}|\ \ \forall\,1\le k\le N;\end{cases}\\ \|Du_1-Du_0\|_{L^1(\Omega_T)}\le C_0\big[|F_0|+(\epsilon_1+(\lambda_2-\lambda_1))|\Omega_T|\big],\\ \text{where }F_0=\{(Du_0,\partial_t v_0)\notin S^{r_1}(\lambda_1)\}\text{ and }C_0>0\text{ is the constant in Theorem 4.1(g).}\end{cases} \tag{4.20}$$

这里，我们进一步假设

$$C_0 \geq \operatorname{diam}(\Sigma(1)). \tag{4.21}$$

令 $Q_0^1 = \Omega_T \setminus \cup_{j=1}^{M_1} \bar{Q}_j^1$. 则 Q_0^1 是 Ω_T 的开子集，且满足

$$|Q_0^1| < \epsilon_1 |\Omega_T| \quad \text{and} \quad |\Omega_T \setminus \cup_{j=0}^{M_1} Q_j^1| = 0. \tag{4.22}$$

固定任意 $0 \leq i \leq M_1$. 我们将定理 4.1 应用于 $(u, v) = (u_1, v_1)$ 在集合 $G = Q_i^1$ 上，其中

$$\lambda = \lambda_2, \ \ \mu = \lambda_3, \ \ r = r_2, \ \ s = r_3 \ \text{ and } \ \epsilon = \epsilon_2,$$

从而得到一个函数 $(u_i^2, v_i^2) = (\tilde{u}, \tilde{v}) \in (u_1, v_1) + C_0^\infty(Q_i^1; \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n})$ 以及有限个不相交立方体 $Q_{i,1}^2, \ldots, Q_{i,M_i^2}^2 \subset Q_i^1$，满足 $|Q_i^1 \setminus \cup_{j=1}^{M_i^2} Q_{i,j}^2| < \epsilon_2 |Q_i^1|$ 使得

$$\begin{cases}
0 < \operatorname{rad}(Q_{i,j}^2) < \epsilon_2 \ \ \forall\, 1 \leq j \leq M_i^2; \\
u_i^2 = \operatorname{div} v_i^2 \text{ and } (Du_i^2, \partial_t v_i^2) \in \Sigma^{r_3}(\lambda_3) \text{ on } \bar{Q}_i^1; \\
\|u_i^2 - u_1\|_{L^\infty(Q_i^1)} + \|\partial_t u_i^2 - \partial_t u_1\|_{L^\infty(Q_i^1)} < \epsilon_2; \\
|Q_{i,j}^2 \cap \{(Du_i^2, \partial_t v_i^2) \in S^{r_3}(\lambda_3)\}| \geq (1-\epsilon_2)|Q_{i,j}^2| \quad \forall\, 1 \leq j \leq M_i^2; \\
|Q_i^1 \cap \{(Du_i^2, \partial_t v_i^2) \in S^{r_3}(\lambda_3)\}| \geq (1-\epsilon_2)|Q_i^1|; \\
\begin{cases} |Q_i^1 \cap \{(Du_i^2, \partial_t v_i^2) \in S_k^{r_3}(\lambda_3)\}| \geq \frac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \delta_2)^{N-1}\delta_1 |Q_i^1|, \\ |Q_i^1 \cap \{(Du_i^2, \partial_t v_i^2) \in S_k^{r_3}(\lambda_3)\}| \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_3} |Q_i^1 \cap \{(Du_1, \partial_t v_1) \in S_k^{r_2}(\lambda_2)\}| \end{cases} \quad (1 \leq k \leq N); \\
\|Du_i^2 - Du_1\|_{L^1(Q_i^1)} \leq C_0\big[|F_i^1| + (\epsilon_2 + (\lambda_3 - \lambda_2))|Q_i^1|\big], \\
\text{where } F_i^1 = Q_i^1 \cap \{(Du_1, \partial_t v_1) \notin S^{r_2}(\lambda_2)\}.
\end{cases} \tag{4.23}$$

这里，根据 (4.20) 的第四个式子，我们有 $|F_i^1| < \epsilon_1 |Q_i^1|$ 若 $1 \leq i \leq M_1$；而当 $i = 0$, 时，根据 (4.22)，

$$|F_0^1| \leq |Q_0^1| < \epsilon_1 |\Omega_T|. \tag{4.24}$$

令 $Q_{i,\,0}^2 = Q_i^1 \setminus \cup_{j=1}^{M_i^2} \bar{Q}_{i,\,j}^2$；则 $Q_{i,\,0}^2$ 是 Q_i^1 的开子集，且

$$|Q_{i,0}^2| < \epsilon_2 |Q_i^1| \quad \text{and} \quad |Q_i^1 \setminus \cup_{j=0}^{M_i^2} Q_{i,j}^2| = 0.$$

我们将开集 $Q_{i,\,j}^2 (0 \leq i \leq M_1, \ \ 0 \leq j \leq M_i^2)$ 重新标记为 Q_0^2, Q_1^2、.....、$Q_{M_2}^2$，定义为

$$M_2 = \sum_{i=0}^{M_1} (M_i^2 + 1) - 1 \quad \text{and} \quad Q_\mu^2 = Q_{i,j}^2 \ \ \Big(\mu = i + j + \sum_{k=1}^{i} M_{k-1}^2\Big),$$

对于所有 $0 \leq i \leq M_1$ 和 $0 \leq j \leq M_i^2$；这里我们采用约定，即 $\sum_{k=1}^{0} M_{k-1}^2 = 0$.。注意，除满足 $\mu = i + \sum_{k=1}^{i} M_{k-1}^2$ （ $0 \leq i \leq M_1$）的集合外，所有集合 Q_μ^2 都是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的立方体。此外，

$$\Big|\Omega_T \setminus \bigcup_{j=0}^{M_2} Q_j^2\Big| = 0, \quad \Big|Q_i^1 \setminus \bigcup_{j=0}^{M_i^2} Q_{i+j+\sum_{k=1}^{i} M_{k-1}^2}^2\Big| = 0, \quad \big|Q_{i+\sum_{k=1}^{i} M_{k-1}^2}^2\big| < \epsilon_2 |Q_i^1| \ \ (0 \leq i \leq M_1).$$

定义

$$(u_2, v_2) = \sum_{i=0}^{M_1} (u_i^2, v_i^2) \chi_{Q_i^1} \in (u_0, v_0) + C_0^\infty(\Omega_T; \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}).$$

Then

$$\begin{cases}
0 < \operatorname{rad}(Q_j^2) < \epsilon_2 \ \ \forall\, 0 \leq j \leq M_2 \text{ with } j \neq i + \sum_{k=1}^{i} M_{k-1}^2 \ (0 \leq i \leq M_1); \\
u_2 = \operatorname{div} v_2 \text{ and } (Du_2, \partial_t v_2) \in \Sigma^{r_3}(\lambda_3) \text{ on } \bar{\Omega}_T; \\
\|u_2 - u_1\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \|\partial_t u_2 - \partial_t u_1\|_{L^\infty(\Omega_T)} < \epsilon_2; \\
|Q_j^2 \cap \{(Du_2, \partial_t v_2) \in S^{r_3}(\lambda_3)\}| \geq (1-\epsilon_2)|Q_j^2| \\
\quad \forall\, 0 \leq j \leq M_2 \ \text{ with } j \neq i + \sum_{k=1}^{i} M_{k-1}^2 \ (0 \leq i \leq M_1); \\
|\{(Du_2, \partial_t v_2) \in S^{r_3}(\lambda_3)\}| \geq (1-\epsilon_2)|\Omega_T|; \\
\begin{cases} |Q_i^1 \cap \{(Du_2, \partial_t v_2) \in S_k^{r_3}(\lambda_3)\}| \geq \frac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \delta_2)^{N-1}\delta_1 |Q_i^1|, \\ |Q_i^1 \cap \{(Du_2, \partial_t v_2) \in S_k^{r_3}(\lambda_3)\}| \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_3} |Q_i^1 \cap \{(Du_1, \partial_t v_1) \in S_k^{r_2}(\lambda_2)\}|, \\ \text{for each } 1 \leq k \leq N \text{ and } 0 \leq i \leq M_1; \end{cases} \\
\|Du_2 - Du_1\|_{L^1(\Omega_T)} \leq C_0\big[2\epsilon_1 + \epsilon_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\big]|\Omega_T|.
\end{cases}$$

这里，最后一个不等式由 (4.21)、(4.23) 和 (4.24) 得出，具体如下：

$$\begin{aligned}\|Du_2-Du_1\|_{L^1(\Omega_T)}&=\sum_{j=0}^{M_1}\|Du_2-Du_1\|_{L^1(Q_j^1)}=\|Du_2-Du_1\|_{L^1(Q_0^1)}+\sum_{j=1}^{M_1}\|Du_2-Du_1\|_{L^1(Q_j^1)}\\&\le C_0|Q_0^1|+\sum_{j=1}^{M_1}C_0\big[|F_j^1|+(\epsilon_2+(\lambda_3-\lambda_2))|Q_j^1|\big]\\&\le C_0\epsilon_1|\Omega_T|+C_0[\epsilon_1+\epsilon_2+(\lambda_3-\lambda_2)]\sum_{j=1}^{M_1}|Q_j^1|\le C_0\big[2\epsilon_1+\epsilon_2+(\lambda_3-\lambda_2)\big]|\Omega_T|.\end{aligned}$$

无限重复这一过程，我们得到空间中的一个序列 $\{(u_\nu,v_\nu)\}_{\nu=1}^\infty$

$$(u_0,v_0)+C_0^\infty(\Omega_T;\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n})$$

以及有限个互不相交的开集 $Q_0^\nu,Q_1^\nu,\dots,Q_{M_\nu}^\nu\subset\Omega_T$，满足 $|\Omega_T\setminus\cup_{j=0}^{M_\nu}Q_j^\nu|=0\,(\nu=1,2,\dots)$，使得对每个 $\nu\ge2$,

$$M_\nu=\sum_{i=0}^{M_{\nu-1}}(M_i^\nu+1)-1$$

并且所有集合 Q_j^ν（$j=i+\sum_{k=1}^i M_{k-1}^\nu$ for $0\le i\le M_{\nu-1}$ 的情形除外）都是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的立方体，且对每个 $\nu\ge2$ 和 $0\le i\le M_{\nu-1}$,

$$\left|Q_i^{\nu-1}\setminus\bigcup_{j=0}^{M_i^\nu}Q_{i+j+\sum_{k=1}^i M_{k-1}^\nu}^\nu\right|=0\quad\text{and}\quad\left|Q_{i+\sum_{k=1}^i M_{k-1}^\nu}^\nu\right|<\epsilon_\nu|Q_i^{\nu-1}|.\tag{4.25}$$

此外，对每个 $\nu\ge2$,

(4.26)
$$\begin{cases}0<\operatorname{rad}(Q_j^\nu)<\epsilon_\nu\ \ \forall\,0\le j\le M_\nu\text{ with }j\ne i+\sum_{k=1}^i M_{k-1}^\nu\ (0\le i\le M_{\nu-1});\\ u_\nu=\operatorname{div}v_\nu\text{ and }(Du_\nu,\partial_t v_\nu)\in\Sigma^{r_{\nu+1}}(\lambda_{\nu+1})\text{ on }\bar\Omega_T;\\ \|u_\nu-u_{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega_T)}+\|\partial_t u_\nu-\partial_t u_{\nu-1}\|_{L^\infty(\Omega_T)}<\epsilon_\nu;\\ |Q_j^\nu\cap\{(Du_\nu,\partial_t v_\nu)\in S^{r_{\nu+1}}(\lambda_{\nu+1})\}|\ge(1-\epsilon_\nu)|Q_j^\nu|\\ \quad\forall\,j=0,\dots,M_\nu\text{ with }j\ne i+\sum_{k=1}^i M_{k-1}^\nu\ (0\le i\le M_{\nu-1});\\ |\{(Du_\nu,\partial_t v_\nu)\in S^{r_{\nu+1}}(\lambda_{\nu+1})\}|\ge(1-\epsilon_\nu)|\Omega_T|;\\ \begin{cases}|Q_i^{\nu-1}\cap\{(Du_\nu,\partial_t v_\nu)\in S_k^{r_{\nu+1}}(\lambda_{\nu+1})\}|\ge\frac12(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)(\lambda_{\nu+1}-\delta_2)^{N-1}\delta_1|Q_i^{\nu-1}|,\\ |Q_i^{\nu-1}\cap\{(Du_\nu,\partial_t v_\nu)\in S_k^{r_{\nu+1}}(\lambda_{\nu+1})\}|\ge\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1}}|Q_i^{\nu-1}\cap\{(Du_{\nu-1},\partial_t v_{\nu-1})\in S_k^{r_\nu}(\lambda_\nu)\}|,\\ \text{for each }1\le k\le N\text{ and }0\le i\le M_{\nu-1};\end{cases}\\ \|Du_\nu-Du_{\nu-1}\|_{L^1(\Omega_T)}\le C_0\big[2\epsilon_{\nu-1}+\epsilon_\nu+(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)\big]|\Omega_T|.\end{cases}$$

引理 4.2。对于所有的 $p>q\ge1$、$0\le j\le M_q$ 和 $1\le k\le N$，我们有

$$|Q_j^q\cap\{(Du_p,\partial_t v_p)\in S_k^{r_{p+1}}(\lambda_{p+1})\}|\ge\frac12\,\frac{\lambda_{q+2}}{\lambda_{p+1}}(\lambda_{q+2}-\lambda_{q+1})(\lambda_{q+2}-\delta_2)^{N-1}\delta_1\,|Q_j^q|.$$

证明。由上文中 $\{(u_p,v_p)\}_{p=1}^\infty$ 和 $\{Q_j^p\}_{p\ge1,\,0\le j\le M_p}$ 的构造可知，若 $p>q\ge1$ 且 $0\le j\le M_q$，则

$$Q_j^q=(\cup_{k\in I}Q_k^p)\cup E$$

对于某个指标集 $I \subset \{0,1,\dots,M_p\}$ 和零测集 $E.$。因此，对所有 $p > q \geq 1$、 $0 \leq j \leq M_q$ 和 $1 \leq k \leq N,$ ，由 (4.26) 可得

$$
\begin{aligned}
&|Q_j^q \cap \{(Du_p, \partial_t v_p) \in S_k^{r_{p+1}}(\lambda_{p+1})\}| \\
&\quad \geq \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} |Q_j^q \cap \{(Du_{p-1}, \partial_t v_{p-1}) \in S_k^{r_p}(\lambda_p)\}| \\
&\quad \geq \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} |Q_j^q \cap \{(Du_{p-2}, \partial_t v_{p-2}) \in S_k^{r_{p-1}}(\lambda_{p-1})\}| \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\quad \geq \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} \cdots \frac{\lambda_{q+2}}{\lambda_{q+3}} |Q_j^q \cap \{(Du_{q+1}, \partial_t v_{q+1}) \in S_k^{r_{q+2}}(\lambda_{q+2})\}| \\
&\quad = \frac{\lambda_{q+2}}{\lambda_{p+1}} |Q_j^q \cap \{(Du_{q+1}, \partial_t v_{q+1}) \in S_k^{r_{q+2}}(\lambda_{q+2})\}| \\
&\quad \geq \frac{1}{2} \frac{\lambda_{q+2}}{\lambda_{p+1}} (\lambda_{q+2} - \lambda_{q+1})(\lambda_{q+2} - \delta_2)^{N-1} \delta_1 |Q_j^q|.
\end{aligned}
$$

□

引理 4.3。 令 $f(\xi) = \sigma(\xi^1) - \xi^2$ 对 $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$. 成立，则

$$
|f(\xi)| \leq C\,(1-\lambda) \quad \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1,\ \ \xi \in S^{r_0}(\lambda),
$$

其中 $C > 0$ 是一个常数。

证明。 由于 f是局部 Lipschitz 的，我们有 $|f(\xi) - f(\eta)| \leq L|\xi - \eta|$对所有 $\xi, \eta \in \Sigma$(1) 均成立，其中 $L > 0$是一个常数。

令 $0 \leq \lambda \leq 1$ 和 $\xi \in S^{r_0}(\lambda) \subset \Sigma\overline{(1)}$。则存在某个 $1 \leq i \leq N$ 和$\rho \in \mathbb{B}_{r_0}$. ，使得 $\xi = \lambda\xi_i(\rho) + (1-\lambda)\pi_i(\rho)$。由于 $f(\xi_i(\rho)) = 0,$ 我们有

$$
|f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi_i(\rho))| \leq L|\xi - \xi_i(\rho)| = L(1-\lambda)|\xi_i(\rho) - \pi_i(\rho)| \leq C(1-\lambda).
$$

□

4.2.2. 证明的完成。 1. 根据 (4.20) 和 (4.26) 中的第三个条件，对每个 $j \geq 1,$

$$
\begin{aligned}
&\|u_j - u_0\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \|\partial_t u_j - \partial_t u_0\|_{L^\infty(\Omega_T)} \\
&\leq \sum_{\nu=0}^{j-1} \left[\|u_{\nu+1} - u_\nu\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \|\partial_t u_{\nu+1} - \partial_t u_\nu\|_{L^\infty(\Omega_T)}\right] \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_{\nu+1} = \frac{1}{2}\delta.
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

因此， $\{u_\nu\}$ 和 $\{\partial_t u_\nu\}$ 在 Ω_T 上一致有界。由 (4.26) 的第二个结论可知， $\{Du_\nu\}$ 在 Ω_T 上也一致有界。因此，序列 $\{u_\nu\}$在 $\bar{u} + W^1_{,0}{}^\infty(\Omega_T; \mathbb{R}^m)$. 中有界。

此外，由 (4.26) 的第三个也是最后一个结论可知，序列 $\{u_\nu\}$在 $W^{1,1}(\Omega_T; \mathbb{R}^m)$. 中也是柯西序列。因此，存在 $u \in W^{1,1}(\Omega_T; \mathbb{R}^m)$ 使得

$$
u_\nu \to u \text{ in } W^{1,1}(\Omega_T; \mathbb{R}^m) \text{ as } \nu \to \infty.
$$

由于 $\{u_\nu\}$在 $\bar{u} + W^1_{,0}{}^\infty(\Omega_T; \mathbb{R}^m)$, 中有界，因此可得 $u \in \bar{u} + W^1_{,0}{}^\infty(\Omega_T; \mathbb{R}^m)$. 此外，在 (4.27) 中取极限可得

$$
\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \|\partial_t u - \partial_t \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_{\nu+1} = \frac{1}{2}\delta < \delta.
$$

2. 由 (4.26) 和引理 4.3 可得

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_T} |f(Du_\nu, \partial_t v_\nu)|\, dxdt &= \int_{(Du_\nu, \partial_t v_\nu) \in S^{r_{\nu+1}}(\lambda_{\nu+1})} |f(Du_\nu, \partial_t v_\nu)|\, dxdt \\
&\quad + \int_{(Du_\nu, \partial_t v_\nu) \notin S^{r_{\nu+1}}(\lambda_{\nu+1})} |f(Du_\nu, \partial_t v_\nu)|\, dxdt \\
&\leq C[(1-\lambda_{\nu+1}) + \epsilon_\nu]|\Omega_T| \to 0 \quad \text{ as } \nu \to \infty.
\end{aligned}
$$

由 $u_\nu =$ 散度 v_ν 在 Ω_T 可知

$$\int_{\Omega_T} \big(u_\nu \cdot \partial_t \varphi - \langle \sigma(Du_\nu), D\varphi \rangle\big)\, dxdt = -\int_{\Omega_T} \langle f(Du_\nu, \partial_t v_\nu), D\varphi \rangle\, dxdt \tag{4.28}$$

对所有 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T; \mathbb{R}^m)$。由于

$$\|u_\nu - u\|_{W^{1,1}(\Omega_T)} \to 0 \quad \text{and} \quad \|f(Du_\nu, \partial_t v_\nu)\|_{L^1(\Omega_T)} \to 0 \quad \text{as } \nu \to \infty,$$

且 $\{\|Du_\nu\|_{L^\infty(\Omega_T)}\}$ 有界，通过在 (4.28) 中取 $\nu \to \infty$，可得

$$\int_{\Omega_T} \big(u \cdot \partial_t \varphi - \langle \sigma(Du), D\varphi \rangle\big)\, dxdt = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega_T; \mathbb{R}^m).$$

这证明 u 是 (2.2) 的一个弱解。

3. 我们证明 Du 在 Ω_T. 中处处都不本质连续

设 $y_0 \in \Omega_T$，并设 U 是 Ω_T 的任意一个包含 y_0. 的开子集。令 $l_0 > 0$ 取为使得$Q_{y_0,\ 2l_0} \subset U$. 由于$|Q_{y_0,\ l_0}| = |Q_{y_0,\ l_0} \cap (\cup_{j=0}^{M_\nu} Q_j^\nu)|$ 对所有 $\nu \geq 1$， 由 (4.25) 可知，存在某个$q_0 \geq 2$，若 $q \geq q_0$，则

$$Q_{y_0,l_0} \cap Q_j^q \neq \emptyset$$

对于某个 $0 \leq j \leq M_q$，满足 $j \neq \sum_{k=1}^{i} M_{k-1}^q + i\,(0 \leq i \leq M_{q-1})$；因此，若 q 足够大，则由 (4.26) 可得

$$\bar{Q}_j^q \subset Q_{y_0,2l_0} \subset U. \tag{4.29}$$

由引理 4.2 可知，对所有 $p > q$ 和 $1 \leq k \leq N$,

$$\begin{aligned} |Q_j^q \cap \{Du_p \in \mathbb{P}(S_k^{r_{p+1}}(\lambda_{p+1}))\}| &\geq |Q_j^q \cap \{(Du_p, \partial_t v_p) \in S_k^{r_{p+1}}(\lambda_{p+1})\}| \\ &\geq \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_{q+2}}{\lambda_{p+1}} (\lambda_{q+2} - \lambda_{q+1})(\lambda_{q+2} - \delta_2)^{N-1} \delta_1\, |Q_j^q|, \end{aligned}$$

其中，对所有 $\rho =$， $\mathbb{P}(\rho) = \rho^1$，$\rho^1 \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$. 令 $p \to \infty$，当 $u_p \to u$ 在 $W^{1,\ 1}(\Omega_T; \mathbb{R}^m)$ 中时，$\lambda_p \to 1$ 且 $r_p \to r_0$， 我们得到

$$|Q_j^q \cap \{Du \in \overline{\mathbb{P}(S_k^{r_0}(1))}\}| \geq \frac{1}{2}\, \lambda_{q+2}(\lambda_{q+2} - \lambda_{q+1})(\lambda_{q+2} - \delta_2)^{N-1} \delta_1\, |Q_j^q| > 0 \tag{4.30}$$

对所有 $1 \leq k \leq N$.

Let

$$d_0 = \min_{k \neq l} \operatorname{dist}\left(\overline{\mathbb{P}(S_k^{r_0}(1))}, \overline{\mathbb{P}(S_l^{r_0}(1))}\right).$$

B且由条件 O_N 的 (P1)(ii)，我们有 $d_0 > 0$. 因此，由 (4.29) 和 (4.30) 可知 at

$$\|Du(y) - Du(z)\|_{L^\infty(U\times U)} \geq \|Du(y) - Du(z)\|_{L^\infty(Q_j^q \times Q_j^q)} \geq d_0,$$

这证明对所有 $y_0 \in \Omega$， $\omega_{Du}(y_0) \geq d_{0\ T}$. 因此， Du 在 Ω 中任意一点都不是本质连续的$_T$.

定理 2.1 的证明至此完成。

5. Specific $\mathcal{T}_N$-configurations and Nondegeneracy Conditions

本节通过选取合适的参数，分析 $\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$ 中某些特定的 $\mathcal{T}_N$-构型，并建立验证条件 O_N 所必需的非退化条件。

假设 $m \geq 1$ 和 $n \geq 2$.。对于 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$，记 $\mathbf{x} = (x_1, \bar{\ }\mathbf{x})$， $\bar{\ }\mathbf{x} = (x_2, \ \ldots, \ x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$ 当 $n \geq 3$，并在 $n = 2$. 时省略 $\bar{\ }\mathbf{x}$。对于 $r \in \{1, \ldots, n\}$，定义 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$，以及 $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_r(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_{r-1}, 0, x_r, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \\ \boldsymbol{\alpha}_r^*(a) = (a_1, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ \alpha_r(\mathbf{x}) = \tilde{\alpha}_r(\mathbf{x}) + e_r, \quad b_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{\alpha}_r(\mathbf{y}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) e_r, \end{cases}$$

其中 $\{e_1 \ldots, \ e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$. 的标准基。此外，若 $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}^k)_{k=1}^m \in (\mathbb{R}^{n-1})^m$，则定义

$$\beta_r(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} b_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}^1) \\ \vdots \\ b_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}^m) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

以下结果容易验证，因此省略证明。

引理 5.1. 设 Γ 由(3.1)定义。那么，对每个 $r \in \{1, \dots, n\}$，映射

$$(p, \mathbf{x}, \mathbf{Y}) \longmapsto (p \otimes \alpha_r(\mathbf{x}),\, \beta_r(\mathbf{x}, \mathbf{Y}))$$

是从$(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^{n-1})^m$ 到 Γ. 的一一映射，其像记为 Γ_r.

5.1. 参数选择。 假设 $N \geq 2m$ 是一个整数，并令 $r_1, \dots, r_N \in \{1, \dots, n\}$为给定值。假设

$$\gamma_i = \big(p_i \otimes \alpha_{r_i}(\mathbf{x}_i),\, \beta_{r_i}(\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i)\big) \in \Gamma_{r_i} \quad \forall\, 1 \leq i \leq N,$$

其中 $p_i \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n-1}$, 和 $\mathbf{Y}_i = (\mathbf{y}_i^k)_{k=1}^m \in (\mathbb{R}^{n-1})^m$ 是参数。

我们的目标是选择这些参数，使 $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ 满足定义 3.1 中的条件 (3.2)；在此情形下，该条件可化为

$$\sum_{i=1}^N p_i \otimes \alpha_{r_i}(\mathbf{x}_i) = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^N b_{r_i}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i^k) = 0 \;\; (1 \leq k \leq m). \tag{5.1}$$

首先，我们将 (5.1) 中的第一个条件视为关于变量 $p_{m+1}, \dots, p_N$和$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$, 的线性系统，并固定所有其他变量。下面的结果给出了一类显式解；证明很直接，因此省略。

引理 5.2。 设 $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{x}_{m+1}, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^{n-1}$ 满足

$$\Delta_1(\mathbf{x}_N) := \alpha_{r_N}^{r_1}(\mathbf{x}_N) \cdots \alpha_{r_N}^{r_m}(\mathbf{x}_N) \neq 0,$$

其中 $\alpha_r^i(\mathbf{x}) = \alpha_r(\mathbf{x}) \cdot e_i$ 对所有 $1 \leq i, r \leq n.$ 均成立。若满足以下条件，则 (5.1) 中的第一个条件成立:

$$\begin{aligned}
p_i &= \sum_{j=1}^m q_i^j p_j \;\; (m+1 \leq i \leq N-1), \\
p_N &= -\sum_{j=1}^m \Big(1 + \sum_{i=m+1}^{N-1} q_i^j \alpha_{r_i}^{r_j}(\mathbf{x}_i)\Big) \frac{p_j}{\alpha_{r_N}^{r_j}(\mathbf{x}_N)}, \\
\mathbf{x}_j &= \boldsymbol{\alpha}_{r_j}^*(a_j) \;\; (1 \leq j \leq m), \;\; \textit{with } a_j \in \mathbb{R}^n \textit{ given by} \\
a_j &= \Big(1 + \sum_{i=m+1}^{N-1} q_i^j \alpha_{r_i}^{r_j}(\mathbf{x}_i)\Big) \frac{\alpha_{r_N}(\mathbf{x}_N)}{\alpha_{r_N}^{r_j}(\mathbf{x}_N)} - \sum_{i=m+1}^{N-1} q_i^j \alpha_{r_i}(\mathbf{x}_i),
\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $q_i = (q_i^1, \dots, q_i^m) \in \mathbb{R}^m\, (m+1 \leq i \leq N-1)$ 是任意参数。

接下来，我们将 (5.1) 中的第二个条件改写为

$$b_{r_{N-1}}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{y}_{N-1}^k) + b_{r_N}(\mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N^k) = -\sum_{j=1}^{N-2} b_{r_j}(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j^k) \quad (1 \leq k \leq m). \tag{5.3}$$

对于每个 $1 \leq k \leq m,$, 记 $\mathbf{y}_N^k = (y_{N,1}^k, \bar{}\mathbf{y}_N^k)$, 并将 (5.3) 视为关于 n 个未知数 $(\mathbf{y}_{N-1}^k, y_{N,1}^k)$, 的含 n 个方程的线性系统，同时将所有其他变量视为固定值。以下一般结果为这类 $n \times n$ 方程组提供了一个解。

引理 5.3。 设 r、 $s \in \{1, \dots, n\}$ 和 $\mathbf{x}$、$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$ 满足

$$\Delta_2(\mathbf{x}, u_1) := \alpha_r^s(\mathbf{x}) u_1 - \boldsymbol{\alpha}_s^*(\alpha_r(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{e}_1 \neq 0,$$

其中 $\{\mathbf{e}_1$、.....、$\mathbf{e}_{n-1}\}$ 表示 $\mathbb{R}^{n-1}$. 的标准基。那么，对于任意给定的 $c \in \mathbb{R}^n$ 和 $\bar{}\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n-2}$，方程

$$b_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b_s(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = c, \;\; \textit{where } \mathbf{z} = (z_1, \bar{\mathbf{z}}),$$

有唯一解$(\mathbf{y}\;\; z_1)$，其表达式为

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-\alpha_r(\mathbf{x}) \cdot c + \overline{\boldsymbol{\alpha}_s^*(\alpha_r(\mathbf{x})) - \alpha_r^s(\mathbf{x})\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{z}}}{\Delta_2(\mathbf{x}, u_1)}; \\
\mathbf{y} &= \boldsymbol{\alpha}_r^*[c - \tilde{\alpha}_s(\mathbf{z}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{z}) e_s], \;\; \textit{with } \mathbf{z} = (z_1, \bar{\mathbf{z}}).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

证明。给定方程为 $\tilde{\alpha}_r(\mathbf{y}) - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})e_r + \tilde{\alpha}_s(\mathbf{z}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})e_s = c$，化简为

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_r^i(\mathbf{y}) + \tilde{\alpha}_s^i(\mathbf{z}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})\delta_{is} = c^i \quad \forall\, i \neq r, \\ \tilde{\alpha}_s^r(\mathbf{z}) - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})\delta_{rs} = c^r. \end{cases} \tag{5.5}$$

由此可得

$$\tilde{\alpha}_s^r(\mathbf{z}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})\delta_{rs} - c^r = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \tilde{\alpha}_r(\mathbf{x})\cdot\tilde{\alpha}_r(\mathbf{y}) = \sum_{i\neq r}\tilde{\alpha}_r^i(\mathbf{x})\tilde{\alpha}_r^i(\mathbf{y})$$

$$= \sum_{i\neq r}\tilde{\alpha}_r^i(\mathbf{x})[c^i - \tilde{\alpha}_s^i(\mathbf{z}) + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})\delta_{is}] = \tilde{\alpha}_r(\mathbf{x})\cdot c - \tilde{\alpha}_r(\mathbf{x})\cdot\tilde{\alpha}_s(\mathbf{z}) + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})\tilde{\alpha}_r^s(\mathbf{x}),$$

由 $\tilde{\alpha}_r^s(\mathbf{x}) + \delta_{rs} = \alpha_r^s(\mathbf{x})$，可得

$$\begin{aligned} \alpha_r^s(\mathbf{x})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{z}) &= \tilde{\alpha}_s^r(\mathbf{z}) - c^r - \tilde{\alpha}_r(\mathbf{x})\cdot c + \tilde{\alpha}_r(\mathbf{x})\cdot\tilde{\alpha}_s(\mathbf{z}) \\ &= \tilde{\alpha}_s^r(\mathbf{z}) - \alpha_r(\mathbf{x})\cdot c + \boldsymbol{\alpha}_s^*(\tilde{\alpha}_r(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{z} \\ &= \tilde{\alpha}_s^r(\mathbf{z}) - \alpha_r(\mathbf{x})\cdot c + [\boldsymbol{\alpha}_s^*(\tilde{\alpha}_r(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{e}_1]z_1 + \overline{\boldsymbol{\alpha}_s^*(\tilde{\alpha}_r(\mathbf{x}))}\cdot\bar{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} [\alpha_r^s(\mathbf{x})u_1 - \boldsymbol{\alpha}_s^*(\tilde{\alpha}_r(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{e}_1]z_1 &= \tilde{\alpha}_s^r(\mathbf{z}) - \alpha_r(\mathbf{x})\cdot c + [\overline{\boldsymbol{\alpha}_s^*(\tilde{\alpha}_r(\mathbf{x}))} - \alpha_r^s(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}]\cdot\bar{\mathbf{z}} \\ &= \tilde{\alpha}_s(\mathbf{z})\cdot e_r - \alpha_r(\mathbf{x})\cdot c + [\overline{\boldsymbol{\alpha}_s^*(\alpha_r(\mathbf{x}))} - \alpha_r^s(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}]\cdot\bar{\mathbf{z}} - \overline{\boldsymbol{\alpha}_s^*(e_r)}\cdot\bar{\mathbf{z}} \\ &= [\boldsymbol{\alpha}_s^*(e_r)\cdot\mathbf{e}_1]z_1 - \alpha_r(\mathbf{x})\cdot c + [\overline{\boldsymbol{\alpha}_s^*(\alpha_r(\mathbf{x}))} - \alpha_r^s(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}]\cdot\bar{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Si因此 $\alpha_r^s(\mathbf{x})u_1 - \boldsymbol{\alpha}_s^*(\tilde{\alpha}_r(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{e}_1 - \boldsymbol{\alpha}_s^*(e_r)\cdot\mathbf{e}_1 = \Delta_2(\mathbf{x}\ u_1) \neq 0$，这就得到了 (5.4) 中关于 z_1 的公式。最后，由 $\tilde{\alpha}_r(\mathbf{y}) = c - \tilde{\alpha}_s(\mathbf{z}) + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})e_s + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})e_r$，可得

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\alpha}_r^*[c - \tilde{\alpha}_s(\mathbf{z}) + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})e_s + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})e_r] = \boldsymbol{\alpha}_r^*[c - \tilde{\alpha}_s(\mathbf{z}) + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})e_s],$$

这证明了 (5.4) 中关于 $\mathbf{y}$ 的公式。 □

假设给定$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^{n-1}$，满足

$$\Delta_2(\mathbf{x}_{N-1}, x_{N,1}) = \alpha_{r_{N-1}}^{r_N}(\mathbf{x}_{N-1})x_{N,1} - \alpha_{r_{N-1}}(\mathbf{x}_{N-1})\cdot\tilde{\alpha}_{r_N}(\mathbf{e}_1) \neq 0,$$

并令 $a_j = \alpha_{r_j}(\mathbf{x}j)\ (1 \le j \le N)$。给定$\mathbf{y}_1^k,\ldots,\mathbf{y}_{N-2}^k \in \mathbb{R}^{n-1}$和 $\bar{}\mathbf{y}_N^k \in \mathbb{R}^{n-2}$，对于 $1 \le k \le m,$，我们将引理 5.3 应用于条件 (5.3)，其中

$$r = r_{N-1},\ s = r_N,\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_{N-1},\ \mathbf{u} = \mathbf{x}_N,\ \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{y}}_N^k,\ \text{ and }\ c = -\sum_{j=1}^{N-2} b_{r_j}(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j^k),$$

以如下方式确定 $z_1 = y_{N,1}^k$, $\mathbf{z} = \mathbf{y}_N^k = (y_{N,1}^k, \bar{}\mathbf{y}_N^k)$ 和 $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{N-1}^k$：

$$\begin{aligned} y_{N,1}^k &= \frac{\sum_{j=1}^{N-2}\boldsymbol{\alpha}_{r_j}^*(a_{N-1} - a_{N-1}^{r_j}a_j)\cdot\mathbf{y}_j^k + \overline{\boldsymbol{\alpha}_{r_N}^*(a_{N-1} - a_{N-1}^{r_N}a_N)}\cdot\bar{\mathbf{y}}_N^k}{\Delta_2(\mathbf{x}_{N-1}, x_{N,1})}, \\ \mathbf{y}_N^k &= (y_{N,1}^k, \bar{\mathbf{y}}_N^k), \\ \mathbf{y}_{N-1}^k &= \boldsymbol{\alpha}_{r_{N-1}}^*\Big[(\mathbf{x}_N\cdot\mathbf{y}_N^k)e_{r_N} - \tilde{\alpha}_{r_N}(\mathbf{y}_N^k) + \sum_{j=1}^{N-2}\Big((\mathbf{x}_j\cdot\mathbf{y}_j^k)e_{r_j} - \tilde{\alpha}_{r_j}(\mathbf{y}_j^k)\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{5.6}$$

现在设给定 $(p_1,\ldots,p_m)$, $(q_{m+1},\ldots,q_{N-1})$, $(\mathbf{x}^{m+1},\ldots,\mathbf{x}_N)$ 和 $\{(\mathbf{y}_1^k,\ldots,\mathbf{y}_{N-2}^k, \bar{}\mathbf{y}_N^k)\}_{k=1}^m$，满足

$$\Delta_1(\mathbf{x}_N)\Delta_2(\mathbf{x}_{N-1}, x_{N,1}) \neq 0. \tag{5.7}$$

我们首先利用公式 (5.2) 确定 $p_i\ (m+1 \le i \le N)$ 和 $\mathbf{x}j\ (1 \le j \le m)$，然后将这些量代入公式 (5.6)，得到

$$(\mathbf{y}_{N-1}^k, y_{N,1}^k) = \frac{L(q_{m+1},\ldots,q_{N-1};\mathbf{x}_{m+1},\ldots,\mathbf{x}_N;\mathbf{y}_1^k,\ldots,\mathbf{y}_{N-2}^k,\bar{\mathbf{y}}_N^k)}{\Delta_1(\mathbf{x}_N)\,\Delta_2(\mathbf{x}_{N-1}, x_{N,1})} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.8}$$

对于 $1 \le k \le m$，其中 L 是关于其自变量的多项式。

令 $\mathcal{V}=\mathcal{V}_{(m,n,N)}$ 为所有参数 $V=(P,\ Q,\ X,\ Y)$ 构成的集合，其定义如下

$$\begin{cases} P=(p_1,\dots,p_m)\in(\mathbb{R}^m)^m,\\ Q=(q_{m+1},\dots,q_{N-1})\in(\mathbb{R}^m)^{N-m-1},\\ X=(\mathbf{x}_{m+1},\dots,\mathbf{x}_N)\in(\mathbb{R}^{n-1})^{N-m}\ \text{ satisfying (5.7)},\\ Y=\{(\mathbf{y}_1^k,\dots,\mathbf{y}_{N-2}^k,\bar{\mathbf{y}}_N^k)\}_{k=1}^m\in[(\mathbb{R}^{n-1})^{N-2}\times\mathbb{R}^{n-2}]^m. \end{cases} \tag{5.9}$$

那么， $\mathcal{V}$是欧几里得空间 $\mathbb{R}^{\dim\mathcal{V}}$ 中的一个开稠密集，其中

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{V}&=m^2+m(N-m-1)+(N-m)(n-1)+m[(N-2)(n-1)+n-2]\\&=(mn+n-1)N-2mn.\end{aligned}$$

我们定义 $\mathcal{V}$ 上的以下函数： $V=(P,Q,X,Y)$

$$\begin{aligned}&p_i(V)=p_i\ \ (1\le i\le m),\ \text{and}\ (p_{m+1}(V),\dots,p_N(V))\ \text{by (5.2)};\\&(\mathbf{x}_1(V),\dots,\mathbf{x}_m(V))\ \text{ by (5.2), and }\ \mathbf{x}_i(V)=\mathbf{x}_i\ \ (m+1\le i\le N);\\&a_i(V)=\alpha_{r_i}(\mathbf{x}_i(V))\ \ (1\le i\le N);\\&\mathbf{y}_i^k(V)=\mathbf{y}_i^k\ \ (1\le i\le N-2),\ (\mathbf{y}_{N-1}^k(V),y_{N,1}^k(V))\ \text{by (5.8), and}\\&\mathbf{y}_N^k(V)=(y_{N,1}^k(V),\bar{\mathbf{y}}_N^k)\ \text{for}\ 1\le k\le m;\\&B_i(V)=\beta_{r_i}(\mathbf{x}_i(V),\mathbf{Y}_i(V))\ \text{with}\ \mathbf{Y}_i(V)=(\mathbf{y}_i^k(V))_{k=1}^m\ \ (1\le i\le N);\\&g_i(V)=(p_i(V)\otimes a_i(V),B_i(V))\ \ (1\le i\le N);\\&\sigma_1(V)=0,\ \text{and}\ \sigma_i(V)=g_1(V)+\cdots+g_{i-1}(V)\ \ (2\le i\le N).\end{aligned} \tag{5.10}$$

设 $\mathcal{U}=\mathcal{V}\times\mathbb{R}^N\subset\mathbb{R}^D$，其中

$$D=N+\dim\mathcal{V}=n[(m+1)N-2m].$$

对于每个 $U=(V,\boldsymbol{\kappa})\in\mathcal{U}$，其中 $\boldsymbol{\kappa}=(\kappa_1,\dots,\kappa_N)\in\mathbb{R}^N$，令

$$\eta_i(U)=\sigma_i(V)+\kappa_i g_i(V)\quad(1\le i\le N). \tag{5.11}$$

最后，定义

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_0&=\{V\in\mathcal{V}:p_i(V)\ne0\ \ \forall 1\le i\le N\},\\\mathcal{U}_0&=\{U=(V,\boldsymbol{\kappa})\in\mathcal{U}:V\in\mathcal{V}_0,\ \kappa_i>1\ \ \forall 1\le i\le N\}.\end{aligned}$$

那么， $\mathcal{V}_0$ 是 $\mathcal{V}$的开稠密子集，而 $\mathcal{U}_0$ 是 $\mathcal{U}$.的非空开子集

引理 5.4. 对于每个 $\rho\in\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $U\in\mathcal{U}_0$， N元组

$$(\rho+\eta_1(U),\dots,\rho+\eta_N(U))$$

是 $\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}$.中的一个 $\mathcal{T}_N$-构型

证明。 由于对所有 $V\in\mathcal{V}_0$. □,
$g_i(V)\in\Gamma_{r_i}\subset\Gamma(1\le i\le N)$且 $g_1(V)+\cdots+g_N(V)=0$，结论很容易得出

5.2. **非退化条件**。 设 σ: $\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{m\times n}$ 是一个 C^1 函数，其图为 $\mathcal{K}\subset\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}$. 注意到，当且仅当 $\Psi(\rho)=0$时， $\rho\in\mathcal{K}$， 其中

$$\Psi(\rho)=\sigma(\rho^1)-\rho^2\in\mathbb{R}^{m\times n}\quad\forall\,\rho=(\rho^1,\rho^2)\in\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}.$$

假设$(\eta_1(U_0)\dots,\eta_N(U_0))$支撑在某个 $U_0\in\mathcal{U}_0\subset\mathbb{R}^D$上的 $\mathcal{K}$，并令 ε: $\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}$ 满足 $\varepsilon(U_0)=0$.

对于每个 $\rho\in\mathbb{R}^{m\times n}\times\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $U\in\mathcal{U}_0$，这个 N 元组

$$(\rho+\varepsilon(U)+\eta_1(U),\dots,\rho+\varepsilon(U)+\eta_N(U)) \tag{5.12}$$

都是一个 $\mathcal{T}_N$-构型，其中 $\pi_1=\rho+\varepsilon(U)$，当 $(\rho,\ U)=(0,\ U_0)$。时，它化简为 $(\eta_1(U_0).....,\ \eta_N(U_0))$

我们尝试将 (5.12) 中的 $\mathcal{T}_N$配置嵌入到 $\mathcal{K}$中，其中 $(\rho,\ U)$ 取值接近 $(0,\ U_0)$。 这相当于求解以下由 mnN 个方程组成的方程组:

$$\Psi(\rho+\varepsilon(U)+\eta_j(U))=0\quad(1\le j\le N), \tag{5.13}$$

对于接近 0 的 ρ，求接近 U_0 的 U。因此，该嵌入问题属于隐函数定理的适用范畴。

由于 $U \in \mathbb{R}^D$，其中 $D = n[(m+1)N - 2m] \geq mnN$对于 $N \geq 2m$，应用隐函数定理需要对 U 中的参数进行约化。

~5.2.1. 参数约化。令 $U_0 = (Z_0', U_0, \kappa_0)$，其中

$$Z_0' \in \mathbb{R}^{mnN-N}, \quad \tilde{U}_0 \in \mathbb{R}^{n(N-2m)}, \quad \text{and} \quad \kappa_0 \in \mathbb{R}^N.$$

对于 $Z = (Z', \kappa) \in \mathbb{R}^{mnN-N} \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{mnN}$，定义

$$V(Z') = (Z', \tilde{U}_0), \quad U(Z) = (Z', \tilde{U}_0, \kappa),$$

and

$$\begin{cases} h_i(Z') = g_i(V(Z')), \\ \omega_i(Z') = \sigma_i(V(Z')), \\ \zeta_i(Z) = \eta_i(U(Z)) \end{cases} \qquad (1 \leq i \leq N). \tag{5.14}$$

最后，我们定义一组新的约化参数如下：

$$\mathcal{Z}_0 = \{Z \in \mathbb{R}^{mnN} : U(Z) \in \mathcal{U}_0\}.$$

由于 $U_0 = U(Z_0) \in \mathcal{U}_0$对于 $Z_0 = (Z_0', \kappa_0)$，可知 $Z_0 \in \mathcal{Z}_0$. 因此， $\mathcal{Z}_0$ 是 $\mathbb{R}^{mnN}$. 中的一个非空开集

5.2.2. 嵌入的非退化性。对于每个 $1 \leq i \leq N$，我们求解方程 (5.13)，其中 $\varepsilon(U) = \omega_i(Z_0') - \omega_i(Z')$，以求得 $U = U(Z)$；也就是说，我们求解方程组

$$\Phi_i^j(\rho, Z) = \Psi(\rho + \omega_i(Z_0') - \omega_i(Z') + \zeta_j(Z)) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq N. \tag{5.15}$$

对于靠近 Z_0 的 Z，用靠近 0 的 ρ 表示。这个方程组可以简洁地写成

$$\Phi_i(\rho, Z) = 0,$$

其中

$$\Phi_i(\rho, Z) = (\Phi_i^1(\rho, Z), \ldots, \Phi_i^N(\rho, Z)) \quad \forall (\rho, Z) \in (\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}) \times \mathbb{R}^{mnN}. \tag{5.16}$$

以下性质很容易验证，因此我们省略证明。

引理 5.5。对于每个 $1 \leq i, k \leq N$ *and* $(\rho, Z) \in (\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}) \times \mathbb{R}^{mnN}$，可得

$$\Phi_i(\rho + \omega_i(Z') - \omega_k(Z') + \omega_k(Z_0') - \omega_i(Z_0'), Z) = \Phi_k(\rho, Z). \tag{5.17}$$

注意，对于 $1 \leq i \leq N$，偏雅可比矩阵

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial Z}(0, Z_0) = \begin{bmatrix} D\Psi(\zeta_1(Z_0))D(\zeta_1 - \omega_i)(Z_0) \\ \vdots \\ D\Psi(\zeta_N(Z_0))D(\zeta_N - \omega_i)(Z_0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mnN\times mnN},$$

其中 $D\Psi = [D\sigma \mid -I]$，取决于 Z_0 和这些量

$$(D\sigma(\zeta_1^1(Z_0)), \ldots, D\sigma(\zeta_N^1(Z_0))) \in (\mathbb{R}^{mn\times mn})^N,$$

但不取决于函数 σ 本身的具体形式。这引出了以下定义。

定义 5.1。对于每个 $1 \leq i \leq N$，定义

$$\mathcal{J}_i(H_1, \ldots, H_5, Z) = \det \begin{bmatrix} H_1 D(\zeta_1^1 - \omega_i^1)(Z) - D(\zeta_1^2 - \omega_i^2)(Z) \\ \vdots \\ H_N D(\zeta_N^1 - \omega_i^1)(Z) - D(\zeta_N^2 - \omega_i^2)(Z) \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

对于所有 $(H_1, \ldots, H_N, Z) \in \mathcal{P} = (\mathbb{R}^{mn\times mn})^N \times \mathbb{R}^{mnN}$.

注意，每个 $\mathcal{J}_i$ 都是 $(H_1、\ldots\ldots、H_N)$ 的多项式，也是 Z. 的有理函数

Lemma 5.6. 令 $H_k^0 = D\sigma(\zeta_k^1(Z_0))$ 对 $1 \le k \le N$，并假设满足非退化条件

$$\mathcal{J}_i(H_1^0, \dots, H_N^0, Z_0) \neq 0 \quad \forall\, 1 \le i \le N. \tag{5.19}$$

于是存在开球 $\mathbb{B}_{\tau_0}(0) \subset \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\mathcal{B}_{k_0}(Z_0) \subset \mathcal{Z}_0$，使得对每个 $1 \le i \le N$，都存在一个函数 $Z_i\colon \mathbb{B}_{\tau_0}(0) \to \mathcal{B}_{k_0}(Z_0)$ 满足以下性质：

$$\begin{cases} Z_i(0) = Z_0, \\ \forall (\rho, Z) \in \bar{\mathbb{B}}_{\tau_0}(0) \times \bar{\mathcal{B}}_{k_0}(Z_0),\ \ \Phi_i(\rho, Z) = 0 \iff Z = Z_i(\rho), \\ Z_i\colon \bar{\mathbb{B}}_{\tau_0}(0) \to \mathcal{B}_{k_0}(Z_0) \text{ is algebraic and thus analytic.} \end{cases} \tag{5.20}$$

证明。由于 $\Phi_i(0, Z_0) = 0$ 且

$$\det \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z}(0, Z_0) = \mathcal{J}_i(H_1^0, \dots, H_N^0, Z_0) \neq 0$$

对每个 $1 \le i \le N$, ，函数 $Z_i(\rho)$ 的存在性可直接由隐函数定理得出。细节从略。□

假设条件 (5.19) 成立，并令 $Z_i(\rho)$ $(1 \le i \le N)$ 为引理 5.6 中定义的函数。对每个 $1 \le i, j \le N$ 和 $\rho \in \mathbb{B}_{\tau_0}(0)$, ，定义

$$\begin{cases} \xi_{ij}(\rho) = \rho + \omega_i(Z_0') - \omega_i(Z_i'(\rho)) + \zeta_j(Z_i(\rho)), \\ \pi_{ij}(\rho) = \rho + \omega_i(Z_0') - \omega_i(Z_i'(\rho)) + \omega_j(Z_i'(\rho)). \end{cases} \tag{5.21}$$

由于 $\Phi_i(\rho, Z_i(\rho)) = 0$，因此

$$\xi_{ij}(\rho) \in \mathcal{K} \quad \forall\, 1 \le i, j \le N,\ \ \rho \in \bar{\mathbb{B}}_{\tau_0}(0). \tag{5.22}$$

此外 ，由于对每个 $1 \le i, j \le N$, $\pi_{ij}(0) = \omega_j(Z_0')$，我们选取一个数 $\tau_1 \in (0, \tau_0)$，使得

$$\pi_{ij}[\bar{\mathbb{B}}_{\tau_1}(0)] \subseteq \mathbb{B}_{\tau_0}(\omega_j(Z_0')) \quad \forall\, 1 \le i, j \le N. \tag{5.23}$$

引理 5.7。设 $1 \le i, j \le N$. 则

$$Z_i(\rho) = Z_j\big(\pi_{ij}(\rho) - \omega_j(Z_0')\big) \quad \forall\, \rho \in \bar{\mathbb{B}}_{\tau_1}(0); \tag{5.24}$$

此外，映射 π_{ij} 在 $\mathbb{B}_{\tau_1}(0)$ 上是一一映射，其中

$$(\pi_{ij})^{-1}(y) = \pi_{ji}\big(y - \omega_j(Z_0')\big) - \omega_i(Z_0') \quad \forall\, y \in \pi_{ij}[\bar{\mathbb{B}}_{\tau_1}(0)]. \tag{5.25}$$

证明。 1. 设 $\rho \in \mathbb{B}_{\tau_1}(0)$。由 (5.17) 和 (5.20)，我们有

$$\Phi_j(\pi_{ij}(\rho) - \omega_j(Z_0'), Z_i(\rho)) = \Phi_i(\rho, Z_i(\rho)) = 0;$$

因此，再由 (5.20)，我们有 $Z_i(\rho) = Z_j\big(\pi_{ij}(\rho) - \omega_j(Z_0')\big)$, 从而证明了 (5.24)。

2. 对于某个 ρ，$\rho' \in \mathbb{B}_{\tau_1}(0)$，令 $\pi_{ij}(\rho) = \pi_{ij}(\rho')$。根据（5.24），有 $Z_i(\rho') = Z_i(\rho)$，进而根据（5.21）中 π_{ij} 的定义，得到 $\rho' = \rho$；因此，π_{ij} 在 $\mathbb{B}_{\tau_1}(0)$ 上是一一映射。

3. 令 $y = \pi_{ij}(\rho)$，其中 $\rho = \pi_{ij}^{-1}(y) \in \bar{\mathbb{B}}_{\tau_1}(0)$。根据（5.24），$Z_i(\rho) = Z_j\big(y - \omega_j(Z_0')\big)$；因此，由（5.21）可得

$$y = \rho + \omega_i(Z_0') - \omega_i\big(Z_j'(y - \omega_j(Z_0'))\big) + \omega_j\big(Z_j'(y - \omega_j(Z_0'))\big),$$

由此可证 (5.25)，因为

$$\begin{aligned} \rho &= y - \omega_j\big(Z_j'(y - \omega_j(Z_0'))\big) + \omega_i\big(Z_j'(y - \omega_j(Z_0'))\big) - \omega_i(Z_0') \\ &= (y - \omega_j(Z_0')) + \omega_j(Z_0') - \omega_j\big(Z_j'(y - \omega_j(Z_0'))\big) + \omega_i\big(Z_j'(y - \omega_j(Z_0'))\big) - \omega_i(Z_0') \\ &= \pi_{ji}\big(y - \omega_j(Z_0')\big) - \omega_i(Z_0'). \end{aligned}$$

□

5.2.3. 开性的非退化性。对于 $1 \le i \le N$ 和 $\rho \in \mathbb{B}_{\tau_0}(0)$，定义

$$\begin{cases} \xi_i(\rho) = \xi_{1i}(\rho) = \rho + \zeta_i(Z_1(\rho)), \\ \pi_i(\rho) = \pi_{1i}(\rho) = \rho + \omega_i(Z_1'(\rho)), \\ \mu_i(\rho) = f_i(Z_i(\rho)), \end{cases} \tag{5.26}$$

其中，对于所有 $Z = (Z', \kappa)$，$f_i(Z) = \kappa_i h_i(Z')$。此外，对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $r \in (0, \tau_0]$，定义

$$S_i^r(\lambda) = \{\lambda\xi_i(\rho) + (1-\lambda)\pi_i(\rho) : \rho \in \mathbb{B}_r(0)\}. \tag{5.27}$$

引理 5.8。对于每个 $1 \le i \le N$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，有

$$S_i^r(\lambda) = \{y + \lambda\mu_i(y) + \omega_i(Z_0') : y \in \pi_i(\mathbb{B}_r(0)) - \omega_i(Z_0')\} \quad \forall\, 0 < r \le \tau_1.$$

证明。令 $1 \le i \le N$ 和 $r \in (0, \tau_1]$. 。对于每个 $\rho \in \mathbb{B}_r(0)$，令 $y = \pi_i(\rho) - \omega_i(Z_0')$。于是，由 (5.23) 和 (5.24)，可得 $y \in \mathbb{B}_{\tau_1}(0)$ 和

$$Z_1(\rho) = Z_i(\pi_i(\rho) - \omega_i(Z_0')) = Z_i(y).$$

由于 $\xi_i(\rho) = \pi_i(\rho) + f_i(Z_1(\rho))$，因此，对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，

$$\lambda\xi_i(\rho) + (1-\lambda)\pi_i(\rho) = y + \lambda\mu_i(y) + \omega_i(Z_0'). \tag{5.28}$$

最后，由于 π_i 在 $\mathbb{B}_r(0)$ 上是一一映射，我们得出

$$S_i^r(\lambda) = \{y + \lambda\mu_i(y) + \omega_i(Z_0') : y \in \pi_i(\mathbb{B}_r(0)) - \omega_i(Z_0')\}.$$

□

引理 5.9. 对于每个 $1 \le i \le N$ 和 $y \in \mathbb{B}_{\tau_0}(0)$，令

$$\begin{cases} H_i(y) = D\sigma(y^1 + \mu_i^1(y) + \omega_i^1(Z_0')), \\ M_i(y) = D'\mu_i^1(y) + D''\mu_i^1(y)H_i(y), \end{cases} \tag{5.29}$$

where $D' = D_{y^1}$ 和 $D'' = D_{y^2}$. 那么，对每个 $y \in \pi_i(\mathbb{B}_{\tau_1}(0)) - \omega_i(Z_0') \subseteq \mathbb{B}_{\tau_0}(0)$，有

$$\begin{cases} \operatorname{rank} D\mu_i(y) = mn + \operatorname{rank} M_i(y), \\ \det[I_{2mn} + \lambda D\mu_i(y)] = (\lambda-1)^{mn} \det[I_{mn} + \lambda M_i(y)] \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.30}$$

证明。设 $y \in \pi_i(\mathbb{B}_{\tau_1}(0)) - \omega_i(Z_0')$。那么存在唯一的 $\rho \in \mathbb{B}_{\tau_1}(0)$，使得 $y = \pi_i(\rho) - \omega_i(Z_0')$。由 (5.28) 并取 $\lambda = 0$，可得 $y + \mu_i(y) + \omega_i(Z_0') = \xi_i(\rho) \in \mathcal{K}$，这意味着

$$y^2 + \mu_i^2(y) + \omega_i^2(Z_0') = \sigma(y^1 + \mu_i^1(y) + \omega_i^1(Z_0')) \quad \forall\, y \in \pi_i(\bar{\mathbb{B}}_{\tau_1}(0)) - \omega_i(Z_0').$$

对 $D' = D_{y^1}$ 和 $D'' = D_{y^2}$ 求导，得到

$$D'\mu_i^2(y) = H_i(y)(I + D'\mu_i^1(y)) \quad \text{and} \quad I + D''\mu_i^2(y) = H_i(y)D''\mu_i^1(y)),$$

其中 $I = I_{mn}$. 因此，

$$D\mu_i(y) = \begin{bmatrix} D'\mu_i^1(y) & D''\mu_i^1(y) \\ D'\mu_i^2(y) & D''\mu_i^2(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'\mu_i^1(y) & D''\mu_i^1(y) \\ H_i(y)(I + D'\mu_i^1(y)) & H_i(y)D''\mu_i^1(y)) - I \end{bmatrix}.$$

令 $P = \begin{bmatrix} I & O \\ H_i & I \end{bmatrix}$，从而 $P^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -H_i & I \end{bmatrix}$. 于是，通过直接计算可得

$$P^{-1}\, D\mu_i(y)\, P = \begin{bmatrix} M_i(y) & D''\mu_i^1(y) \\ O & -I \end{bmatrix},$$

由此可得（5.30）。 □

为计算 $M_i(y)$，我们对 $\Phi_i(y, Z_i(y)) = 0$ 关于 D' 和 D'' 求导，得到

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y^1} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z} D'Z_i = 0, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z} D''Z_i = 0,$$

这意味着

$$D'Z_i(y) + D''Z_i(y)H_i(y) = -\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial Z}\right]^{-1} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial y^1} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y^2} H_i(y)\right].$$

因此,

$$M_i(y) = D'\mu_i^1(y) + D''\mu_i^1(y)H_i(y) = Df_i^1(Z_i(y))[D'Z_i(y) + D''Z_i(y)H_i(y)]$$
$$= -Df_i^1(Z_i(y))\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial Z}\right]^{-1}\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial y^1} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y^2}H_i(y)\right].$$

特别地，在 $y = 0$ 处,

$$M_i(0) = Df_i^1(Z_0)\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial Z}(0, Z_0)\right]^{-1} B_i,$$

其中

$$B_i = B_i(H_1^0, \ldots, H_N^0) = -\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial y^1}(0, Z_0) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y^2}(0, Z_0)H_i^0\right] = \begin{bmatrix} H_i^0 - H_1^0 \\ \vdots \\ O \\ \vdots \\ H_i^0 - H_N^0 \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

由于对于所有矩阵 $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{q\times p}$，，$\det(I_p + AB) = \det(I_q + BA)$，因此我们得到

$$\det(I_{mn} + M_i(0)) = \det\left[I_{mnN} + B_i Df_i^1(Z_0)\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial Z}(0, Z_0)\right]^{-1}\right] = \frac{\mathcal{N}_i(H_1^0, \ldots, H_N^0, Z_0)}{\mathcal{J}_i(H_1^0, \ldots, H_N^0, Z_0)},$$

其中 $\mathcal{J}_i$ 由 (5.18) 定义，且

$$\mathcal{N}_i(H_1^0, \ldots, H_N^0, Z_0) = \det\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial Z}(0, Z_0) + B_i Df_i^1(Z_0)\right]. \tag{5.32}$$

这里， $B_i = B_i(H_1^0$，……， $H_N^0)$ 在 (5.31) 中给出。

注意，对于每个 $1 \le i \le N$，函数 $\mathcal{N}_i(H_1^0$，……， H_N^0， $Z_0)$ 是关于 $(H_1^0$，……， $H_N^0)$ 的多项式，也是关于 Z_0. 的有理函数

定理 5.10。 除条件 (5.19) 外，还假设以下**非退化条件**也成立:

$$\mathcal{N}_i(H_1^0, \ldots, H_N^0, Z_0) \neq 0 \quad \forall\, 1 \le i \le N. \tag{5.33}$$

那么，存在数 $\tau_2 \in (0,\ \tau_1)$ 和 $\ell_0 \in (\frac{1}{2},\ 1)$，使得对于每个 $1 \le i \le N$、 $r \in (0、\ \tau_2]$ 和 $\lambda \in [0, 1-\ell_0] \cup [\ell_0, 1)$，集合

$$S_i^r(\lambda) = \{\lambda\xi_i(\rho) + (1-\lambda)\pi_i(\rho) : \rho \in \mathbb{B}_r(0)\}$$

是开集。

证明。 由 (5.19) 和 (5.33)，我们有

$$\det(I_{mn} + M_i(0)) \neq 0 \quad \forall\, 1 \le i \le N.$$

因此，存在数 $\tau_2 \in (0,\ \tau_1)$ 和 $\ell_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$，使得 –

$$\det(I_{mn} + \lambda M_i(y)) \neq 0 \quad \forall\, 1 \le i \le N,\ \ \lambda \in [0, 1-\ell_0] \cup [\ell_0, 1],\ \ y \in \bar{\mathbb{B}}_{\tau_2}(0).$$

此外，由（5.30）可得,

$$\det(I_{2mn} + \lambda D\mu_i(y)) \neq 0 \quad \forall\, 1 \le i \le N,\ \ \lambda \in [0, 1-\ell_0] \cup [\ell_0, 1),\ \ y \in \bar{\mathbb{B}}_{\tau_2}(0).$$

于是，根据反函数定理，集合

$$\{y + \lambda\mu_i(y) + \omega_i(Z_0') : y \in \pi_i(\mathbb{B}_r(0)) - \omega_i(Z_0')\}$$

对每个 $1 \le i \le N$， $r \in (0,\ \tau_2]$，以及 $\lambda \in [0, 1-\ell_0] \cup [\ell_0, 1)$，都是开集。

最后，根据引理 5.8，可知对于每个 $1 \le i \le N$， $r \in (0,\ \tau_2]$，and$\lambda \in [0, 1-\ell_0] \cup [\ell_0, 1)$. □，集合 $S_i^r(\lambda)$ 是开集

5.3. 与多凸性的相容性。 在本节的其余部分，我们假设 $m = 2$.

对于任意 C^2 函数 $F\colon\ \mathbb{R}^{2\times n} \to \mathbb{R}$，记其梯度图为 $\mathcal{K}_F\ \sigma = DF.$。我们通常将 $\mathbb{R}^{2\times n}$ 与 $\mathbb{R}^{2n}$，等同起来，因此 DF 被视为从 $\mathbb{R}^{2n}$ 到 $\mathbb{R}^{2n}$，的函数，而海森矩阵$D^2F(A)$ 被视为 $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$，中的对称矩阵 $H = (H^{ij}_{k\ell})$，其元素为

$$H^{ij}_{k\ell} = \frac{\partial^2 F(A)}{\partial a_{ij}\partial a_{k\ell}}, \quad i,k = 1,2,\ 1 \le j,\ell \le n,$$

满足对称条件 $H^{ij}_{k\ell} = H^{k\ell}_{ij}$。为方便起见，令 $\mathbb{S}^{2n\times 2n}$ 表示 $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 中的对称矩阵空间。

我们关注具有特殊形式的多凸函数 $F\colon\ \mathbb{R}^{2\times n} \to \mathbb{R}$

$$F(A) = G(A, \delta(A)) \quad \forall\, A = (a_{k\ell}) \in \mathbb{R}^{2\times n}, \tag{5.34}$$

其中 $G\colon\ \mathbb{R}^{2\times n}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 光滑且凸，并且

$$\delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

表示 A 的前两列的 2×2 子行列式。对于这样的 F，梯度为

$$DF(A) = G_A(\tilde{A}) + G_\delta(\tilde{A})D\delta(A),$$

˜其中 $A = (A, \delta(A))$，并且

$$D\delta(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} & \bar{\mathbf{0}} \\ -a_{12} & a_{11} & \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times n} \approx \mathbb{R}^{2n},$$

其中 $\bar{\mathbf{0}} = (0,\ \ldots\ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^{n-2}$. 因此，海森矩阵 $D^2\delta(A) = H_0 \in \mathbb{S}^{2n\times 2n}$ 是常数，且梯度满足 $D\delta(A) = H_0A \in \mathbb{R}^{2n}$.

令 $N \ge 4$，并对 $1 \le i \le N$，令

$$\eta_i(U) = (\eta_i^1(U), \eta_i^2(U)) \in \mathbb{R}^{2\times n}\times\mathbb{R}^{2\times n}$$

由公式 (5.11) 定义，其中 $m = 2$，对所有 $U = (V,\ \boldsymbol{\kappa}) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{(3N-4)n}$.

假设 F 具有 (5.34) 的形式，并且对于某个 $U_0 \in \mathcal{U}_0$，

$$\eta_i(U_0) \in \mathcal{K}_F \quad \forall\, 1 \le i \le N. \tag{5.35}$$

那么 G的凸性意味着

$$c_i - c_j + \langle Q_i, A_j - A_i\rangle + d_i(\delta(A_j) - \delta(A_i)) \le 0 \quad \forall\, 1 \le i,j \le N,$$

其中

$$A_i = \eta_i^1(U_0), \quad c_i = G(\tilde{A}_i), \quad Q_i = G_A(\tilde{A}_i), \quad d_i = G_\delta(\tilde{A}_i) \qquad (1 \le i \le N),$$

并且，由 (5.35)，对每个 $1 \le i \le N$，我们还有 $Q_i = \eta_i^2(U_0) - d_iD\delta(A_i)$。

反过来，假设存在 $U_0 \in \mathcal{U}_0$ 和数 $c_i, d_i \in \mathbb{R}\,(1 \le i \le N)$，使得严格不等式

$$c_i - c_j + \langle Q_i, A_j - A_i\rangle + d_i(\delta(A_j) - \delta(A_i)) < 0 \quad (1 \le i \ne j \le N) \tag{5.36}$$

成立，其中

$$A_i = \eta_i^1(U_0) \ \text{ and } \ Q_i = \eta_i^2(U_0) - d_iD\delta(A_i) \quad (1 \le i \le N). \tag{5.37}$$

然后，根据 Le 光滑凸函数 $G(A,\delta)$ 定义在 $\mathbb{R}^{2\times n}\times\mathbb{R}$ 上，使得

$$c_i = G(\tilde{A}_i),\ \ Q_i = G_A(\tilde{A}_i),\ \text{ and } \ d_i = G_\delta(\tilde{A}_i) \quad (1 \le i \le N),$$

因此

$$\eta_i^2(U_0) = Q_i + d_iD\delta(A_i) = G_A(\tilde{\eta}_i^1(U_0)) + G_\delta(\tilde{\eta}_i^1(U_0))D\delta(\eta_i^1(U_0)) = DF(\eta_i^1(U_0)),$$

因此，对于所有 $1 \le i \le N$，$\eta_i(U_0) \in \mathcal{K}_F$，其中 $F\colon\ \mathbb{R}^{2\times n} \to \mathbb{R}$ 由式 (5.34) 定义，其中使用了这个凸 G.

因此，严格不等式 (5.36) 与 (5.37) 对于将一个 $\mathcal{T}_N$-构型嵌入多凸函数的梯度图至关重要。

下述结果表明，当 $N = 5$ 时，这种相容性成立。

引理 5.11。设

$$n \geq 2, \;\; N = 5, \;\; r_1 = r_3 = r_4 = 1, \;\; r_2 = r_5 = 2. \tag{5.38}$$

那么存在

$$c_1, \ldots, c_5, \; d_1, \ldots, d_5 \in \mathbb{R}, \; and \; U_0 = (V_0, \boldsymbol{\kappa}_0) \in \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^{11n},$$

满足 $c_i \neq c_j$ 对所有 $1 \leq i \neq j \leq 5$，使得

$$\begin{cases} \eta_i^1(U_0) \neq \eta_j^1(U_0), \;\; \sigma_i^1(V_0) \neq \sigma_j^1(V_0), \\ c_i - c_j + d_i[\delta(\eta_j^1(U_0)) - \delta(\eta_i^1(U_0))] \\ \quad + \langle \eta_i^2(U_0) - d_i D\delta(\eta_i^1(U_0)), \eta_j^1(U_0) - \eta_i^1(U_0) \rangle < 0 \end{cases} \qquad \forall\, 1 \leq i \neq j \leq 5. \tag{5.39}$$

证明。令

$$U_0 = (V_0, \boldsymbol{\kappa}_0) = (P_0, Q_0, X_0, Y_0, \boldsymbol{\kappa}_0) \in \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^{11n}$$

为由下式定义的参数

$$\begin{aligned} & p_1^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad p_2^0 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad P_0 = (p_1^0, p_2^0); \\ & q_3^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad q_4^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad Q_0 = (q_3^0, q_4^0); \\ & \mathbf{x}_3^0 = (1, \bar{\mathbf{0}}), \quad \mathbf{x}_4^0 = (4, \bar{\mathbf{0}}), \quad \mathbf{x}_5^0 = (2, \bar{\mathbf{0}}), \quad X_0 = (\mathbf{x}_3^0, \mathbf{x}_4^0, \mathbf{x}_5^0); \\ & \mathbf{y}_1^{1,0} = (69, \bar{\mathbf{0}}), \quad \mathbf{y}_1^{2,0} = (164, \bar{\mathbf{0}}), \quad \mathbf{y}_2^{1,0} = (-165, \bar{\mathbf{0}}), \quad \mathbf{y}_2^{2,0} = (82, \bar{\mathbf{0}}), \\ & \mathbf{y}_3^{1,0} = (404, \bar{\mathbf{0}}), \quad \mathbf{y}_3^{2,0} = (328, \bar{\mathbf{0}}), \quad \bar{\mathbf{y}}_5^{1,0} = \bar{\mathbf{y}}_5^{2,0} = \bar{\mathbf{0}}, \\ & Y_0 = \{(\mathbf{y}_1^{k,0}, \mathbf{y}_2^{k,0}, \mathbf{y}_3^{k,0}, \bar{\mathbf{y}}_5^{k,0})\}_{k=1}^2 \quad (\text{the terms } \bar{\mathbf{y}}_5^{1,0}, \, \bar{\mathbf{y}}_5^{2,0} \text{ are absent when } n = 2); \\ & \kappa_1^0 = 2, \quad \kappa_2^0 = 3, \quad \kappa_3^0 = 4, \quad \kappa_4^0 = 3, \quad \kappa_5^0 = 2, \quad \boldsymbol{\kappa}_0 = (\kappa_1^0, \ldots, \kappa_5^0). \end{aligned}$$

已在 [40, §6.1] 中验证，对于 $n = 2$，其中常数

$$\begin{cases} (c_1, \ldots, c_5) = (0, -3650, -3318, 5044, 580); \\ (d_1, \ldots, d_5) = (58, -7.5, 772, 57, 376), \end{cases}$$

条件（5.39）成立。基于这一计算，使用相同的参数和常数，可以直接验证条件（5.39）对所有 $n \geq 3$. □ 均成立

现在我们具体说明 §5.2.1 中讨论的参数约化。设

$$\begin{cases} c_1, \ldots, c_5, d_1, \ldots, d_5 \in \mathbb{R}, \\ U_0^\star = (p_1^0, p_2^0, q_3^0, q_4^0, \mathbf{x}_3^0, \mathbf{x}_4^0, \mathbf{x}_5^0, Y_0, \kappa_1^0, \ldots, \kappa_5^0) \end{cases} \tag{5.40}$$

它们是引理 5.11 的证明中用于验证条件（5.39）的具体数值和参数。特别地，我们有

$$\begin{cases} \mathbf{x}_4^0 = (x_{4,1}^0, \bar{\mathbf{x}}_4^0) = 4\mathbf{e}_1, \;\; \mathbf{x}_5^0 = 2\mathbf{e}_1, \\ \Delta_1(\mathbf{x}_5^0) = 2, \;\; \Delta_2((x_{4,1}^0, \bar{\mathbf{x}}_4), x_{5,1}^0) = 7 \;\; \forall\, \bar{\mathbf{x}}_4 \in \mathbb{R}^{n-2}. \end{cases} \tag{5.41}$$

令 $Z = (p_1, p_2, q_3, q_4, \mathbf{x}_3, \bar{\mathbf{x}}_4, Y, \kappa_1, \ldots, \kappa_5) \in \mathbb{R}^{10n}$，其中 $\bar{\mathbf{x}}_4 \in \mathbb{R}^{n-2}$，其余变量均如前所述。定义

$$\begin{cases} Z' = (p_1, p_2, q_3, q_4, \mathbf{x}_3, \bar{\mathbf{x}}_4, Y) \in \mathbb{R}^{10n-5}, \\ V(Z') = (p_1, p_2, q_3, q_4, \mathbf{x}_3, (x_{4,1}^0, \bar{\mathbf{x}}_4), \mathbf{x}_5^0, Y) \in \mathcal{V}, \\ U(Z) = (p_1, p_2, q_3, q_4, \mathbf{x}_3, (x_{4,1}^0, \bar{\mathbf{x}}_4), \mathbf{x}_5^0, Y, \kappa_1, \ldots, \kappa_5) \in \mathcal{U}, \end{cases} \tag{5.42}$$

and

$$\begin{cases} h_i(Z') = g_i(V(Z')), \\ \omega_i(Z') = \sigma_i(V(Z')), \\ \zeta_i(Z) = \eta_i(U(Z)) \end{cases} \qquad (1 \leq i \leq 5). \tag{5.43}$$

于是，由（5.39），条件

$$\begin{cases}\zeta_i^1(Z)\neq\zeta_j^1(Z),\ \ \omega_i^1(Z')\neq\omega_j^1(Z'),\\ c_i-c_j+d_i[\delta(\zeta_j^1(Z))-\delta(\zeta_i^1(Z))]\\ \quad+\langle\zeta_i^2(Z)-d_iD\delta(\zeta_i^1(Z)),\zeta_j^1(Z)-\zeta_i^1(Z)\rangle<0\end{cases}\quad\forall\,1\le i\neq j\le 5 \tag{5.44}$$

适用于 $Z=Z_0^\star=(p_1^0,p_2^0,q_3^0,q_4^0,\mathbf{x}_{03},\bar{\mathbf{x}}_{04},Y_0,\kappa_1^0,\dots,\kappa_5^0)$.

最后，我们定义

$$\mathcal{Z}_1=\{Z\in\mathbb{R}^{10n}:\,U(Z)\in\mathcal{U}_0\ \text{ and } Z\text{ validates condition (5.44)}\} \tag{5.45}$$

作为新的约化参数集合。显然， $\mathcal{Z}_1\neq\emptyset$ 是 $\mathbb{R}^{10n}$中的开集， 因为 $Z_0^\star\in\mathcal{Z}_1$.

注5.2。给定

$$Z'=(p_1,p_2,q_3,q_4,\mathbf{x}_3,\bar{\mathbf{x}}_4,\{(\mathbf{y}_1^k,\mathbf{y}_2^k,\mathbf{y}_3^k,\bar{\mathbf{y}}_5^k)\}_{k=1}^2)\in\mathbb{R}^{10n-5},$$

我们可以明确地将 $h_i(Z')=(h_i^1(Z'),\ h_i^2(Z'))\ (1\le i\le 5)$写成如下形式：

$$h_i^1(Z')=p_i\otimes\alpha_{r_i}(\mathbf{x}_i)\ \text{ and }\ h_i^2(Z')=\begin{bmatrix}\tilde{\alpha}_{r_i}(\mathbf{y}_i^1)-(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{y}_i^1)e_{r_i}\\ \tilde{\alpha}_{r_i}(\mathbf{y}_i^2)-(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{y}_i^2)e_{r_i}\end{bmatrix},$$

其中 r_i 如 (5.38) 所给出，$\mathbf{x}_4=(4,\ \bar{\mathbf{x}}_4)$，$\mathbf{x}_5=2\mathbf{e}_1$, 以及

$$\begin{cases}p_3=p_3(Z')=q_3^1p_1+q_3^2p_2,\\ p_4=p_4(Z')=q_4^1p_1+q_4^2p_2,\\ p_5=p_5(Z')=-\frac{1}{2}(1+q_3^1+q_4^1)p_1-(1+x_{3,1}q_3^2+4q_4^2)p_2;\\ \mathbf{x}_1=\mathbf{x}_1(Z')=\big(\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-x_{3,1})q_3^1-\frac{7}{2}q_4^1,\,-q_3^1\bar{\mathbf{x}}_3-q_4^1\bar{\mathbf{x}}_4\big),\\ \mathbf{x}_2=\mathbf{x}_2(Z')=\big(2+(2x_{3,1}-1)q_3^2+7q_4^2,\,-q_3^2\bar{\mathbf{x}}_3-q_4^2\bar{\mathbf{x}}_4\big);\\ \mathbf{y}_4^k=\mathbf{y}_4^k(Z')=-\mathbf{y}_1^k-\mathbf{y}_3^k+\big(\mathbf{x}_2(Z')\cdot\mathbf{y}_2^k,\,-\bar{\mathbf{y}}_2^k\big)+\big(2y_{5,1}^k(Z'),\,-\bar{\mathbf{y}}_5^k\big),\\ \mathbf{y}_5^k=\mathbf{y}_5^k(Z')=(y_{5,1}^k(Z'),\,\bar{\mathbf{y}}_5^k)\ \text{ with}\\ y_{5,1}^k(Z')=\frac{1}{7}\Big[\big((4,\bar{\mathbf{x}}_4)-\mathbf{x}_1(Z')\big)\cdot\mathbf{y}_1^k+\big((1,\bar{\mathbf{x}}_4)-4\mathbf{x}_2(Z')\big)\cdot\mathbf{y}_2^k\\ \qquad\qquad+\big((4,\bar{\mathbf{x}}_4)-\mathbf{x}_3\big)\cdot\mathbf{y}_3^k+\bar{\mathbf{x}}_4\cdot\bar{\mathbf{y}}_5^k\Big]\qquad(k=1,2).\end{cases} \tag{5.46}$$

有了 $h_i(Z')\ (1\le i\le 5)$ 的这类显式表示，我们还有

$$\begin{cases}\omega_1(Z')=0,\ \omega_i(Z')=h_1(Z')+\cdots+h_{i-1}(Z')\ \ (2\le i\le 5);\\ \zeta_i(Z)=\omega_i(Z')+\kappa_ih_i(Z')\ \ (1\le i\le 5),\end{cases} \tag{5.47}$$

其中 $Z=(Z',\ \boldsymbol{\kappa})$ 和 $\boldsymbol{\kappa}=(\kappa_1,\ \dots,\ \kappa_5)\in\mathbb{R}^5$.

此外，由 (5.41) 可知，(5.43) 中的函数实际上都是各自变量的多项式 。

5.4. **非退化条件的泛性**。令 $\mathcal{J}_i$ 和 $\mathcal{N}_i\ (1\le i\le 5)$ 为关于 $\mathcal{P}=(\mathbb{R}^{2n\times 2n})^5\times\mathbb{R}^{10n}$ 的 $(H_1,\ \dots,\ H_5,\ Z)$ 函数，它们在上文 (5.18) 和 (5.32) 中定义，且满足 $m=2$。根据注5.2，所有这些函数都是关于 $\mathcal{P}$. 的 $(H_1,\ \dots,\ H_5,\ Z)$ 多项式

定理 5.12. 设 $\mathcal{Q}=\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3\mathcal{J}_4\mathcal{J}_5\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2\mathcal{N}_3\mathcal{N}_4\mathcal{N}_5$ 定义在 $\mathcal{P}_1=(\mathbb{S}^{2n\times 2n})^5\times\mathbb{R}^{10n}$. 则$\mathcal{Q}\neq 0$ 在 $\mathcal{P}_1$. 因此，该集合

$$\mathcal{P}_0=\{(H_1,\dots,H_5,Z)\in\mathcal{P}_1:\mathcal{Q}(H_1,\dots,H_5,Z)\neq 0\}$$

在 $\mathcal{P}_1$. 中是开且稠密的

证明. 只需证明多项式 $\mathcal{J}_i$ 或多项式 $\mathcal{N}_i$ 在 $\mathcal{P}_1$. 上都不恒为零。尽管每个族中的多项式形式各异，但这些差异对相关计算影响甚微。因此，只需证明 $\mathcal{J}_1\neq 0$ 和 $\mathcal{N}_1\neq 0$。

(I) $\mathcal{J}_1\neq 0$.**的证明**

对于 $\mathbf{H}=(H_1,\dots,H_5)\in(\mathbb{S}^{2n\times 2n})^5$和 $Z=(Z',\boldsymbol{\kappa})\in\mathbb{R}^{10n-5}\times\mathbb{R}^5$,，定义

$$\theta_j=\theta_j(H_j,Z)=H_j\zeta_j^1(Z)-\zeta_j^2(Z)\quad(1\le j\le 5)$$

and

$$J(\mathbf{H},Z)=\begin{bmatrix} D'\theta_1 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ D'\theta_2 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0\\ D'\theta_3 & 0 & 0 & \rho_3 & 0 & 0\\ D'\theta_4 & 0 & 0 & 0 & \rho_4 & 0\\ D'\theta_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_5 \end{bmatrix},$$

其中 $D'\theta_j=\frac{\partial\theta_j}{\partial Z'}=H_jD'\zeta_j^1(Z)-D'\zeta_j^2(Z)$, $\rho_j=\rho_j(H_j,Z')=\frac{\partial\theta_j}{\partial\kappa_j}=H_jh_j^1(Z')-h_j^2(Z')$; 因此 s

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{H},Z)=\det J(\mathbf{H},Z).$$

由于 $h_1+\cdots+h_5=0$, 我们可以写成

$$\begin{cases} \theta_1=\kappa_1H_1h_1^1-\kappa_1h_1^2,\\ \theta_2=H_2(h_1^1+\kappa_2h_2^1)-h_1^2-\kappa_2h_2^2,\\ \theta_3=H_3(h_1^1+h_2^1+\kappa_3h_3^1)-h_1^2-h_2^2-\kappa_3h_3^2,\\ \theta_4=H_4[(\kappa_4-1)h_4^1-h_5^1]-(\kappa_4-1)h_4^2+h_5^2,\\ \theta_5=(\kappa_5-1)H_5h_5^1-(\kappa_5-1)h_5^2. \end{cases}\tag{5.48}$$

注意, θ_1 和 θ_5 各包含两个 h_i^j, 而 θ_2 和 θ_4 各包含四个 h_i^j, θ_3 则包含六个 h_i^j。我们的目标是找到 θ_i 的一些线性组合（其系数与 Z' 无关）, 使其包含更少的 h_i^j 项。为此, 令

$$\mathrm{K}=\left\{\boldsymbol{\kappa}=(\kappa_1,\dots,\kappa_5)\in\mathbb{R}^5:\kappa_1\kappa_2\kappa_3(\kappa_4-1)(\kappa_5-1)\neq0\right\}$$

并且, 对于 $\boldsymbol{\kappa}\in\mathrm{K}$,

$$M_1=\frac{H_2-H_1}{\kappa_2},\quad M_2=\frac{H_3-H_1}{\kappa_3}-\frac{H_2-H_1}{\kappa_2\kappa_3},\quad M_3=\frac{H_3-H_2}{\kappa_3},\quad M_4=\frac{H_5-H_4}{\kappa_4-1}.$$

由 (5.48) 可得

$$\begin{cases} \psi_1:=\frac{\theta_1}{\kappa_1}=\rho_1,\\ \psi_2:=\frac{1}{\kappa_2}\big(\theta_2-\frac{\theta_1}{\kappa_1}\big)=\rho_2+M_1h_1^1,\\ \psi_3:=\frac{1}{\kappa_3}\big(\theta_3+\frac{1-\kappa_2}{\kappa_1\kappa_2}\theta_1-\frac{1}{\kappa_2}\theta_2\big)=\rho_3+M_2h_1^1+M_3h_2^1,\\ \psi_4:=\frac{1}{\kappa_4-1}\big(\theta_4+\frac{\theta_5}{\kappa_5-1}\big)=\rho_4+M_4h_5^1,\\ \psi_5:=\frac{\theta_5}{\kappa_5-1}=\rho_5. \end{cases}\tag{5.49}$$

下文中, 若矩阵 A 和 B 具有相同的秩, 我们记为 $A\approx B$。于是, 根据（5.49）中的线性关系对矩阵 J（$\mathbf{H}$ Z）进行初等变换, 可得

$$J(\mathbf{H},Z)\approx A(\mathbf{H},Z)=\begin{bmatrix} D'\psi_1 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ D'\psi_2 & -\frac{\rho_1}{\kappa_2} & \rho_2 & 0 & 0 & 0\\ D'\psi_3 & \frac{(1-\kappa_2)\rho_1}{\kappa_2\kappa_3} & -\frac{\rho_2}{\kappa_3} & \rho_3 & 0 & 0\\ D'\psi_4 & 0 & 0 & 0 & \rho_4 & \frac{\rho_5}{\kappa_4-1}\\ D'\psi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_5 \end{bmatrix}.\tag{5.50}$$

为在 $\mathbb{S}^{2n\times2n}$, 中选取某些特殊的 H_j, 对于 $E=(\epsilon_{k\ell})\in\mathbb{R}^{2\times n}$, 我们定义 $H(E)\in\mathbb{S}^{2n\times2n}$ 为

$$H(E)_{k\ell}^{rs}=\epsilon_{k\ell}\delta_{(k\ell)}^{(rs)}=\begin{cases}\text{for all } r,k=1,2 \text{ and } 1\le s,\ell\le n,\\ 0\text{; 否则如此。对于每个 } 1\le j\le5 \text{ 以及 } \boldsymbol{\epsilon}^j=\end{cases}$$

其中, 若 $(r,s)=(k,\ell)$, 则 $\delta_{(k\ell)}^{(rs)}$

$(\epsilon_{11}^j,\epsilon_{12}^j,\epsilon_{21}^j,\epsilon_{22}^j,\epsilon_j)\in\mathbb{R}^5$,, 令

$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{\epsilon}^1,\dots,\boldsymbol{\epsilon}^5),\ E^j=\begin{bmatrix}\epsilon_{11}^j & \epsilon_{12}^j & \epsilon_j & \cdots & \epsilon_j\\ \epsilon_{21}^j & \epsilon_{22}^j & \epsilon_j & \cdots & \epsilon_j\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times n}\ \text{ and }\ H_j=H(E^j).\tag{5.51}$$

令 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon},Z)=A(\mathbf{H}\ Z)$, 其中 $\mathbf{H}=(H_1,\dots,H_5)$ 由上文定义的 $H_j=H(E^j)$ 给出。对于这样的H_j, 上面的量 M_i为

$$(M_i)_{k\ell}^{rs}=\begin{cases}\mu_{k\ell}^i\,\delta_{(k\ell)}^{(rs)} & (r,k=1,2;\ 1\le s,\ell\le2),\\ \mu_i\,\delta_{(k\ell)}^{(rs)} & (r,k=1,2;\ 3\le s,\ell\le n),\end{cases}\tag{5.52}$$

其中 $\mu_i \in \mathbb{R}$ 和 $(\mu^i_{k\ell}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是相应的量。特别地,

$$\mu_1 = \frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\kappa_2},\ \ \mu_2 = \frac{\epsilon_3-\epsilon_1}{\kappa_3} - \frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\kappa_2\kappa_3},\ \ \mu_3 = \frac{\epsilon_3-\epsilon_2}{\kappa_3} \ \text{ and } \ \mu_4 = \frac{\epsilon_5-\epsilon_4}{\kappa_4-1}. \tag{5.53}$$

令 $\mathcal{S}$ 为 $Z' = (p_1,\ p_2,\ q_3,\ q_4,\ \mathbf{x}_3,\ \bar{}\mathbf{x}_4, \mathbf{y}^1_1, \mathbf{y}^2_1, \mathbf{y}^1_2, \mathbf{y}^2_2, \mathbf{y}^1_3, \mathbf{y}_{23},\ \bar{}\mathbf{y}_{15},\ \bar{}\mathbf{y}^2_5) \in \mathbb{R}^{10n-5}$ 与

$$\bar{\mathbf{x}}_3 = \bar{\mathbf{x}}_4 = \bar{\mathbf{y}}^1_1 = \bar{\mathbf{y}}^1_2 = \bar{\mathbf{y}}^1_3 = \bar{\mathbf{y}}^1_5 = \bar{\mathbf{y}}^2_1 = \bar{\mathbf{y}}^2_2 = \bar{\mathbf{y}}^2_3 = \bar{\mathbf{y}}^2_5 = \bar{\mathbf{0}}.$$

那么 $\mathcal{S} \approx \mathbb{R}^{15}$. 对于所有 $Z' \in \mathbb{R}^{10n-5}$、$1 \le j \le 5$、$k = 1,\ 2$ 和 $1 \le \ell \le n$,

$$(h^2_j)_{k\ell}(Z') = \tilde{\alpha}^\ell_{r_j}(\mathbf{y}^k_j) - (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}^k_j)\delta_{r_j\ell} \quad \text{and} \quad (H_j h^1_j)_{k\ell}(Z') = \begin{cases} \epsilon^j_{k\ell} p^k_j \alpha^\ell_{r_j}(\mathbf{x}_j) & \text{if } 1 \le \ell \le 2, \\ \epsilon_j p^k_j \alpha^\ell_{r_j}(\mathbf{x}_j) & \text{if } 3 \le \ell \le n, \end{cases} \tag{5.54}$$

其中 $r_1, \dots, r_5 \in \{1,2\}$ 由式 (5.38) 给出。因此,由式 (5.46),

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_k(Z') = \bar{\mathbf{y}}^k_4(Z') = \bar{\mathbf{0}} \ \ (k = 1,2), \\ (\rho_j)_{k\ell}(Z') = 0 \ \ (1 \le j \le 5;\ k = 1,2;\ 3 \le \ell \le n) \end{cases} \qquad \forall\, Z' \in \mathcal{S}. \tag{5.55}$$

现在考虑方程组

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}, Z)C = 0, \tag{5.56}$$

其中 $C = (C',\ \boldsymbol{\tau}) = (c_1,\ \dots,\ c_{10n-5},\ \tau_1,\ \dots,\ \tau_5) \in \mathbb{R}^{10n}$. 下面,为方便起见,我们记 $Z = (Z',\ \boldsymbol{\kappa}) = (z_1,\ \dots,\ z_{10n-5},\ \kappa_1,\ \dots,\ \kappa_5) \in \mathbb{R}^{10n-5} \times \mathrm{K}$。那么,方程组 (5.56) 可写为

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} \frac{\partial(\psi_1)_{k\ell}}{\partial z_\nu} c_\nu + (\rho_1)_{k\ell}\tau_1 = 0, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} \frac{\partial(\psi_2)_{k\ell}}{\partial z_\nu} c_\nu - \frac{1}{\kappa_2}(\rho_1)_{k\ell}\tau_1 + (\rho_2)_{k\ell}\tau_2 = 0, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} \frac{\partial(\psi_3)_{k\ell}}{\partial z_\nu} c_\nu + \frac{1-\kappa_2}{\kappa_2\kappa_3}(\rho_1)_{k\ell}\tau_1 - \frac{1}{\kappa_3}(\rho_2)_{k\ell}\tau_2 + (\rho_3)_{k\ell}\tau_3 = 0, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} \frac{\partial(\psi_4)_{k\ell}}{\partial z_\nu} c_\nu + (\rho_4)_{k\ell}\tau_4 + \frac{1}{\kappa_4-1}(\rho_5)_{k\ell}\tau_5 = 0, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} \frac{\partial(\psi_5)_{k\ell}}{\partial z_\nu} c_\nu + (\rho_5)_{k\ell}\tau_5 = 0 \qquad \forall\, k = 1,2;\ 1 \le \ell \le n. \end{cases} \tag{5.57}$$

我们证明存在 $\boldsymbol{\varepsilon} \in (\mathbb{R}^5)^5$ 和 $Z = (Z',\ \boldsymbol{\kappa}) \in \mathcal{S} \times \mathrm{K}$,使得 (5.57) 蕴含 $C = 0$;因此,$\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon},\ Z)$ 是非奇异的,且 $\mathcal{J}_1 = \det J(\mathbf{H}\ Z)$ 在 $\mathcal{P}$. 中不恒为零

首先假设 $n \ge 3$. 根据 (5.52) 和 (5.49),对于每个 $k = 1,\ 2$ 和 $3 \le \ell \le n,$,由于 $\mathbf{x}_5 = 2\mathbf{e}_1$ (因此,$x_{5,\ell-1} = 0$),我们有,在 $\mathbb{R}^{10n-5} \times \mathrm{K}$,

$$\begin{aligned} (\psi_1)_{k\ell} &= \epsilon_1 p^k_1 x_{1,\ell-1} - y^k_{1,\ell-1}, \\ (\psi_2)_{k\ell} &= \epsilon_2 p^k_2 x_{2,\ell-1} - y^k_{2,\ell-1} + \mu_1\, p^k_1 x_{1,\ell-1}, \\ (\psi_3)_{k\ell} &= \epsilon_3 p^k_3 x_{3,\ell-1} - y^k_{3,\ell-1} + \mu_2\, p^k_1 x_{1,\ell-1} + \mu_3\, p^k_2 x_{2,\ell-1}, \\ (\psi_4)_{k\ell} &= \epsilon_4 p^k_4 x_{4,\ell-1} - y^k_{4,\ell-1}, \\ (\psi_5)_{k\ell} &= -y^k_{5,\ell-1}. \end{aligned} \tag{5.58}$$

对于 $1 \le d \le 10n-5$, $1 \le s_1 < \cdots < s_d \le 10n-5$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ 和 $Z'_{\mathbf{s}} = (z_{s_1}, \dots, z_{s_d}) \in \mathbb{R}^d$, 我们记 $C'_{Z'_{\mathbf{s}}} = (c_{s_1}, \dots, c_{s_d}) \in \mathbb{R}^d$. 根据 (5.55),对于所有 $3 \le \ell \le n$,方程组 (5.57) 在 $\mathcal{S} \times \mathrm{K}$ 中变为,

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} c_\nu \epsilon_1 p^k_1 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial z_\nu}(Z') - C'_{\bar{\mathbf{y}}^k_1} = \bar{\mathbf{0}}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} c_\nu \Big(\epsilon_2 p^k_2 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_2}{\partial z_\nu} + \mu_1 p^k_1 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial z_\nu}\Big)(Z') - C'_{\bar{\mathbf{y}}^k_2} = \bar{\mathbf{0}}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} c_\nu \Big(\mu_2\, p^k_1 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial z_\nu} + \mu_3\, p^k_2 \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_2}{\partial z_\nu}\Big)(Z') + \epsilon_3 p^k_3 C'_{\bar{\mathbf{x}}_3} - C'_{\bar{\mathbf{y}}^k_3} = \bar{\mathbf{0}}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} c_\nu \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}^k_4}{\partial z_\nu}(Z') - \epsilon_4 p^k_4 C'_{\bar{\mathbf{x}}_4} = \bar{\mathbf{0}}, \\ C'_{\bar{\mathbf{y}}^k_5} = \bar{\mathbf{0}} \end{cases} \qquad \forall\, k = 1,2. \tag{5.59}$$

此外，根据 (5.46)，对于每个 $i,k=1,2,$，我们有

$$\begin{cases} p_3^k(Z')=q_3^1p_1^k+q_3^2p_2^k,\\ p_4^k(Z')=q_4^1p_1^k+q_4^2p_2^k,\\ \bar{\mathbf{x}}_i(Z')=-q_3^i\bar{\mathbf{x}}_3-q_4^i\bar{\mathbf{x}}_4,\\ \bar{\mathbf{y}}_4^k(Z')=-\bar{\mathbf{y}}_1^k-\bar{\mathbf{y}}_2^k-\bar{\mathbf{y}}_3^k-\bar{\mathbf{y}}_5^k \end{cases}\quad \forall\, Z'\in\mathbb{R}^{10n-5}, \tag{5.60}$$

因此，根据 $\mathcal{S}$的定义，我们有

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{x}}_i}{\partial z_\nu}(Z')=-q_3^i\frac{\partial\bar{\mathbf{x}}_3}{\partial z_\nu}-q_4^i\frac{\partial\bar{\mathbf{x}}_4}{\partial z_\nu}\quad\forall\, Z'\in\mathcal{S}\quad(i=1,2;\,\nu=1,\dots,10n-5). \tag{5.61}$$

于是，对于每个 $1\le k\le 2,$ ，(5.59)在 $\mathcal{S}\times$K中变为

$$\begin{cases} \epsilon_1p_1^kq_3^1C'_{\bar{\mathbf{x}}_3}+\epsilon_1p_1^kq_4^1C'_{\bar{\mathbf{x}}_4}+C'_{\bar{\mathbf{y}}_1^k}=\bar{\mathbf{0}},\\ (\epsilon_2p_2^kq_3^2+\mu_1p_1^kq_3^1)C'_{\bar{\mathbf{x}}_3}+(\epsilon_2p_2^kq_4^2+\mu_1p_1^kq_4^1)C'_{\bar{\mathbf{x}}_4}+C'_{\bar{\mathbf{y}}_2^k}=\bar{\mathbf{0}},\\ [(\mu_2-\epsilon_3)p_1^kq_3^1+(\mu_3-\epsilon_3)p_2^kq_3^2]C'_{\bar{\mathbf{x}}_3}+(\mu_2p_1^kq_4^1+\mu_3p_2^kq_4^2)C'_{\bar{\mathbf{x}}_4}+C'_{\bar{\mathbf{y}}_3^k}=\bar{\mathbf{0}},\\ \epsilon_4(q_4^1p_1^k+q_4^2p_2^k)C'_{\bar{\mathbf{x}}_4}+C'_{\bar{\mathbf{y}}_1^k}+C'_{\bar{\mathbf{y}}_2^k}+C'_{\bar{\mathbf{y}}_3^k}+C'_{\bar{\mathbf{y}}_5^k}=\bar{\mathbf{0}},\\ C'_{\bar{\mathbf{y}}_5^k}=\bar{\mathbf{0}}. \end{cases} \tag{5.62}$$

经过简单的消元后，(5.62)得到方程组：

$$\begin{cases} (ap_1^1q_3^1+bp_2^1q_3^2)C'_{\bar{\mathbf{x}}_3}+(cp_1^1q_4^1+dp_2^1q_4^2)C'_{\bar{\mathbf{x}}_4}=\bar{\mathbf{0}},\\ (ap_1^2q_3^1+bp_2^2q_3^2)C'_{\bar{\mathbf{x}}_3}+(cp_1^2q_4^1+dp_2^2q_4^2)C'_{\bar{\mathbf{x}}_4}=\bar{\mathbf{0}}, \end{cases} \tag{5.63}$$

其中， $a,$ $b,$ c 和 d 是由下式给出的数

$$\begin{cases} a=\epsilon_1+\mu_1+\mu_2-\epsilon_3,\quad b=\epsilon_2+\mu_3-\epsilon_3,\\ c=\epsilon_1+\mu_1+\mu_2-\epsilon_4,\quad d=\epsilon_2+\mu_3-\epsilon_4, \end{cases} \tag{5.64}$$

μ_i由(5.53)给出。显然，只要满足以下条件，方程组(5.63)在($C'_{\bar{\mathbf{x}}_3}$, $C'_{\bar{\mathbf{x}}_4}$)中仅有平凡解

$$\det\begin{bmatrix} ap_1^1q_3^1+bp_2^1q_3^2 & cp_1^1q_4^1+dp_2^1q_4^2\\ ap_1^2q_3^1+bp_2^2q_3^2 & cp_1^2q_4^1+dp_2^2q_4^2 \end{bmatrix}=\det(p_1p_2)(adq_3^1q_4^2-bcq_3^2q_4^1)\neq 0;$$

在此情形下，由 (5.62) 可知，对于所有 $k=1,2$ 以及 $i=1,2,3,5.$，我们也有 $C'_{\mathbf{y}_i^k}=\bar{\mathbf{0}}$。因此，若$Z=(Z',\boldsymbol{\kappa})\in\mathcal{S}\times\mathrm{K}$，且 $\epsilon_j\,(1\le j\le 4)$ 满足

$$Q(p_1,p_2,q_3,q_4,\kappa_2,\kappa_3,\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4)=\det(p_1p_2)(adq_3^1q_4^2-bcq_3^2q_4^1)\neq 0, \tag{5.65}$$

那么，对于所有 $k=1,2$ 以及 $i=1,2,3,5.$，都有 $C'_{\bar{\mathbf{x}}_3}=C'_{\bar{\mathbf{x}}_4}=C'_{\mathbf{y}_i^k}=\bar{\mathbf{0}}$。显然， Q 是一个非零有理函数，其分母仅为 (κ_2,κ_3) 的多项式；因此，满足 (5.65) 的 $\mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon},Z',\boldsymbol{\kappa})\in\mathbb{R}^{25}\times\mathcal{S}\times$K 构成 (45 维) 开集 $\mathbb{R}^{25}\times\mathcal{S}\times\mathrm{K}$ 的一个开稠密子集。

现在假设 $n\ge 2.$ 重新标记

$$(z_1,\dots,z_{15})=(p_1,p_2,q_3,q_4,x_{3,1},y_{1,1}^1,y_{1,1}^2,y_{2,1}^1,y_{2,1}^2,y_{3,1}^1,y_{3,1}^2)=:Z_{\mathcal{S}}\in\mathbb{R}^{15}$$

以及相应的（c_1，.....， c_{15}）$=C'_{Z_{\mathcal{S}}}$，带有（$\boldsymbol{\varepsilon}$， Z'， $\boldsymbol{\kappa}$）$\in\mathcal{R}$ 的方程组（5.57）化为

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{15}\frac{\partial(\psi_1)_{k\ell}}{\partial z_\nu}c_\nu+(\rho_1)_{k\ell}\tau_1=0,\\ \sum\limits_{\nu=1}^{15}\frac{\partial(\psi_2)_{k\ell}}{\partial z_\nu}c_\nu-\frac{1}{\kappa_2}(\rho_1)_{k\ell}\tau_1+(\rho_2)_{k\ell}\tau_2=0,\\ \sum\limits_{\nu=1}^{15}\frac{\partial(\psi_3)_{k\ell}}{\partial z_\nu}c_\nu+\frac{1-\kappa_2}{\kappa_2\kappa_3}(\rho_1)_{k\ell}\tau_1-\frac{1}{\kappa_3}(\rho_2)_{k\ell}\tau_2+(\rho_3)_{k\ell}\tau_3=0,\quad(k,\ell=1,2).\\ \sum\limits_{\nu=1}^{15}\frac{\partial(\psi_4)_{k\ell}}{\partial z_\nu}c_\nu+(\rho_4)_{k\ell}\tau_4+\frac{1}{\kappa_4-1}(\rho_5)_{k\ell}\tau_5=0,\\ \sum\limits_{\nu=1}^{15}\frac{\partial(\psi_5)_{k\ell}}{\partial z_\nu}c_\nu+(\rho_5)_{k\ell}\tau_5=0 \end{cases} \tag{5.66}$$

请注意，条件 (5.66) 本身是关于 $(c_1,\dots,c_{15},\tau_1,\dots,\tau_5).$ 的一个 20×20 线性系统。已经通过 [40] （使用 MATLAB）确认，即使 Z 取为上文 (5.44) 中给出的特定 $Z_0^\star$

（它可以对某些 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4$满足 (5.65)），也存在 $(\epsilon^j_{k\ell}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}(1 \le j \le 5)$，使得方程组 (5.66) 仅有平凡解。

这最终证明了 $\mathcal{J}_1 \neq 0.$

(II) $\mathcal{N}_1 \neq 0$.**的证明**

与第（I）部分一样，对于 $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_5)$ 和 $Z = (Z', \boldsymbol{\kappa})$，我们对 $\theta_j(H_j, Z)$ $\rho_j(H_j, Z')$、$J(\mathbf{H}\ Z)$, 使用相同的记号，并令 $B_1(\mathbf{H})$ 由 (5.31) 定义，其中 $N = 5.$ 由于 $f_1^1(Z) = \kappa_1 h_1^1(Z'),$，我们有

$$B_1(\mathbf{H})Df_1^1(Z) = \begin{bmatrix} O & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_1(H_1-H_2)D'h_1^1 & (H_1-H_2)h_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_1(H_1-H_3)D'h_1^1 & (H_1-H_3)h_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_1(H_1-H_4)D'h_1^1 & (H_1-H_4)h_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_1(H_1-H_5)D'h_1^1 & (H_1-H_5)h_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，使用上文定义的相同函数 ψ_i ,

$$J(\mathbf{H},Z) + B_1(\mathbf{H})Df_1^1(Z) = \begin{bmatrix} D'\theta_1 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D'\theta_2 + \kappa_1(H_1-H_2)D'h_1^1 & (H_1-H_2)h_1^1 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ D'\theta_3 + \kappa_1(H_1-H_3)D'h_1^1 & (H_1-H_3)h_1^1 & 0 & \rho_3 & 0 & 0 \\ D'\theta_4 + \kappa_1(H_1-H_4)D'h_1^1 & (H_1-H_4)h_1^1 & 0 & 0 & \rho_4 & 0 \\ D'\theta_5 + \kappa_1(H_1-H_5)D'h_1^1 & (H_1-H_5)h_1^1 & 0 & 0 & 0 & \rho_5 \end{bmatrix}$$

$$\approx B(\mathbf{H},Z) := \begin{bmatrix} D'\psi_1 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D'\psi_2 + N_2D'h_1^1 & N_2h_1^1 - \frac{\rho_1}{\kappa_2} & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ D'\psi_3 + N_3D'h_1^1 & N_3h_1^1 + \frac{(1-\kappa_2)\rho_1}{\kappa_2\kappa_3} & -\frac{\rho_2}{\kappa_3} & \rho_3 & 0 & 0 \\ D'\psi_4 + N_4D'h_1^1 & N_4h_1^1 & 0 & 0 & \rho_4 & \frac{\rho_5}{\kappa_4-1} \\ D'\psi_5 + N_5D'h_1^1 & N_5h_1^1 & 0 & 0 & 0 & \rho_5 \end{bmatrix},$$

其中

$$N_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}(H_1-H_2),\ \ N_3 = \frac{\kappa_1}{\kappa_3}[(H_1-H_3) - \frac{H_1-H_2}{\kappa_2}],$$

$$N_4 = \frac{\kappa_1}{\kappa_4-1}[(H_1-H_4) + \frac{H_1-H_5}{\kappa_5-1}],\ \ N_5 = \frac{\kappa_1}{\kappa_5-1}(H_1-H_5).$$

为简便起见，我们记

$$B(\mathbf{H},Z) = \begin{bmatrix} D'\psi_1' & \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D'\psi_2' & \phi_2 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ D'\psi_3' & \phi_3 & -\frac{\rho_2}{\kappa_3} & \rho_3 & 0 & 0 \\ D'\psi_4' & \phi_4 & 0 & 0 & \rho_4 & \frac{\rho_5}{\kappa_4-1} \\ D'\psi_5' & \phi_5 & 0 & 0 & 0 & \rho_5 \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} \psi_1' = \psi_1, & \phi_1 = \rho_1, \\ \psi_2' = \psi_2 + N_2h_1^1, & \phi_2 = N_2h_1^1 - \frac{\rho_1}{\kappa_2}, \\ \psi_3' = \psi_3 + N_3h_1^1, & \phi_3 = N_3h_1^1 + \frac{(1-\kappa_2)\rho_1}{\kappa_2\kappa_3}, \\ \psi_4' = \psi_4 + N_4h_1^1, & \phi_4 = N_4h_1^1, \\ \psi_5' = \psi_5 + N_5h_1^1, & \phi_5 = N_5h_1^1. \end{cases}$$

对于 $\boldsymbol{\varepsilon} \in (\mathbb{R}^5)^5$ 和 $Z = (Z',\ \boldsymbol{\kappa}) = (z_1,\ \dots,\ z_{10n-5},\ \kappa_1,\ \dots,\ \kappa_5) \in \mathcal{S}\times \mathrm{K}$, 令 $\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon},\ Z) = B(\mathbf{H}\ Z)$, 其中$\mathbf{H} = (H_1,\ \dots,\ H_5)$, 其中 $H_j = H(E^j)$ 由 (5.51) 定义。则上述 quantities N_i's 为

$$(N_i)^{rs}_{k\ell} = \begin{cases} \lambda^i_{k\ell}\,\delta^{(rs)}_{(k\ell)} & (r,k=1,2;\ 1\le s,\ell\le 2), \\ \lambda_i\,\delta^{(rs)}_{(k\ell)} & (r,k=1,2;\ 3\le s,\ell\le n) \end{cases} \quad \forall\, 2\le i\le 5, \tag{5.67}$$

其中，$\lambda_i \in \mathbb{R}$ 和 $(\lambda^i_{k\ell}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是相应的量。特别是,

$$\begin{aligned} &\lambda_2 = \frac{\kappa_1(\epsilon_1-\epsilon_2)}{\kappa_2},\quad \lambda_3 = \frac{\kappa_1}{\kappa_3}[(\epsilon_1-\epsilon_3) - \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\kappa_2}], \\ &\lambda_4 = \frac{\kappa_1}{\kappa_4-1}[(\epsilon_1-\epsilon_4) + \frac{\epsilon_1-\epsilon_5}{\kappa_5-1}],\quad \lambda_5 = \frac{\kappa_1(\epsilon_1-\epsilon_5)}{\kappa_5-1}. \end{aligned} \tag{5.68}$$

与第（I）部分一样，我们证明存在 $\boldsymbol{\varepsilon} \in （\mathbb{R}^5）^5$ 和 $Z = （Z', \boldsymbol{\kappa}） \in \mathcal{S} \times \mathbf{K}$，使得如果 $C = （c_1, \ldots, c_{10n-5}, \tau_1, \ldots, \tau_5 ） \in \mathbb{R}^{10n}$ 满足

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}, Z)C = 0, \tag{5.69}$$

于是 $C = 0$；因此， $\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}, Z)$ 是非奇异的，且 $\mathcal{N}_1 \neq 0$ 在 $\mathcal{P}_1$. 上。注意，(5.69) 可以写成

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} \frac{\partial(\psi_1')_{k\ell}}{\partial z_\nu} c_\nu + (\phi_1)_{k\ell}\tau_1 = 0, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} \frac{\partial(\psi_2')_{k\ell}}{\partial z_\nu} c_\nu + (\phi_2)_{k\ell}\tau_1 + (\rho_2)_{k\ell}\tau_2 = 0, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} \frac{\partial(\psi_3')_{k\ell}}{\partial z_\nu} c_\nu + (\phi_3)_{k\ell}\tau_1 - \frac{1}{\kappa_3}(\rho_2)_{k\ell}\tau_2 + (\rho_3)_{k\ell}\tau_3 = 0, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} \frac{\partial(\psi_4')_{k\ell}}{\partial z_\nu} c_\nu + (\phi_4)_{k\ell}\tau_1 + (\rho_4)_{k\ell}\tau_4 + \frac{1}{\kappa_4 - 1}(\rho_5)_{k\ell}\tau_5 = 0, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} \frac{\partial(\psi_5')_{k\ell}}{\partial z_\nu} c_\nu + (\phi_5)_{k\ell}\tau_1 + (\rho_5)_{k\ell}\tau_5 = 0 \qquad \forall\, k = 1, 2;\ 1 \le \ell \le n. \end{cases} \tag{5.70}$$

首先假　设 $n \geq 3.$。由 (5.58) 和 (5.67)，对每个 $k = 1,$ 2 和 $3 \leq \ell \leq n,$ ，我们在 $\mathbb{R}^{10n-5} \times$K 中有　　，

$$\begin{aligned} (\psi_1')_{k\ell} &= \epsilon_1 p_1^k x_{1,\ell-1} - y_{1,\ell-1}^k, \\ (\psi_2')_{k\ell} &= \epsilon_2 p_2^k x_{2,\ell-1} - y_{2,\ell-1}^k + (\mu_1 + \lambda_2)\, p_1^k x_{1,\ell-1}, \\ (\psi_3')_{k\ell} &= \epsilon_3 p_3^k x_{3,\ell-1} - y_{3,\ell-1}^k + (\mu_2 + \lambda_3)\, p_1^k x_{1,\ell-1} + \mu_3\, p_2^k x_{2,\ell-1}, \\ (\psi_4')_{k\ell} &= \epsilon_4 p_4^k x_{4,\ell-1} - y_{4,\ell-1}^k + \lambda_4 p_1^k x_{1,\ell-1}, \\ (\psi_5')_{k\ell} &= -y_{5,\ell-1}^k + \lambda_5 p_1^k x_{1,\ell-1}. \end{aligned}$$

注意，对于所有 $Z' \in \mathcal{S}$ 以及所有 $2 \leq j \leq 5$、 $1 \leq i \leq 5$、 $k = 1,$ 2 和$3 \leq \ell \leq n.$ ，$(N_j h_1^1(Z'))_{k\ell} = (\rho_i)_{k\ell} = 0$ 。因此，对所有 $3 \leq \ell \leq n$ ，方程组 (5.70) 在 $\mathcal{S} \times$K 中化为：对每个 $1 \leq k \leq 2,$

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} c_\nu \epsilon_1 p_1^k \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial z_\nu}(Z') - C'_{\bar{\mathbf{y}}_1^k} = \bar{\mathbf{0}}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} c_\nu \Big(\epsilon_2 p_2^k \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_2}{\partial z_\nu} + (\mu_1 + \lambda_2) p_1^k \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial z_\nu} \Big)(Z') - C'_{\bar{\mathbf{y}}_2^k} = \bar{\mathbf{0}}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} c_\nu \Big((\mu_2 + \lambda_3)\, p_1^k \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial z_\nu} + \mu_3\, p_2^k \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_2}{\partial z_\nu} \Big)(Z') + \epsilon_3 p_3^k C'_{\bar{\mathbf{x}}_3} - C'_{\bar{\mathbf{y}}_3^k} = \bar{\mathbf{0}}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} c_\nu \Big(\lambda_4 p_1^k \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial z_\nu} - \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_4^k}{\partial z_\nu} \Big)(Z') + \epsilon_4 p_4^k C'_{\bar{\mathbf{x}}_4} = \bar{\mathbf{0}}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{10n-5} c_\nu \lambda_5 p_1^k \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}{\partial z_\nu}(Z') - C'_{\bar{\mathbf{y}}_5^k} = \bar{\mathbf{0}}. \end{cases} \tag{5.71}$$

如上　利用 (5.46)、(5.60) 和 (5.61)，方程组 (5.71) 在 $\mathcal{S} \times$K 中对每个 $1 \leq k \leq$变为　　2,

$$\begin{cases} \epsilon_1 p_1^k q_3^1 C'_{\bar{\mathbf{x}}_3} + \epsilon_1 p_1^k q_4^1 C'_{\bar{\mathbf{x}}_4} + C'_{\bar{\mathbf{y}}_1^k} = \bar{\mathbf{0}}, \\ [\epsilon_2 p_2^k q_3^2 + (\mu_1 + \lambda_2) p_1^k q_3^1] C'_{\bar{\mathbf{x}}_3} + [\epsilon_2 p_2^k q_4^2 + (\mu_1 + \lambda_2) p_1^k q_4^1] C'_{\bar{\mathbf{x}}_4} + C'_{\bar{\mathbf{y}}_2^k} = \bar{\mathbf{0}}, \\ [(\mu_2 + \lambda_3 - \epsilon_3) p_1^k q_3^1 + (\mu_3 - \epsilon_3) p_2^k q_3^2] C'_{\bar{\mathbf{x}}_3} + [(\mu_2 + \lambda_3) p_1^k q_4^1 + \mu_3 p_2^k q_4^2] C'_{\bar{\mathbf{x}}_4} + C'_{\bar{\mathbf{y}}_3^k} = \bar{\mathbf{0}}, \\ \lambda_4 p_1^k q_3^1 C'_{\bar{\mathbf{x}}_3} + [(\lambda_4 + \epsilon_4) q_4^1 p_1^k + \epsilon_4 q_4^2 p_2^k] C'_{\bar{\mathbf{x}}_4} + C'_{\bar{\mathbf{y}}_1^k} + C'_{\bar{\mathbf{y}}_2^k} + C'_{\bar{\mathbf{y}}_3^k} + C'_{\bar{\mathbf{y}}_5^k} = \bar{\mathbf{0}}, \\ \lambda_5 p_1^k q_3^1 C'_{\bar{\mathbf{x}}_3} + \lambda_5 p_1^k q_4^1 C'_{\bar{\mathbf{x}}_4} + C'_{\bar{\mathbf{y}}_5^k} = \bar{\mathbf{0}}. \end{cases} \tag{5.72}$$

同样，经过简单的消元后，(5.72) 化简为方程组：

$$\begin{cases} (\alpha p_1^1 q_3^1 + \beta p_2^1 q_3^2) C'_{\bar{\mathbf{x}}_3} + (\gamma p_1^1 q_4^1 + \delta p_2^1 q_4^2) C'_{\bar{\mathbf{x}}_4} = \bar{\mathbf{0}}, \\ (\alpha p_1^2 q_3^1 + \beta p_2^2 q_3^2) C'_{\bar{\mathbf{x}}_3} + (\gamma p_1^2 q_4^1 + \delta p_2^2 q_4^2) C'_{\bar{\mathbf{x}}_4} = \bar{\mathbf{0}}, \end{cases} \tag{5.73}$$

其中， α、 β、 γ和 δ是由下式给出的数

$$\begin{cases} \alpha = \epsilon_1 + \mu_1 + \mu_2 - \epsilon_3 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_4, \quad \beta = \epsilon_2 + \mu_3 - \epsilon_3, \\ \gamma = \epsilon_1 + \mu_1 + \mu_2 - \epsilon_4 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_4, \quad \delta = \epsilon_2 + \mu_3 - \epsilon_4, \end{cases}$$

其中 μ_i 和 λ_j 由（5.53）和（5.68）定义。因此，只要满足以下条件，（5.73）在（$C'_{\bar{\mathbf{x}}_3}$、$C'_{\bar{\mathbf{x}}_4}$）中仅有平凡解

$$\det\begin{bmatrix}\alpha p_1^1 q_3^1+\beta p_2^1 q_3^2 & \gamma p_1^1 q_4^1+\delta p_2^1 q_4^2\\ \alpha p_1^2 q_3^1+\beta p_2^2 q_3^2 & \gamma p_1^2 q_4^1+\delta p_2^2 q_4^2\end{bmatrix}=\det(p_1p_2)(\alpha\delta q_3^1 q_4^2-\beta\gamma q_3^2 q_4^1)\neq 0;$$

在这种情况下，由（5.72）可知，对于所有 $k=1,2$ 和 $i=1,2,3,5.$，我们也有 $C'_{\mathbf{y}_i^k}=\bar{\mathbf{0}}$。因此，若$Z=(Z',\boldsymbol{\kappa})\in\mathcal{S}\times\mathrm{K}$ 且 $\epsilon_j\,(1\le j\le 5)$ 满足

$$Q_1(p_1,p_2,q_3,q_4,\boldsymbol{\kappa},\epsilon_1,\dots,\epsilon_5)=\det(p_1p_2)(\alpha\delta q_3^1q_4^2-\beta\gamma q_3^2q_4^1)\neq 0, \tag{5.74}$$

那么，对于所有 $k=1,2$ 和 $i=1,2,3,5.$，显然 Q_1 是一个非零有理函数，其分母仅为关于 $\boldsymbol{\kappa}$ 的多项式；因此，在（45 维）开集 $\mathbb{R}^{25}\times\mathcal{S}\times\mathrm{K}$ 中，满足（5.74）的 $(\boldsymbol{\varepsilon},Z',\boldsymbol{\kappa})\in\mathbb{R}^{25}\times\mathcal{S}\times\mathrm{K}$ 的集合 $\mathcal{R}_1$ 是一个开稠密子集。

现在假设 $n\ge 2.$，则 (5.70) 在 $\mathcal{R}_1$ 中化为一个 20×20 线性系统

$$\begin{cases}\sum\limits_{\nu=1}^{15}\frac{\partial(\psi_1')_{k\ell}}{\partial z_\nu}c_\nu+(\phi_1)_{k\ell}\tau_1=0,\\ \sum\limits_{\nu=1}^{15}\frac{\partial(\psi_2')_{k\ell}}{\partial z_\nu}c_\nu+(\phi_2)_{k\ell}\tau_1+(\rho_2)_{k\ell}\tau_2=0,\\ \sum\limits_{\nu=1}^{15}\frac{\partial(\psi_3')_{k\ell}}{\partial z_\nu}c_\nu+(\phi_3)_{k\ell}\tau_1-\frac{1}{\kappa_3}(\rho_2)_{k\ell}\tau_2+(\rho_3)_{k\ell}\tau_3=0,\\ \sum\limits_{\nu=1}^{15}\frac{\partial(\psi_4')_{k\ell}}{\partial z_\nu}c_\nu+(\phi_4)_{k\ell}\tau_1+(\rho_4)_{k\ell}\tau_4+\frac{1}{\kappa_4-1}(\rho_5)_{k\ell}\tau_5=0,\\ \sum\limits_{\nu=1}^{15}\frac{\partial(\psi_5')_{k\ell}}{\partial z_\nu}c_\nu+(\phi_5)_{k\ell}\tau_1+(\rho_5)_{k\ell}\tau_5=0\qquad\forall\,1\le k,\ell\le 2,\end{cases} \tag{5.75}$$

在 $(c_1,\dots,c_{15},\tau_1,\dots,\tau_5)\in\mathbb{R}^{20}$。该系统的系数矩阵的行列式是一个有理函数

$$Q_2(p_1,p_2,q_3,q_4,x_{3,1},y_{1,1}^1,y_{1,1}^2,y_{2,1}^1,y_{2,1}^2,y_{3,1}^1,y_{3,1}^2,\boldsymbol{\kappa},(\epsilon_{k\ell}^j)_{k,\ell=1,2;1\le j\le 5}),$$

其分母是一个 $\boldsymbol{\kappa}.$ 的多项式。使用特定参数进行计算，并满足限制条件 $\boldsymbol{\kappa}\in\mathrm{K}$，将表明 $Q_2\not\equiv 0.$。因此，满足 $Q_2\neq 0$ 的 $(\boldsymbol{\varepsilon},Z',\boldsymbol{\kappa})\in\mathbb{R}^{25}\times\mathcal{S}\times\mathrm{K}$ 的集合 $\mathcal{R}_2$ 是 $\mathbb{R}^{25}\times\mathcal{S}\times\mathrm{K}$ 的一个开稠密子集。对于 $\mathcal{R}_2$ 中的任意参数，系统 (5.75) 仅有平凡解 $(c_1,\dots,c_{15},\tau_1,\dots,\tau_5)=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{20}.$

最后，任意参数 $\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2$ 都会使系统 (5.69) 仅有平凡解；因此 $\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon},Z)$ 是非奇异的，从而证明了 $\mathcal{N}_1\not\equiv 0.$ □

6. Proof of Theorem 2.2

在最后这一节中，我们通过构造定义在 $\mathbb{R}^{2\times n}$ 上的光滑强多凸函数F 来证明定理 2.2，其梯度 $\sigma=DF$ 满足条件 $O_5.$

6.1. 凸函数的构造。 我们首先证明一个关于构造光滑凸函数的有用结果。

引理 6.1. 设 $q\ge 1$ 和 $N\ge 2$ 为整数。假设 $c_j\in\mathbb{R}$ 和 $S_j,T_j\in\mathbb{R}^q\,(j=1,\dots,N)$满足严格不等式：

$$c_i-c_j+S_i\cdot(T_j-T_i)<0\quad\forall\,1\le i\neq j\le N. \tag{6.1}$$

*The*存在一个光滑凸函数 $g\colon\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}$，满足以下性质：

(i) 对于某个数 $0<\epsilon<$ 最小值$_{1\le i\neq j\le N}|T_i-T_j|$,

$$g(t)=c_j+S_j\cdot(t-T_j)\quad\forall\,t\in\mathbb{B}_\epsilon(T_j),\ 1\le j\le N.$$

（ii）存在一个常数 $M>1$，使得对每个 $k=1,\ 2,$ .....

$$|D^kg(t)|\le L_k|t|^{1-k}\quad\forall\,t\in\mathbb{R}^q,\ \ |t|\ge M,$$

其中，D^kg 是 g 的任意 k阶偏导数，$L_k>0$ 是一个常数。

证明。对于每个 $1 \le j \le N$，令

$$h_j(t) = c_j + S_j \cdot (t - T_j) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^q.$$

于是，条件 (6.1) 变为：

$$h_j(T_j) > h_i(T_j) \quad \forall\, 1 \le i \ne j \le N. \tag{6.2}$$

Let

$$A = \max_{1\le i\le N} |S_i|, \;\; B = \max_{1\le i\le N} |T_i|, \;\; K = 1 + (A+1)(B+1) - \min_{1\le i\le N,\, |s|\le B+1} h_i(s),$$

并定义

$$\begin{cases} h_{N+1}(t) = (A+1)|t| - K, \\ f(t) = \max\{h_1(t), \dots, h_N(t), h_{N+1}(t)\} \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^q.$$

那么 $f\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ 是凸的。此外，对所有 $|t| \le B+1$,

$$h_{N+1}(t) \le (A+1)(B+1) - K < \min_{1\le i\le N,\, |s|\le B+1} h_i(s);$$

因此,

$$f(t) = \max_{1\le i\le N} h_i(t) \quad \forall\, |t| \le B+1. \tag{6.3}$$

令 $C = \max_{1\le i\le N} |c_i|$. 那么，对所有 $|t| \ge K + AB + C$ 和 $1 \le j \le N$，有

$$\begin{aligned} h_{N+1}(t) &= A|t| + |t| - K \ge A|t| + AB + C \ge A|t - T_j| - A|T_j| + AB + C \\ &\ge S_j \cdot (t - T_j) + C = h_j(t) - c_j + C \ge h_j(t), \end{aligned}$$

这表明

$$f(t) = h_{N+1}(t) \quad \forall\, |t| \ge K + AB + C. \tag{6.4}$$

因此，根据 (6.2)、(6.3) 和 (6.4)，存在 $\delta \in (0,1)$，使得

$$\begin{cases} \mathbb{B}_\delta(T_i) \cap \mathbb{B}_\delta(T_j) = \emptyset & \forall\, 1 \le i \ne j \le N, \\ f(t) = h_j(t) & \forall\, t \in \mathbb{B}_\delta(T_j),\ 1 \le j \le N, \\ f(t) = h_{N+1}(t) & \forall\, |t| \ge K + AB + C. \end{cases} \tag{6.5}$$

设 $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q)$ 满足

$$\rho(s) \ge 0, \;\; \operatorname{supp}(\rho) \subset \mathbb{B}_1(0), \;\; \int_{\mathbb{R}^q} \rho(s)\, ds = 1, \;\; \int_{\mathbb{R}^q} \rho(s) s\, ds = 0,$$

并设 $\rho_\epsilon(s) = \epsilon^{-q}\rho(s/\epsilon)$，其中 $0 < \epsilon < \delta/2$. 定义

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}^q} f(t-s)\rho_\epsilon(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}^q} f(s)\rho_\epsilon(t-s)\, ds = \int_{\mathbb{B}_\epsilon(t)} f(s)\rho_\epsilon(t-s)\, ds \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^q.$$

则 $g\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ 是一个 C^∞ 凸函数。我们断言 g 满足 (i) 和 (ii)。

首先，设 $j \in \{1, \dots, N\}$ 和 $t \in \mathbb{B}_\epsilon(T_j)$；则 $\mathbb{B}_\epsilon(t) \subset \mathbb{B}_\delta(T_j)$。因此，由 (6.5) 得

$$g(t) = \int_{\mathbb{B}_\epsilon(t)} f(s)\rho_\epsilon(t-s)\, ds = \int_{\mathbb{B}_\epsilon(t)} h_j(s)\rho_\epsilon(t-s)\, ds = h_j(t),$$

验证（i）。

其次，令 $M = K + AB + C + 1$，并令 $t \in \mathbb{R}^q$ 满足 $|t| \ge M$. 于是

$$\mathbb{B}_\epsilon(t) \subset \{s \in \mathbb{R}^q : |s| \ge K + AB + C\};$$

因此，根据（6.5），$f|_{\mathbb{B}_\epsilon(t)} = h_{N+1}|_{\mathbb{B}_\epsilon(t)}$。因此,

$$g(t) = \int_{\mathbb{B}_\epsilon(t)} h_{N+1}(s)\rho_\epsilon(t-s)\, ds = (A+1)\int_{\mathbb{B}_\epsilon(0)} |t-s|\rho_\epsilon(s)\, ds - K \quad \forall\, |t| \ge M.$$

因此，对于每个 $k = 1$，2、.....，我们有

$$D^k g(t) = (A+1)\int_{\mathbb{B}_\epsilon(0)} D_t^k(|t-s|)\rho_\epsilon(s)\, ds \quad \forall\, |t| > M.$$

注意,

$$|D_t^k(|t-s|)| \le C_k|t-s|^{1-k} \le C_k(|t| - |s|)^{1-k} \le 2^{k-1}C_k|t|^{1-k}$$

for 所有 $|t|\ge 1$ 和 $|s|\le \frac{1}{2}$，其中 $C_k>0$ 是一个常数；因此，当 $0<\epsilon<1/2$，可得 t,

$$|D^k g(t)| \le (A+1)\int_{\mathbb{B}_\epsilon(0)} |D_t^k(|t-s|)|\rho_\epsilon(s)\,ds \le (A+1)2^{k-1}C_k|t|^{1-k} \quad \forall\, |t|\ge M,$$

这证明了 (ii)，其中 $L_k=(A+1)2^{k-1}C_k$，从而完成证明。 □

6.2. 支撑 $\mathcal{T}_5$-构型的多凸函数。我们采用第5节的记号。根据 (5.45) 中集合 $\mathcal{Z}_1$ 的定义，选取一个非空有界开集 $\mathcal{Z}_2\subset\subset\mathcal{Z}_1$，使得对所有 $Z\in\mathcal{Z}_2$，条件

$$\begin{cases} |\omega_i^1(Z')-\omega_j^1(Z')|>\sigma_0,\ \ |\zeta_i^1(Z)-\zeta_j^1(Z)|>\sigma_0, \\ c_i-c_j+d_i[\delta(\zeta_j^1(Z))-\delta(\zeta_i^1(Z))] \qquad\qquad \forall\, 1\le i\ne j\le 5, \\ \ +\langle \zeta_i^2(Z)-d_iD\delta(\zeta_i^1(Z)),\zeta_j^1(Z)-\zeta_i^1(Z)\rangle<-\sigma_0 \end{cases} \tag{6.6}$$

对某个常数 $\sigma_0>0$. 成立

引理 6.2。存在 $\epsilon_0\in(0,1)$，使得对每个 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$ 和 $Z\in\mathcal{Z}_2$，都能找到定义在 $\mathbb{R}^{2\times n}\times\mathbb{R}$ 上的光滑凸函数 $G(A,\delta)$ 以及一个数

$$0<\tau<\min_{1\le i\ne j\le 5}|\tilde\zeta_i^1(Z)-\tilde\zeta_j^1(Z)|$$

使得

$$G(\tilde\zeta_i^1(Z))=c_i \ \ and\ \ (G_A,G_\delta)|_{\mathbb{B}_\tau(\tilde\zeta_i^1(Z))}=(Q_i^\epsilon,d_i)\quad (1\le i\le 5), \tag{6.7}$$

其中 $Q_i^\epsilon=\zeta_i^2(Z)-\epsilon\zeta_i^1(Z)-d_iD\delta(\zeta_i^1(Z))$。此外，

$$|D^kG(A,\delta)|\le L_k(|A|+|\delta|)^{1-k}\quad \forall\,|A|+|\delta|\ge M,\ \ k\ge 1, \tag{6.8}$$

其中 $M>1$ 和 $L_k>0$ 是一些常数。

证明。由 (6.6)，对每个 $1\le i\ne j\le 5$ 和 $Z\in\mathcal{Z}_2$，我们有

$$\begin{aligned} &c_i-c_j+\langle Q_i^\epsilon,\zeta_j^1(Z)-\zeta_i^1(Z)\rangle+d_i[\delta(\zeta_j^1(Z))-\delta(\zeta_i^1(Z))] \\ &\quad=c_i-c_j+\langle\zeta_i^2(Z)-d_iD\delta(\zeta_i^1(Z)),\zeta_j^1(Z)-\zeta_i^1(Z)\rangle \\ &\qquad+d_i[\delta(\zeta_j^1(Z))-\delta(\zeta_i^1(Z))]-\epsilon\langle\zeta_i^1(Z),\zeta_j^1(Z)-\zeta_i^1(Z)\rangle \\ &\quad\le-\sigma_0-\epsilon\langle\zeta_i^1(Z),\zeta_j^1(Z)-\zeta_i^1(Z)\rangle \\ &\quad\le-\sigma_0+J\epsilon<0\quad \text{if}\ \ 0<\epsilon<\epsilon_0, \end{aligned}$$

其中

$$J=\max_{1\le i\ne j\le 5}\max_{\bar{\mathcal{Z}}_2}|\langle\zeta_i^1,\zeta_j^1-\zeta_i^1\rangle|+\sigma_0+1,\quad \epsilon_0=\sigma_0/J\in(0,1).$$

因此，对每个 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$ 和 $Z\in\mathcal{Z}_2$，由引理 6.1 可知，存在一个光滑凸函数 $G\colon\mathbb{R}^{2\times n}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 以及一个数 $0<\tau<\min_{1\le i\ne j\le 5}|\tilde\zeta_i^1(Z)-\tilde\zeta_j^1(Z)|$，使其满足 (6.7) 和 (6.8)。□

引理 6.3。设 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$ 和 $Z\in\mathcal{Z}_2$，其中 $\epsilon_0\in(0,1)$ 由引理 *6.2* 给出。令 G 由引理 *6.2* 确定，并定义

$$F_0(A)=\frac{\epsilon}{2}|A|^2+G(\tilde A)\quad \forall\, A\in\mathbb{R}^{2\times n}.$$

那么，存在一个数 $0<s_0<$ 最小值$_{1\le i\ne j\le 5}|\zeta_i^1(Z)-\zeta_j^1(Z)|$，使得对于每个 $1\le i\le 5$,

$$DF_0(A)=\zeta_i^2(Z)+\epsilon(A-\zeta_i^1(Z))+d_iD\delta(A-\zeta_i^1(Z))\quad \forall\, A\in B_{s_0}(\zeta_i^1(Z)). \tag{6.9}$$

特别地，$\zeta_i(Z)\in\mathcal{K}_{F_0}$ 对所有 $1\le i\le 5$.

此外，存在常数 $C_k>0\,(k=1,2,\dots)$ 使得

$$|D^kF_0(A)|\le C_k(|A|+1)\quad \forall\, A\in\mathbb{R}^{2\times n}. \tag{6.10}$$

证明。由引理 6.2，对于每个 $1 \le i \le 5$，我们有 $(G_A, G_\delta)|_{\mathbb{B}_\tau(\tilde{\zeta}_i^1(Z))} = (Q_i^\epsilon, d_i)$，其中 $0 < \tau < \min_{1\le i\ne j\le 5} |\zeta_i^1(Z) - \zeta_j^1(Z)|$ 是引理 6.2 中的数。因此，对于每个满足 $\tilde{A} \in \mathbb{B}_\tau(\tilde{\zeta}_i^1(Z))$，的 $A \in \mathbb{R}^{2\times n}$，我们有

$$DF_0(A) = \epsilon A + Q_i^\epsilon + d_i D\delta(A) = \zeta_i^2(Z) + \epsilon(A - \zeta_i^1(Z)) + d_i D\delta(A - \zeta_i^1(Z)).$$

现在令 $0 < s_0 < \tau$ 满足：对于每个 $1 \le i \le 5$,

$$A \in B_{s_0}(\zeta_i^1(Z)) \implies \tilde{A} \in \mathbb{B}_\tau(\tilde{\zeta}_i^1(Z)),$$

由此可得 (6.9)。特别地，对于每个 $1 \le i \le 5$，由于 $DF_0(\zeta_i^1(Z)) = \zeta_i^2(Z)$，我们有$\zeta_i(Z) = (\zeta_i^1(Z)\ \zeta_i^2(Z)) \in \mathcal{K}_{F_0}$.

为证明 (6.10)，令 $f(A) = G(\tilde{A}) = G(A,\ \delta(A))$ 对所有 $A \in \mathbb{R}^{2\times n} \approx \mathbb{R}^q$，其中 $q = 2n$. 于是$F_0(A) = \frac{\epsilon}{2}|A|^2 + f(A)$。

令 $k \ge 1$ 为一个整数，且 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{Z}_+^q$ 为一个多重指标，满足

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_q = k;$$

其中 $\mathbb{Z}_+$ 表示所有非负整数的集合。只需证明存在一个常数$L_k > 0$ 使得

$$|D^\alpha f(A)| \le \tilde{L}_k(|A| + 1) \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^q. \tag{6.11}$$

由于对于所有满足 $|\gamma| > 2$ 的 $\gamma \in \mathbb{Z}_+^q$，$D^\gamma \delta(A) = 0$，容易看出

$$D^\alpha f(A) = D^{(\alpha,0)} G(\tilde{A}) + \sum D^{(\beta,\ell)} G(\tilde{A}) D^{\gamma_1}\delta(A) \cdots D^{\gamma_\ell}\delta(A), \tag{6.12}$$

其中，对于所有 $(A,\delta) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R},$，$D^{(\beta,\ell)}G(A,\delta) = D_A^\beta D_\delta^\ell G(A,\delta)$，并且求和遍历满足以下条件的项：$1 \le \ell \le k$ 以及 $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_\ell \in \mathbb{Z}_+^q$

$$\beta + \gamma_1 + \cdots + \gamma_\ell = \alpha \ \text{ and } \ 1 \le |\gamma_j| \le 2 \quad \forall\, 1 \le j \le \ell.$$

注意，对于所有 $A \in \mathbb{R}^q$ 和满足 $1 \le |\gamma| \le 2.$ 的 $\gamma \in \mathbb{Z}_+^q$，$|D^\gamma \delta(A)| \le c_{|\gamma|}|A|^{2-|\gamma|}$。因此，根据（6.8），对于所有满足 $|A| \ge M,$ 的 $A \in \mathbb{R}^q$，我们有

$$\begin{aligned}
|D^\alpha f(A)| &\le L_k|\tilde{A}|^{1-k} + \sum L_{|\beta|+\ell}|\tilde{A}|^{1-|\beta|-\ell} c_{|\gamma_1|}|A|^{2-|\gamma_1|} \cdots c_{|\gamma_\ell|}|A|^{2-|\gamma_\ell|} \\
&\le L_k|A|^{1-k} + \sum L_{|\beta|+\ell}|A|^{1-|\beta|-\ell} c_{|\gamma_1|}|A|^{2-|\gamma_1|} \cdots c_{|\gamma_\ell|}|A|^{2-|\gamma_\ell|} \\
&= L_k|A|^{1-k} + \sum L_{|\beta|+\ell} c_{|\gamma_1|} \cdots c_{|\gamma_\ell|}|A|^{1-|\beta|-\ell}|A|^{2\ell-|\gamma_1|-\cdots-|\gamma_\ell|} \\
&= L_k|A|^{1-k} + \sum L_{|\beta|+\ell} c_{|\gamma_1|} \cdots c_{|\gamma_\ell|}|A|^{1+\ell-k} := \sum_{j=1}^{k+1} \tilde{c}_j |A|^{j-k}.
\end{aligned}$$

因此，如果 $|A| \ge M > 1$，那么 $|A| \ge M$，从而

$$|D^\alpha f(A)| \le \sum_{j=1}^{k+1} \tilde{c}_j |A|^{j-k} \le \Big(\sum_{j=1}^{k+1} \tilde{c}_j\Big)|A|,$$

这就证明了对所有满足 $A \in \mathbb{R}^q$，的情形，(6.11) 成立

$$\tilde{L}_k = \Big(\sum_{j=1}^{k+1} \tilde{c}_j\Big) + \max_{|\beta|=k,\ |A|\le M} |D^\beta f(A)|.$$

□

6.3. **为非退化性扰动** F_0。我们在每个 $\zeta_i^1(Z)$ 附近对引理 6.3 中的函数 F_0 进行扰动，得到一个新的强多凸函数 F，使得

$$(D^2F(\zeta_1^1(Z)), \dots, D^2F(\zeta_5^1(Z)), Z) \in \mathcal{P}_0,$$

其中 $\mathcal{P}_0$ 是定理 5.12 中定义的集合。

为此，设 $B_1(0)$ 是 $\mathbb{R}^{2\times n}$ 中的单位球，并设 $\omega \in C_c^\infty(B_1(0))$ 是一个截断函数，使得 $0 \le \omega \le 1$ 且$\omega|_{B_{1/2}(0)} = 1$.

对于每个 $r>0$ 和 $H=(H^{ij}_{pq})\in\mathbb{S}^{2n\times 2n}$，令

$$V_{H,r}(A)=\frac{1}{2}\omega(A/r)\sum_{i,p=1}^{2}\sum_{j,q=1}^{n}H^{ij}_{pq}a_{ij}a_{pq}\quad\forall\,A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{2\times n};$$

于是 $V_{H,\,r}\in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2\times n})$ 的支集包含于 $B_r(0)$，

$$\begin{aligned}&V_{H,r}(A)=\frac{1}{2}\sum_{i,p=1}^{2}\sum_{j,q=1}^{n}H^{ij}_{pq}a_{ij}a_{pq}\quad\forall\,A=(a_{ij})\in B_{r/2}(0),\ \text{and}\\&|D^2V_{H,r}(A)|\le C_0|H|\quad\forall\,A\in\mathbb{R}^{2\times n},\ \text{where } C_0>0 \text{ is a constant.}\end{aligned}\tag{6.13}$$

由集合 $\mathcal{P}_0$ 在 $\mathcal{P}_1$ 中的稠密性（定理 5.12），我们选取 $(H^0_1,\ .....,\ H^0_5,\ Z_0)$，使得

$$(H^0_1,\dots,H^0_5,Z_0)\in\mathcal{P}_0,\ \ Z_0\in\mathcal{Z}_2\ \ \text{and}\ \ \sum_{j=1}^{5}|H^0_j-\epsilon I-d_jH_0|<\frac{\epsilon}{4C_0},\tag{6.14}$$

其中 $C_0>0$ 是 (6.13) 中的常数。

设 F_0 如引理 6.3 中所定义，其中 $Z=Z_0$. 令

$$\begin{cases}\tilde{H}_j=H^0_j-D^2F_0(\zeta^1_j(Z_0))=H^0_j-\epsilon I-d_jH_0\ \ (1\le j\le 5),\\ s_1=\min\{s_0,\sigma_0\}>0,\end{cases}$$

其中 $s_0>0$ 如引理 6.3 中所给出，其中 $Z=Z_0$，且 $\sigma_0>0$ 如 (6.6) 中所定义。

命题 6.4. 设

$$F(A)=F_0(A)+\sum_{j=1}^{5}V_{\tilde{H}_j,s_1}(A-\zeta^1_j(Z_0))\quad\forall\,A\in\mathbb{R}^{2\times n}.\tag{6.15}$$

于是，

$$\begin{cases}DF(A)=\zeta^2_i(Z_0)+H^0_i(A-\zeta^1_i(Z_0))\quad\forall\,A\in B_{\frac{s_1}{2}}(\zeta^1_i(Z_0)),\ 1\le i\le 5;\\ \textit{in particular, } DF(\zeta^1_i(Z_0))=\zeta^2_i(Z_0)\ \textit{and thus}\ \zeta_i(Z_0)\in\mathcal{K}_F\ (1\le i\le 5),\\ |D^kF(A)|\le C_k(|A|+1)\ \textit{for some } C_k>0\quad\forall\,k\ge 1,\ \ A\in\mathbb{R}^{2\times n}.\end{cases}\tag{6.16}$$

此外，函数

$$g(A)=\frac{\epsilon}{4}|A|^2+\sum_{j=1}^{5}V_{\tilde{H}_j,s_1}(A-\zeta^1_j(Z_0))\quad(A\in\mathbb{R}^{2\times n})$$

在 $\mathbb{R}^{2\times n}$ 上光滑且凸，因此函数 $\tilde{G}(A,\delta)=g(A)+G(A,\delta)$ 在 $\mathbb{R}^{2\times n}\times\mathbb{R}$；因此，

$$F(A)=\frac{\epsilon}{4}|A|^2+\tilde{G}(A,\delta(A))\quad(A\in\mathbb{R}^{2\times n})$$

是强多凸的。

证明。(6.16) 中的性质由 (6.13) 以及引理 6.3 中的性质 (6.9)–(6.10) 得出 .

由 (6.13) 和 (6.14) 可知， g 的凸性成立，因为对于所有 $A\in\mathbb{R}^{2\times n}$.， $D^2g(A)\ge\frac{\epsilon}{4}I$ □

6.4. **定理 2.2 的证明**。令 F 如 (6.15) 所定义。由 (6.16)，我们有

$$D^2F(\zeta_i(Z_0))=H^0_i\quad(1\le i\le 5)\quad\text{and}\quad(H^0_1,\dots,H^0_5,Z_0)\in\mathcal{P}_0.$$

因此，函数 $\sigma=DF$ 满足非退化条件 (5.19) 和 (5.33)，其中 $N=5$.

Let

$$Z_1(\rho)=(Z'_1(\rho),\kappa_1(\rho),\dots,\kappa_5(\rho)):\bar{\mathbb{B}}_{\tau_0}(0)\to\mathcal{B}_{k_0}(Z_0)\subset\mathcal{Z}_2$$

如引理 5.6 中所定义，其中 $\sigma=DF$. 对每个 $1\le i\le 5$ 和 $\rho\in\mathbb{B}_{\tau_0}(0)$, 定义

$$\begin{cases}\gamma_i(\rho)=h_i(Z'_1(\rho)),\\ \pi_1(\rho)=\rho,\ \ \pi_i(\rho)=\rho+\gamma_1(\rho)+\cdots+\gamma_{i-1}(\rho)\ \ (2\le i\le 5),\\ \xi_i(\rho)=\pi_i(\rho)+\kappa_i(\rho)\gamma_i(\rho)\ \ (1\le i\le 5),\end{cases}$$

其中，函数 $\{h_i(Z')\}_{i=1}^5$ 如 (5.14) 中所定义，并且 $N=5$.

现在我们验证 $\sigma = DF$ 满足条件 O_5，其中函数 $\{(\kappa_i(\rho)\ \gamma_i(\rho))\}_{i=}^{5}$ $_1$.

首先，注意到 $\xi_i(\rho)$ 和 $\pi_i(\rho)$ 与 $N = 5.$ 时 (5.26) 中定义的量一致。因此，由 (5.22) 可得,

$$\xi_i(\rho) \in \mathcal{K}_F \quad \forall\, 1 \le i \le 5, \quad \rho \in \bar{\mathbb{B}}_{\tau_0}(0).$$

因此，对于任意 $0 < r_0 \le \tau_0.$，定义 3.3 中的性质 (P1)(i) 均成立

令 $\tau_2 \in (0, \tau_0)$ 和 $\ell_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ 为定理 5.10 中由 $\sigma = DF$ 和 $N = 5.$ 确定的常数。定义

$$\delta_1 = \min_{1\le i\le 5,\, \rho\in\bar{\mathbb{B}}_{\tau_0}(0)} \Big\{1-\ell_0,\ \frac{1}{\kappa_i(\rho)}\Big\} \ \text{ and } \ \delta_2 = \max_{1\le i\le 5,\, \rho\in\bar{\mathbb{B}}_{\tau_0}(0)} \Big\{\ell_0,\ \frac{1}{\kappa_i(\rho)}\Big\}. \tag{6.17}$$

Then

$$0 < \delta_1 \le 1-\ell_0 < \ell_0 \le \delta_2 < 1, \quad \text{and} \quad 1/\delta_2 \le \kappa_i(\rho) \le 1/\delta_1 \quad \forall\, \rho \in \bar{\mathbb{B}}_{\tau_0}(0),\ 1 \le i \le 5.$$

由于对于 $1 \le i \le 5$ 和 $\gamma_i(\rho) = h_i(Z_1'(\rho)) \in \Gamma_{r_i} \subset \Gamma$，

$$\gamma_1(\rho) + \cdots + \gamma_5(\rho) = 0 \quad \forall\, \rho \in \bar{\mathbb{B}}_{\tau_0}(0),$$

由此可得函数

$$(\kappa_i, \gamma_i) \colon \bar{\mathbb{B}}_{\tau_0}(0) \to [1/\delta_2, 1/\delta_1] \times \Gamma, \quad 1 \le i \le 5,$$

对任意 $0 < r_0 \le \tau_0.$，满足定义 3.3 中的条件 (3.18) 和 (3.19)

此外，由于 $Z_0 \in \mathcal{Z}_2$，对于所有 $1 \le i \ne j \le 5.$，我们有 $\pi_i^1(0) \ne \pi_j^1(0)$ 和 $\xi_i^1(0) \ne \xi_j^1(0)$。因此，我们可以选取 $\tau_3 \in (0,\ \tau_2)$，使得

$$\xi_i^1(\bar{\mathbb{B}}_{\tau_3}(0)) \cap \xi_j^1(\bar{\mathbb{B}}_{\tau_3}(0)) = \pi_i^1(\bar{\mathbb{B}}_{\tau_3}(0)) \cap \pi_j^1(\bar{\mathbb{B}}_{\tau_3}(0)) = \emptyset \quad \forall\, 1 \le i \ne j \le 5. \tag{6.18}$$

因此，对于任意 $r_0 \in (0,\ \tau_3].$，定义 3.3 中的性质 (P1)(ii) 均成立

接下来，由于 $0 < \delta_1 \le 1-\ell_0 < \ell_0 \le \delta_2 < 1$，定理 5.10 表明，对于每个 $r \in (0,\ \tau_2]$，集合 $\{S^r(\lambda)\}_{i=1}^5$ 是开集，且 $\lambda \in [0, \delta_1] \cup [\delta_2, 1)$。

此外，由于对于所有，$\xi_i(0) \ne \xi_j(0)$ 且 $\pi_i(0) \ne \pi_j(0)$，我们可以选择$\delta_0 \in (\delta_2,\ 1)$ 和 $r_0 \in (0,\ \tau_3)$，使得对于每个 $\lambda \in \{0\} \cup [\delta_0, 1)$，集合 $\{S^r(\lambda)\}_{i=1}^5$ 两两不相交，并且 $r \in (0,\ r_0].$)。通过这一选择，定义 3.3 的性质 (P2) 得以满足。

因此 ，$\sigma = DF$ 满足条件 O_5，其中函数为 $\{(\kappa_i,\ \gamma_i)\}_{i=1}^5$，常数为

$$0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_0 < 1, \quad r_0 > 0.$$

致谢。 B. Guo 获得了中国国家重点研发计划（2024YFA 1013301）的资助。S. Kim 获得了韩国国家研究基金会（NRF）资助，该基金由韩国政府（科学技术信息通信部）提供（编号：RS-2023-00217116 和编号：RS-2025-16064757）。S. Kim 还感谢韩国高等研究院 KIAS开放中心提供的支持。

References

[1] E. Acerbi 和 N. Fusco, *Semicontinuity problems in the calculus of variations,* 《理性力学与分析档案》，**86**（1984），125–145。[2] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e, 《度量空间及概率测度空间中的梯度流》。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2005。[3] J. M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity,* 《理性力学与分析档案》，**63**（1977），337–403。[4] V. Barbu, 《巴拿赫空间中的单调型非线性微分方程》。施普林格，纽约，2010。[5] H. Bauschke 和 P. Combettes, 《希尔伯特空间中的凸分析与单调算子理论》。第二版。施普林格，查姆，瑞士，2017。[6] V. B¨ogelein、B. Dacorogna、F. Duzaar、P. Marcellini 和 C. Scheven, *Integral convexity and parabolic systems,* 《SIAM 数学分析杂志》，**52**(2)（2020），1489–1525。[7] V. B¨ogelein、F. Duzaar 和 G. Mingione, *The regularity of general parabolic systems with degenerate diffusion,* 《美国数学会回忆录》，**221** 第 1041 号，2013。[8] H. Br´ezis, 《希尔伯特空间中的极大单调算子与压缩半群》。北荷兰数学研究丛书**5**，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1973。[9] T. Buckmaster 和 V. Vicol, *Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equation,* 《数学年刊》**189**（2019），101–144。[10] M. Colombo 和 R. Tione, *Non-classical solutions of the p-Laplace equation,* （2022年1月19日），可见于 arXiv: 2201.07484。[11] D. Cordoba、D. Faraco 和 F. Gancedo, *Lack of uniqueness for weak solutions of the incompressible porous media equation* **200** 3 2011 725 746 ,

《理性力学与分析档案》 () ()，–。

[12] B. Dacorogna, 《变分法的直接方法》, 第二版。Springer-Verlag, 柏林、海德堡、纽约, 2008。[13] B. Dacorogna 和 P. Marcellini, *General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial cases* **178** 1 1997 1 37 , 《数学学报》, () (), –。[14] B. Dacorogna 和 P. Marcellini, 《隐式偏微分方程》。Birkh¨auser Boston, Inc., 马萨诸塞州波士顿, 1999。[15] C. De Lellis 和 L. Sz´ekelyhidi, *The Euler equations as a differential inclusion*, 《数学年刊》170(3)（2009）, 1417–1436。[16] C. De Lellis 和 L. Sz´ekelyhidi, *High dimensionality and h-principle in PDE*, 《美国数学会通报》（新系列）, 54(2)（2017）, 247–282。[17] E. DiBenedetto, 《退化抛物型方程》。施普林格, 1993。[18] L. C. Evans, *Quasiconvexity and partial regularity in the calculus of variations*, 《理性力学与分析档案》, 95（1986）, 227–252。[19] L.C. Evans、O. Savin 和 W. Gangbo, *Diffeomorphisms and nonlinear heat flows*, 《SIAM 数学分析杂志》, 37(3)（2005）, 737–751。[20] M. Gromov, 《偏微分关系》。Springer-Verlag, 柏林, 1986。[21] C. Hamburger, *Quasimomotonicity regularity and duality for nonlinear systems of partial differential equations*, 《纯粹与应用数学年刊》（IV）, 第 CLXIX 卷（1995）, 321–354。[22] C. Hamburger, *Partial regularity of minimizers of polyconvex variational integrals*, 《变分法》18（2003）, 221–241。[23] P. Isett, *A proof of Onsager's conjecture*, 《数学年刊》188(3)（2018）, 871–963。[24] T. Iwaniec, *p-Harmonic tensors and quasiregular mappings*, 《数学年刊》136（1992）, 589–624。[25] C. J. P. Johansson, *Wild solutions to the scalar Euler-Lagrange equations* 2303 07298 1 , 可见于 [ ] 13 2023 arXiv: 。v math.AP Mar [26] S. Kim 和 B. Yan, *Convex integration and infinitely many weak solutions to the Perona-Malik equation in all dimensions* **47** 4 2015 2770 2794 , 《SIAM 数学分析杂志》 () (), –。[27] S. Kim 和 B. Yan, *On Lipschitz solutions for some forward-backward parabolic equations. II: the case against* , 《变分法》 *Fourier* **56** 3 2017 67, 36 () (), 文章页码。[28] S. Kim 和 B. Yan, *On Lipschitz solutions for some forward-backward parabolic equations*, 《庞加莱研究所分析非线性杂志》35(1)（2018）, 65-100。[29] S. Kim 和 B. Yan, *On integral convexity variational solutions and nonlinear semigroups*, 《纯粹与应用数学杂志》（9）194（2025）, 论文编号 103662, 共 37 页。[30] B. Kirchheim、S. M¨uller 和 V. ˇSver´ak, *Studying nonlinear pde by geometry in matrix space*, 载于《几何分析与非线性偏微分方程》, 347–395, 施普林格, 柏林, 2003。[31] O. A. Lady˘zenskaja、V. A. Solonnikov 和 N. N. Ural'ceva, 《线性与拟线性抛物型方程。（俄文）》, S. Smith 英译。数学专著译丛, 第 23 卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1968。[32] M. Lewicka 和 M. R. Pakzad, *Convex integration for the Monge–Ampére equations in two dimensions*, 《偏微分方程分析》10(3)（2017）, 695–727。[33] G. M. Lieberman, 《二阶抛物型偏微分方程》, 世界科学出版社, 新泽西州里弗埃奇, 1996。[34] C. B. Morrey, *Quasiconvexity and the lower semicontinuity of multiple integrals*, 《太平洋数学杂志》2（1952）, 25–53。[35] S. M¨uller、M. Rieger 和 V. ˇSver´ak, *Parabolic equations with nowhere smooth solutions*, 《理性力学与分析档案》177(1)（2005）, 1–20。[36] S. M¨uller 和 V. ˇSver´ak, *Convex integration for Lipschitz mappings and counterexamples to regularity*, 《数学年刊》（2）157(3)（2003）, 715–742。[37] R. Shvydkoy, *Convex integration for a class of active scalar equations*, 《美国数学会杂志》24(4)（2011）, 1159–1174。[38] L. Sz´ekelyhidi, *The regularity of critical points of polyconvex functionals*, 《理性力学与分析档案》172(1)（2004）, 133–152。[39] L. Tartar, *Some remarks on separately convex functions*, 载于《微观结构与相变》, IMA 数学与应用丛书 54（D. Kinderlehrer、R. D. James、M. Luskin 和 J. L. Ericksen 编）, Springer-Verlag, 纽约（1993）, 191–204。[40] B. Yan, *Convex integration for diffusion equations and Lipschitz solutions of polyconvex gradient flows*, 《变分法》（ 2020 59 123 10 1007 00526 020 01785 7 ）, : 。https://doi.org/。/s - - - B. Yan, [41] *On nonuniqueness and nonregularity for gradient flows of polyconvex functionals*, 《变分法》（2024）63:4 https://doi.org/ 10 1007 00526 023 02609 0 。/s - - - B. Yan, [42] *The τ_N-configurations and polyconvex gradient flows*, 《纯粹与应用泛函分析》10(1)（2025）, 173–191。[43] K. Zhang, *On the Dirichlet problem for a class of quasilinear elliptic systems of partial differential equations in divergence form* 1986, , 载于《天津偏微分方程会议论文集》（S. S. Chern 编）, 《数学讲义》1306, 页码 262–277。施普林格, 柏林、海德堡、纽约, 1988。[44] K. Zhang, *On existence of weak solutions for one-dimensional forward-backward diffusion equations*, 《微分方程杂志》220 (2)（2006）

School of Mathematics、 Jilin University、 Changchun、 Jilin Province 130012、
China*Email address*: bguo@jlu.edu.cn

Department of Mathematics, Kyungpook National University, Daegu 41566, Republic of Korea
Email address: shkim17@knu.ac.kr （通讯作者）

Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA
Email address: yanb@msu.edu