arXiv:2601.01039v1 [cond-mat.quant-gas] 3 Jan 2026

牛顿势和受修正牛顿动力学启发的引力势中的玻色–爱因斯坦凝聚体基态与集体模

Ning Liu[1,2,3,*]

[1] School of Mathematics and Physics, Anqing Normal University, Anqing 246133, China
[2] Institute of Astronomy and Astrophysics, Anqing Normal University, Anqing 246133, China
[3] Key Laboratory of Multiscale Spin Physics(Ministry of Education),Beijing Normal University, Beijing 100875, China

我们通过解析和数值方法研究玻色–爱因斯坦凝聚体在两种陷阱中的基态与集体动力学：一种是牛顿势，另一种是受修正牛顿动力学（MOND）启发的对数势。在基态下，MOND 势仅在深MOND区支持束缚态，此时凝聚体的尺寸显著大于其牛顿势对应物。在两种势中，尺寸均随排斥耦合参数 β 增大。在 MOND 情形下，尺寸随 $\beta^{1/3}$ 变化呈现出清晰的标度律，并在广泛的参数范围内得到数值验证；而对于牛顿势，由于托马斯–费米近似不再适用，因此不存在简单的标度律。对于动力学，我们推导并求解了单极集体模的方程。在强相互作用极限下，较大的 MOND 束缚凝聚体以较低频率振荡，其频率按 $\beta^{-1/3}$ 缩放。这些标度律有助于深入理解旨在利用冷原子通过量子模拟实验探测修正引力情景的研究。

I. 引言

暗物质的本质仍是现代物理学中最紧迫的难题之一。暗物质最初被提出，是为了解释星系旋转曲线以及星系和宇宙学尺度上的其他引力异常 [1, 2]。尽管暗物质在解释广泛的天体物理观测方面取得了成功，但迄今尚未在实验室实验中被直接探测到 [3–5]。作为一种替代范式，修正牛顿动力学（MOND）在低加速度下修正牛顿动力学，无需引入暗物质即可解释旋转曲线 [6]。值得注意的是，修正牛顿动力学加速度尺度 a_0 与具有宇宙学意义的加速度相吻合，这表明修正牛顿动力学与宇宙学之间可能存在深刻联系 [7, 8]。然而，修正牛顿动力学的微观基础及其在实验室尺度上的实验验证仍面临挑战 [9–15]。

超冷原子气体，尤其是玻色–爱因斯坦凝聚体（BECs），凭借高度可控性和精密测量能力，已成为用途广泛的量子模拟平台 [16–20]。这些系统能够模拟多种引力情景，包括类比黑洞 [21–27], 暗物质 [28–32], 以及宇宙学模型 [33–35]。在玻色–爱因斯坦凝聚体实验中实现类引力相互作用的可能性已得到广泛探索 [36–41], , 而具有工程化长程偶极相互作用的系统也已投入使用 [42–44]。这表明玻色–爱因斯坦凝聚体有望在实验室中探测基础引力物理。在此背景下，玻色–爱因斯坦凝聚体能够调控外势和相互作用强度，并结合对密度分布和动力学的实时成像，为在微观尺度检验受修正牛顿动力学启发的引力势提供了独特机会，同时还能实时成像密度分布和动力学。

在本工作中，我们系统研究了处于两种球对称引力势中的玻色-爱因斯坦凝聚体的基态性质和集体激发：传统的牛顿势，以及源自深MOND区的对数势。利用变分方法，我们表明，只有在深MOND区，MOND 势才存在束缚态；在该区域内，凝聚体相比牛顿情形显著更大、束缚也更弱。在强相互作用极限下，我们揭示了 MOND 势中平衡尺寸的一条清晰标度律；而由于托马斯–费米（TF）近似失效，牛顿对应体不存在如此简单的标度关系。对于集体动力学，我们发现，在深MOND区，MOND 势中的单极振荡频率明显更低，并且在强耦合极限下遵循独特的标度律，从而为区分这两种引力模型提供了明确的实验特征。我们的结果为未来利用超冷原子探测修正引力情景的量子模拟实验确立了理论基准。

本文结构安排如下：第II节介绍理论模型，包括格罗斯–皮塔耶夫斯基方程、两种不同的引力势（牛顿势和受 MOND 启发的引力势），以及无量纲方案。第III 节给出基态能量的解析和数值结果，并展示 MOND 势在 TF 近似下满足的标度律。第IV节探讨凝聚体的集体动力学；我们推导单极呼吸模的方程，并对其时间演化进行数值模拟。最后，第V 节总结主要发现，并讨论其对未来实验的意义。

* ningliu@mail.bnu.edu.cn

II. 理论模型

A. Gross-Pitaevskii方程

我们考虑处于外势 $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ 中的玻色-爱因斯坦凝聚体。在平均场近似下，系统的动力学由格罗斯-皮塔耶夫斯基（GP）方程描述。能量泛函可写为：

$$E[\psi] = \int d^3\mathbf{r}\left[\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{g}{2}|\psi(\mathbf{r})|^4\right], \tag{1}$$

其中 m 是原子质量，$g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ 是接触相互作用强度。这里，a_s 是 s波散射长度。波函数满足归一化条件 $\int |\psi|^2 d^3\mathbf{r} = N$，其中 N 是原子总数。根据能量泛函，变分原理 $i\hbar\partial_t\psi = \delta E/\delta\psi^*$ 给出含时GP方程 [45]：

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r},t)|^2\right]\psi(\mathbf{r},t). \tag{2}$$

对于定态情形，波函数可写为 $\psi(\mathbf{r}\ t) = \phi(\mathbf{r})$ $e^{-i\mu t/\hbar}$。代入式（2）可得定态GP方程：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r})|^2\right]\phi(\mathbf{r}) = \mu\phi(\mathbf{r}), \tag{3}$$

其中 μ 是化学势。

本文考虑 V_{ext}（$\mathbf{r}$）的两种球对称引力势。在经典牛顿引力中，由质量M 产生的引力势为：

$$\Phi_N(r) = -\frac{GM}{r}, \tag{4}$$

其中，G 为引力常数。玻色-爱因斯坦凝聚体中的原子所感受到的势能为：

$$V_N(r) = m\Phi_N(r) = -\frac{GMm}{r}. \tag{5}$$

在MOND理论中，深层修正牛顿动力学区间（$a \ll a_0$）内的引力势由修正泊松方程 [9]决定：

$$\nabla\cdot\left[\mu\left(\frac{|\nabla\Phi|}{a_0}\right)\nabla\Phi\right] = 4\pi G\rho, \tag{6}$$

其中，$a_0 \approx 1.2\times10^{-10}\text{m/s}^2$ 是MOND特征加速度，Φ 是引力势，ρ 是原子云的质量密度，$\mu(x)$是MOND插值函数，满足：

$$\mu(x) = \begin{cases} x, & x \ll 1 \quad \text{(deep MOND region)} \\ 1. & x \gg 1 \quad \text{(Newtonian region)} \end{cases} \tag{7}$$

求解方程（6）可得深修正牛顿动力学区域中的引力势 [8]：

$$\Phi_M(r) = \sqrt{GMa_0}\ln\left(\frac{r}{r_M}\right) \tag{8}$$

其中，$r_M = \sqrt{GM/a_0}$ 为特征距离，满足 $\Phi_M(r_M) = 0$。因此，玻色-爱因斯坦凝聚体中的原子所感受到的势能为：

$$V_M(r) = m\Phi_M(r) = m\sqrt{GMa_0}\ln\left(\frac{r}{r_M}\right) \tag{9}$$

B. 无量纲方案

为突出核心物理并简化计算，我们引入以下无量纲方案。我们将特征长度 l_0 定义为量子压力与牛顿引力达到平衡时的尺度：

$$l_0 = \frac{\hbar^2}{GMm^2}. \tag{10}$$

相应的特征能量为：

$$E_0 = \frac{GMm}{l_0} = \frac{(GM)^2m^3}{\hbar^2}. \tag{11}$$

接下来，我们定义无量纲变量：

$$\tilde{r} = \frac{r}{l_0}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{l_0}. \tag{12}$$

势能 $\tilde{V}_N(\tilde{r}) = V_N/E_0$和 $\tilde{V}_M(\tilde{r}) = V_M/E_0$的无量纲形式为

$$\tilde{V}_N(\tilde{r}) = -\frac{1}{\tilde{r}}, \tag{13}$$

$$\tilde{V}_M(\tilde{r}) = \eta\ln(\tilde{r}\eta), \tag{14}$$

其中，$\eta = l_0/r_M$ 是表征 MOND效应 强度的 MOND 参数，

$$\eta = \frac{\hbar^2\sqrt{a_0}}{(GM)^{3/2}m^2}. \tag{15}$$

从物理上讲，$\eta \ll 1$对应深MOND区，$\eta \gg 1$ 对应牛顿区间，而 $\eta \sim 1$对应交叉区域。下文将从基态和动力学视角，系统比较修正牛顿动力学势与牛顿势对凝聚体性质的影响。我们还引入无量纲耦合强度 $\beta = gN/(E_0l_0^3)$，其表达式为：

$$\beta = \frac{4\pi a_s GMm^2N}{\hbar^4}. \tag{16}$$

在冷原子实验中，s波散射长度 a_s可通过 Feshbach 共振在较大范围内调节，从而灵活控制相互作用参数 β。

III. 基态性质

A. 基态能量

我们研究由方程（5）和（9）给出的引力势中的玻色–爱因斯坦凝聚体的基态。由于这些势具有球对称性，我们采用高斯试探波函数，

$$\psi_0(r) = \sqrt{\frac{N}{(\pi\sigma^2)^{3/2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \tag{17}$$

其中 σ 是表示波函数宽度的变分参数。将此试探函数代入能量泛函式（1），得到总能量

$$E(\sigma) = T + V + E_{\rm int}, \tag{18}$$

其中动能项为

$$T = \frac{3\hbar^2 N}{4m\sigma^2}, \tag{19}$$

势能项为

$$V = N\int_0^\infty V_{\rm ext}(r)\frac{4\pi r^2}{(\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-r^2/\sigma^2} dr, \tag{20}$$

相互作用能为

$$E_{\rm int} = \frac{gN^2}{2(2\pi)^{3/2}\sigma^3}. \tag{21}$$

对于牛顿势 V_N（r），式（20）中的积分可计算为

$$V_N = -\frac{GMmN}{\sigma}\sqrt{\frac{4}{\pi}}. \tag{22}$$

对于 MOND 势 $V_M(r)$，我们得到

$$V_M = m\sqrt{GMa_0}N\left[\ln\left(\frac{\sigma}{r_M}\right) + 1 - \frac{\gamma}{2} - \ln 2\right], \tag{23}$$

其中，$\gamma \approx 0.5772$ 为欧拉常数。

使用第 IIB 节中引入的无量纲方案，牛顿势下的无量纲单粒子能量为

$$\tilde{e}_N(\tilde{\sigma}) = \frac{3}{4\tilde{\sigma}^2} - \sqrt{\frac{4}{\pi}}\frac{1}{\tilde{\sigma}} + \frac{\beta}{2(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\tilde{\sigma}^3}. \tag{24}$$

对于 MOND 势，相应的表达式为

$$\tilde{e}_M(\tilde{\sigma}) = \frac{3}{4\tilde{\sigma}^2} + \eta\left(\ln\tilde{\sigma} + \ln\eta + 1 - \frac{\gamma}{2} - \ln 2\right) + \frac{\beta}{2(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\tilde{\sigma}^3}. \tag{25}$$

对 $\tilde{\sigma}$ 求能量的最小值即可得到基态。对于牛顿势，令 $\mathrm{d}\tilde{e}_N/\mathrm{d}\tilde{\sigma} = 0$，可得

$$-\frac{3}{2}\tilde{\sigma} + \sqrt{\frac{4}{\pi}}\tilde{\sigma}^2 - \frac{3\beta}{2(2\pi)^{3/2}} = 0. \tag{26}$$

对于 MOND 势，$\mathrm{d}\tilde{e}_M/\mathrm{d}\tilde{\sigma} = 0$ 得到

$$-\frac{3}{2}\tilde{\sigma} + \eta\tilde{\sigma}^3 - \frac{3\beta}{2(2\pi)^{3/2}} = 0. \tag{27}$$

数值求解这些方程得到平衡宽度 $\tilde{\sigma}_0$ 以及相应的基态能量 $\tilde{e}_0$。

图 1 展示了每原子无量纲能量 $\tilde{e}$ 随归一化宽度 $\tilde{\sigma}$ 在不同 β 和 η取值下的变化。一个关键观察是，MOND 参数的两个区域表现出截然不同的行为。当 $\eta = 1$ （交叉区）时，MOND 势的能量曲线位于零以上，表明不存在束缚态。相比之下，当 $\eta = 0.1$ （深MOND区）时，MOND 势支持一个负能量极小值，使束缚态形成成为可能。然而，该极小值的深度远浅于相同 β下牛顿势的极小值，表明其束缚作用弱得多。

此外，在深MOND区，平衡宽度随 β增大，且在相同相互作用强度下，凝聚体明显比其牛顿对应体更宽。由于深MOND区正是MOND效应占主导的区域，因此可以得出一个关键结论：与牛顿势相比，MOND 势倾向于形成空间分布更广、束缚更弱的凝聚体。

平衡宽度 $\tilde{\sigma}_0$ 和基态能量 $\tilde{e}_0$的数值汇总于表I中，验证并量化了图1所呈现的定性图景。具体而言，对于 $\eta = 1$，修正牛顿动力学下的基态能量 $\tilde{e}_0^M$对所有 β 均为正，因此不存在束缚态；而对于$\eta = 0.1$，它变为负值，证实了束缚态的形成，但其束缚能约比牛顿对应体小一个数量级 $\tilde{e}_0^N$，这与束缚显著较弱的情况相符。表格还显示，在深MOND区（$\eta = 0.1$），凝聚体宽度 $\tilde{\sigma}_0^M$在每个 $\tilde{\sigma}_0^N$处都显著大于 β，直接支持了这一结论：修正牛顿动力学下的凝聚体更为弥散，束缚也较弱。

除验证这一点外，定量数据还呈现出几个重要趋势。首先，对于这两种势，平衡宽度均随 β 增大而增加，这反映了排斥相互作用驱动的膨胀。值得注意的是，修正牛顿动力学凝聚体的相对大小关键取决于 η：当 $\eta = 1$ 时，它比其牛顿对应体（$\tilde{\sigma}_0^M < \tilde{\sigma}_0^N$）更紧凑，宽度比 $\tilde{\sigma}_0^M/\tilde{\sigma}_0^N$随着 β 从0.1增至100而从约0.92降至0.65。相比之下，当 $\eta = 0.1$ （深MOND区）时，修正牛顿动力学凝聚体明显更大（$\tilde{\sigma}_0^M > \tilde{\sigma}_0^N$），其宽度比从

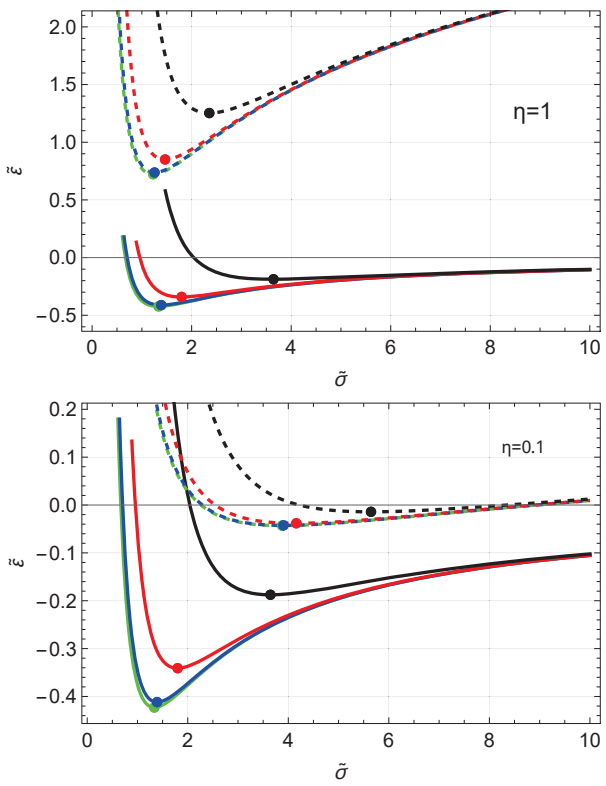


图 1. 每原子无量纲能量 $\tilde{e}$随归一化宽度 $\tilde{\sigma}$ 的变化曲线，分别对应牛顿势（实线）和修正牛顿动力学势（虚线）。不同颜色表示不同的相互作用强度： $\beta = 0.1$ （绿色）、1（蓝色）、10（红色）和 100（黑色）。能量极小值以相应颜色的圆圈标出。

表 I. 高斯试探波函数的平衡宽度 $\tilde{\sigma}_0$ 和基态能量 $\tilde{e}_0$，对应不同的 MOND 参数 η 和相互作用强度 β。上标 N 和 M 分别表示牛顿势和修正牛顿动力学势。

η	β	$\tilde{\sigma}_0^N$	$\tilde{e}_0^N$	$\tilde{\sigma}_0^M$	$\tilde{e}_0^M$	$\tilde{\sigma}_0^M/\tilde{\sigma}_0^N$
1	0.1	1.33566	-0.423071	1.22791	0.722699	0.919326
	1	1.39006	-0.411784	1.25534	0.737624	0.90308
	10	1.79862	-0.340961	1.46615	0.850519	0.815155
	100	3.64498	-0.187563	2.35471	1.25309	0.646015
0.1	0.1	1.33566	-0.423071	3.87615	-0.0429769	2.90205
	1	1.39006	-0.411784	3.90435	-0.0424916	2.80876
	10	1.79862	-0.340961	4.15818	-0.0381341	2.31188
	100	3.64498	-0.187563	5.64539	-0.0141724	1.54881

约2.90降至1.55，变化范围对应相同的 β 区间。这种反转凸显了MOND 参数 η在控制凝聚体的空间范围方面的关键作用。

其背后的机制可追溯到引力势的形式。在深MOND区，引力势呈对数形式， $V_M(r) \propto \ln\, r$，因此回复力较弱（与 $1/r$成正比），相较于牛顿情形（$\propto 1/r^2$）。这种较弱的约束需要更大的空间分布来平衡量子压力和排斥相互作用，从而使凝聚体尺寸增大，束缚态也更浅。这一发现为通过调节有效修正牛顿动力学参数 η来观测束缚态与非束缚态之间转变的实验提供了明确的理论指导，例如在实验室模拟中控制等效源质量 M 。

B. 强相互作用极限下的解析解与标度律分析

在托马斯-费米近似下，该近似忽略强相互作用极限（$\beta \gg 1$）中的动能，能量泛函可大幅简化。对于牛顿势，无量纲单粒子能量可化简为

$$\tilde{e}_N^{\mathrm{TF}}(\tilde{\sigma}) = -\sqrt{\frac{4}{\pi}}\frac{1}{\tilde{\sigma}} + \frac{\beta}{2(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\tilde{\sigma}^3}. \tag{28}$$

对该表达式关于 $\tilde{\sigma}$ 求极小值（$\mathrm{d}\tilde{e}_N^{\mathrm{TF}}/\mathrm{d}\tilde{\sigma}=0$），可得平衡宽度

$$\tilde{\sigma}_0^{N,\mathrm{TF}} = \left(\frac{3\beta}{2\sqrt{2\pi}}\right)^{1/2}, \tag{29}$$

这意味着标度律 $\tilde{\sigma}_0^N \propto \beta^{1/2}$。然而，数值结果表明，即使在 β相当大的情况下，这种近似仍然失效，这说明在此区间内，TF 近似不适用于牛顿势。例如，当 $\beta = 100$ 时，式（29）给出 $\tilde{\sigma}^{N,\mathrm{TF}}_0 \approx 19.3$，比精确数值结果大一个数量级 $\tilde{\sigma}_0^N = 3.64$ （见表 I）。这种失效源于不同能量项相互竞争的作用。在精确的能量泛函中，动能项按$1/\tilde{\sigma}^2$标度，牛顿引力项按 $-1/\tilde{\sigma}$标度，而相互作用项按 $\beta/\tilde{\sigma}^3$标度。在由完整泛函导出的平衡条件中，在很宽的 β范围内，动能项与引力项始终保持相当的量级，而相互作用项仅作为微扰，使宽度适度增加。TF 近似完全忽略动能项，因而高估了相互作用的影响，进而预测出不切实际的大宽度，与真实解相去甚远。

与牛顿情形形成鲜明对比的是，TF 近似对于修正牛顿动力学势极为准确。忽略动能后，能量泛函可简化为

$$\tilde{e}_M^{\mathrm{TF}}(\tilde{\sigma}) = \eta\left(\ln\tilde{\sigma} + \ln\eta + 1 - \frac{\gamma}{2} - \ln 2\right) + \frac{\beta}{2(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\tilde{\sigma}^3}. \tag{30}$$

最小化 ($\mathrm{d}\tilde{e}_M^{\mathrm{TF}}/\mathrm{d}\tilde{\sigma}=0$) 可得平衡宽度的解析解

$$\tilde{\sigma}_0^{M,\mathrm{TF}}=\left(\frac{3\beta}{2(2\pi)^{3/2}\eta}\right)^{1/3}, \tag{31}$$

以及相应的基态能量

$$\tilde{e}_0^{M,\mathrm{TF}}=\eta\left[\frac{1}{3}\ln\beta+\frac{2}{3}\ln\eta+\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2(2\pi)^{3/2}}\right)+\frac{4}{3}-\frac{\gamma}{2}-\ln 2\right]. \tag{32}$$

方程（31）立即推出标度律 $\tilde{\sigma}_0^M\propto\beta^{1/3}$。至关重要的是，这一解析结果与完整数值解高度吻合，且适用于广泛的 β范围，见图 2。这种吻合的物理原因在于能量导数的标度行为。对于 MOND 势，动能项的导数按 $1/\tilde{\sigma}^3$标度变化，而引力项的导数按 $\eta/\tilde{\sigma}$标度变化。二者之比 $\propto 1/(\eta\tilde{\sigma}^2)$ 会随着 $\tilde{\sigma}$ 增大而迅速减小，且 β。因此，在强相互作用极限下，动能的贡献变得可以忽略，从而验证了 TF 近似。

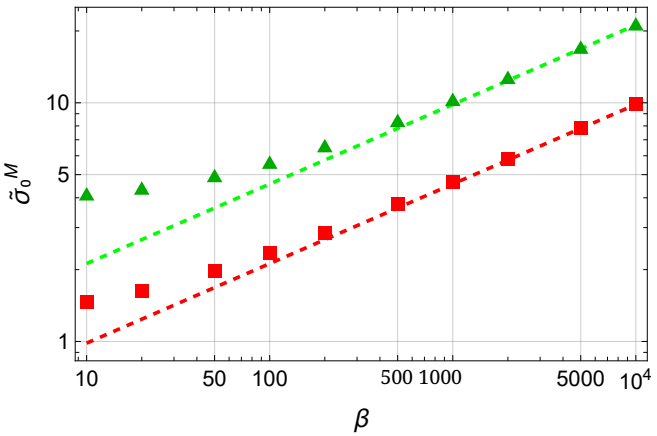


图2. MOND 势中凝聚体宽度 $\tilde{\sigma}_0^M$随相互作用参数 β 的变化。虚线表示当 $\eta=1$ （红色）和 $\eta=0.1$ （绿色）时的理论标度 $\tilde{\sigma}_0^M\propto\beta^{1/3}$。符号表示精确数值解，显示在整个范围 $\beta=10^1\sim10^4$内均与理论预测高度吻合。

强相互作用极限下的不同表现，源于引力势在形式上的根本差异，以及它们与动能之间的相互作用。对于对数型MOND势 $V_M(r)\propto\ln r$，TF 近似给出的平衡条件是引力项导数 $\eta/\tilde{\sigma}$与相互作用项导数 $\beta/\tilde{\sigma}^4$相平衡。这一平衡直接得出简洁的标度关系 $\tilde{\sigma}^3\propto\beta/\eta$，即 $\tilde{\sigma}\propto\beta^{1/3}$。与此形成鲜明对比的是，对于牛顿势 $V_N(r)\propto -1/r$，若通过类似分析简单地将引力项导数 ($\propto 1/\tilde{\sigma}^2$) 与相互作用项导数 ($\propto\beta/\tilde{\sigma}^4$) 相平衡，则会得到 $\tilde{\sigma}^2\propto\beta$。然而，正如我们先前的分析所示，这种简单的平衡并不成立，因为动能项（其导数为 $\propto 1/\tilde{\sigma}^3$）仍与引力项相当，不能忽略。因此，牛顿情形并不呈现简单、纯粹的幂律标度；相反，凝聚体宽度随 β 增加，其变化方式更为复杂，取决于这三种能量项之间的相互作用。

这些截然不同的行为为区分不同引力模型提供了决定性的实验特征。通过利用 Feshbach 共振调节 s波散射长度 a_s，进而调节参数β，可以测量凝聚体尺寸随β的变化关系。在双对数坐标上绘制数据并提取斜率，可进行直接检验：接近 $1/3$ 且稳健恒定的斜率支持 MOND 型对数势。相比之下，斜率若不恒定且随 β 显著变化，则表明其对应的是牛顿 $1/r$ 势，因为动能效应排除了简单的标度律。对于典型的 ^{87}Rb 玻色-爱因斯坦凝聚实验，在 $N\sim10^5$ 和 $l_0\sim1\ \mu$m 条件下，β 可通过 Feshbach 共振在 10^2-10^4 范围内调节，充分覆盖检验该预测所需的参数空间。

IV. 动力学行为与集体激发谱

A. 含时变分法与运动方程的推导

为研究凝聚体的集体动力学，我们采用含时变分法。对于本文所考虑的球对称势，我们关注呼吸（单极）模。合适的试探波函数为球对称高斯波函数 [46, 47]:

$$\psi(\mathbf{r},t)=\sqrt{\frac{N}{[\pi w(t)^2]^{3/2}}}\exp\left[-\frac{r^2}{2w(t)^2}+i\alpha(t)r^2\right], \tag{33}$$

其中，$w(t)$ 是含时宽度，$\alpha(t)$ 是含时二次相位参数。GP方程的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}=\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_t\psi-\psi\partial_t\psi^*\right)-\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi|^2-V_{\mathrm{ext}}(r)|\psi|^2-\frac{g}{2}|\psi|^4. \tag{34}$$

代入试探函数方程（33），并对空间积分，得到有效拉格朗日量

$$L=\int\mathcal{L}d^3\mathbf{r}=-\frac{3}{2}\hbar N\dot{\alpha}w^2-\frac{3\hbar^2N}{4mw^2}-\frac{3\hbar^2N}{m}\alpha^2w^2-\langle V_{\mathrm{ext}}\rangle-\frac{gN^2}{2(2\pi)^{3/2}w^3}, \tag{35}$$

其中 $\langle V_{\rm ext}\rangle = \int V_{\rm ext}(r)|\psi|^2 d^3\mathbf{r}$ 是总外势能。

将欧拉-拉格朗日方程应用于变分参数 α 和 w，可得它们的运动方程。对于相位参数 α，可得关系式

$$\alpha = \frac{m}{2\hbar}\frac{\dot{w}}{w}. \tag{36}$$

对于宽度 w，代入式 (36)及其时间导数后，我们得到一个闭合方程:

$$\ddot{w} = \frac{\hbar^2}{m^2 w^3} - \frac{2}{3m}\frac{dU}{dw} + \frac{gN}{m(2\pi)^{3/2}w^4}, \tag{37}$$

其中 $U(w) = \langle V_{\rm ext}\rangle/N$ 是每个原子的平均外部势能。

B. 两种引力势的具体运动方程

$U(w)$及其导数的形式取决于具体的引力势。对于牛顿势$V_N(r) = -GMm/r$，我们得到

$$U_N(w) = -\frac{GMm}{w}\sqrt{\frac{4}{\pi}}, \quad \frac{dU_N}{dw} = \frac{GMm}{w^2}\sqrt{\frac{4}{\pi}}. \tag{38}$$

代入式（37）后，得到牛顿情形下的宽度演化方程:

$$\ddot{w} = \frac{\hbar^2}{m^2 w^3} - \frac{2GM}{3w^2}\sqrt{\frac{4}{\pi}} + \frac{gN}{m(2\pi)^{3/2}w^4}. \tag{39}$$

对于 MOND 势 $V_M(r) = m\sqrt{GMa_0}\ln(r/r_M)$，我们有

$$U_M(w) = m\sqrt{GMa_0}\left[\ln\left(\frac{w}{r_M}\right) + 1 - \frac{\gamma}{2} - \ln 2\right], \quad \frac{dU_M}{dw} = \frac{m\sqrt{GMa_0}}{w}, \tag{40}$$

从而得到 MOND 宽度演化方程:

$$\ddot{w} = \frac{\hbar^2}{m^2 w^3} - \frac{2\sqrt{GMa_0}}{3w} + \frac{gN}{m(2\pi)^{3/2}w^4}. \tag{41}$$

我们采用与第 IIB 节相同的无量纲方案。利用特征长度 $l_0 = \hbar^2/GMm^2$ 和时间 $t_0 = \sqrt{l_0^3/GM}$，我们定义无量纲宽度 $\tilde{w}_N = w_N/l_0$、$\tilde{w}_M = w_M/l_0$ 以及无量纲时间 $\tilde{t} = t/t_0$。回顾无量纲参数：相互作用强度 $\beta = gN/(E_0 l_0^3)$ 和 MOND 参数 $\eta = l_0/r_M$，其中 $E_0 = GMm/l_0$。

无量纲演化方程为 t hen:

$$\frac{d^2\tilde{w}_N}{d\tilde{t}^2} = \frac{1}{\tilde{w}_N^3} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{\pi}}\frac{1}{\tilde{w}_N^2} + \frac{\beta}{(2\pi)^{3/2}\tilde{w}_N^4}, \tag{42}$$

$$\frac{d^2\tilde{w}_M}{d\tilde{t}^2} = \frac{1}{\tilde{w}_M^3} - \frac{2}{3}\frac{\eta}{\tilde{w}_M} + \frac{\beta}{(2\pi)^{3/2}\tilde{w}_M^4}. \tag{43}$$

关键区别在于引力项：$-\frac{2}{3}\sqrt{4/\pi}\,\tilde{w}_N^{-2}$对应牛顿情形，$-\frac{2}{3}\eta\,\tilde{w}_M^{-1}$对应修正牛顿动力学情形，体现了 $1/r^2$ 与 $1/r$ 两种力定律的差异。

C. 平衡宽度和集体激发频率

平衡宽度 $\tilde{w}_{0N}$ 和 $\tilde{w}_{0M}$ 满足 $\ddot{\tilde{w}} = 0$，对于这两种势，有

$$\frac{1}{\tilde{w}_{0N}^3} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{\pi}}\frac{1}{\tilde{w}_{0N}^2} + \frac{\beta}{(2\pi)^{3/2}\tilde{w}_{0N}^4} = 0, \tag{44}$$

$$\frac{1}{\tilde{w}_{0M}^3} - \frac{2}{3}\frac{\eta}{\tilde{w}_{0M}} + \frac{\beta}{(2\pi)^{3/2}\tilde{w}_{0M}^4} = 0. \tag{45}$$

这些方程与第 IIIA 节中推导出的能量最小化条件完全相同（方程（26）和（27）），这证实了静态描述与动力学描述之间的一致性。其解 $\tilde{w}_{0N}$ 和 $\tilde{w}_{0M}$是 β 和 η的函数，并已列于表 I中。

通过对方程（42）~~和（43）进行线性化，可以求得平衡态附近小振幅呼吸振荡的频率。对于微扰 $\delta\tilde{w} \propto e^{-i\tilde{\Omega}t}$，可得

$$\tilde{\Omega}_N^2 = \frac{2}{\tilde{w}_{0N}^4} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{\pi}}\frac{1}{\tilde{w}_{0N}^3} + \frac{3\beta}{(2\pi)^{3/2}\tilde{w}_{0N}^5}, \tag{46}$$

$$\tilde{\Omega}_M^2 = \frac{2}{\tilde{w}_{0M}^4} - \frac{1}{3}\frac{\eta}{\tilde{w}_{0M}^2} + \frac{3\beta}{(2\pi)^{3/2}\tilde{w}_{0M}^5}. \tag{47}$$

这些表达式明确展示了集体激发频率如何依赖于平衡宽度和系统参数。对于 MOND 势，项 $-\eta/(3\tilde{w}_{0M}^2)$ 将振荡频率与 MOND 参数 η直接联系起来。较小的 η （对应更深的 MOND 区域）会使该项减小，从而导致频率 Ω_M 降低，这与较弱的对数束缚相符。

在强相互作用极限（$\beta \gg 1$）下，正如第 IIIB 节所述，TF 近似对于 MOND 势变得准确。在此极限下，平衡宽度可简化为 $\tilde{w}_{0M}^{\rm TF} = \left(3\beta/[2(2\pi)^{3/2}\eta]\right)^{1/3}$。将其代入方程（47），并忽略 $\tilde{w}_{0M}^{-4}$ 阶项，可得平方频率的显式表达式:

$$\left(\tilde{\Omega}_M^{\rm TF}\right)^2 \propto \eta^{5/3}\beta^{-2/3}. \tag{48}$$

这给出了标度律 ~$\Omega_M^{\rm TF} \propto \beta^{-1/3}\eta^{5/6}$。具体而言，对于固定的 η，频率按 ~$\Omega_M \propto \beta^{-1/3}$ 标度；与牛顿情形相比，随着相互作用强度增加，其衰减速度要慢得多。对于牛顿势，TF 近似失效，不存在简单的关于 Ω_N 的解析标度关系~；其对 β 的依赖必须通过数值方法确定。

D. 动力学演化与数值结果

通过数值求解方程（42）和（43），并采用平衡宽度，探究完整的动力学行为

表I中的 $\beta = 1$，平衡宽度为$\tilde{w}_{0N} \approx 1.39$，$\tilde{w}_{0M}(\eta = 0.1) \approx 3.90$，$\tilde{w}_{0M}(\eta = 0.5) \approx 1.76$，以及 $\tilde{w}_{0M}(\eta = 1) \approx 1.26$。从 10% 的扰动开始，$\tilde{w}(0) = 1.1\tilde{w}_0$ 在 $\dot{\tilde{w}}(0) = 0$下，得到图3所示的宽度振荡。

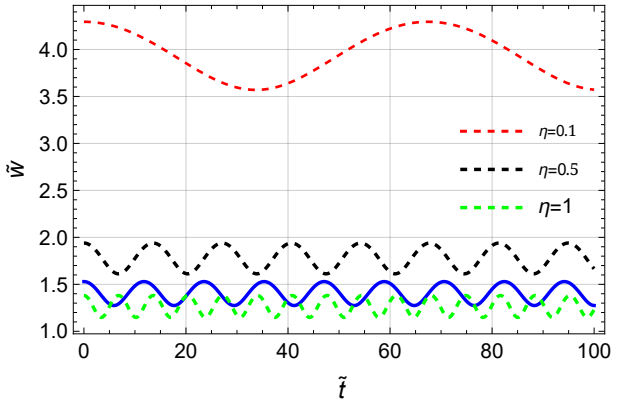


图 3. $\beta = 1$。牛顿势（蓝色实线）。当 $\eta = 0.1$ 时的 MOND 势（红色虚线），$\eta = 0.5$ （黑色虚线）和 $\eta = 1$ （绿色虚线）。水平虚线表示表 I 中对应的平衡宽度。

模拟结果证实了理论分析。深MOND区（$\eta = 0.1$）中的振荡频率最低，并随 η 增大而升高；牛顿频率介于 $\eta = 0.5$ 和 $\eta = 1$ 对应的 MOND 频率之间。这一趋势直接反映了方程（47）中对 η 的依赖。此外，MOND 势中的振荡呈现明显的非线性畸变，尤其在 η 较大时，这是由非谐的对数势造成的。相比之下，牛顿振荡几乎呈正弦形。振荡宽度的平均值与表 I 中的平衡值吻合良好，验证了模型的自洽性。

E. 实验意义

不同的频率行为为区分不同引力模型提供了明确的实验特征。通过突然改变陷阱或相互作用强度，可以激发集体呼吸模。测量凝聚体宽度随时间的变化 $\tilde{}$，即可得到振荡频率 Ω 随 β 的变化关系。

对于修正牛顿动力学型对数势，绘制 $\ln \tilde{\Omega}$ 与 $\ln \beta$ 的关系预计在强相互作用区趋近于约为 $-1/3$ 的恒定斜率（由$\tilde{\Omega}_M \propto \beta^{-1/3}$得出）。相比之下，对于牛顿 $1/r$ 势，由于不存在简单的标度律，图中不会呈现恒定斜率。对于典型的 ^{87}Rb 玻色-爱因斯坦凝聚实验，取 $N \sim 10^5$ 和 $l_0 \sim 1\ \mu$m，可通过 Feshbach 共振将 β 调节至覆盖 $10^2 \sim 10^4$ 的范围，从而提供足够的范围来检验这些预测。

V. 结论

我们研究了玻色–爱因斯坦凝聚体在两种球对称引力势下的基态性质和集体动力学：牛顿势以及受深MOND区启发的对数势。我们采用高斯变分方法研究基态，并采用含时变分方法研究动力学，推导出自洽方程，用以描述凝聚体的平衡宽度、能量和单极振荡频率。

我们的分析表明，MOND 参数 η 在决定凝聚体的性质方面起着关键作用。在基态下，只有在深MOND区（$\eta \ll 1$），MOND 势才存在束缚解；此时凝聚体显著更大，束缚也比其牛顿对应体弱得多。随着排斥相互作用强度 β 增大，两种势下的平衡宽度都会增大，但其标度行为存在根本差异。在强相互作用极限下，MOND 势呈现出明确的标度律 $\tilde{\sigma}_0^M \propto \beta^{1/3}$，且 TF 近似能够准确描述这一规律。相比之下，牛顿势不具有简单的标度律，因为即使 β 很大，动能仍与引力能相当，导致 TF 近似失效。

对于集体动力学，我们推导出了单极振荡频率的显式表达式。修正牛顿动力学束缚下的凝聚体，其振荡频率低于牛顿情形，这反映了较弱的对数束缚。该频率随 β 增大而降低；在固定 η 时，强相互作用极限下的标度关系为 $\tilde{\Omega}_M \propto \beta^{-1/3}$。宽度演化的数值模拟证实了这些趋势，并进一步表明，由于对数势具有非谐形式，修正牛顿动力学势中的振荡会出现明显的非线性畸变，而牛顿振荡则近乎正弦形。

平衡尺寸（$\beta^{1/3}$ 与无简单标度关系）和振荡频率（$\beta^{-1/3}$ 与非幂律依赖关系）呈现出截然不同的标度律，为在量子模拟实验中区分这两种引力模型提供了明确的实验途径。通过 Feshbach 共振调节 s 波散射长度，相互作用参数 β 可在数个数量级范围内变化。测量凝聚体尺寸和单极振荡频率随 β 的变化，并提取标度指数，可直接检验底层势。

未来的研究方向包括将分析扩展至更精确的试探波函数，详细研究交叉区域（$\eta \sim 1$），以绘制束缚态形成的临界边界；纳入有限温度效应；以及设计具体的实验装置（例如使用光学势），在实验室中实现所需的对数势。

致谢 本工作得到多尺度自旋物理重点实验室开放基金（教育部）、北京师范大学的资助（资助编号：SPIN2024N03），以及安庆师范大学高层次人才科研启动基金（资助编号：241042）。

[1] N. Arkani-Hamed, D. P. Finkbeiner, T. R. Slatyer, N. Weiner，暗物质理论，Physical Review D 79 (1) (2009) 015014。[2] G. Bertone, D. Hooper，暗物质的历史，Reviews of Modern Physics 90 (4) (2018) 045002。[3] Z. Bo, W. Chen, X. Chen, Y. Chen, Z. Cheng, X. Cui, Y. Fan, D. Fang, Z. Gao, L. Geng 等，PandaX-4T 1.54 吨·年曝光量的暗物质搜寻结果，《物理评论快报》134 (1) (2025) 011805。[4] J. Aalbers, D. Akerib, A. A. Musalhi, F. Alder, C. Amarasinghe, A. Ames, T. Anderson, N. Angelides, H. Ara´ujo, J. Armstrong 等，LUX-ZEPLIN (LZ) 实验 4.2 吨·年曝光量的暗物质搜寻结果，《物理评论快报》135 (1) (2025) 011802。[5] T. Zimmermann, J. Alvey, D. J. Marsh, M. Fairbairn, J. I. Read，矮星系表明暗物质质量大于 2.2× 10-21 eV，《物理评论快报》134 (15) (2025) 151001。[6] M. Milgrom，将牛顿动力学修改作为隐质量假说的一种可能替代方案，Astrophysical Journal, Part 1 270 (1983) 365–370。[7] M. Milgrom，MOND理论，Canadian Journal of Physics 93 (2) (2014) 107–118。[8] D. Bugg，MOND综述，Canadian Journal of Physics 93 (2) (2015) 119–125。[9] J. Bekenstein, M. Milgrom，缺失质量问题是否意味着牛顿引力失效？，Astrophysical Journal, Part 1 286 (1984) 7–14。[10] R. H. Sanders, S. S. McGaugh，修正牛顿动力学作为暗物质的替代方案，Annual Review of Astronomy and Astrophysics 40 (1) (2002) 263–317。[11] J. D. Bekenstein，适用于修正牛顿动力学范式的相对论引力理论，Physical Review D 70 (8) (2004) 083509。[12] B. Famaey, S. S. McGaugh，修正牛顿动力学（修正牛顿动力学）：观测现象学与相对论扩展，Living Reviews in Relativity 15 (1) (2012) 10。[13] M. B´ılek, I. Thies, P. Kroupa, B. Famaey，修正牛顿动力学模拟揭示本星系群中某些奇异现象的起源，Astronomy & Astrophysics 614 (2018) A59。[14] M. Milgrom，准线性MOND的推广，Physical Review D 108 (8) (2023) 084005。[15] M. Milgrom，MOND是否必然是非线性的？，Physical Review D 111 (10) (2025) 104033。[16] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari，受囚禁气体中玻色-爱因斯坦凝聚的理论，Reviews of Modern Physics 71 (3) (1999) 463。[17] O. Morsch, M. Oberthaler，光学晶格中玻色–爱因斯坦凝聚体的动力学，Reviews of modern physics 78 (1) (2006) 179–215。[18] C. J. Pethick, H. Smith，稀薄气体中的玻色–爱因斯坦凝聚，剑桥大学出版社，2008。[19] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger，超冷气体的多体物理，Reviews of Modern Physics 80 (3) (2008) 885–964。[20] C. Gross、I. Bloch，《利用光学晶格中的超冷原子进行量子模拟》，《科学》357 (6355) (2017) 995–1001。[21] L. J. Garay、J. Anglin、J. I. Cirac、P. Zoller，《玻色–爱因斯坦凝聚体中引力黑洞的声学类比》，《物理评论快报》85 (22) (2000) 4643。[22] C. Barcelo、S. Liberati、M. Visser，《模拟引力》，《相对论综述》14 (2011) 1–159。[23] J. Steinhauer，《模拟黑洞激光器中自放大霍金辐射的观测》，《自然·物理学》10 (11) (2014) 864–869。[24] J. Steinhauer，《模拟黑洞中量子霍金辐射及其纠缠的观测》，《自然·物理学》12 (10) (2016) 959–965。[25] J. R. Mu˜noz de Nova、K. Golubkov、V. I. Kolobov、J. Steinhauer，《模拟黑洞中热霍金辐射及其温度的观测》，《自然》569 (7758) (2019) 688–691。[26] C. Barcel´o，《模拟黑洞视界》，《自然·物理学》15 (3) (2019) 210–213。[27] V. I. Kolobov、K. Golubkov、J. R. Mu˜noz de Nova、J. Steinhauer，《定常自发霍金辐射的观测及模拟黑洞的时间演化》，《自然·物理学》17 (3) (2021) 362–367。[28] C. Boehmer、T. Harko，《暗物质可以是玻色–爱因斯坦凝聚体吗？》，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》2007 (06) (2007) 025。[29] S. Das、R. K. Bhaduri，《来自玻色–爱因斯坦凝聚体的暗物质与暗能量》，《经典与量子引力》32 (10) (2015) 105003。[30] P.-H. Chavanis，《具有任意非线性的耗散自引力玻色–爱因斯坦凝聚体：暗物质晕模型》，《欧洲物理学杂志·增刊》132 (6) (2017) 248。[31] T. Harko，《玻色–爱因斯坦凝聚体暗物质晕的金斯不稳定性与湍流引力坍缩》，《欧洲物理学杂志 C》79 (9) (2019) 787。[32] P.-H. Chavanis，《玻色–爱因斯坦凝聚体暗物质模型基本结果综述》，《天文学与空间科学前沿》12 (2025) 1538434。[33] S. Eckel、A. Kumar、T. Jacobson、I. B. Spielman、G. K. Campbell，《快速膨胀的玻色–爱因斯坦凝聚体：实验室中的膨胀宇宙》，《物理评论 X》 8 (2) (2018) 021021。[34] C. Viermann 、 M. Sparn 、 N. Liebster、M. Hans、E. Kath、´A. Parra-L´opez、M. Tolosa-Sime´on、N. S´anchez-Kuntz、T. Haas、H. Strobel 等，《弯曲时空中的动力学量子场模拟器》，《自然》611 (7935) (2022) 260–264。[35] S. Mondal、A. Choudhuri，《基于巴罗熵的宇宙学中暗物质玻色-爱因斯坦凝聚期间宇宙学相变的动力学》，《欧洲物理学杂志 C》85 (11) (2025) 1241。[36] D. O’dell、S. Giovanazzi、G. Kurizki、V. Akulin，《具有 1/r 原子间吸引的玻色–爱因斯坦凝聚体：电磁诱导“引力”》，《物理评论快报》84 (25) (2000) 5687。

[37] S. Giovanazzi、D. O’Dell、G. Kurizki, 《具有激光诱导“引力”的玻色凝聚体中的自束缚转变》, 《物理评论 A》63 (3) (2001) 031603。[38] D.-I. Choi, 《引力束缚玻色–爱因斯坦凝聚体的碰撞》, 《物理评论 A》66 (6) (2002) 063609。[39] M. Chalony、J. Barr´e、B. Marcos、A. Olivetti、D. Wilkowski, 《中性原子冷气体中的长程一维类引力相互作用》, 《物理评论 A》87 (1) (2013) 013401。[40] A. Paredes、D. N. Olivieri、H. Michinel, 《从光学到暗物质：非线性薛定谔–泊松系统综述》, 《物理学D》403 (2020) 132301。¨H. Cartarius、T. Fabˇciˇc、J. Main、G. Wunner, 《具有吸引性 1/r 相互作用的玻色–爱因斯坦凝聚体的动力学与稳定性》, 《物理评论 A》78 (1) (2008) 013615。[42] M. Lu、N. Q. Burdick、S. H. Youn、B. L. Lev, 《镝强偶极玻色–爱因斯坦凝聚体》, 《物理评论快报》107 (19) (2011) 190401。[43] N. Defenu、T. Donner、T. Macrì、G. Pagano、S. Ruffo、A. Trombettoni, 《长程相互作用量子系统》, Reviews of Modern Physics 95 (3) (2023) 035002。[44] N. Bigagli、W. Yuan、S. Zhang、B. Bulatovic、T. Karman、I. Stevenson、S. Will, 《偶极分子的玻色–爱因斯坦凝聚观测》, 《自然》631 (8020) (2024) 289–293。[45]L. Pitaevskii、S. Stringari, 《玻色–爱因斯坦凝聚与超流性》, 第164卷，牛津大学出版社，2016。[46]V. M. Perez-Garcia、H. Michinel、J. Cirac、M. Lewenstein、P. Zoller, 《玻色–爱因斯坦凝聚体的低能激发：含时变分分析》, 《物理评论快报》77 (27) (1996) 5320。[47] F. Haas、B. Eliasson, 《非局域相互作用玻色–爱因斯坦凝聚体的含时变分方法》, 《物理学杂志B》51 (17) (2018) 175302。