arXiv:2601.01047v1 [math.FA] 3 Jan 2026

极大不等式、框架与贪心算法

´PABLO M. BERNA、DANIEL FREEMAN、TIMUR OIKHBERG 和 MITCHELL A. TAYLOR

Abstract. 本文旨在运用巴拿赫格技术研究函数空间中的坐标系。我们首先证明，基的贪婪算法序收敛，当且仅当满足某个极大不等式。随后我们表明，绝对框架未必存在相对于通常序收敛的重构算法，但允许相对于从双对偶继承的序收敛进行重构。之后，我们考察这类坐标系在多大程度上影响底层函数空间的几何性质。最值得一提的是，我们证明，巴拿赫格 X 格同构于某个 $C(K)$-空间的闭子格，当且仅当其中每个无条件序列 X 都是绝对序列。

Contents

1. 引言 1 1.1. 论文概要 4 2. 背景 5 3. 巴拿赫格中坐标系的重构算法 7 3.1. 双基定理的贪婪版本 7 3.2. 双基定理不适用于框架 13 3.3. 一致准贪婪基的性质 15 4. 环境空间的作用 19 4.1. 将基嵌入巴拿赫格 19 4.2. 分块基 23 4.3. 绝对序列刻画 AM-空间 27 4.4. 可补绝对序列 31 4.5. 非原子巴拿赫格中的双基序列 33 参考文献 35

1. Introduction

巴拿赫空间中的坐标系（绍德基、Markushevich基、分解、框架、贪心算法）的研究是一门经典学科。然而，在实际应用中，理想的坐标系往往具有额外结构，而这些结构甚至在一般的巴拿赫空间或希尔伯特空间中都未必有意义。常见的例子包括利用伸缩和平移的小波，以及几乎处处收敛系统。显然，要定义这些概念，就必须在具有适当对称性的空间中工作，或者空间还需具备额外的收敛概念。

日期：2026年1月6日。2010 年数学主题分类。46B42、46B15、41A65。关键词。基本序列、序收敛、贪婪算法、极大函数、绍德尔框架。

这里，我们将探讨坐标系与格结构之间的相互作用。在巴拿赫格中考虑基本序列（x_k）时，有许多不同的方式可以纳入偏序。最常见的要求是对集合 $\{x_k\}$施加限制。例如，可以要求该集合包含于正锥、某个序区间，或者其中的元素两两不交。这种做法的问题在于，函数空间中的基不可能彼此不交，而实际中出现的基也很少包含于正锥。事实上，在 L_1（$\mathbb{R}$）和 L_2（$\mathbb{R}$）中构造正基并非易事 [22, 34]，而对于$p \neq 1$，2。，目前尚不清楚 L_p（$\mathbb{R}$）中是否存在正基。此外，如果（x_k）是 $L_1[0,1]$的归一化基，那么 $\{x_k\}$ 不可能几乎序有界（等价地说，等积分） [15, 第74页-75]。因此，要求 $\{x_k\}$包含于某个序区间同样是非常严格的限制。

与上述情况不同，本文将利用格结构来定义极大函数 和序收敛。目前，我们只需指出，在任意向量格 X 中，都可以定义序收敛 $f_k \xrightarrow{o} f$ 和一致收敛 $f_k \xrightarrow{u} f$的概念。此外，当 X 是一个可测函数空间时，我们有： $f_k \xrightarrow{o} f$ 当且仅当 $f_k \xrightarrow{a.e.} f$，并且存在一个 $g \in X$，使得对所有 k都有 $|f_k| \leq g$。因此，可以将序收敛视为向量格中控制几乎处处收敛的推广。

本文的出发点是 [65] 的一项结果。该结果指出，对于巴拿赫格 X中的基本序列 (x_k)，证明基展开的序收敛等价于证明相应极大函数有界。更准确地说，令 $P_n(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$表示第 n 个典范基投影，则有以下定理。

定理 1.1 ([65]定理 3.1)。 设(x_k) 是巴拿赫格 X 中的一个基本序列。记其闭线性张成为 $[x_k]$，并令 $P_n : [x_k] \to [x_k]$ 表示第 n 个典范基投影。以下条件等价。

(i) 对所有 $x \in [x_k]$，$P_n x \xrightarrow{u} x$；*(ii)* 对所有 $x \in [x_k]$，$P_n x \xrightarrow{o} x$；*(iii)* 对某个 $u \in X$ 及所有 n，对所有 $x \in [x_k]$，$|P_n x| \leq u$ ；*(iv)* 对所有 $x \in [x_k]$，$(\bigvee_{n=1}^{m} |P_n x|)_m$ 范数有界；*(v)* 存在 $M \geq 1$，使得对所有 $m \in \mathbb{N}$ 及标量 $a_1, \ldots, a_m$，均有

$$\left\| \bigvee_{n=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right| \right\| \leq M \left\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \right\|. \tag{1.1}$$

定理 1.1 的动机源于调和分析中的一个著名原理 [11, 54, 59]：对于一族线性算子 $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$，它们将 $L_p(\Omega)$ 映射到 $L_0(\Omega)$，若要证明对所有 $f \in L_p(\Omega)$，几乎处处收敛 $T_k f \xrightarrow{a.e.} f$，等价于证明相关极大算子 $T^* f(x) := \sup_k |T_k f(x)|$ 满足弱型 (p,p) 不等式。从这一角度看，定理 1.1 表明，即使在巴拿赫格这一最一般的情形下，证明基展开的受控几乎处处收敛，也等价于证明相关极大算子的强有界性。

定理 1.1 的第二个动机是，鞅理论、调和分析、概率论、随机过程和正交级数中的大多数重要基确实具有序收敛和，尽管证明这一点往往是一项重大成果。常见的例子包括 $L_p(P)$ 中的鞅差序列，其中 $p > 1$ 和 P 是一个概率测度（这本质上就是 Doob 不等式），

Walsh 基（见 [58]），以及 $L_1[0,1]$ 中哈尔的无条件块（这本质上是 Burkholder-Davis-Gundy 不等式与 Khintchine 不等式的结合）。 [30] 中 Carleson-Hunt 定理的证明为三角基确立了 (1.1)。还值得一提的是 Bourgain [10] 的工作，他运用概率技巧推动了 Kolmogorov 猜想和 Garsia 猜想的研究。用我们的语言来说，这些猜想本质上是在问， $L_2(P)$ 的每个标准正交基是否都存在一种重排，使其满足定理 1.1。在 [10], 中，Bourgain 构造了一种重排，使不等式 (1.1) 中的 $M \sim$ 为 log(log(m))；对于随机重排而言，这是所能达到的最优依赖关系。更一般地说，诸如 (1.1) 这样的极大不等式在分析学中历史悠久，可用于证明 Birkhoff 遍历定理 [49], 的几乎处处收敛、证明薛定谔演化回到初始数据 [20], ，甚至也出现在非交换情形中 [29, 35, 51, 56]。

本文的目标有两个。首先，我们希望继续研究 [7, 26, 65] 中满足定理 1.1 的基本序列。其次，我们想将理论拓展到框架和贪心算法。非正式地说，框架可以看作冗余基。框架中额外的冗余使得重构在范数收敛意义下更加稳健，这在许多应用中至关重要。然而，这也使得在序收敛和一致收敛意义下的重构变得微妙得多。事实上，正如我们将看到的，定理 1.1 对框架完全不成立；然而，对（1.1）作某些自然的加强，确实可以保证存在一种重构算法，使其关于从双对偶继承而来的序收敛成立。

相比之下，贪心算法的类似结论在完全一般的情形下成立。回顾一下，贪心算法是一种非线性逼近方案，它利用基中绝对值最大的系数来逼近向量。这类算法应用于信号处理等领域；在这些领域中，人们需要在无限维或高维巴拿赫空间中，仅使用相对少量的坐标 $\sum_{k=1}^{n} b_{m_k} x_{m_k}$ 来逼近信号 $x = \sum_k a_k x_k$ 。对于希尔伯特空间中的正交归一基，使用 n个坐标在范数意义下逼近 x的最有效方法，是选取基展开中绝对值最大的n 个坐标。也就是说，令 $\mathcal{G}_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_{m_k} x_{m_k}$其中，对所有 $1 \le k \le n$ 和 $i \notin \{m_k\}_{1 \le k \le n}$， $|a_{m_k}| \ge |a_i|$ 。尽管容易看出，当 (x_k) 是正交归一的时，这种方案能提供最佳逼近，但事实证明，它对于巴拿赫空间中一大类基也非常有效。例如，关于贪心算法的应用和效能综述，参见 [66] 。

鉴于人们关注贪婪算法能否有效地实现范数逼近，了解它在序意义下对向量的逼近效果如何也同样值得关注。事实证明，与考察基在初始段上的部分和的收敛性不同，考察定理 1.1 中贪婪和的收敛性，可以得到以下关于序收敛与极大函数估计之间等价关系的非线性变体。

定理 1.2. 设 (x_k) 是巴拿赫格 X 中的一个半归一化基本序列，令 $[x_k]$ 表示其闭线性张成空间。以下条件等价。

(i) 对所有 $x \in [x_k]$, $\mathcal{G}_n(x) \xrightarrow{u} x$; *(ii)* 对所有 $x \in [x_k]$, $\mathcal{G}_n(x) \xrightarrow{o} x$; *(iii)* 对所有 $x \in [x_k]$, $|\mathcal{G}_n(x)| \le u$ ，存在某个 $u \in X$ ，使得对所有 n; *(iv)* 对所有 $x \in [x_k]$, $(\bigvee_{n=1}^{m} |\mathcal{G}_n(x)|)_m$ 范数有界;

(v) 存在 $C \geq 1$，使得对所有 $x \in [x_k]$ 和 $m \in \mathbb{N}$，

$$\left\| \bigvee_{n=1}^{m} |\mathcal{G}_n(x)| \right\| \leq C\|x\|.$$

本文的主要目标之一是研究定理 1.2 的推论。目前我们注意到，定理 1.2 是一个关于基本序列的定理，其影响可以延伸到巴拿赫格的范畴之外。也就是说，我们可以将基本序列 (x_k) 嵌入 (x_k) 到不同的巴拿赫格中，然后应用定理 1.2，从而研究该基本序列的不同性质。特别是，由于 $[x_k]$ 是可分的，我们可以将 $[x_k]$ 视为 $C[0,1]$ 的子空间。在 $C[0,1]$ 中，一致收敛与范数收敛一致，并且对所有 x，$y \in C[0,1]$ 都成立。因此，在定理 1.2 中取 $X = C[0,1]$，我们便可得到以下关于 [69] 中准贪婪基的重要定理；该定理先验地并未提及巴拿赫格。

定理 1.3 ([69]定理 1； [4] 定理 4.1)。设 E 是一个具有半归一化 *Schauder* 基 (x_k) 的巴拿赫空间。以下命题等价。

(i) 对所有 $x \in E$, $\mathcal{G}_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$; *(ii)* 存在 $C \geq 1$，使得对所有 $x \in E$ 以及 $n \in \mathbb{N}$, $\|\mathcal{G}_n(x)\| \leq C\|x\|$.

尽管当 $X = C[0,1]$ 时，定理 1.2 可化为定理 1.3，但当 $X = L_p(\Omega)$ 时，要验证一个基是否满足定理 1.2 往往极具挑战性。本文将陆续给出这类基的若干例子及其结构性质；不过现在先指出，Tao [61] 证明了所有紧支撑小波基都满足定理 1.2，而 K¨orner [38, 39] 证明了 Fourier 基和 Walsh 基则不满足。换言之，尽管 Fourier 基和 Walsh 基满足定理 1.1，且其贪婪算法在范数意义下达到最优逼近，但仍存在 $f \in L_2([0,1])$，使得 $(\mathcal{G}_n f)_{n=1}^{\infty}$ 几乎处处不收敛到 f。事实上，K¨orner 可以构造出 $f \in L_2([0,1])$，使得 f 的贪婪算法在几乎每一点都发散。

1.1. **论文概要**。 我们现在简要概述本文。第 2 节回顾向量格和巴拿赫空间所需的术语。随后，在第 3 节中，我们将 [63, 65] 的思想与贪婪理论中的思想结合起来，把关于准贪婪基的若干结果推广到格空间框架。具体而言，我们在第 3.1 节证明定理 1.2，在第 3.2 节讨论定理 1.1 在框架中的适用程度（并作为我们方法的推论，解决了 [27]中的一个问题），在第 3.3 节验证关于准贪婪基的大多数基本结果都可推广到一致准贪婪基。由于第 3.1 节和第 3.3 节的结果在 $X = C[0,1]$时必须还原为关于准贪婪基的经典结果，因此新的证明与经典证明不可避免地有所重叠——这两个小节的论述将大致沿用 [5, 第 10]章。

本文的核心是第4节，我们旨在通过证明一些在 Schauder 基或准贪婪基的经典理论中没有直接对应结果的定理，为巴拿赫格中的坐标系提出一种全新的定性视角。我们从第4.1节开始，目标是刻画巴拿赫空间 E 的一个“良好”基何时能够嵌入巴拿赫格 X，从而继承“糟糕”的格性质。如前所述，通过选择 $X = C[0,1]$，总能将 Schauder 基或准贪婪基嵌入格中，使定理 1.1 和 1.2 成立。在第4.1.1节中，我们构造了一个巴拿赫格 X，其中包含林登施特劳斯基的一个副本，却同时不满足定理 1.1 和 1.2。接着，在第4.1.2节中，我们针对每个 $p > 1$，构造了 ℓ_p 的一个基 (u_i)，它等价于 ℓ_p 的典范基，却同时不满足定理 1.1 和 1.2。最后，我们证明

在第4.1.3节中，我们证明，一个归一化基能够嵌入巴拿赫格，使其不具有绝对性（即无条件基的极大不等式不成立），当且仅当它不等价于典范 ℓ_1 基。

在第4.2节中，我们从嵌入转向分块。这一主题中，双基与贪婪基的表现截然不同。事实上，正如我们将在第4.2.1节中证明的，要对一个基进行分块，使其满足定理 1.1 或其无条件变体，是相当容易的。另一方面，在第4.2.2节中，我们将证明，ℓ_p 的典范基是唯一一个其每种分块都是贪婪的子对称基。

在第4.3节中，我们将刻画 AM-空间：在格同构意义下，它们是唯一一类每个无条件序列都是绝对序列的巴拿赫格。我们还将证明，如果巴拿赫格 X 中的每个基本序列都满足定理 1.1，那么对于所有有限的 p，X 都必须是 p-凸的。

在第4.4节中，我们证明可补绝对序列表现得与不交序列非常相似，并利用这一点给出一个巴拿赫格证明，说明众所周知的事实：$C[0,1]$ 唯一具有无条件基的有补子空间是 c_0。在第4.5节中，我们证明，L_p 的每个无条件基都可以重新排列，使其不满足定理 1.1；并且嵌入绝对有限维分解的张成空间的 σ-序完备巴拿赫格必定是纯原子的。

全文中，我们会用到一些标准事实和记号——一般巴拿赫空间的相关内容见 [5, 44, 45]，巴拿赫格的具体内容见 [47]。除非另有说明，标量域为 $\mathbb{R}$。

致谢。第一作者获得了资助项目 PID2022-142202NB-I00/ AEI/ 10.13039/501100011033（西班牙国家研究署）的资助。

2. Background

本节介绍必要的向量格和巴拿赫空间背景——关于框架和贪心算法的背景将在全文中陆续介绍。

设 (y_α) 是向量格 X 中的一个网，则 $y_\alpha \downarrow 0$ 意味着 y_α 是递减的，且下确界为 $\{y_\alpha\} = 0$。如果对每个正向量 $e \in X$ 都有 $n^{-1}e \downarrow 0$，则称向量格 X 为 阿基米德的。我们将讨论阿基米德向量格 X 中序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 的三种经典序列收敛概念。

- 我们称 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 一致收敛到 x，记作 $x_n \xrightarrow{u} x$，如果存在 $e \in X_+$ 以及一个属于 $\mathbb{R}$ 的序列 $\epsilon_m \downarrow 0$，满足：

$$\forall m\ \exists n_m\ \forall n \geq n_m,\ |x_n - x| \leq \epsilon_m e.$$

- 我们称 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 按序收敛到 x（相对于一个序列），记作 $x_n \xrightarrow{o_1} x$，如果存在一个属于 X 的序列 $y_m \downarrow 0$，满足：

$$\forall m\ \exists n_m\ \forall n \geq n_m,\ |x_n - x| \leq y_m.$$

- 我们称 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 按序收敛到 x（相对于一个网），记作 $x_n \xrightarrow{o} x$，如果存在一个网 $y_\beta \downarrow 0$ 属于 X，满足：

$$\forall \beta\ \exists n_\beta\ \forall n \geq n_\beta,\ |x_n - x| \leq y_\beta.$$

显然， $x_n \xrightarrow{u} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{o_1} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{o} x$；然而，一般而言，两个逆命题都不成立。在巴拿赫格中还存在范数收敛；尽管 u-收敛蕴含范数收敛，o_1-收敛却未必如此。范数收敛序列也不一定按 o 收敛，但至少存在按 u 收敛的子列。

回顾一下，巴拿赫空间 X 的 （*Schauder*）基 是 X 中的一个序列（x_k），满足对于 X 中的每个向量x，都存在唯一的标量序列（a_k）使得 $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$。当然，这里的级数按范数收敛。对于每个 n $= \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ $P_n x \xrightarrow{\|\cdot\|} x.$ P_n ，我们定义第 - 个基投影 P_n： $X \to X$，通过 $P_n(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k)$，从而 已知这些投影是一致有界的；数$K := \sup_n \|P_n\|$ 称为（x_k）的基常数。若 X 中的一个序列（x_k）是其闭线性张成 $[x_k]$ 的 Schauder 基，则称其为 （*Schauder*）基本序列。在这种情况下， P_n 定义在 $[x_k]$ 上。一个标准事实是：由非零向量组成的序列（x_k）是 Schauder 基，当且仅当存在常数 $K \geq 1$ 使得

$$\bigvee_{n=1}^{m} \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \Big\| \leq K \Big\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \Big\| \qquad \text{for all } m \in \mathbb{N} \text{ and all scalars } a_1, \ldots, a_m. \tag{2.1}$$

此外，常数 K 的最小值就是 (x_k) 的基常数。若 (x_k) 的每个置换都是基本序列，则称序列 (x_k)无条件。众所周知，基本序列的无条件性可由存在常数 $C \geq 1$ 使得

$$\bigvee_{\epsilon_k = \pm 1} \Big\| \sum_{k=1}^{m} \epsilon_k a_k x_k \Big\| \leq C \Big\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \Big\| \qquad \text{for all } m \in \mathbb{N} \text{ and all scalars } a_1, \ldots, a_m. \tag{2.2}$$

现在假设 X 是一个巴拿赫格。通过交换上确界与范数的次序，可以得到 (2.1) 和 (2.2) 的“极大不等式”变体。更正式地说，巴拿赫格 X 中的非零向量序列 (x_k) 称为双基，如果存在常数 $M \geq 1$ 使得

$$\Big\| \bigvee_{n=1}^{m} \Big| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \Big| \Big\| \leq M \Big\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \Big\| \qquad \text{for all } m \in \mathbb{N} \text{ and all scalars } a_1, \ldots, a_m \tag{2.3}$$

若存在常数 $A \geq 1$ 使得，则称其为绝对的。

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} |a_k x_k| \Big\| \leq A \Big\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \Big\| \qquad \text{for all } m \in \mathbb{N} \text{ and all scalars } a_1, \ldots, a_m. \tag{2.4}$$

注意 在由 (2.2) 得到不等式 (2.4) 时，我们使用了如下标准事实 t

$$\bigvee_{\epsilon_k = \pm 1} \Big| \sum_{k=1}^{m} \epsilon_k a_k x_k \Big| = \sum_{k=1}^{m} |a_k x_k|, \tag{2.5}$$

该事实在任意阿基米德向量格中都成立。显然，每个双基序列都是基本序列。根据定理 1.1，一个基本序列是双基的，当且仅当对于每个 $x \in [x_k]$、 $P_n x \xrightarrow{o} x$。

当 X 是一个 $C(K)$-空间时，很容易看出每个基本序列都是双基的，而每个无条件序列都是绝对的。本文的主要目标之一是证明一个逆命题；也就是说，一个巴拿赫格 X 是某个 $C(K)$-空间的闭子格的格同构，当且仅当每个无条件序列都是绝对的。

3. Reconstruction algorithms for coordinate systems in Banach lattices

在本节中，我们开始着手将格技术引入框架和贪婪基的研究。

3.1. 双基定理的贪婪版本。我们首先证明定理 1.2。为固定记号， X 将是一个巴拿赫格， E 是 X 的一个闭子空间，而 $\mathcal{B}=(e_n)$是 E的一个半归一化基。(e_n)的双正交泛函记作 $e_n^* \in E^*$。

我们首先回顾贪心算法的一些基本内容。固定 $x \in E$。 x的一个贪婪排序是一个单射 $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足 $\{n: e_n^*(x) \neq 0\} \subseteq \pi(\mathbb{N})$，且$(|e_{\pi(n)}^*(x)|)$是非递增的。与 π 相关的 x 的第 m个贪婪和定义为$G_{\pi,m}(x) := \sum_{n=1}^m e_{\pi(n)}^*(x)e_{\pi(n)}$，序列$(G_{\pi,m}(x))_{m=1}^\infty$ 称为 x的一个贪心逼近。 x 的一个 m 阶严格贪婪和是一个元素$G_{\pi,m}(x)$，其定义 x的第 m个贪婪和时不存在歧义，即对于所有贪婪排序 σ，都有 $G_{\pi,m}(x)=G_{\sigma,m}(x)$。众所周知，贪婪排序的选择并非特别重要，因此我们通常采用由基诱导的排序。更具体地说，我们定义$\rho: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得 $\{n: e_n^*(x) \neq 0\} \subseteq \rho(\mathbb{N})$，并且若 $j<k$，则要么 $|e_{\rho(j)}^*(x)| > |e_{\rho(k)}^*(x)|$，要么 $|e_{\rho(j)}^*(x)| = |e_{\rho(k)}^*(x)|$ 且 $\rho(j) < \rho(k)$。我们将 x 的第 m个自然贪心和定义为 $\mathcal{G}_m(x) := \sum_{n=1}^m e_{\rho(n)}^*(x)e_{\rho(n)}$，并称基$(e_n)$为准贪婪的，若对所有 $x \in E$，都有 $\mathcal{G}_m(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$。根据定理 1.3，$(e_n)$是准贪婪的，当且仅当存在常数 $C \geq 1$，使得对所有 $x \in E$ 和 $m \in \mathbb{N}$，都有 $\|\mathcal{G}_m(x)\| \leq C\|x\|$.

以上所有定义在巴拿赫空间，甚至准巴拿赫空间中都成立。由于我们要求 X是一个格，对于每个 $x \in E$ 和贪婪排序 π，我们可以定义

$$G_{\pi,m}^\vee(x) := \bigvee_{n=1}^m |G_{\pi,n}(x)| = \bigvee_{n=1}^m \left| \sum_{k=1}^n e_{\pi(k)}^*(x)e_{\pi(k)} \right|.$$

特别地，我们可以考虑映射 $x \mapsto \mathcal{G}_m^\vee(x) := \bigvee_{n=1}^m |\mathcal{G}_n(x)|$，并且由于它是绝对齐次的，我们可以定义 $\|\mathcal{G}_m^\vee\| := \sup_{x \in S_E} \|\mathcal{G}_m^\vee(x)\|$. 我们称$G_{\pi,m}(x)$是 x 的格严格贪婪和，其阶为 m，如果对于每个不同的 i, $j \in \{1,\dots,m\}$，只要 $e_{\pi(i)}^*(x) \neq 0$，就有 $|e_{\pi(i)}^*(x)| \neq |e_{\pi(j)}^*(x)|$。

首先，我们将“贪婪排序的选择并非特别重要”这一事实推广到格空间框架。在证明中需要稍加留意，因为即使$G_{\pi,m}(x)$是严格贪婪的，$G_{\pi,m}^\vee(x)$也可能依赖于 π。

引理 3.1. 设 (e_n) 是巴拿赫格 X 中的半归一化基序列，且 $C>0$ 是一个常数。以下条件等价。

(i) 对所有 $x \in E$、所有 $m \in \mathbb{N}$ 以及所有贪婪排序 π, $\|G_{\pi,m}^\vee(x)\| \leq C\|x\|$.*(ii)* 对所有 $x \in E$ 以及所有 $m \in \mathbb{N}$, $\|\mathcal{G}_m^\vee(x)\| \leq C\|x\|$. *(iii)* 对所有 $x \in E$ 和所有 $m \in \mathbb{N}$，存在一个贪婪排序 π，使得$\|G_{\pi,m}^\vee(x)\| \leq C\|x\|$.*(iv)* 若 $x \in E$ 具有有限支撑，且 $\mathcal{G}_{|supp(x)|}(x)$ 是格严格贪婪的，则有 $\|\mathcal{G}_{|supp(x)|}^\vee(x)\| \leq C\|x\|$ 。*(v)* 对所有有限支撑的 $x \in E$，有 $\|\mathcal{G}_{|supp(x)|}^\vee(x)\| \leq C\|x\|$ 。

此外，使上述估计成立的最小 C 为 $C=$ 上确界$_m \|\mathcal{G}_m^\vee\|$。

证明。 (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)显然。

(iv)⇒(v)：设 $x \in E$ 具有有限支撑，即 r。写作 $x = \mathcal{G}_r(x) = \sum_{n=1}^{r} e^*_{\rho(n)}(x)e_{\rho(n)}$。固定$\varepsilon > 0$并找出 δ_1、.....、δ_r，使得 $|e^*_{\rho(1)}(x) + \delta_1| > \cdots > |e^*_{\rho(r)}(x) + \delta_r| > \max_{i\notin\{\rho(1),\dots,\rho(r)\}} |e^*_i(x)|$，并且对所有 $n = 1$、...、r均有$\|\delta_n e_{\rho(n)}\| < \frac{\varepsilon}{Cm}$。我们考虑元素 $y := x + \sum_{n=1}^{r} \delta_n e_{\rho(n)}$。容易看出，$y = \mathcal{G}_r(y)$ 是一个格严格贪婪和，因此 (iv) 蕴含

$$\left\| \bigvee_{i=1}^{r} \left| \sum_{n=1}^{i} (e^*_{\rho(n)}(x) + \delta_n)e_{\rho(n)} \right| \right\| \le C\|y\| \le C\|x\| + \varepsilon.$$

因此，

$$\begin{aligned} \left\| \bigvee_{i=1}^{r} \left| \sum_{n=1}^{i} e^*_{\rho(n)}(x)e_{\rho(n)} \right| \right\| &\le \left\| \bigvee_{i=1}^{r} \left| \sum_{n=1}^{i} (e^*_{\rho(n)}(x) + \delta_n)e_{\rho(n)} \right| \right\| \\ &+ \left\| |\delta_1 e_{\rho(1)}| + \cdots + |\delta_r e_{\rho(r)}| \right\| \\ &\le C\|x\| + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

这就推出 $\|\mathcal{G}^\vee_m(x)\| \le C\|x\|$。

(v)⇒(i)：通过与 (iv)⇒(v) 类似的论证，条件 (v) 蕴含对于所有有限支撑的$\|G^\vee_{\pi,\ |\mathrm{supp}(x)|}(x)\| \le C\|x\|$以及 x 的所有贪婪排序 π，均有此结论。现在固定 $m \in \mathbb{N}$，并令 π 为 x的一个贪婪排序。注意，对于任何满足 $n \ge \max(\pi(1)\dots,\pi(m))$ 的 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\|G^\vee_{\pi,m}(x)\| = \|G^\vee_{\pi,m}(P_n x)\| \le \|G^\vee_{\pi,n}(P_n x)\| \le C\|P_n x\|. \tag{3.1}$$

另一方面，由于 (e_n) 是一个基本序列，我们有 $x = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$。因此，在 (3.1) 中取极限可得，对于所有 $m \in \mathbb{N}$，均有$\|G^\vee_{\pi,\ m}(x)\| \le C\|x\|$，正如所需。

□

为了证明定理 1.2，我们需要以下引理。

引理3.2。假设定理 *3.1* 中的 *(v)* 不成立。那么对于每个 $C \ge 1$ 和每个有限集 $A \subseteq \mathbb{N}$，存在 $x \in E$，满足 $|supp(x)| < \infty$ 和 $supp(x) \cap A = \emptyset$，使得 $\|\mathcal{G}^\vee_{|supp(x)|}(x)\| > C\|x\|$。

证明。固定上述的 C 和 A，并定义 $M := \sum_{n\in A} \|e^*_n\|\|e_n\|$。根据假设，存在一个具有有限支撑的 $y \in E$，使得

$$\|\mathcal{G}^\vee_{|\mathrm{supp}(y)|}(y)\| > (C(1 + M) + M)\|y\|. \tag{3.2}$$

令 $r = |\mathrm{supp}(y)|$，并定义 $x = (I - P_A)(y)$，其中对于 $z \in E$，$P_A(z) := \sum_{n\in A} e^*_n(z)e_n$。由于 $x \in E$ 具有与 A 不交的有限支撑，我们只需证明 $\|\mathcal{G}^\vee_m(x)\| > C\|x\|$，其中 m 是 x 的支撑的基数。为此，注意到 $\mathcal{G}^\vee_r(y) \le \mathcal{G}^\vee_m(x) + \sum_{k\in A} |e^*_k(y)e_k|$，因此

$$\|\mathcal{G}^\vee_m(x)\| \ge \|\mathcal{G}^\vee_r(y)\| - \|\sum_{k\in A} |e^*_k(y)e_k|\| > (C(1 + M) + M)\|y\| - M\|y\|.$$

将不等式 $\|x\| \le (1 + M)\|y\|$ 代入上述结果，我们便得到 $\|\mathcal{G}^\vee_m(x)\| > C\|x\|$，证毕。□

现在我们可以证明定理 1.1 的贪婪类比。

定理 3.3。对于巴拿赫格 X 中的半归一化基序列 $\mathcal{B} = (e_n)$，以下条件等价。

(i) 对所有 $x \in E$, $\mathcal{G}_m(x) \xrightarrow{u} x$; *(ii)* 对所有 $x \in E$, $\mathcal{G}_m(x) \xrightarrow{o} x$; *(iii)* 对某个 $u \in X$ 及所有 m，对所有 $x \in E$, $|\mathcal{G}_m(x)| \leq u$; *(iv)* 对所有 $x \in E$，$(\bigvee_{n=1}^{m} |\mathcal{G}_n(x)|)_m$ 范数有界; *(v)* 存在 $C \geq 1$ ，使得对所有 $x \in E$ 和 $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \bigvee_{n=1}^{m} |\mathcal{G}_n(x)| \right\| \leq C\|x\|.$$

证明。显然，(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)。

(iii)⇒(v)：反设不然。由定理 3.2 可得一个由 E 中元素构成的序列 (x_k)，使得对每个 k:

(a) $m_k := |supp(x_k)|$ 是有限的，且对于 $i = 1$、.....、$k-1$, $supp(x_k) \cap supp(x_i) = \emptyset$; (b) $\|x_k\| \leq 2^{-k}$; (c) $\|\mathcal{G}^{\vee}_{m_k}(x_k)\| \geq k$; (d) $\max\{|e^*_n(x_k)| : n \in \mathbb{N}\} < \min\{|e^*_n(x_{k-1})| : n \in supp(x_{k-1})\}$.

确实，我们当然可以对 $k = 1$ 这样做，因此假设我们已经构造出 x_1、.....、x_{k-1}。令$\mu = \min\{|e^*_n(x_{k-1})| : n \in supp(x_{k-1})\}$，并令 $C_k = \max\{k2^k, 2Kk\mu^{-1}\}$，其中 $K = \sup_n \|e^*_n\|$。由定理 3.2，存在一个有限支撑且与 $\cup_{i=1}^{k-1} supp(x_i)$ 不交的 x_k，使得 $\|\mathcal{G}^{\vee}_{m_k}(x_k)\| > C_k\|x_k\|$。对 x_k 进行缩放后，可令 $\|x_k\| = kC_k^{-1} \leq 2^{-k}$，从而 $\|\mathcal{G}^{\vee}_{m_k}(x_k)\| \geq k$。那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有

$$|e^*_n(x_k)| \leq \|e^*_n\|\|x_k\| < \mu.$$

现在，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛到某个 $x \in E$。注意，按构造，$\sum_{k=1}^{j-1} x_k = \mathcal{G}_{l_j}(x)$ 是 x 的严格贪婪和（这里 $l_j := \sum_{k=1}^{j-1} m_k$, $j \geq 2$，且 $l_1 := 0$）。将 x_j 按其自然贪心排序写为 $e^*_{\rho_j(1)}(x_j)e_{\rho_j(1)} + \cdots + e^*_{\rho_j(m_j)}(x_j)e_{\rho_j(m_j)}$, 并注意，对每个 $1 \leq r \leq m_j$, $\mathcal{G}_{l_j}(x) + e^*_{\rho_j(1)}(x_j)e_{\rho_j(1)} + \cdots + e^*_{\rho_j(r)}(x_j)e_{\rho_j(r)}$ 是 x 的自然贪心和。因此，根据假设，存在一个 u，使得 $|\mathcal{G}_{l_j}(x) + e^*_{\rho_j(1)}(x_j)e_{\rho_j(1)} + \cdots + e^*_{\rho_j(r)}(x_j)e_{\rho_j(r)}| \leq u$。注意，$u$ 是一致的（与 j 和 r 无关），因为我们正在构造 x 的自然贪心逼近；也就是说，我们所估计的每一项都是同一个逼近的贪心和。特别地，对所有 j，都有 $|\mathcal{G}_{l_j}(x)| \leq u$，因此 $|e^*_{\rho_j(1)}(x_j)e_{\rho_j(1)} + \cdots + e^*_{\rho_j(r)}(x_j)e_{\rho_j(r)}| \leq 2u$。取上确界可得 $\mathcal{G}^{\vee}_{m_j}(x_j) \leq 2u$，从而 $j \leq \|\mathcal{G}^{\vee}_{m_j}(x_j)\| \leq 2\|u\|$。这就产生了矛盾。

(v)⇒(i)：根据 [5, 定理 10.2.3、引理 10.2.5]，我们得到，对于每个 $y \in E$, $\mathcal{G}_m(y) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$。固定 $x \in E$。由于 $\mathcal{G}_m(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$，存在 $m_1 < m_2 < \ldots$，使得 $\mathcal{G}_{m_k}(x) \xrightarrow{u} x$。取进一步的子列，并利用 $(\mathcal{G}_m(x))$ 是柯西的这一事实，我们可以假设，对于所有 $i > m_k$, $\|\mathcal{G}_i(x) - \mathcal{G}_{m_k}(x)\| < \frac{1}{2^k}$。特别地，$\|x - \mathcal{G}_{m_k}(x)\| \leq \frac{1}{2^k}$。

考虑元素 $y_k = x - \mathcal{G}_{m_k}(x)$。那么对于每个 $i > m_k$, $\mathcal{G}_i(x) - \mathcal{G}_{m_k}(x)$ 就是 $\mathcal{G}_{i-m_k}(y_k)$。因此，我们的假设推出

$$u_k = \bigvee_{i=m_k+1}^{i=m_{k+1}} |\mathcal{G}_i(x) - \mathcal{G}_{m_k}(x)|$$

范数至多为 $C\|y_k\| \leq \frac{C}{2^k}$。定义 $e := \sum_{k=1}^{\infty} ku_k$。那么对每个 $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq \frac{e}{k}$，使得 $u_k \xrightarrow{u} 0$。

由于 $|\mathcal{G}_{m_k}(x) - x| + u_k \xrightarrow{u} 0$，存在一个向量 $f_1 > 0$，具有如下性质：对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 k^*；对于任意 $k \geq k^*$，$|\mathcal{G}_{m_k}(x) - x| + u_k \leq \varepsilon f_1$。固定 ε，并求出所需的 k^*。令 $i \in \mathbb{N}$，满足$i > m_{k^*}$。我们可以找到 $k \geq k^*$，满足 $m_k < i \leq m_{k+1}$，使得

$$|\mathcal{G}_i(x) - x| \leq |\mathcal{G}_{m_k}(x) - x| + |\mathcal{G}_i(x) - \mathcal{G}_{m_k}(x)| = |\mathcal{G}_{m_k}(x) - x| + u_k \leq \varepsilon f_1.$$

这表明 $\mathcal{G}_i(x) \xrightarrow{u} x$，因此 $\mathcal{B}$ 满足 (i)。

由此我们证明了 (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(v)⇒(iv)。对于 (iv)⇒(i)，假设对每个 $x \in E$，$(\mathcal{G}_m^\vee(x))$ 都是范数有界的。由于 $(\mathcal{G}_m^\vee(x))$ 是递增序列，它在 X^{**} 中有一个上确界，因此 $(\mathcal{G}_m(x))$ 在 X^{**} 中序有界。于是，(ii) 在 X^{**} 中成立，因此 (i) 在 X^{**} 中成立。然而，序列的一致收敛可以借助 [65, 命题 2.12]，从 X^{**} 自由地传递到 X。因此，(i) 在 X 中成立。□

我们将称巴拿赫格中的半归一化基序列 (e_n)一致准贪婪，如果它满足定理 3.3 中任意一个、因而也满足全部条件。注意，定理 3.3 中的最后一个条件表示 $C_{qg}^\vee := \sup_m \|\mathcal{G}_m^\vee\| < \infty$。我们将 $C_{qg}^\vee$ 称为 (e_n) 的一致拟贪婪常数。

例 3.4。 小波： 通过用 Hardy-Littlewood 极大函数控制贪心逼近的极大函数，Tao（[61], 另见 [40]）证明了所有紧支撑小波基（例如 Haar 基和 Daubechies 小波）在 L_p 中对所有$1 < p < \infty$ 都是一致准贪婪的。特别地，考虑 Haar 基的一个不是双基的重排（[65,例 6.2]），我们看到一致准贪婪基不一定是双基。

例 3.5。 三角基与 *Walsh* 基： 在 [38], K¨orner 证明了存在一个实值函数 $f \in L_2(\mathbb{T})$，其相对于三角系统的贪婪算法几乎处处发散。特别地，这给出了一个基的例子：它既是贪婪基，也是双基，但不是一致准贪婪基。同样，在 [39] 中证明了，Walsh 基的贪婪算法未必几乎处处收敛。

注 3.6。 如第 1 节所述，由于可以自由选择环境巴拿赫格，我们将在本文中为一致准贪婪基发展出的理论将涵盖并拓展准贪婪基的通常理论。为此，设 (e_n) 是巴拿赫空间 E 中的半归一化 Schauder 基。由于 E可分，我们可以将 E视为 $C[0,1]$的子空间。在 $C[0,1]$中，容易看出一致收敛与范数收敛一致，并且对所有$x,\ y \in C[0,1]$均成立。因此，在定理 3.3 中选取 $X = C[0,1]$，即可得到定理 1.3 中准贪婪基的经典刻画。同样，当 $X = C[0,1]$时，我们在第 3.3 节中的结果将得到准贪婪基的经典结构性质。这引出了关于定理 3.3 的两种不同视角：

首先，假设巴拿赫格 X 已固定。此时，人们会感兴趣于确定哪些准贪婪基（或准贪婪基本序列）在 X 中是一致准贪婪的，因为这些基将具有定理 3.3 中更强的逼近性质。另一方面，假设巴拿赫空间 E ——甚至是 E 的一个基 (e_n)——已固定，并考虑将 E 嵌入巴拿赫格 X。如果选择 X 为 $C[0,1]$，那么本文将证明的若干定理便能推导出准贪婪基理论中的相应结果。然而，如果以不同方式选择 X，那么序列 (e_n) 相对于 X 可能是一致准贪婪的，也可能不是。请注意，一致准贪婪这一性质相对于 X 的选择是“稳定的”，也就是说

如果 (e_n) 是 X 中的基本序列，而 X 是 Y 的闭子格，那么 (e_n) 相对于 X 一致准贪婪，当且仅当它相对于 Y 一致准贪婪。下一节中，我们将说明，如果对 X 施加条件（例如序连续性，或为经典巴拿赫格），或者对 E 在 X 中的嵌入方式施加条件（例如可补，甚至是 $E = X$），那么便可以证明关于双基和一致准贪婪基的定理，而这些定理在 Schauder 基或准贪婪基的情形下并无对应结果。

注3.7. 定理 3.3 对绍德尔分解同样成立。由于文献中似乎尚未出现贪心分解，我们在此简要说明其含义：

设 $\mathcal{B} = (E_n)$ 是巴拿赫格 X 的一列闭非零子空间，构成 $E := [E_n]$. 的绍德尔分解。固定 $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \in E$，其中对所有 n 都有 $e_n \in E_n$ 。 x 的一种贪婪排序是一个单射 $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足 $\{n : e_n \neq 0\} \subseteq \pi(\mathbb{N})$ 且 $(\|e_{\pi(n)}\|)$ 非递增。与 π 相关联的 x 的第 m 个贪婪和定义为 $G_{\pi,m}(x) := \sum_{n=1}^{m} e_{\pi(n)}$，而序列 $(G_{\pi,m}(x))_{m=1}^{\infty}$ 称为 x 的一种贪心逼近。若对所有贪婪排序 σ，都有 $G_{\pi,m}(x) = G_{\sigma,m}(x)$，则称 x 的 $G_{\pi,m}(x)$ 是阶为 m 的严格贪婪和。x 的第 m 个自然贪心和为 $\mathcal{G}_m(x) := \sum_{n=1}^{m} e_{\rho(n)}$，其中 $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足 $\{n : e_n \neq 0\} \subseteq \rho(\mathbb{N})$，且若 $j < k$，则要么 $\|e_{\rho(j)}\| > \|e_{\rho(k)}\|$，要么 $\|e_{\rho(j)}\| = \|e_{\rho(k)}\|$，并且 $\rho(j) < \rho(k)$。若对所有 $x \in E$ 都有 $\mathcal{G}_m(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$，则称该分解为准贪心分解。以显而易见的方式定义 $\mathcal{G}_m^{\vee}$ 后，下面定理的证明与半归一化基本序列的情形几乎完全相同。

定理3.8。 设 $\mathcal{B} = (E_n)$ 是巴拿赫格 X 中的子空间序列，并且构成 $[E_n]$的绍德尔分解。以下各条件等价。

(i) 对所有 $x \in E$、 $\mathcal{G}_m(x) \xrightarrow{u} x$; *(ii)* 对所有 $x \in E$、 $\mathcal{G}_m(x) \xrightarrow{o} x$; *(iii)* 对所有 $x \in E$、 $|\mathcal{G}_m(x)| \leq u$，存在某个 $u \in X$ 使得对所有 m均成立; *(iv)* 对所有 $x \in E$, $(\bigvee_{n=1}^{m} |\mathcal{G}_n(x)|)_m$ 范数有界; *(v)* 存在 $C \geq 1$，使得对所有 $x \in E$ 和 $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \bigvee_{n=1}^{m} |\mathcal{G}_n(x)| \right\| \leq C\|x\|.$$

特别地，按照定理3.6中的论证，定理1.3中关于准贪婪基的“通常”刻画对于准贪婪分解同样成立——为方便读者起见，我们将重点讨论基的情形；不过，本文还将在各处回到有限维分解（有限维分解）这一主题。

我们还要指出，尽管一致准贪婪是针对自然排序表述的，但它与贪婪排序无关。事实上，注意到绝对收敛级数一致收敛后，可以利用 [5, 引理 10.2.5] 的证明来说明如下结论。

命题 3.9. 设(e_n) 是巴拿赫格 X 中的一个基本序列。以下条件等价。

(i) $G_m(x) \xrightarrow{u} x$ 对每个 $x \in E$ 以及每个贪婪逼近 $(G_m(x))$ 均成立; *(ii)* (e_n) 是一致准贪婪的; *(iii)* 对每个 $x \in E$，存在一个贪婪逼近 $(G_m(x))$，使得 $G_m(x) \xrightarrow{u} x$; *(iv)* 对每个具有无限支撑的 $x \in E$，其严格贪婪逼近一致收敛于x。

类似于定理 3.1 和定理 3.9 的结果对于定理 3.3 的条件 (ii)、(iii) 和 (iv) 同样成立。例如，可以证明，一致准贪婪等价于这样一个事实：对于每个 $x \in E$ 和贪婪排序 π，存在一个 $u^\pi \in X$，满足对所有 m，$|G_{\pi,\, m}(x)| \leq u^\pi$。然而，下面的例子表明，不能独立于 π选取 u^π：

例 3.10。我们将构造巴拿赫格 $X = \ell_2(L_2)$ 中的一个一致准贪婪序列 (e_k)，使得存在 $x \in E$，但不存在这样的 $u \in X$，使得对每个 $m \in \mathbb{N}$ 和每个贪婪排序 π，都有$|G_{\pi,m}(x)| \leq u$。在 n 个 L_2 副本中的第一个副本里，我们考虑前 n^2 个拉 ademacher 向量。按字典序将它们排列成一个归一化基本序列 (e_k)；由标准的鞅不等式可知，拉德马赫函数在任意排序下都是双基，由此可得 (e_k) 是一致准贪婪的。现在考虑由 $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in \ell_2(L_2)$ 定义的向量，其中 n 的第 a_k 个副本中的所有元素都取为 $\frac{1}{n^2}$。注意，由于 (e_k) 是一个正交归一序列，这个级数收敛，而且它已经按自然贪心排序排列。接下来，回顾不等式 $\sup_{\delta_n=0,1} |\sum_{n=1}^m \delta_n x_n| \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^m |x_n|$，并假设 $u \in X$ 对每个 π 和 m 都支配 $|G_{\pi,m}(x)|$。那么在第 n 个块中，u 必须支配拉德马赫函数任意置换的部分和，因此它必须支配其绝对值之和的一半。这意味着第 n 个块至少对 u 的范数贡献 1 2。由于这些块彼此不交，这迫使 $\|u\|$ 任意大，矛盾。

注 3.11. 定理 3.10 的动机源于 [65] 中给出的绝对序列的各种刻画。设 (x_k) 是巴拿赫格 X 中的一个无条件基序列。若 (x_k) 在每一种排列下都是双基，则称其为 可置换的；也就是说，对每个置换 σ 和 $x \in [x_k]$，都存在 u^σ，使得对所有 n，$|P_n^\sigma x| \leq u^\sigma$ 成立，其中 P_n^σ 是与置换 σ 相对应的第 n 个部分和。事实证明，当且仅当 (x_k) 是绝对序列时，可以选取与 σ 无关的 u^σ ——参见 [65, 命题 7.5]。如定理 3.10 所示，定理 3.3 的陈述 (iii) 中的序界 u^π 可以选取得与贪婪排序 π 无关，这一性质可视为一致准贪婪与绝对性之间的一种中间性质（关于绝对序列的进一步刻画，参见 [65, 定理 7.2]）。

注 3.12. 除了定理 1.3 之外，贪婪基理论中的另一个主要刻画是：贪婪等价于无条件且民主。该刻画也可以推广到巴拿赫格空间框架，如下所示：设 $(M,\ \Sigma,\ \mu)$ 是一个测度空间，且 X 是定义在 $(M,\ \Sigma,\ \mu)$ 上的巴拿赫函数空间。对于每个 $x \in X$，令 $G_x \in \Sigma$ 表示任意一个满足以下条件的有限测度集

$$\operatorname{ess\,sup}_{s \in G_x^c} |x(s)| \leq \operatorname{ess\,inf}_{t \in G_x} |x(t)| < \infty.$$

对于每个 $A \in \Sigma$，令 P_A 表示到 A 的限制算子。若存在某个常数 $C > 0$，使得对于所有 $x \in X$ 以及所有形如 G_x 的集合，都有

$$\|x - P_{G_x} x\| \leq C \inf_{\mu(A) \leq \mu(G_x);\, y \in P_A X} \|x - y\|.$$

如果存在 $D > 0$，使得对于所有 $A,\ B \in \Sigma$，当$\mu(A) \leq \mu(B) < \infty$时，$X$ 就是民主的。通过常规论证可知，X 是贪婪的当且仅当它是民主的。这将（加权）贪婪基的刻画从离散情形（其中 μ 是原子型的）推广到了巴拿赫函数空间的连续情形。

3.2. 框架的双基定理不成立。定理 1.1 的一个令人惊讶之处是，尽管序收敛和序有界性通常不会在子格之间传递，但陈述 (iv) 在子格之间传递时具有稳定性，也就是说，如果 $(x_k) \subseteq X \subseteq Y$，那么 (iv) 在 X 中成立，当且仅当它在 Y 中成立。在定理 1.1 的陈述 (ii) 中，实际上有一个同时在范数意义和序意义下收敛的序列，因此人们可能会想知道这些序列是否可以在闭子格之间自由传递。下面的结果表明答案是否定的；稍后我们将进一步展开这个例子，以说明框架的双基定理不成立。

例 3.13. 设 φ 是一个奥利奇函数，对于每个实数序列 $x=(x_k)$，定义 $I(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(|x_k|)$。那么 $\ell_\varphi := \{x:\exists\lambda>0,\ I(\lambda x)\le 1\}$ 在卢森堡范数下是一个巴拿赫格，并且 $h_\varphi := \{x:\forall\lambda>0,\ I(\lambda x)<\infty\}$ 是 ℓ_φ 的一个闭序稠密理想。众所周知，$\ell_\varphi = h_\varphi$ 当且仅当 φ 在零点附近满足 Δ_2 条件，因此任取一个在零点附近不满足 Δ_2 条件的 φ。在 $\ell_\varphi \setminus h_\varphi$ 中固定一个正向量 $x=(x_k)$，并定义 $y^k = x_k e^k \in h_\varphi$，其中 e^k 是第 k 个标准单位向量。接着，若 $n\ge k$，则令 z^k 为 $z^k_n = x_n$；否则令其为 0。于是 $0\le y^k \le z^k \downarrow 0$ 属于 ℓ_φ，因此 $y^k \xrightarrow{o} 0$ 属于 $\ell_{\varphi\infty}$。注意，由于 $x\in\ell_\varphi$，(y^k) 是范数趋零的，但 (y^k) 在 h_φ 中甚至不是序有界的，因为 (y^k) 的任何上界都必须在逐坐标意义上支配 $x\notin h_{\varphi\infty}$。

现在我们可以证明定理 1.1 对框架不成立。回忆一下，给定一个巴拿赫空间 E，若序列 $(x_k,f_k)\in E\times E^*$ 满足对所有 $x\in E$ 都有 $x=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)x_k$，则称其为 E 的<便于删除吗>绍德尔框架。注意，定理 1.1 中的每个陈述都有一个显而易见的“框架”类比。具体而言，对于一个框架 (x_k,f_k)，且 (x_k) 包含在一个巴拿赫格中，我们可以考虑以下性质：

(i) 对所有 $x\in[x_k]$, $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k \xrightarrow{u} x$；(ii) 对所有 $x\in[x_k]$, $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k \xrightarrow{o} x$；(iii) 对所有 $x\in[x_k]$,$(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k)_n$ 均序有界；(iv) 对所有 $x\in[x_k]$,$(\bigvee_{n=1}^{m}|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k|)_m$ 均范数有界；
(v) 存在 $M\ge 1$，使得对所有 $x\in[x_k]$ 和 $m\in\mathbb{N}$,

$$\left\| \bigvee_{n=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k \right| \right\| \le M\|x\|.$$

容易看出 (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇔(v)。然而，一般来说，反向蕴含并不成立。为说明 (iv)⇏(iii)，我们将对定理 3.13 作修改。不过，在此之前，我们先给出一个较简单的例子，说明 (iii)⇏(ii)。

例 3.14. 令 $X=L_p[0,1]$, $1<p<\infty$。由于 X 是自反的，序收敛与一致收敛一致（见 [8]），且递增的范数有界序列有上确界。因此，对于 X的任意框架，性质 (i) 与 (ii) 等价，性质 (iii)、(iv) 与 (v) 也彼此等价。我们将说明 (iii)⇏(ii)。为此，令 (t_n) 为“打字机”序列，$t_n = \chi_{[\frac{n-2^k}{2^k},\frac{n-2^k+1}{2^k}]}$，其中 $k\ge 0$ 满足 $2^k\le n<2^{k+1}$. 令 (h_n,h_n^*) 表示带有其坐标泛函的哈尔基，并选取 $f\in X^*$，使得 $f(1)=1$。我们按如下方式将打字机序列编织进哈尔基，从而定义序列 (x_k,f_k)：

$$(x_k)=(h_1,t_1,-t_1,h_2,t_2,-t_2,h_3,t_3,-t_3,\dots),$$
$$(f_k)=(h_1^*,f,f,h_2^*,f,f,h_3^*,f,f,\dots).$$

容易看出，$(x_k,\ f_k)$ 是一个框架。此外，由于 (h_k) 是一个双基，很容易推得，对于每个 $x\in X$, $P_nx := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k$ 定义了一个序有界序列。然而，$P_n(1) \xrightarrow{a.e.} \mathbb{1}$。

注记 3.15。 对上述构造稍作修改（改为交织一个弱零归一化序列），即可举出再生对并非 Schauder 框架的例子。这解决了 [27]中的一个公开问题。

正如我们之前已经指出的，上述蕴含 (iv)⇒(iii) 对框架也不成立；不过，这一事实还可以显著加强。事实上，回想一下，巴拿赫格 X 的闭子空间 E 的框架 $(x_k,\ f_k)$ 若满足对每个 $x \in E$，绝对的

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)x_k| \right\| < \infty.$$

于是，贝尔范畴论证表明存在某个 $A \geq 1$，使得

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)x_k| \right\| \leq A\|x\|$$

对每个 $x \in E$ 都成立。显然，绝对框架满足性质 (v)。然而，正如我们将要证明的，它们不一定满足性质 (iii)。

例 3.16。 考虑一个在零点附近不满足 Δ_2-条件的 Orlicz 序列空间 ℓ_φ。单位向量 (e_k) 两两不交，因此是绝对的。我们将 (e_k) 视为 $\subseteq h_\varphi \subseteq \ell_\varphi$。与定理 3.13 中一样，我们选取 $0 \leq x = (x^k)$ 属于 $\ell_\varphi \setminus h_\varphi$，并定义 $y_k = x^k e_k$。设 f 为一个非零泛函。我们考虑序列

$$(e_1, y_1, -y_1, e_2, y_2, -y_2, e_3, \dots)$$

配备了这些泛函

$$(e_1^*, f, f, e_2^*, f, f, e_3^*, \dots).$$

对于 $u \in h_\varphi$，该序列的部分和将呈现为 $_{k=1} e_k^*(u)e_k$ 或 $\sum_{k=1}^{n} e_k^*(u)e_k + f(u)x^n e_n$，因此该序列将是一个框架。此外，如果对模取和，我们可以用以下方式界定范数：

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} |e_k^*(u)e_k|\| + 2|f(u)|\| \sum_{n=1}^{\infty} x^k e_k\| < \infty.$$

因此，我们构造了一个绝对框架。

现在，设 u 满足 $f(u) \neq 0$。如果 u 的部分和在 h_φ中序有界，我们便可推出序列 $(x^n e_n)$ 在 h_φ中序有界，而我们已在定理 3.13 中证明这并不成立。

上述例子之所以成立，主要是因为空间 $X = h_\varphi$ 并非 σ-单调完备。回想一下，若巴拿赫格 X 满足 σ-单调完备，则 X 中的所有正的递增范数有界序列都有上确界。在这种情况下，可以推出绝对框架的部分和序收敛。

命题 3.17。 如果 X 是 σ-单调完备的，并且 $(x_k,\ f_k)$ 是 $E \subseteq X$ 的绝对框架，那么对于每个 $x \in E$、$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\,(x)\,x_k \xrightarrow{o} x$。特别地，当在 X^{**} 中使用序收敛时，每个绝对框架都有序收敛展开。

证明。 固定 $x \in E$。由于 $(x_k,\ f_k)$ 是绝对框架，序列 $(\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)x_k|)$ 递增且范数有界，因此存在其上确界 u。于是容易看出，$|x - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k| \leq u - \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)x_k| \downarrow 0$。为完成证明，回忆以下标准事实：如果 Y 是巴拿赫格，那么 Y^* 是单调完备的。□

定理 3.17 表明，绝对框架关于适当的序收敛满足一个重构公式。然而，成为绝对框架是一项非常强的性质。事实上，通过修改 [34, 定理 3], 的证明，可以得到以下结果。

命题 3.18。 设(x_k, f_k) 是 $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$ 中的一个绝对框架。那么 $[x_k]$ 同构地嵌入 ℓ_p 中。

另一方面，尽管性质 (i) 是上述五个性质中最强的一个，但我们现在将证明，满足这一条件的框架实际上极为普遍。为作铺垫，设 E 是巴拿赫格 X 的一个闭子空间，并回顾： $E \times E^*$ 中的序列 (x_k, f_k) 是一个 u-框架 ，当且仅当对每个 $x \in E$ 都有 $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k \xrightarrow{u} x$。下面的结果表明，如果 E 具有一个 u-框架（特别地，当 E 具有双基时，这一条件成立），那么可以为 E 构造一个 u-框架，使得其中的 (x_k) 位于 E 的任意一个具有稠密张成空间的子集内。

命题 3.19。 设 E 是巴拿赫格 X 的一个闭子空间，且 $M \subseteq E$ 的张成空间稠密。若 E 存在一个 u-框架，则存在一个 u-框架 (x_k, f_k)，其适用于 E，且每个 $x_k \in M$。

证明。 该结果已在 [21, 定理 4.4] 中证明，当时假设 $E = X$ 且 (x_k, f_k) 是一个双基。因此，只需将结果推广到仅假设 (x_k, f_k) 是 X 的某个子空间的 u-框架。为此，关键在于证明一个扰动结果；也就是说，若 (x_k, f_k) 是巴拿赫格 X 的闭子空间 E 的一个u-框架，且 $0 < \varepsilon < 1$，那么对于 E 中满足以下条件的任意序列 (y_k)

$$\|x_k - y_k\| \le \frac{\varepsilon}{2^{2k+1}\|f_k\|}$$

都可以与序列 $g_k \in E^*$ 配对，使得 (y_k, g_k) 是 E 的一个 u-框架。这样的扰动结果使得我们能够针对 E 的任意稠密集合 M，构造一个由 M 中元素组成的 E 的 u-框架。此后，可以利用 [21, 定理 4.4] 的证明，将假设 M 稠密替换为假设 M 的张成空间稠密。为说明上述扰动结果成立，令 $x \in E$ 并定义 $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)(x_k - y_k)$。 [52, 引理 2.3] 中证明了 S 有良好定义且$\|S\| < 1$。事实上，容易看出该和一致柯西，因而一致收敛。接着定义 $T = I - S$，使得 $T(x) = u - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)y_k$。用 $T^{-1}x$ 替换 x，可得$x = u - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(T^{-1}x)y_k$，因此 $(y_k, (T^{-1})^* f_k)$ 是 E 的一个 u-框架。□

注记 3.20。 关于展现出增强收敛性质的 Gabor 框架的有趣例子可见于 [25]；关于非谐傅里叶级数，另见 [70] 。

3.3. **一致准贪婪基的性质**。 正如定理 3.6 中所述，任何关于准贪婪基的结果，都可以看作是关于环境巴拿赫格 $C[0,1]$ 中的一致准贪婪基的结果。在本小节中，我们记录将关于准贪婪基的基本结果推广到其他环境巴拿赫格 X 的一些结论。

我们首先推广一个众所周知的事实：准贪婪基对于常系数而言是无条件的。

命题 3.21。 设(e_n) 是一致准贪婪基本序列。则以下结论成立。

(i) 对任意互不相同的指标 n_1、. . .、 n_m，有

$$\left\| \bigvee_{k=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{k} e_{n_i} \right| \right\| \le C_{qg}^{\vee} \left\| \sum_{i=1}^{m} e_{n_i} \right\|.$$

(ii) (e_n) 对于常系数是可置换的，也就是说，对于任意互不相同的指标 n_1、.. .、 n_m 以及任意符号选择 ε_i ，有

$$(2C_{qg}^{\vee})^{-1}\left\|\bigvee_{k=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{k}e_{n_i}\right|\right\|\leq\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i e_{n_i}\right\|\leq\left\|\bigvee_{k=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i e_{n_i}\right|\right\|\leq 2C_{qg}^{\vee}\left\|\sum_{i=1}^{m}e_{n_i}\right\|.$$

证明。 (i) 成立，这是因为 $(\sum_{i=1}^{k}e_{n_i})$ 是 $x=\sum_{i=1}^{m}e_{n_i}$ 的贪心逼近。对于 (ii) 中的右侧不等式，注意到

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i e_{n_i}\right|\leq\left|\sum_{\{i\leq k\,:\,\varepsilon_i=1\}}\varepsilon_i e_{n_i}\right|+\left|\sum_{\{i\leq k\,:\,\varepsilon_i=-1\}}\varepsilon_i e_{n_i}\right|,$$

其中，如果恰好对空集求和，我们规定该和为 0。由此可得

$$\left\|\bigvee_{k=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i e_{n_i}\right|\right\|\leq\left\|\bigvee_{k=1}^{m}\left|\sum_{\{i\leq k\,:\,\varepsilon_i=1\}}\varepsilon_i e_{n_i}\right|\right\|+\left\|\bigvee_{k=1}^{m}\left|\sum_{\{i\leq k\,:\,\varepsilon_i=-1\}}\varepsilon_i e_{n_i}\right|\right\|.$$

在这种形式下，我们可以忽略 ε_i ，并将上述各项解释为 x 的贪婪和，从而得到所需的估计。

为得到 (ii) 中的第一个不等式，令 $A=\{i\colon\ \varepsilon_i=1\}$ 和 $B=\{1,\dots,m\}\setminus A$。那么，一般项 $\sum_{i=1}^{k}e_{n_i}$ 可以分解如下:

$$\left|\sum_{i=1}^{k}e_{n_i}\right|\leq\left|\sum_{A\cap\{1,\dots,k\}}e_{n_i}\right|+\left|\sum_{B\cap\{1,\dots,k\}}(-1)e_{n_i}\right|.$$

对上述不等式取上确界，并注意到右端的第一项和第二项都属于 $\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i e_{n_i}$ 的一个贪心逼近，我们便得到所需的估计，其常数为 $(2C_{qg}^{\vee})^{-1}$。

□

推论 3.22. 设 (e_n) 是一致准贪婪基序列。那么，对于任意互不相同的指标 $n_1,\dots,n_m$ 以及任意实数 $a_1,\dots,a_m$，我们有

$$\left\|\bigvee_{k=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{k}a_i e_{n_i}\right|\right\|\leq 2\max|a_i|C_{qg}^{\vee}\left\|\sum_{i=1}^{m}e_{n_i}\right\|.$$

证明。 不失一般性，我们可以假设 $\max|a_i|=1$。根据 [28, 定理 3.13], ，存在 $c_l\geq 0$ 以及符号 ε_l^i, $l=1,\dots,m+1$, $i=1,\dots,m$，使得 $\sum_{l=1}^{m+1}c_l=1$ 且对于 $i=1,\dots,m$，有 $\sum_{l=1}^{m+1}\varepsilon_l^i c_l=a_i$。由此可得

$$\begin{aligned}\left\|\bigvee_{k=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{k}a_i e_{n_i}\right|\right\| &\leq \sum_{l=1}^{m+1}c_l\left\|\bigvee_{k=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_l^i e_{n_i}\right|\right\|\leq 2C_{qg}^{\vee}\sum_{l=1}^{m+1}c_l\left\|\sum_{i=1}^{m}e_{n_i}\right\|\\ &= 2C_{qg}^{\vee}\left\|\sum_{i=1}^{m}e_{n_i}\right\|.\end{aligned}$$

□

推论 3.23。 设 (e_n) 是一致准贪婪基序列。那么对于任意 $x \in E$、 x 的任意贪婪排序 π 以及任意 $m \in \mathbb{N}$,

$$\left|e^*_{\pi(m)}(x)\right| \left\| \bigvee_{k=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{k} e_{n_i} \right| \right\| \leq 4C_{qg}C_{qg}^{\vee}\|x\|,$$

其中 $\{n_1, \ldots, n_m\} = \{\pi(1) \ldots, \pi(m)\}$。特别地，对于任意互异的指标 n_1、…、 n_m，任意实数 a_1、…、 a_m，以及 $\{1, \ldots, m\}$ 的任意置换 σ

$$\min_{j\in\{1,\ldots,m\}} |a_j| \left\| \bigvee_{k=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{k} e_{n_{\sigma(i)}} \right| \right\| \leq 4C_{qg}C_{qg}^{\vee} \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_{n_i} \right\|.$$

证明。 证明与 [5, 定理 10.2.12] 相同，只是将第一个不等式替换为 $\| \bigvee_{k=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{k} e_{n_i} \right| \| \leq 2C_{qg}^{\vee} \| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i e_{\pi(i)} \|$，这由定理 3.21允许。

□

接下来我们引入一些记号来度量不可置换性。设 (e_n) 是巴拿赫格 X 中的一个基本序列，并设 $A = \{n_1, \ldots, n_m\}$ 是 $\mathbb{N}$的一个有序子集。定义 $P_A^{\vee}$上的一个连续、次线性、绝对齐次映射 E为 $P_A^{\vee}(x) := \bigvee_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{i} e^*_{n_k}(x) e_{n_k} \right|$，其中我们注意到， A是按照我们取上确界的顺序赋予序结构的。定义 $\|P_A^{\vee}\| = \sup_{x\in S_E} \left\|P_A^{\vee}(x)\right\|$，并注意到以下各项是等价的:

- (e_n) 是双基;
- 对于每个 $x \in E$，序列 $(P^{\vee}_{\{1,\ldots,m\}}(x))_m$ 范数有界;
- 序列 $(\|P^{\vee}_{\{1,\ldots,m\}}\|)_m$ 范数有界。

因此，注意到平凡的界 $\|P_A^{\vee}(x)\| \leq \mathbf{k}|A|\|x\|$，其中 $\mathbf{k} = \sup_n \|e_n\|\|e_n^*\|$，映射 $P_A^{\vee}$可通过其范数的渐近增长来衡量 (e_n) 与双基性质相距多远。考虑更多集合 A，便可以衡量不可置换性。对于一致准贪婪基，我们得到以下界。

推论 3.24. 假设 (e_n) 是一致准贪婪基本序列。那么对于每个 $x \in E$以及每个有序集合 $A = \{n_1, \ldots, n_m\} \subseteq \mathit{supp}(x)$，我们有

$$\|P_A^{\vee}(x)\| \leq 8C_{qg}^2 C_{qg}^{\vee} \frac{\max\{|e_n^*(x)| : n \in A\}}{\min\{|e_n^*(x)| : n \in A\}} \|x\|.$$

证明。 取 $A = \{n_1, \ldots, n_m\} \subseteq \mathrm{supp}(x)$，并令

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \alpha \leq |e_n^*(x)| \leq \beta\}$$

其中 $\alpha = \min_A |e_n^*(x)|$ 和 $\beta = \max_A |e_n^*(x)|$。我们可以将 A 上的序扩展到集合 B，记作 $B = \{n_1, ..., n_m, n_{m+1}, ..., n_l\}$。因此,

$$\left\| \bigvee_{k=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{k} e^*_{n_i}(x) e_{n_i} \right| \right\| \leq \left\| \bigvee_{k=1}^{l} \left| \sum_{i=1}^{k} e^*_{n_i}(x) e_{n_i} \right| \right\|. \tag{3.3}$$

应用推论 3.22，我们得到估计

$$\begin{aligned}\left\| \bigvee_{k=1}^{l} \left| \sum_{i=1}^{k} e_{n_i}^*(x) e_{n_i} \right| \right\| &\leq 2C_{gq}^{\vee} \max_A |e_n^*(x)| \| \sum_{i\in B} \varepsilon_i e_{n_i} \| \\ &= 2C_{qg}^{\vee} \frac{\max_A |e_n^*(x)|}{\min_A |e_n^*(x)|} \min_B |e_n^*(x)| \| \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i e_{n_i} \|.\end{aligned}$$

利用 [9, 引理 2.3], ，我们看到

$$\min_B |e_n^*(x)| \| \sum_{i\in B} \varepsilon_i e_{n_i} \| \leq 2C_{qg} \| \sum_{i=1}^{l} e_{n_i}^*(x) e_{n_i} \|. \tag{3.4}$$

接下来注意到，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们有

$$\sum_{i=1}^{l} e_{n_i}^*(x) e_{n_i} = \sum_{\{n_i : |e_{n_i}^*(x)| > \alpha - \varepsilon\}} e_{n_i}^*(x) e_{n_i} - \sum_{\{n_i : |e_{n_i}^*(x)| > \beta\}} e_{n_i}^*(x) e_{n_i}.$$

因此， $\| \sum_{i=1}^{l} e_{n_i}^*(x) e_{n_i} \| \leq 2C_{qg} \|x\|$. 将此与 (3.4) 结合，我们得到估计

$$\min_B |e_n^*(x)| \| \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i e_{n_i} \| \leq 4C_{qg}^2 \|x\|. \tag{3.5}$$

综合以上结果，我们得出

$$\left\| \bigvee_{k=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{k} e_{n_i}^*(x) e_{n_i} \right| \right\| \leq 8C_{qg}^{\vee} C_{qg}^2 \frac{\max_A |e_n^*(x)|}{\min_A |e_n^*(x)|} \|x\|,$$

正如所需

□

注 3.25. 衡量 (e_n) 的条件性，通常使用序列 $\mathrm{k}_m := \sup_{|A|\leq m} \|P_A\|$ 的增长。如前所述，序列 $\mathrm{k}_m^{\vee} := \sup_{|A|\leq m} \|P_A^{\vee}\|$ 是不可置换性的度量，其中上确界取遍 $\mathbb{N}$ 中基数至多为 m 的所有有序子集。显然，$\mathrm{k}_m \leq \mathrm{k}_m^{\vee}$。将定理 3.24 应用于 $P_A(x)$，并利用恒等式 $P_A^{\vee}(P_A(x)) = P_A^{\vee}(x)$，可知对于某些$x \in E$，我们可以用 $\|P_A(x)\|$ 来界定 $\|P_A^{\vee}(x)\|$。然而，一般而言， $\|P_A^{\vee}(x)\|$ 与 $\|P_A(x)\|$ 的表现有本质区别。事实上， $L_p[0,1]$, $p > 1$ 中的哈尔是一致准贪婪双基，它是无条件的，因此 $\mathrm{k}_m = \mathcal{O}(1)$，但它不可置换，因此 $\mathrm{k}_m^{\vee} \neq \mathcal{O}(1)$。

命题 3.26. 令 *et* (e_n) 为一致准贪婪基序列。则 $k_m^{\vee} = \mathcal{O}(\log_2(m)$).

证明。 取整数 $m \geq 2$ ，并找出满足 $2^p \leq m < 2^{p+1}$ 的 p 。令 $x \in S_E$ ，并注意到对于所有 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $|e_n^*(x)| \leq \mathbf{K}$ ，其中 $\mathbf{K} := \sup_n \|e_n^*\|$。按照命题 3.26.14] 的证明，构造 $\mathbb{N}$ 的一个分划 $(B_j)_{j=0}^{p}$ 。

设 $A = \{n_1, \ldots, n_m\}$ 是 $\mathbb{N}$的一个有序子集。那么对于每个 $1 \leq l \leq m$，我们有

$$\left| \sum_{k=1}^{l} e_{n_k}^*(x) e_{n_k} \right| \leq \left| \sum_{k\in\{1,\ldots,l\}\cap B_0} e_{n_k}^*(x) e_{n_k} \right| + \cdots + \left| \sum_{k\in\{1,\ldots,l\}\cap B_p} e_{n_k}^*(x) e_{n_k} \right|.$$

因此，

$$P_A^\vee(x) \le \bigvee_{l=1}^m \left| \sum_{k\in\{1,\dots,l\}\cap B_0} e_{n_k}^*(x) e_{n_k} \right| + \cdots + \bigvee_{l=1}^m \left| \sum_{k\in\{1,\dots,l\}\cap B_p} e_{n_k}^*(x) e_{n_k} \right|.$$

对于 $j=1,\dots,p$，定理 3.24 给出

$$\left\| \bigvee_{l=1}^m \left| \sum_{k\in\{1,\dots,l\}\cap B_j} e_{n_k}^*(x) e_{n_k} \right| \right\| \le 16 C_{qg}^2 C_{qg}^\vee,$$

而平凡估计给出

$$\left\| \bigvee_{l=1}^m \left| \sum_{k\in\{1,\dots,l\}\cap B_0} e_{n_k}^*(x) e_{n_k} \right| \right\| \le m\mathbf{K} 2^{-p} c \le 2c\mathbf{K},$$

其中 $c=\sup_n \|e_n\|$。结合上述估计可得界 $\|P_A^\vee(x)\| \le 16pC_{qg}^2 C_{qg}^\vee + 2c\mathbf{K}$，如所需。□

注 3.27. 一般而言，定理 3.26 中无法期待更好的界，因为可以考虑到 $C[0,1]$ 的嵌入（对于准贪婪基，估计 $\mathbf{k}_m = \mathcal{O}(\log_2(m))$ 对一般巴拿赫空间是尖锐的）。如果只考虑基，或者在更好的空间中工作，例如 $L_p(\mu)$，则可能得到更好的估计。在这方面，鞅理论表明，$L_p[0,1]$ 中哈尔的标准排序的双基常数为 q，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。已知这个精确界后，自然会想知道其他基的 $\mathbf{k}_m^\vee$、$C_{qg}^\vee$ 以及双基常数的值——或至少其渐近行为。特别是，$L_p[0,1]$ 的哪些基能使这些量达到最小？尽管我们尚未完全回答这个问题，但在定理 4.28 中将证明，对于 $L_p[0,1]$ 的任意基，$\mathbf{k}_m^\vee \ne \mathcal{O}(1)$。

4. The role of the ambient space

在 [65] 和第 3.3 节中，我们证明了关于 Schauder 基和准贪婪基的许多重要结果都可以推广到双基和一致准贪婪基。本节将深入探讨坐标系与格结构之间的相互作用，并证明一些在经典理论中没有直接对应结果的定理。

4.1. 将基嵌入巴拿赫格。 给定巴拿赫空间 E的任意一个基 $(e_i)_i$，我们总可以将 E 嵌入巴拿赫格 X，使 $(e_i)_i$ 成为双基，从而具有良好的序性质。本小节旨在完成以下任务：

- 取一个具有某些良好性质的巴拿赫空间 E 中的基 $(e_i)_i$。
- 将 E 嵌入巴拿赫格 X，使得这些性质的“一致”类比不成立 性质不成立。

更具体地说，我们讨论：

(i) ℓ_1中的林登施特劳斯基，或者更准确地说，是 [19]中描述的版本；这是一个条件准贪婪基。(ii) ℓ_p、$1<p<\infty$中的典范基。

4.1.1. 一个既非双基也非一致准贪婪的林登施特劳斯基的副本。ℓ_1 中条件准贪婪基的一个基础性例子见于 [19]。我们先概述其构造。

对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \{1,2\}$，定义 $\phi_j(n) = 2n + j$。将 (e_i) 记为 ℓ_1 的典范基，并令 $x_n = e_n - \big(e_{\phi_1(n)} + e_{\phi_2(n)}\big)/2$。将 F_n 记为 ℓ_1^{2n+2} 中 x_1、.....、x_n 的张成空间。根据 [19],，每个 F_n 都与 ℓ_1^n C- 同构，其中 C 是一个统一常数。将 $x_1^{(n)}$、.....、$x_n^{(n)}$ 记为 F_n 中 x_1、.....、x_n 的副本。根据 [19],，向量 $\big(x_i^{(n)}\big)_{1\le i\le n}$、$n\in\mathbb{N}$ 在 $\big(\sum_n F_n\big)_1 \sim \ell_1$ 中构成一个准贪婪基。现在为 $\operatorname{span}\big[\big(x_i^{(n)}\big)_{1\le i\le n}\big]$ 配备 $\big(\sum_n \ell_1^{2n+2}\big)_1$ 的格结构，它以自然方式包含 $\big(\sum_n F_n\big)_1$。

命题 4.1。在上述记号下，序列 $\big(x_i^{(n)}\big)_{1\le i\le n,n\in\mathbb{N}}$ 既不是一致准贪婪的，也不是双基。

证明。对于任意 $C > 1$，取 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $m + 1 > C/2$。对于 $n \ge 3 \cdot 2^m$，我们构造 $x \in \operatorname{span}\big[\big(x_i^{(n)}\big)_{1\le i\le n}\big]$，以说明序列 $\big(x_i^{(n)}\big)_{1\le i\le n}$ 在 ℓ_1^{2n+2}中的一致准贪婪常数和双基常数至少为 C。由于 n 固定，我们将使用 x_i 而非 $x_i^{(n)}$。

对于 $j = (j_1, \dots, j_k) \in \{1,2\}^k$，定义 $\phi_j(t) = \phi_{j_k}\big(\dots\phi_{j_2}(\phi_{j_1}(t))\dots\big)$；则 $\phi_j(t) = 2^k t + 2^{k-1}j_1 + \dots + 2j_{k-1} + j_k$。为方便起见，令 $\phi_\emptyset(t) = t$。注意，若 $j = (j_1, \dots, j_k)$ 且 $i = (i_1, \dots, i_\ell)$，则 $\phi_j(1) = \phi_i(1)$ 成立，当且仅当 $\ell = k$ 且 $j_1 = i_1, \dots, j_k = i_k$。事实上，对于 $k = \ell$，这可由二进制分解的唯一性推出。另一方面，若 $\ell > k$，则

$$\phi_{\bar{j}}(1) \le 2^k + 2\big(2^{k-1} + \dots + 1\big) < 2^k + \big(2^k + 2^{k-1} + \dots + 1\big) \le \phi_{\bar{i}}(1).$$

$\ell < k$ 的情形可以用类似的方法处理。

对于 $m \in \mathbb{N}$，令

$$y_m = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k} \sum_{j_1,\dots,j_k\in\{1,2\}} x_{\phi_{j_k,\dots,j_1}(1)},$$

其中，按照约定，$k = 0$ 对应的项为$x_{\phi_\emptyset(1)} = x_1$。直接计算可得

$$y_m = e_1 - 2^{-m} \sum_{j_1,\dots,j_m\in\{1,2\}} e_{\phi(j_m,\dots,j_1)(1)}. \tag{4.1}$$

根据 ϕ的定义，

$$\sum_{j_1,\dots,j_m\in\{1,2\}} e_{\phi(j_m,\dots,j_1)(1)} = \sum_{i\in I_m} e_i, \text{ where } I_m = \{2^{m+1} - 1, \dots, 2^{m+1} + 2^m - 2\}, \tag{4.2}$$

因此 $\|y_m\| = 2$。

接下来，我们证明对于任意 $N \in \mathbb{N}$，都有 $\| \vee_{m=0}^{N-1} |y_m| \| = N + 1$。为此，注意到在（4.2）中，$|I_m| = 2^m$，且当 $m \ne k$时 $I_m \cap I_k = \emptyset$。因此，$\vee_{m=0}^{N-1}|y_m| = e_1 + \sum_{m=1}^{N} 2^{-m} \sum_{i\in I_m} e_i$，从而得到所需的估计。

注意，如果林登施特劳斯基是双基（一致准贪婪），那么存在$B \in (0,\infty)$，使得$(x_i)_{i=1}^n$ 是双基（分别为一致准贪婪），其常数为B，无论 n有多大。固定 N，并选取$n \ge \phi_{2,\dots,2}(1)$（2重复 N次）。若 $m \le N$，则 y_m既是一个贪婪和，也是一个

y_N的部分和，因此 $\|\vee_{m=0}^{N-1}|y_m|\| \le \mathbf{B}\|y_N\|$。这就得到了$\mathbf{B} \ge (N+1)/2$（这里$\mathbf{B}$可以表示$(x_i)_{i=1}^n$的双基常数或一致准贪婪常数），从而导出所需的矛盾。□

4.1.2. 一个典范 ℓ_p-基的副本，它既不是双基，也不是一致准贪婪的。 这里，我们用 (e_i) 表示典范的 ℓ_p-基。我们证明以下命题，它部分解决了 [50,备注 7.6]中的一个问题。

命题 4.2。 对于 $1 < p < \infty$，空间 ℓ_p 包含一个基（u_i），它与（e_i）等价，但既不是双基，也不是一致准贪婪的。

证明。 我们的推理与 [50, 第 7 节1]类似，并依赖于 [41]中对主要三角截断的研究。

对每个 n，考虑 $n\times n$ 矩阵 $T(n) = [T(ij^{n}])$，其中 $T_{ij}^{(n)} = 1/(i-j)$ 当 $i \ne j$时成立，而 $T(n)_{ij} = 0$ 当 $i = j$时成立。如 [41, (1.7)] 中所述（其中考虑了该矩阵的“镜像”），$\|T^{(n)}\| \le K(p)$，其中 $K(p)$ 是一个一致常数，而 $T(n)$ 被视为作用于 ℓ_p^n 上的算子。令 $S^{(n)} = \alpha T(n)$，其中 $\alpha = 1/(2K(p))$。当 n 的取值明确时，我们将用 S 和 T 代替 $S^{(n)}$ 和 $T^{(n)}$。

将 ℓ_p 与 $\big(\sum_n (\ell_p^n \oplus_p \ell_p^n)\big)_p$ 视为同一对象。分别用 $(f_i)_{i=1}^n$ 和 $(g_i)_{i=1}^n$ 表示 ℓ_p^n的第一份和第二份中的典范基。在 $\ell_p^n \oplus_p \ell_p^n$ 中考虑由元素$v_i, w_i (1 \le i \le n)$ 构成的基，其中 $v_i = f_i \oplus S^{(n)} g_i$ 且 $w_i = -S^{(n)} f_i \oplus g_i$。我们声称，基 (v_i, w_i) 与 $(e_i)_{i=1}^{2n}$等价，且等价常数与 n无关。事实上，我们可以写成$\sum_{i=1}^n (\alpha_i u_i + \beta_i v_i) = A \sum_i (\alpha_i f_i + \beta_i g_i)$，其中

$$A = \begin{pmatrix} I & S \\ -S & I \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}.$$

显然，$\left\| \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix} \right\| \le \frac{1}{2}$。因此，$\|A\| \le \frac{3}{2}$。利用 Neumann 级数展开可得恒等式

$$A^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}^k,$$

因此 $\|A^{-1}\| \le 2$。

将这些基 $(v_i,\ w_i)$ 拼接成 (u_i)。如上所示，(u_i) 等价于 ℓ_p 基。现在我们证明，$(v_i,\ w_i)$ 在 $\ell_p^n \oplus_p \ell_p^n$ 中既不是双基，也不是一致准贪婪的。为此，考虑$x = \sum_{i=1}^n v_i$。显然，$\|x\| \le 3n^{1/p}/2$。我们将证明

$$\Big\| \bigvee_{k=1}^{n} \Big| \sum_{i=1}^{k} v_i \Big| \Big\| \succ n^{1/p} \log n.$$

为了估计左侧，我们关注 ℓ_p^n 的第二个副本。对于 $2 \le j \le n$，$\sum_{i=1}^j v_i$ 的第 j 项（即 g_j 前面的系数）等于 $\alpha\big(\frac{1}{j-1} + \ldots + 1\big)$。因此，

$$\bigvee_{k=1}^{n} \Big| \sum_{i=1}^{k} v_i \Big| \ge \alpha \sum_{j=2}^{n} \Big(\frac{1}{j-1} + \ldots + 1 \Big) g_j.$$

g_j 前面的项为 $\succ \log n$（适用于 $j \ge n/2$），因此左侧的范数为 $\succ n^{1/p} \log n$。证明至此完成。□

在 $p=2$ 这一特定情形下，可以得到稍好的结果。

命题 4.3。 空间 ℓ_2 含有一个基(u_i)，它与(e_i)等距等价，但既不是双基，也不是一致准贪婪。

这是以下引理的推论。

引理 4.4。 存在常数 c，使得对每个 n，都存在一个标准正交基 $h_1,\ldots,h_n$，其属于ℓ_2^n，满足

$$\Big\|\bigvee_{k=1}^{n}|h_1+\ldots+h_k|\Big\|\geq c\log n\sqrt{n}.$$

定理 4.3 的证明概要。 我们紧密遵循定理 4.2 的证明。唯一的区别在于，现在（沿用前面的记号），我们取 $v_i=12f_i/13\oplus 5h_i/13$ 和 $w_i=-5h_i/13\oplus 12g_i/13$，其中 $h_1,\ldots,h_n$ 来自定理 4.4。□

定理 4.4 的证明。 注意，正交基 $h_1,\ldots,h_n$ 与 $n\times n$ 酉矩阵 U 之间存在双射，该双射由 $U\mapsto(Ue_1,\ldots,Ue_n)$ 实现。由 Russo-Dye 定理（实数版本见 [48]），$B(\ell_2^n)$ 的单位球是酉矩阵的闭凸包，因此只需证明算子

$$\Phi:B(\ell_2^n)\to\ell_2^n(\ell_\infty^n):T\mapsto\big(Te_1,Te_1+Te_2,\ldots,Te_1+\ldots+Te_n\big)$$

的范数为 $\succ\log n\sqrt{n}$。这里，我们定义

$$\big\|(\eta_1,\ldots,\eta_n)\big\|_{\ell_2^n(\ell_\infty^n)}=\big\|\vee_k|\eta_k|\big\|_{\ell_2^n},$$

换句话说，对于 $\eta_k=\sum_{\ell=1}^n\eta_{k\ell}e_\ell$，

$$\big\|(\eta_1,\ldots,\eta_n)\big\|_{\ell_2^n(\ell_\infty^n)}=\Big\|\sum_\ell\big(\vee_k|\eta_{k\ell}|\big)e_\ell\Big\|_{\ell_2^n}=\Big(\sum_\ell\big(\vee_k|\eta_{k\ell}|\big)^2\Big)^{1/2}.$$

实际上，我们将证明 Φ^* 的范数满足相应的估计，该算子将 $\ell_2^n(\ell_1^n)$ 映射到 $B(\ell_2^n)^*$（迹类 $n\times n$ 矩阵空间）。这里，我们在 $B(\ell_2^n)$ 上考虑“迹对偶”：对于 $n\times n$ 矩阵 A 和 B, $\langle A,B\rangle=\underline{\mathrm{tr}}(AB^*)$。可以观察到，$\Phi^*$ 将 $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 映射到算子

$$\Phi^*\big(\overline{\xi}\big):e_k\mapsto\xi_k+\ldots+\xi_n\ (1\leq k\leq n).$$

特别地，取 $\xi_k=e_k\,(1\leq k\leq n)$，我们得到

$$\big\|\overline{\xi}\big\|_{\ell_2^n(\ell_1^n)}=\Big\|\sum_k|e_k|\Big\|_{\ell_2^n}=\sqrt{n}.$$

另一方面，$\Phi^*(\xi)$ 可由下三角矩阵 $\tau=\big[\tau_{k\ell}\big]_{k,\ell=1}^n$ 表示，其中 $\tau_{k\ell}=1$ if$k\geq\ell$，否则为 $\tau_{k\ell}=0$。还需证明$\big\|\tau\big\|_{B(\ell_2^n)_*}\succ n\log\ n$。

为得到这一估计，考虑托普利茨矩阵 $A=\big[A_{k\ell}\big]$，其中当 $k\neq\ell$ 时，$A_{k\ell}=1/(k-\ell)$；当 $k=\ell$ 时，$A_{k\ell}=0$。根据 [6]（或 [41]），$\|A\|_{B(\ell_2^n)}\leq\pi$。由平行对偶性，

$$\|A\|_{B(\ell_2)}\big\|\tau\big\|_{B(\ell_2^n)^*}\geq\langle A,\tau\rangle=\sum_{k,\ell}A_{k\ell}\tau_{k\ell}=\sum_{m=1}^n\sum_{j=1}^m\frac{1}{j}\sim n\log n,$$

由此得到所需的估计$\big\|\tau\big\|_{B(\ell_2^n)^*}$。 □

4.1.3. ℓ_1 是在每个巴拿赫格中都是绝对的唯一基。 这里我们给出 [50] 中一项结果的另一种证明。

命题 4.5。 设(e_i) 是巴拿赫空间 E中的一个半归一化基，且不等价于 ℓ_1 基。那么存在一个巴拿赫格 X ，其中包含一个基本序列(x_i) ，该序列等价于(e_i)，使得(x_i)不是绝对基本序列。

注4.6。 我们不知道该命题是否可以通过以下某种方式得到加强：

- 我们能否将“绝对的”替换为较弱的条件，例如“可置换双基”?
- (x_i)能否成为一个基，而不仅仅是一个基本序列? （这里我们隐含地假设(x_i)是无条件的，从而 $E = [x_i]$ 允许赋予格结构。）

证明。 任何绝对基都是无条件的，因此，如果(e_i)是条件的，则将 E 嵌入适当的$C(K)$中，就会生成所需的(x_i)。下文中我们假设(e_i)是 E的一个无条件基。由于 ℓ_1 [44, 定理 2.b.10]中无条件基的唯一性， E 不同构于 ℓ_1。通过重新赋范，我们可以假设(e_i)是1-无条件的。我们将 E 视为一个巴拿赫格，其序由(e_i)决定。

固定 $p \in [1, \infty)$。根据 [67, 定理 2.3], ，对于任意 $N \in \mathbb{N}$ 和 $C > 0$ ，存在一个有限秩压缩算子 $T\colon \operatorname{span}[e_i\colon i > N] \to \ell_p$，其正则范数大于 C。也就是说， $|||T||| > C$。注意，ℓ_p 在其二次对偶中是正有补的，因此正则范数等于序有界范数。通过逼近，我们可以找到一个单位范数 $x = \sum_i \alpha_i e_i$ （有限和，其中$\alpha_i \geq 0$），使得

$$\Big\| \vee_{\varepsilon_i=\pm 1} \big| \sum_i \varepsilon_i \alpha_i T e_i \big| \Big\| > C.$$

注意

$$\vee_{\varepsilon_i=\pm 1} \Big| \sum_i \varepsilon_i \alpha_i T e_i \Big| = \sum_i \big| \alpha_i T e_i \big|,$$

因此，事实上我们有，

$$\Big\| \sum_i \big| \alpha_i T e_i \big| \Big\| > C.$$

这使我们能够找到 $1 = N_0 < N_1 < N_2 < \ldots$、压缩算子 $T_j\colon \operatorname{span}[e_i\colon N_{j-1} \leq i < N_j] \to \ell_p$，以及$\alpha_i \geq 0$ ，使得

$$\Big\| \sum_{i=N_{j-1}}^{N_j - 1} \alpha_i e_i \Big\| = 1, \ \Big\| \sum_i \alpha_i \big| T_j e_i \big| \Big\| > j.$$

在空间 $X = E \oplus_\infty c_0(\ell_p)$ 中，令 $x_i = e_i \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0 \oplus T_j e_i \oplus 0 \oplus \ldots$（项 $T_j e_i$ 位于 ℓ_p 的第 j 个副本中）。序列 (x_i) 与 (e_i) 等价，因为每个 T_j 都是压缩算子，但 (x_i) 在 X 中并非绝对的。□

4.2. **分块基**。本小节将说明，绝对性质和双基性质在分块下表现得非常好，而贪婪性质则并非如此。

4.2.1. 通过分块获得绝对性质。在第 4.1 节中，我们给出了几种构造具有较差格性质的基本序列的方法。现在，我们介绍一些产生良好基本序列的技巧（更具体地说，是产生有限维分解的方法，因为可以从中提取出良好的基本序列）。其主要思想是，大多数基都是由不交的块构成的，因此，如果我们将这些块合并起来，就能获得更好的格行为。

命题 4.7。 设 X 是一个巴拿赫格，且 (C_n) 是 $[C_n] \subseteq X$ 的绝对有限维分解。那么，每个满足 $[B_n] \subseteq [C_n]$ 的无条件收缩有限维分解 (B_n) 都可以通过分块变为绝对的。

证明。 设 (B_n) 是一个满足 $[B_n] \subseteq [C_n]$ 的无条件收缩有限维分解。令 $\varepsilon_i = \frac{1}{2^i}$，并应用 [44,命题 1.g.4]，得到 (B_n) 的一个分块 (B_i') 和 (C_n) 的一个分块 (C_i')，使得对每个 $x \in B_i'$，都存在一个 $y \in C_{i-1}' \oplus C_i'$ 满足 $\|x - y\| \leq \varepsilon_i \|x\|$。

取归一化的 $x_i \in B_i' \setminus \{0\}$；只需证明 (x_i) 是绝对的。为此，令 $x \in [x_i]$，写作 $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$，并找出 $y_i \in C_{i-1}' \oplus C_i'$ 使得 $\|a_i x_i - y_i\| \leq \varepsilon_i |a_i|$。由无条件性，$x^1 = \sum_{i\ odd} a_i x_i$ 和 $x^2 = \sum_{i\ even} a_i x_i$ 存在。此外，我们有

$$\| \sum_{i\ odd} |a_i x_i| \| \leq \| \sum_{i\ odd} |a_i x_i - y_i| \| + \| \sum_{i\ odd} |y_i| \| \leq \sum_{i\ odd} \varepsilon_i |a_i| + \| \sum_{i\ odd} |y_i| \| < \infty.$$

上述结果之所以有限，是因为序列 (x_i) 已归一化，$a_i \to 0$，而且由于我们只对奇数项求和，y_i 不会重叠。这意味着 $\| \sum_{i\ odd} |y_i| \| \leq A \| \sum_{i\ odd} y_i \|$ 和 $\| \sum_{i\ odd} y_i \| < \infty$，因为 $\sum_{i\ odd} (a_i x_i - y_i)$ 存在。类似地，$\| \sum_{i\ even} |a_i x_i| \| < \infty$，所以 $\| \sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_i| \| < \infty$，因此 (x_i) 是绝对的。□

注 4.8. 根据 [32]，，ℓ_p, $p > 1$ 的每个有限维分解都可以通过分块变为无条件的。由于 ℓ_p 的典范基是绝对的，定理 4.7 表明，ℓ_p, $p > 1$ 的每个有限维分解都可以通过分块变为绝对有限维分解。相比之下，ℓ_1 中的“对偶求和基”甚至无法通过分块成为双有限维分解。

接下来，我们给出两 个例子，以说明定理 4.7 中假设的锐利性 .

例 4.9. 基于 [31, 例 2.13]，中的推理，我们证明 $X = \ell_p \oplus \ell_q$ $(1 < q < p < \infty)$ 有一个收缩有限维分解，但无法通过分块变为无条件的，也无法成为双有限维分解。分别用 (δ_i) 和 (e_i) 表示 ℓ_q 和 ℓ_p 的典范基。令 $E_1 = [0 \oplus \delta_1]$，并且对于 $n \geq 2$，令 $E_n = [e_{n-1} \oplus \delta_{n-1}, 0 \oplus \delta_n]$。对于分块 $F_n = [E_i : k(n) < i \leq k(n+1)]$，，取 $f_1 = 0 \oplus e_{k(2)} \in F_1$；对于 $2 \leq n \leq m$，取 $f_n = e_{k(n)} \oplus (\delta_{k(n)} + \delta_{k(n+1)}) \in F_n$。容易看出，$\| \sum_{n=1}^{m} (-1)^n f_n \| \sim m^{1/p}$，而 $\| \sum_{n=1}^{m} f_n \| \sim m^{1/q}$，并且 $\| \vee_{k=1}^{m} | \sum_{n=1}^{k} (-1)^n f_n | \| \sim m^{1/q}$。

例 4.10. 哈尔系是一族函数 $f_{i,n}$ $(n \geq 0, 1 \leq i \leq 2^n)$，使得存在集合 $A_{i.n} \subset (0,1)$，其测度为 2^{-n}，且 $A_{i,n} = A_{2i-1,n+1} \cup A_{2i,n+1}$，$A_{i,n} \cap A_{j,n} = \emptyset$，若 $i \neq j$，$f_{i,n} = 1$ 在 $A_{2i-1,n+1}$ 上，且 $f_{i,n} = -1$ 在 $A_{2i,n+1}$ 上。[33] 给出了一个弱零归一化序列 $(g_k) \subset L_1(0,1)$ 的例子，使得对于每个子列 g_k' 和每个正数序列 $\varepsilon_{i,n}$，都存在哈尔序列 $h_{i,n}$ 以及 g_k' 的块序列 $g_{i,n}''$，使得 $\|g_{i,n}'' - h_{i,n}\| < \varepsilon_{i,n}$。根据 [26, 定理 4.6]，，任何哈尔系的“分支”都不是双基。因此，(g_k) 的任何子列都不是双基。特别地，尽管每个范数收敛序列都有一致收敛子序列，但并非每个基本序列都存在双基子列。事实上，如果允许环境巴拿赫格是非经典的，则可以证明更强的结果——在 [50, 定理 7.5] 中证明了存在完全不含双基序列的子空间。

4.2.2. 通过分块破坏贪婪性质。 与第4.2.1节的情况相反，我们现在证明，贪婪性质在分块操作下极不稳定。为此，考察一个例子很有启发性。回想一下，我们从一个贪婪基 (e_i) 出发，想要将其分块成一个不满足民主条件的有限维分解。首先，令 (e_i) 为洛伦兹空间 $\ell_{p,q}$ 的标准基。可以找到一个与 ℓ_q 等价的两两不交元素序列。因此，可以将 $\ell_{p,q}$ 的典范基分块成有限维分解 (E_i)，使得

- 当 i 为奇数时，空间 E_i 是一维的，且由一个典范基元素张成。
- 当 i 为偶数时， E_i 包含一个单位向量 $u_{i/2}$，使得 $u_1, u_2, \ldots$ 张成一个 ℓ_q 的副本。

由此得到的有限维分解并非民主。事实上，对奇数 i对应的 E_i取基本函数，得到 $\sim n^{\frac{1}{p}}$；另一方面，考察 $u_j \in E_{2j}$，得到基本函数 $\sim n^{\frac{1}{q}}$。

类似地，可以利用空间 L_p 在 $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$ 中包含一个希尔伯特空间这一事实，证明哈尔基虽然是贪婪的，却可以分块成一个非贪婪的有限维分解。一般而言，有如下结论。

命题4.11。 巴拿赫空间 X的子对称基(e_i) 满足以下条件等价。

(i) (e_i) 等价于典范的 ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ 或 c_0 基；*(ii)* 对 (不一定连续的) (e_i) 的任意置换进行分块，都会产生一个贪婪有限维分解。

证明。 蕴含关系 (i)⇒(ii) 是显然的，因此我们着重证明 (ii)⇒(i)。

我们假设，对 (e_i) 的任意置换进行分块，都会得到一个贪婪有限维分解。通过重新赋范，我们可以并且确实假设 (e_i) 已归一化且为 1-无条件。因此，由 (e_i) 构造出的任何有限维分解也将是 1-无条件的。令 $\phi(n) = \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\|$，并断言存在常数 C，使得每当 $(x_k)_{k=1}^{n}$ 是一组不交的单位范数向量时，

$$C^{-1}\phi(n) \le \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \le C\phi(n). \tag{4.3}$$

为导出矛盾，假设 (4.3) 不成立。那么对于任意 $M \in \mathbb{N}$ 和 $C > 1$，都存在$n \in \mathbb{N}$和 $x_1, \ldots, x_n$，它们在 $[M, \infty$ 上支撑不交，且 (4.3) 不成立。于是，通过串接，我们可以找到一个序列 (N_k)，使得 $N_0 = 1$ 和 $N_k > 2N_{k-1}$ 对任意 k 均成立；同时还存在范数为1的向量 (x_{ik}) $(k \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n_k)$，使得 $(x_{ik})_{i=1}^{n_k}$ 在 $[2N_{k-1}, N_k - 1]$ 上支撑不交，并且

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_k} x_{ik} \right\| \notin [k^{-1}\phi(n_k), k\phi(n_k)].$$

接着，我们考虑一个有限维分解，使得

(i) 某些块包含上述描述的向量 x_{ik}；

(ii) 若对于某个 k，有 $N_k \le j < 2N_k$，那么 $\operatorname{span}[e_j]$ 是该有限维分解中的一个一维成员。

回想一下，由于 (e_i) 本身是贪婪的，因此存在常数 c，使得

$$c^{-1}\phi(n) \le \left\| \sum_{i \in A} e_i \right\| \le c\phi(n)$$

每当 $A \subseteq \mathbb{N}$ 具有基数 n时。因此，上文构造的有限维分解不满足民主条件，因而不是贪婪的。这就是所需的矛盾。

按照 [44, 定理 2.a.9], 证明中的推理，我们证明存在 $\gamma \in [0,1]$ ，使得$C^{-2}n^{\gamma} \leq \phi(n) \leq C^2 n^{\gamma}$ 对每个 n都成立，其中 C 与之前相同。若 $\gamma = 0$，那么显然 (e_i) 与 c_0 基等价。我们证明，若 $\gamma > 0$，那么 (e_i) 与 ℓ_p 基等价，其中 $p = \frac{1}{\gamma}$.

考虑一个有限支撑的单位范数向量 $a = \sum_{i\in S} \alpha_i e_i$. 。我们需要证明 $\sum_i |\alpha_i|^p \sim 1$。由于无条件性，我们可以并且确实假设 $\alpha_i > 0$ 对所有 $i \in S$. 均成立。显然，$\sup_i \alpha_i \leq 1$。对于$j \in \mathbb{N}$， 令 $S_j = \{i \in S : 2^{-j/p} < \alpha_i \leq 2^{(1-j)/p}\}$。令 J 为使得 S_j 非空的最大指标 j 。令 $y = \sum_j 2^{-j/p} \mathbb{1}_{S_j}$。那么 $2^{-1/p} \leq \|y\| \leq 1$。因此，只需证明 $\sum_j 2^{-j}|S_j| \sim 1$.

取 $M > \max S$，使其可被 2^J 整除。对于 $0 \leq k \leq M-1$，令 $y_k = \sum_j 2^{-j/p} \mathbb{1}_{S_j + kM}$，并且

$$y' = \sum_{k=0}^{M-1} 2^{-j/p} \mathbb{1}_{S'_j}, \text{ where } S'_j = \cup_{k=0}^{M-1} (S_j + (k-1)M).$$

注意到，根据子对称性， $\|y_k\| \sim 1$，因此 $\|y'\| \sim \phi(M) \sim M^{1/p}$。

对于每个 $j \leq J$， $2^{-j}M|S_j| = L_j$ 都是整数。 S'_j 可以写成 L_j 个两两不交的集合 F_{j1}，...，F_{jL_j} 的并，每个集合的基数为 2^j。记

$$y' = \sum_j \sum_{\ell=1}^{L_j} 2^{-j/p} \mathbb{1}_{F_{j\ell}}.$$

向量 $2^{-j/p}\mathbb{1}_{F_{j\ell}}$ 中的每个向量的范数都是 ~ 1，因此 $M \sim \|y'\|^p \sim \sum_j L_j \sim \sum_j 2^{-j} M|S_j|$，由此得到所需结果；即 $\sum_j 2^{-j}|S_j| \sim 1$。□

注4.12. 我们不清楚定理 4.11 中的子对称性假设在多大程度上是多余的。要证明 $\phi(n) \sim n^{\frac{1}{p}}$，并不需要这个假设。如果 (e_i) 不具备子对称性，我们的证明（稍作修改后）表明，任何由 (e_i) 的子列生成的扩张基 (e'_i) 都等价于 ℓ_p 基。事实上，用 [16]的术语来说， X 必须是强渐近 ℓ_p。一般而言，强渐近 c_0 并不意味着是贪婪的，Tsirelson 空间的例子便说明了这一点（见 [18, 注 5.8]）。

例4.13. [17] 中证明了，某些形如 $(\oplus_{n=1}^{\infty} \ell_p^n)_{\ell_q}$ 的空间——对于适当的 p, q——没有贪婪基。然而，可以用显而易见的方式对典范基进行分块，从而为这些空间得到贪婪的有限维分解。这类空间中还有一些更为特殊的例子，它们具有贪婪的有限维分解，却没有贪婪基；例如， [60] 构造了一个具有 ℓ_2-有限维分解但没有基的空间。另一方面，有几个空间能否构造出贪婪的有限维分解尚不明确；例如， $\ell_p \oplus \ell_q$, $\ell_q(\ell_p)$（对于适当的 p, q）以及 Schatten 类。对于 $\ell_p \oplus \ell_q$， [53, 68] 证明了其无条件基在置换意义下唯一——当然，当 $p \neq q$时，这个基不是贪婪的。 [55] 给出了矩阵空间不存在贪婪基的证明，这些空间带有混合的 ℓ_p 和 ℓ_q 范数。出于与 $(\oplus_{n=1}^{\infty} \ell_p^n)_{\ell_q}$相同的理由，显然 $\ell_q(\ell_p)$具有贪婪的绍德尔分解。

注4.14。 与定理4.11类似的结果（为“张量稳定”基等价于 c_0 或 ℓ_p的典范基提供判据）可见于 [13]。

4.3. 绝对序列刻画 AM-空间。 在 AM-空间（即 $C(K)$-空间的闭子格）中，每个基本序列都是双基，每个无条件序列都是绝对序列。在 [65] 中，有人提出了逆命题是否成立：如果 X 中的每个基本（分别地，无条件）序列都是双基（分别地，绝对序列），那么 X 是否必须格同构于某个 AM-空间？本文将对这些猜想作出一些推进。

回顾一下，如果存在常数 C，使得不等式 $\|\sum_i x_i\| \le C\big(\sum_i \|x_i\|^p\big)^{1/p}$ 对任意不交的 x_1、……、x_n 都成立，则巴拿赫格 X 具有上 p-估计。显然，上 p-估计蕴含对 $p' < p$ 的上 p'-估计。用 $s(X)$ 表示所有使 X 具有上 p-估计的 p 的上确界。通过反转不等式，可以得到下 p-估计的定义；用 $\sigma(X)$ 表示所有使 X 具有下 p-估计的 p 的下确界。关于上 p-估计的全面研究，请参阅 [23, 24]。注意，如果 X 是有限维的，则 $s(X) = \infty$ 且 $\sigma(X) = 1$。否则，$1 \le s(X) \le \sigma(X) \le \infty$。此外，如果 $\sigma(X) < \infty$，则 X 是序连续的。

命题 4.15。 设 X 是一个无限维巴拿赫格，且 $\{s(X)\ \sigma(X)\} \cap (1,\infty) \neq \emptyset$。那么 X 含有一个不是双基的无条件序列。

注意，如果以下三种情况之一成立，该命题的假设便不成立：(i) $s(X) = \sigma(X) = \infty$，(ii) $s(X) = \sigma(X) = 1$，或 (iii) $s(X) = 1, \sigma(X) = \infty$。注意，$s(x) = \sigma(X) = \infty$ 并不意味着 X 是 AM-空间。类似地，$s(x) = \sigma(X) = 1$ 并不意味着 X 是 AL-空间。

证明需要以下命题，它推广了格上的 Krivine 定理。

命题 4.16。 对于巴拿赫格 X，$c > 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$，存在两两不交的归一化 $x_i \in X_+ (1 \le i \le n)$，使得 $(x_1, \dots, x_n)$ 与 c 等价于 $\ell^n_{s(X)}$（$\ell^n_{\sigma(X)}$）的典范基；并且存在一个无限维巴拿赫格 $Y \subset X$，与 $x_1, \dots, x_n$ 不交，使得 $s(Y) = s(X)$（分别为 $\sigma(Y) = \sigma(X)$）。

这里，如果对任意标量序列 $(\alpha_i)_{i=1}^n$，基 $(e_i)_{i=1}^n$ 和 $(f_i)_{i=1}^n$ 都满足 c-等价，那么我们称它们为

$$c^{-1}\Big\|\sum_i \alpha_i e_i\Big\| \le \Big\|\sum_i \alpha_i f_i\Big\| \le c\Big\|\sum_i \alpha_i e_i\Big\|.$$

我们推迟证明这个命题，转而说明它如何推出定理 4.15。

定理 *4.15* 的证明。 我们利用定理 4.16 找到不相交单位向量 $\big(e_{in}\big)_{n\in\mathbb{N},\ 1\le i\le 2n}$ 使得，对每个 n，$\big(e_{in}\big)_{1\le i\le 2n}$ 都与 ℓ_r^{2n} 基 2-等价，其中 $r \in \{s(X)\ \sigma(X)\} \cap (1,\ \infty)$。根据定理 4.2 的构造，张成空间 $[e_{in} :\ 1 \le i \le 2n]$ 有一个基 $\big(u_{in}\big)_{i=1}^{2n}$，它在巴拿赫空间层面与 ℓ_r 基 c-等价，但其双基常数为 $\sim \log n$。将这些 u_{in} 拼接起来，可得 X 中一个无条件序列，但它不是双基。□

在定理 4.16 的证明中，我们借鉴了 [1]和 [2]中的一些思想。我们还需要两个引理，其中第一个相当直接。

引理 4.17。 任意巴拿赫格 X 都包含一个可分巴拿赫格 X'，使得 $s（X'）= s（X）$以及 $\sigma（X'）= \sigma（X）$。

今后，我们假设 X 是可分的。取一个弱单位 $u \in X_+$，并令 X_u 为相应的主理想，其范数为 $\|x\|_\infty = \inf\{\lambda > 0 :\ |x| \le \lambda u\}$。该理想可识别为 $C(K)$，其中 K 是某个紧豪斯多夫空间，且 u 对应于 1。调整

u，我们可以假设 $\|\cdot\| \le \|\cdot\|_\infty$。由于 X_u 在 X 中是 $\|\cdot\|$-稠密的，因此有 $s(X) = s(X_u, \|\cdot\|)$，并且 $\sigma(X) = \sigma(X_u, \|\cdot\|)$。

现在假设 Ω 是 K 的一个开子集。我们用 X^Ω 表示所有在 Ω 之外取值为零的 $x \in X_u$ 的集合。

引理 4.18. 存在 $t \in K$，使得对于每个邻域 $\Omega \ni t$, $s(X^\Omega) = s(X)$ $(\sigma(X^\Omega) = \sigma(X))$。

本引理中列出的空间均赋予范数 $\|\cdot\|$。

证明。我们处理 $s(\cdot)$，因为 $\sigma(\cdot)$ 的情形类似。反设任意一个 $t \in K$ 都有一个邻域 Ω_t，使得 $s(X^{\Omega_t}) > s(X)$。由 K的紧致性，我们可以找到$t_1, \dots, t_n \in K$，使得 $K = \cup_{i=1}^n \Omega_{t_i}$。我们将证明 $s(X) = s := \min_i s(X^{\Omega_{t_i}})$，从而导出矛盾。

我们将证明，对于任意 $r < s$，存在常数 C，使得不等式

$$\Big\| \sum_{j=1}^m y_j \Big\| \le C \Big(\sum_j \|y_j\|^r \Big)^{1/r} \tag{4.4}$$

对任意不交的 $y_1, \dots, y_m \in C(K)_+$成立。

事实上，对于任意 $i \in \{1, \dots, n\}$，存在 C_i，使得对于任意不交的 $z_1, \dots, z_k \in C(K)_+$，且在 Ω_{t_i} 之外为零的情形，有

$$\Big\| \sum_{j=1}^k z_j \Big\| \le C_i \Big(\sum \|z_j\|^r \Big)^{1/r}.$$

找到 $x_1, \dots, x_n \in C(K)_+$，使得 $\sum_i^{j=1} {}^j x_i = 1$，并且 ${}^j x_i$ 在 Ω_{t_i}之外为零。令 $y_{ij} = x_i \wedge y_j$。那么

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{j=1}^m y_j \Big\| &\le \sum_{i=1}^n \Big\| \sum_{j=1}^m y_{ij} \Big\| \le \sum_i C_i \Big(\sum_j \|y_{ij}\|^r \Big)^{1/r} \\ &\le \max_i C_i n^{1-1/r} \Big(\sum_j \sum_i \|y_{ij}\|^r \Big)^{1/r} \le \max_i C_i n \Big(\sum_j \|y_j\|^r \Big)^{1/r}, \end{aligned}$$

最后一个不等式是由于以下事实：

$$\|y_j\| \ge \max_i \|y_{ij}\| \ge n^{-1/r} \Big(\sum_i \|y_{ij}\|^r \Big)^{1/r}.$$

这就以 $C = n \cdot \max_i C_i$ 建立了 (4.4)。

$\sigma(\cdot)$ 的情形可用类似的方法处理，只需使用不等式 $\Big\| \sum_{j=1}^m y_j \Big\| \ge \vee_{i=1}^n \Big\| \sum_{j=1}^m y_{ij} \Big\|$，而不是 $\Big\| \sum_{j=1}^m y_j \Big\| \le \sum_{i=1}^n \Big\| \sum_{j=1}^m y_{ij} \Big\|$。 □

定理 *4.16* 的证明。固定 $\varepsilon > 0$ 和 $c' \in (1, c$使得

$$c > c' + n\varepsilon \text{ and } \frac{1}{c} < \frac{1}{c'} - n\varepsilon.$$

根据 Krivine 定理 [57], X 包含一组不交的归一化向量 $y_1, \dots, y_{n+1}$, c'，它们与ℓ_r-基等价，其中 r 根据具体情形为 $s(X)$或 $\sigma(X)$。对这些向量稍作扰动后，我们

可以假设它们属于 X_u （采用定理 4.18 中的记号）；后一个空间与 $C(K)$等同，同样如定理 4.18 所述。

令 $t_0 \in K$ 为定理 4.18 保证存在的特殊点。我们的不交向量 $y_1, \dots, y_{n+1}$ 中至多有一个在 t_0 处不为零；经过重新标记，我们可以假设 $y_1, \dots, y_n$ 在该处均为零。找出向量 $y_i' \in C(K)_+$ $(1 \le i \le n)$，使得对每个 i，y_i' 在 t_0 的某个邻域上为零，$y_i' \le y_i$，且 $\|y_i - y_i'\|_\infty < \varepsilon$。于是 $\|y_i - y_i'\| \le \|y_i - y_i'\|_\infty < \varepsilon$。

我们声称向量 $x_i = y_i'/\|y_i'\|$ 彼此不交，且与 ℓ_r 基 c-等价。事实上，对任意 $(\alpha_i)_{i=1}^n$，

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_i \alpha_i x_i\Big\| &\ge \Big\|\sum_i \alpha_i y_i'\Big\| \ge \Big\|\sum_i \alpha_i y_i\Big\| - \sum_i |\alpha_i|\|y_i - y_i'\| \\ &\ge \frac{1}{c'}\Big(\sum_i |\alpha_i|^r\Big)^{1/r} - \varepsilon\sum_i |\alpha_i| \ge \Big(\frac{1}{c'} - n\varepsilon\Big)\Big(\sum_i |\alpha_i|^r\Big)^{1/r}.\end{aligned}$$

另一方面，对于任意 i,

$$\big\|x_i - y_i'\big\| = \|y_i'\|\Big(\frac{1}{\|y_i\|} - 1\Big) = 1 - \|y_i'\| < \varepsilon,$$

因此

$$\Big\|\sum_i \alpha_i x_i\Big\| \le \Big\|\sum_i \alpha_i y_i\Big\| + \varepsilon\sum_i |\alpha_i| \le \big(c' + n\varepsilon\big)\Big(\sum_i |\alpha_i|^r\Big)^{1/r}.$$

此外，存在一个开邻域 $\Omega \ni t_0$，它与各个 x_i 不交；于是 X^Ω 具有所需的上界或下界估计。□

以类似于定理 4.15 的方式（但使用定理 4.1 而非定理 4.2），我们证明如下结论。

命题 4.19。设无限维巴拿赫格 X 满足 $s(X) = 1$。那么 X具有一个（条件）基本序列，该序列不是双基。

综合定理 4.15 和定理 4.19，可立即得到以下结论。

推论 4.20. 设一个无限维巴拿赫格 X 具有 $s(X) < \infty$。则 X 包含一个非双基的基本序列。

由定理 4.20，若 X 中的每个基本序列都是双基的，则 $s(X) = \infty$. 然而，如上所述，$s(X) = \infty$ 并不意味着 X 与某个 AM-空间格同构。现在我们证明，若改为假设 X 中的每个无条件序列都是绝对的，则可以得到这个更强的结论。

定理 4.21. 若巴拿赫格 X 中的每个无条件基序列都是绝对的，则 X 与某个 *AM*-空间格同构。

为便于后文使用，我们回顾 [47, 定理 2.1.12]：X 与某个 AM-空间格同构，当且仅当存在$C \ge 1$使得对任意 $x_1, \dots, x_n \in X_+$，不等式 $\|\vee_j x_j\| \le C \vee_j \|x_j\|$ 成立（实际上，只需对不交的 n元组验证上述不等式即可）。因此，X 与某个 AM-空间格同构，当且仅当 X的任意可分子格也满足这一性质。

在证明中，我们会重新使用本节前面引入的记号和事实。我们首先建立定理 4.16 的一个版本。

引理 4.22。 设可分巴拿赫格 X 不与 *AM*-空间格同构，且 u 是 X 中的弱单位。存在 $t \in K$，使得对于 $\Omega \ni t$ 的每个邻域， $\|\cdot\|$-完备化 X^{Ω} 不与 *AM*-空间格同构。

证明概要。反设每个 $t \in K$ 都有一个开邻域 $\Omega_t \ni t$，使得 X^{Ω_t} 的完备化与某个 AM-空间格同构。利用紧致性可找到 $t_1, \dots, t_n \in K$，使得 $\cup_{i=1}^{n} \Omega_{t_i} = K$。对每个 i，存在常数 C_i，使得只要$z_1, \dots, z_m \in X^{\Omega_{t_i}}$，就有 $\| \vee_j |z_j| \| \leq C_i \vee_j \|z_j\|$。

为导出矛盾，我们证明存在一个常数 C，使得对于任意 $y_1, \dots, y_m \in C(K)_+$（我们将 $C(K)$ 与 X_u视为相同），都有 $\| \vee_j y_j \| \leq C \vee_j \|y_j\|$。与定理 4.16 的证明一样，令 (x_i) 为从属于 (Ω_{t_i}) 的单位分解，并令 $y_{ij} = x_i \wedge y_j$。于是 $y_j \leq \sum_i y_{ij}$，因此

$$\left\| \vee_j y_j \right\| \leq \sum_i \left\| \vee_j y_{ij} \right\| \leq \sum_i C_i \vee_j \|y_{ij}\| \leq C \vee_j \|y_j\|,$$

其中 $C = \sum_{i=1}^{n} C_i$。 □

引理 4.23。 设可分巴拿赫格 X 不同构于 *AM*-空间，且$s(X) = \infty$。则存在不交向量 $e_{kn}, f_{kn} \in X_+$ $(n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq M_n)$，使得对每个 n，

(i) $(e_{kn})_{k=1}^{M_n}$ *is 2-equivalent to the* $\ell_\infty^{M_n}$ *basis.*
(ii) $\| \sum_k f_{kn} \| > n$, *while* $\| \sum_k \alpha_k f_{kn} \| \leq (\sum_k \alpha_k^2)^{1/2}$ *for any* (α_k).

证明此引理时，我们将使用 [12, 引理 4] 中 AM-空间的刻画。赋范格 X 的完备化不同构于 AM-空间，当且仅当对任意 K，都能找到不交的 $x_1, \dots, x_n \in X_+$，使得 $\| \sum_k x_k \| > K$，而对于任意满足 $\|x^*\| \leq 1$ 的 $x^* \in X^*$，都有 $\sum_k |x^*(x_k)|^2 \leq 1$。等价地，算子 $T\colon X^* \to \ell_2^n\colon\ x^* \mapsto (x^*(x_k))_k$ 是压缩映射。由对偶性可知，这等价于 $T^*\colon\ \ell_2^n \to X \subseteq X^{**}\colon\ e_i \mapsto x_i$ 是压缩映射。换言之，我们要求只要 $\sum_k \alpha_k^2 \leq 1$，就有 $\| \sum_k \alpha_k x_k \| \leq 1$。

证明。由于所讨论的向量可以递归地产生，只需证明以下结论：设 X 可分，且不同构于任何 AM-空间（作为格）。那么，对任意 n，存在 $M \in \mathbb{N}$ 以及两两不交的正的单位范数向量 $e_1, \dots\dots, e_M, f_1, \dots\dots, f_M$，使得：

- $(e_k)_{k=1}^{M}$ 与 ℓ_∞^M 基 2-等价。
- $\| \sum_{k=1}^{M} f_k \| > n$，而对于任意 (α_k)，$\| \sum_k \alpha_k f_k \| \leq (\sum_k \alpha_k^2)^{1/2}$。
- 存在一个闭子格 $X' \subset X$，它与 $e_1, \dots\dots, e_M, f_1, \dots\dots, f_M$ 不交，且不同构于任何 AM-空间（作为格）。

由定理4.22，存在 $t \in K$，使得对任意开集 $\Omega \ni t$， X^{Ω} 的完备化不同构于任何 AM-空间（作为格）。取范数为1的正不交向量 $f_1, \dots\dots, f_{M+1} \in X$，使得 $\| \sum_{k=1}^{M+1} f_k \| > n+1$，而对于任意 (α_k)，$\| \sum_k \alpha_k f_k \| \leq (\sum_k \alpha_k^2)^{1/2}$。去掉其中一个向量（例如 f_{M+1}）并对其余向量作微扰后，我们可以假设 $f_1, \dots\dots, f_M$ 支撑在某个开集 $\Omega \ni t$之外，其中t 是一个特殊点，其存在性由定理4.22保证。令 X_0 为 X^{Ω} 的闭包。重复同样的推理，构造合适的 $e_1, \dots\dots, e_M \in X_0$，使其与合适的 X' 不交。□

定理 *4.21* 的证明。如前所述，我们可以假设 X 是可分的。如果 $p = s(X) < \infty$，则利用 Krivine 定理，在 X 中找到 $\ell_p^{2^n}$ 的不交格副本。每个副本都包含“独立的离散拉德马赫” r_{kn} $(1 \leq k \leq n)$。我们知道 $\| \sum_k \alpha_k r_{kn} \| \sim \left(\sum_k \alpha_k^2 \right)^{1/2}$，而

$\|\sum_k |\alpha_k r_{kn}|\| = \sum_k |\alpha_k|$，因此，将 r_{kn} 拼接起来得到的序列是无条件的，但不是绝对的。实际上，由于 [65]，这个序列也是双基的。

现在假设 $s(X) = \infty$ 但 X 不是 AM-空间。利用定理4.23，在 X_+ ($n \in \mathbb{N}, 1 \le k \le 2^n$) 中找到序列 (e_{kn}) 和 (f_{kn})，使得涉及的向量两两不交，(e_{kn}) 与 $\ell_\infty^{2^n}$ 基 2-等价，$\|e_{kn}\| = 1$，并且向量 (f_{kn}) 满足 $\|\sum_k f_{kn}\| \nearrow \infty$，而每当 $\sum_k \alpha_k^2 \le 1$ 时，$\|\sum_k \alpha_k f_{kn}\| \le 1$。令 $H_n = (h_{ijn})_{i,\,j=1}^{2^n}$ 为一个 $2^n \times 2^n$ 阶的哈达玛矩阵（参见 [65, 第 ˆ8] 节）。该矩阵的元素均等于 ± 1，且其各行 $h_{kn} = (h_{kjn})_j$ 彼此正交。

受 [3] 的启发，我们令，对 $1 \le k \le 2^n$，

$$u_{kn} = e_{kn} + 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} h_{kjn} f_{jn}.$$

于是，(u_{kn}) 是一个（双指标）无条件基本序列。事实上，由于彼此不交，只需证明对于固定的 n，(u_{kn}) 的无条件性。实际上，我们将证明 (u_{kn}) 与 $\ell_\infty^{2^n}$ 基等价，等价常数为 3。对于 c_{00} 中任意的 (α_k)，我们有

$$\begin{aligned} \vee_k |\alpha_k| &\le \Big\|\sum_k \alpha_k e_{kn}\Big\| \le \Big\|\sum_k \alpha_k u_{kn}\Big\| \\ &\le \Big\|\sum_k \alpha_k e_{kn}\Big\| + 2^{-n}\Big\|\sum_k \alpha_k \sum_j h_{kjn} f_{kn}\Big\|. \end{aligned}$$

此外，$\big\|\sum_k \alpha_k e_{kn}\big\| \le 2 \vee_k |\alpha_k|$。因此，只需证明

$$\Big\|\sum_k \alpha_k \sum_j h_{kjn} f_{jn}\Big\| \le 2^n \text{ whenever } \vee_k |\alpha_k| \le 1.$$

由向量 f_{jn} 的性质，

$$\Big\|\sum_k \alpha_k \sum_j h_{kjn} f_{jn}\Big\|^2 = \Big\|\sum_j \big(\sum_k \alpha_k h_{kjn}\big) f_{jn}\Big\|^2 \le \sum_j \Big|\sum_k \alpha_k h_{kjn}\Big|^2.$$

然而，

$$\sum_j \Big|\sum_k \alpha_k h_{kjn}\Big|^2 = \Big\|\sum_k \alpha_k \hat{h}_{kn}\Big\|^2 = \sum_k |\alpha_k|^2 \|\hat{h}_{kn}\|^2 = 2^{2n},$$

这就是所需的不等式。

最后，我们注意到序列 (u_{kn}) 并非绝对的。事实上，对于每个 n, $\|\sum_k \pm u_{kn}\| \le 3$，然而 $\|\sum_k |u_{kn}|\| \ge \|\sum_k f_{kn}\| \nearrow \infty$。□

4.4. 可补绝对序列。 在本小节中，我们证明一些额外结果，这些结果要求环境空间 X 满足某些条件，或者要求 $[x_k]$ 在 X 中的嵌入方式满足某些条件。

回顾一下，序列 (x_k) 是不交的，当且仅当 $\sum_{k=1}^n |a_k x_k| = \bigvee_{k=1}^n |a_k x_k|$ 对所有标量$a_1, \dots, a_n$成立。我们的下一个结果表明，有补的绝对序列的性质与不交序列非常相似。

命题 4.24。 设(x_k) 是巴拿赫格中的一个绝对序列 X ，并假设 $[x_k]$ 在 X中有补。那么

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\| \sim \left\| \bigvee_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\|.$$

证明。根据定理 1.d.6] 之后的注释，我们有

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| \sim \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|.$$

取 $\theta = \frac{1}{2}$, 于是 $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{\infty}$ ； 应用命题 1.d.2 (i) 和 (ii)] ，我们得到

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| \le C \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\| \le C \left\| \sum_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\|^{\theta} \left\| \bigvee_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\|^{1-\theta},$$

其中 C 是等价常数。

由于（x_k）的绝对性，存在一个常数 M^*，使得对任意（a_k），$\| \sum_{k=1}^{n} |a_k x_k| \| \le M^* \| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \|$。因此,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\| \le C M^* \left\| \sum_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\|^{1/2} \left\| \bigvee_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\|^{1/2},$$

由此得到

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\| \le (C M^*)^2 \left\| \bigvee_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\|.$$

因此,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| \le \left\| \sum_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\| \le (C M^*)^2 \left\| \bigvee_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\|,$$

另一方面,

$$\left\| \bigvee_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\| \le \left\| \sum_{k=1}^{n} |a_k x_k| \right\| \le M^* \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\|.$$

证明至此完成。 □

定理 4.24 使我们能够用巴拿赫格方法，对 $C[0,1]$ 中可补无条件序列的著名刻画给出一个新的证明。

推论 4.25。 *AM*-空间中唯一有补的半归一化无条件基序列，是与 c_0的单位向量基等价的序列。

证明。 假设 (x_k) 是这样的序列。在 AM-空间中，无条件等同于绝对的，因此 (x_k) 是绝对的。现在，利用 AM-性质和定理 4.24，我们得到

$$\begin{aligned}\max_k |a_k| &\lesssim \|\sum_{k=1}^n a_k x_k\| \lesssim \|\sum_{k=1}^n |a_k x_k|\| \sim \|\bigvee_{k=1}^n |a_k x_k|\| \\ &= \bigvee_{k=1}^n \|a_k x_k\| \sim \max_k |a_k|.\end{aligned}$$

□

注 4.26。 定理 4.25 的证明表明，可补性假设对定理 4.24 至关重要。由于 $C[0,1]$ 是通用的，它包含每个归一化无条件基的副本，因此定理 4.24 的结论对它们中的所有基都不成立，唯独 c_0 除外。

注 4.27. 当然，定理 4.25 是众所周知的；事实上，已知（[15, 第 74] 页）， $\mathcal{L}_\infty$ 空间中唯一的有补半归一化无条件基序列，等价于 c_0 的单位向量基。

4.5. 非原子巴拿赫格中的双基序列。 现在我们考虑环境格为 L_p 的情形。 [65] 已证明， L_1 无法合理地嵌入双基序列的张成空间中，因此，了解 L_1 是否存在一致准贪婪基将会很有趣。尽管我们不知道这个问题的答案，但我们将证明它的一个 L_p 版本。具体而言，下一个命题证明 L_p 不可能有可置换双基，这与一致准贪婪基“几乎”可置换（其意义与准贪婪基“几乎”无条件相同），以及当 $p>1$ 时 L_p 确实 存在一致准贪婪基这一事实形成对比。

在下一个命题中，我们使用无界收敛的概念。给定向量格 X 上的收敛 $\xrightarrow{\tau}$，若网 (x_α) 满足 $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\tau} 0$ 对所有 $u \in X_+$ 都成立，则称其 无界 τ收敛 到 $x \in X$，参见 [64]。当 τ 是局部实拓扑诱导的收敛时， X 上的收敛 $\xrightarrow{u\tau}$ 定义了 X 上与 τ 在序区间上一致的最弱局部实拓扑。另一方面，无界序收敛是几乎处处收敛在向量格中的自然推广。关于这类收敛的全面研究，参见 [14, 36, 62]。虽然本文不探讨这一点，但我们指出，无界收敛可以为 [4,问题 12.3] 提供系统性的解决方案，因为它们涵盖了依测度收敛、几乎处处收敛，以及各种弱于范数的收敛。

命题 4.28. 设 $1 \le p < \infty$ 和 (E_n) 是巴拿赫格X 中的一个子空间序列，构成了 $[E_n]$的可置换双有限维分解。那么不存在满足以下性质的同构嵌入 $T: L_p \to [E_n]$: $T^{-1}\colon T(L_p) \subseteq X \to L_p$将 $T(L_p)$ 中的一致趋零序列映射为 L_p中的 uo-零序列。

证明。根据 [37, 推论 9 和第 102] 页的注 10， L_p $(1 \le p < \infty)$中不存在哈尔型系是可置换的 L_p 双基序列。现在按照 [26, 定理 5.1], 进行，并使用 [65]中证明的稳定性结果。□

接下来，我们将介绍一个关于绝对有限维分解的类似结果。回顾一下，序贯的 u-到-u-连续同构（见 [65]）是保持双基序列和一致准贪婪基本序列的自然态射。在 [50, 命题 7.10]中证明了，一个线性映射是序贯的u-到-u-连续的，当且仅当它是多重有界的，即存在 $M \ge 1$ 使得

对于任意 m和 $x_1, \dots, x_m$，都有 $\| \bigvee_{k=1}^m |Tx_k| \| \le M \| \bigvee_{k=1}^m |x_k| \|$。这类映射有时被称为（$\infty, \infty$）-正则映射，许多作者都对其进行了研究。我们证明，这类映射将绝对序列映射为绝对序列。更确切地说，我们有以下命题。

命题 4.29. 设 X、Y 是巴拿赫格， E 是 X 的子空间，且 $T:\ E \to Y$ 是多重有界的，并且有有界逆。若序列 $(x_k) \subset E$ 是绝对的，则(Tx_k) 也如此。

证明。(x_k) 的绝对性意味着存在一个常数 C_0，使得对于每个 $(a_i)_{i=1}^n$，都有 $\| \sum_i |a_i x_i| \| \le C_0 \| \sum_i a_i x_i \|$。$T$ 是多重有界的，因此存在常数 C_1，使不等式 $\left\| \vee_{k=1}^m |Te_k| \right\| \le C_1 \left\| \vee_{k=1}^m |e_k| \right\|$ 成立。此外，若对任意 k，都存在一个 ℓ，使得 $e_\ell = -e_k$ （序列 (e_k) 是“对称的”——它包含其中每个元素的相反数），那么我们就有 $\left\| \vee_{k=1}^m Te_k \right\| \le C_1 \left\| \vee_{k=1}^m e_k \right\|$。对于 a_1，……，$a_n \in \mathbb{R}$、$\sum_i |a_i x_i| = \bigvee_{\varepsilon_i = \pm 1} \sum_i \varepsilon_i a_i x_i$，族 $\left(\sum_i \varepsilon_i a_i x_i \right)_{\varepsilon_i = \pm 1}$ 在上述意义下是对称的，因此

$$\begin{aligned} \left\| \sum_i |a_i T x_i| \right\| &= \left\| \bigvee_{\varepsilon_i = \pm 1} T\Big(\sum_i \varepsilon_i a_i x_i \Big) \right\| \\ &\le C_1 \left\| \bigvee_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big(\sum_i \varepsilon_i a_i x_i \Big) \right\| = C_1 \left\| \sum_i |a_i x_i| \right\|. \end{aligned}$$

然而，由于 T^{-1}有界，存在 $C_2 > 0$，使得对于任意(a_i)，$\| \sum_i a_i x_i \| \le C_2 \| \sum_i a_i T x_i \|$。于是

$$\left\| \sum_i |a_i T x_i| \right\| \le C_1 \left\| \sum_i |a_i x_i| \right\| \le C_1 C_0 \left\| \sum_i a_i x_i \right\| \le C_2 C_1 C_0 \left\| \sum_i a_i T x_i \right\|,$$

这表明(Tx_i)是绝对的。 □

命题 4.30. 如果一个 σ-序完备巴拿赫格以多重有界逆嵌入到某个绝对有限维分解的张成空间中，那么它就是纯原子的。

证明. 令 X 为一个 σ-序完备巴拿赫格， E 为一个巴拿赫格，(x_k)为 E 中的一个绝对基本序列（也可以弱化为有限维分解，但为便于引用，我们使用基本序列），并令 $T: X \to [x_k] \subseteq E$为一个具有多重有界逆的同构嵌入。我们先作几项简化。

显然， X 必须是可分的；不妨假设它没有原子。由于每个可分的σ-序完备无原子巴拿赫格 X 都可以表示为定义在 $[0,1]$上的K¨othe函数空间，且具有 $L_\infty \subseteq X \subseteq L_1$，我们可以假设 X 是K¨othe。

假设 T 是一个具有多重有界逆的嵌入，其意义在于，根据定理4.29，逆映射将绝对序列映射为绝对序列。省略 T后，我们将 $X \subseteq [x_k] \subseteq E$视为……。 X 可分与 σ-序完备相结合，得到 X 是序连续的。由 [43, 推论 3.1.25], 拉德马赫函数在 X 中构成一个弱零序列。因此，通过取子列并使用贝萨加 – 佩乌琴斯基选择原理，我们可以找到 (y_k) 的一个块序列 (x_k)，使得 $\|y_k - r_k\| \to 0$。这里，(r_k) 是拉德马赫函数的一个子列。进一步取子列后，我们可以假设 $\|y_k - r_k\| \to 0$ 足够快，从而 (r_k) 是 (y_k) 的一个小扰动，因此根据 [65] 中证明的稳定性结果，它是绝对的（更具体地说，恢复省略的 T 后，我们

可得 (Tr_k) 是绝对的，　　因此，根据多重有界逆的假设，(r_k) 也是如此）。所以　　，

$$\|\mathbb{1}\|_X \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \| \sum_{k=1}^{n} |a_k r_k| \|_X \leq A \| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \|_X,$$

因此，拉德马赫函数中有一个子列等价于 ℓ_1 的单位向量基。这意味着 ℓ_1 的单位向量基弱收敛于零，矛盾。

到目前为止，我们假设 X 是无原子的，现在将问题归结为 X 不是纯原子的情形。由于 X 是 σ-序完备且可分的，因此它是序连续的，进而具有投影性质。令 B 为由原子生成的带，则 $B \oplus B^d = X$。 B^d 是无原子的且 σ-序完备，因此，若 X 不能良好地嵌入绝对有限维分解的张成空间，则 B^d 也不能。证毕。□

注4.31。在 [42] 中（另见 [46]），构造了一个无原子 AM-空间 X，它与 c_0 线性同构，因此具有无条件基；由于 X 是 AM-空间，该基是绝对的。因此，定理4.30中不能删去 σ-序完备性。

注 4.32. 读者可以验证，定理 4.7 的双有限维分解版本同样成立。结合定理 4.28，便会得到一个有趣的现象：从 L_p、 $p > 1$ 的任意无条件有限维分解出发，可以对其进行分块，使之成为双有限维分解。之后，利用定理 4.28，可以重新排列分块后的有限维分解，使其不再是双有限维分解。然而，还可以进一步对这个经过分块和重新排列的有限维分解进行分块，使其重新获得双有限维分解的性质，如此反复，无穷无尽。

References

[1] Y. A. Abramovich. AM-空间的一些新刻画。*An. Univ. Craiova Mat. Fiz.-Chim.*，6:15–26，1978年。[2] Y. A. Abramovich 和 G. Ja. Lozanovskii。关于 KN-线性集的一些数值特征。*Mat. Zametki*，14:723–732，1973年。[3] Y. A. Abramovich、E. D. Positselskii 和 L. P. Yanovskii。关于与赋范格相关的一些参数以及 M-空间的级数刻画。数学研究，63(1):1–8，1978年。[4] Fernando Albiac、Jos´e L. Ansorena、Pablo M. Bern´a 和 Przemys-law Wojtaszczyk。准巴拿赫空间中双正交系的贪心逼近。*Dissertationes Math.*，560:88，2021年。[5] Fernando Albiac 和 Nigel J. Kalton。巴拿赫空间理论专题，第233卷，数学研究生教材。Springer，第二版，2016年。前言由 Gilles Godefroy 撰写。[6] James R. Angelos、Carl C. Cowen 和 Sivaram K. Narayan。三角截断与哈达玛乘子范数的求取。*Linear Algebra Appl.*，170:117–135，1992年。[7] A. Avil´es、C. Rosendal、M. A. Taylor 和 P. Tradacete。巴拿赫空间与格中的坐标系。*arXiv* 预印本，*arXiv:2406.11223v1*，2024年。[8] Susan E. Bedingfield 和 Andrew Wirth。巴拿赫格的范数与序性质。*J. Austral. Math. Soc. Ser.A*，29(3):331–336，1980年。[9] Pablo M. Bern´a、 ´Oscar Blasco 和 Gustavo Garrig´os。一般基中贪婪算法的勒贝格不等式。*Rev. Mat. Complut.*，30(2):369–392，2017年。[10] J. Bourgain。关于正交系的 Kolmogorov 重排问题及 Garsia猜想。载于泛函分析的几何方面（*1987–88*），第1376卷，数学讲义，第209–250页。Springer，柏林，1989年。[11] D. L. Burkholder。几乎处处收敛的必要条件：极大不等式。*Z. Wahrschein-lichkeitstheorie und Verw. Gebiete*，3:75–88，1964年。[12] Donald I. Cartwright 和 Heinrich P. Lotz。AM-空间与AL-空间的一些刻画。*Math. Z.*，142:97–103，1975年。

[13] Peter G. Casazza、Stephen J. Dilworth、Denka Kutzarova 和 Pavlos Motakis。 c_0 或 ℓ_p的单位向量基的新刻画。Canad. Math. Bull.，66(4):1073–1083，2023年。[14] Y. Deng、M. O'Brien 和 V. G. Troitsky。巴拿赫格中的无界范数收敛。Positivity，21(3):963–974，2017年。[15] Joe Diestel、Hans Jarchow 和 Andrew Tonge。绝对求和算子，剑桥高等数学研究丛书第43卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[16] S. J. Dilworth、V. Ferenczi、Denka Kutzarova 和 E. Odell。关于强渐近 l_p 空间与极小性。J. Lond. Math. Soc. (2)，75(2):409–419，2007年。[17] S. J. Dilworth、D. Freeman、E. Odell 和 T. Schlumprecht。Besov 空间的贪婪基。Constr. Approx.，34(2):281–296，2011年。[18] S. J. Dilworth、N. J. Kalton 和 Denka Kutzarova。巴拿赫空间中近似贪婪基的存在性。数学研究，159(1):67–101，2003年。[19] S. J. Dilworth 和 David Mitra。 l_1的一个条件准贪婪基。数学研究，144(1):95–100，2001年。[20] Xiumin Du 和 Ruixiang Zhang。高维中薛定谔极大函数的尖锐 L^2 估计。数学年刊 (2)，189(3):837–861，2019年。[21] Daniel Freeman、Alexander M. Powell 和 Mitchell A. Taylor。由非负函数构成的 L_2 的一个 Schauder 基。arXiv:2003.09576v1，2020年。[22] Daniel Freeman、Alexander M. Powell 和 Mitchell A. Taylor。由非负函数构成的 L_2 的一个 Schauder 基。Math. Ann.，381(1-2):181–208，2021年。[23] Enrique Garc´ıa-S´anchez、Denny H. Leung、Mitchell A. Taylor 和 Pedro Tradacete。具有上 p-估计的巴拿赫格：自由对象与内射对象。Math. Ann.，391(3):3363–3398，2025年。[24] Enrique Garc´ıa-S´anchez、Denny H. Leung、Mitchell A. Taylor 和 Pedro Tradacete。具有上 p-估计的巴拿赫格：重新赋范与因子分解。预印本，2026年。[25] Loukas Grafakos 和 Chris Lennard。利用 Gabor 框架刻画 $L^p(\mathrm{R}^n)$。J. Fourier Anal. Appl.，7(2):101–126，2001年。[26] Anna Gumenchuk、Olena Karlova 和 Mikhail Popov。巴拿赫格中的序 Schauder 基。泛函分析杂志，269(2):536–550，2015年。[27] Logan Hart、Christopher Heil、Ian Katz 和 Michael Northington V。超完备再生对。arXiv 预印本 arXiv:2311.04421，2023年。[28] Christopher Heil。基理论入门。应用与数值调和分析丛书。Birkh¨auser/Springer，纽约，增订版，2011年。[29] Guixiang Hong、Samya Kumar Ray 和 Simeng Wang。非交换 L_p-空间上一些正算子的极大遍历不等式。J. Lond. Math. Soc. (2)，108(1):362–408，2023年。[30] Richard A. Hunt。关于傅里叶级数的收敛性。载于《正交展开及其连续类比》（1967年伊利诺伊州爱德华兹维尔会议论文集），第235–255页。Southern Illinois Univ. Press，伊利诺伊州卡本代尔，1968年。[31] W. B. Johnson 和 E. Odell。$l_p \oplus l_2$ 与 X_p的子空间和商空间。数学学报，147(1-2):117–147，1981年。[32] W. B. Johnson 和 M. Zippin。关于$(\sum G_n)_{l_p}$ 与$(\sum G_n)_{c_0}$的商空间的子空间。Israel J. Math.，13:311–316，1972年。[33] William B. Johnson、Bernard Maurey 和 Gideon Schechtman。 L_1中的弱零序列。J. Amer. Math. Soc.，20(1):25–36，2007年。[34] William B. Johnson 和 Gideon Schechtman。由非负函数构成的 $L_1(0,\infty)$的一个 Schauder 基。Illinois J. Math.，59(2):337–344，2015年。[35] Marius Junge 和 Quanhua Xu。非交换极大遍历定理。J. Amer. Math. Soc.，20(2):385–439，2007年。[36] M. Kandi´c 和 M. A. Taylor。极小拓扑与无界拓扑的可度量性。J. Math. Anal. Appl.，466(1):144–159，2018年。[37] B. S. Kashin 和 A. A. Saakyan。正交级数，数学专著译丛第75卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1989年。由 Ralph P. Boas 从俄文译出。[38] T. W. K¨orner。递减重排傅里叶级数的发散。数学年刊 (2)，144(1):167–180，1996年。[39] T. W. K¨orner。硬求和、Olevski˘ı、Tao 与 Walsh。Bull. London Math. Soc.，38(5):705–729，2006年。

[40] S. Kostyukovsky 和 A. Olevskii。《傅里叶级数递减重排注记》。《应用分析杂志》，3(1):137–142，1997年。[41] S. Kwapie ´n 和 A. Pe lczy ´nski。《矩阵空间中的主三角投影及其应用》。《数学研究》，34:43–68，1970年。[42] E. Lacey 和 P. Wojtaszczyk。无原子巴拿赫格可以具有 l_1 作为对偶空间。《美国数学会会刊》，57(1):79–84，1976年。[43] Pei-Kee Lin。K ¨othe-Bochner 函数空间。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，MA，2004年。[44] Joram Lindenstrauss 和 Lior Tzafriri。《经典巴拿赫空间》。第一部分。施普林格出版社，柏林—纽约，1977年。[45] Joram Lindenstrauss 和 Lior Tzafriri。《经典巴拿赫空间》。第二部分，第97卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1979年。[46] Lea McClaran。具有无条件基且同构于无原子巴拿赫格的巴拿赫空间。《美国数学会会刊》，123(2):471–476，1995年。[47] Peter Meyer-Nieberg。《巴拿赫格》。Universitext丛书。施普林格出版社，柏林，1991年。[48] J. C. Navarro-Pascual 和 M. A. Navarro。实冯·诺伊曼代数中的酉算子。《数学分析与应用杂志》，386(2):933–938，2012年。[49] Amos Nevo 和 Elias M. Stein。伯克霍夫逐点遍历定理的推广。《数学学报》，173(1):135–154，1994年。[50]Timur Oikhberg、MITCHELL A. TAYLOR、Pedro Tradacete 和 Vladimir G. Troitsky。自由巴拿赫格。《欧洲数学会杂志》（JEMS），待刊，2024年。[51] Gilles Pisier。非交换 L_p-空间之间的正则算子。《数学科学通报》，119(2):95–118，1995年。[52] Alexander M. Powell 和 Anneliese H. Spaeth。结构化完备系统的非负性约束。《美国数学会汇刊》，368(8):5783–5806，2016年。[53] Edelstein I. S. 和 P. Wojtaszczyk。关于巴拿赫空间直和中的投影和无条件基。《数学研究》，56(3):263–276，1976年。[54] S. Sawyer。弱型极大不等式。《数学年刊》（第二辑），84:157–174，1966年。[55] Gideon Schechtman。具有混合 ℓ_p 和 ℓ_q 范数的矩阵空间不存在贪婪基。《逼近理论杂志》，184:100–110，2014年。[56] Thomas Scheckter。《非交换积分中的鞅收敛技术》。博士论文，悉尼新南威尔士大学，2020年。[57] Anton R. Schep。Krivine 定理与巴拿赫格的指标。《数学学报》，27(1-2):111–121，1992年。[58] Per Sj¨olin。Paley 不等式与沃尔什–傅里叶级数几乎处处收敛。《数学档案》，7:551–570，1969年。[59] E. M. Stein。关于算子序列的极限。《数学年刊》（第二辑），74:140–170，1961年。[60] Stanis law J. Szarek。一个没有基但具有有界逼近性质的巴拿赫空间。《数学学报》，159(1-2):81–98，1987年。[61] 陶哲轩。小波求和方法几乎处处收敛。《应用与计算调和分析》，3(4):384–387，1996年。[62] MITCHELL A. TAYLOR。无界收敛的完备性。《美国数学会会刊》，146(8):3413–3423，2018年。[63] MITCHELL A. TAYLOR。向量格中的无界收敛。硕士论文，阿尔伯塔大学，2019年。[64] MITCHELL A. TAYLOR。局部实向量格中的无界拓扑与 uo-收敛。《数学分析与应用杂志》，472(1):981–1000，2019年。[65] MITCHELL A. TAYLOR 和 Vladimir G. Troitsky。巴拿赫格中的双基序列。《泛函分析杂志》，278(10):108448，33页，2020年。[66] Vladimir Temlyakov。贪心逼近，第20卷，剑桥应用与计算数学专著丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2011年。[67] A. W. Wickstead。巴拿赫格之间的正则算子。Positivity，255–279页，2007年。[68]P. Wojtaszczyk。关于巴拿赫空间直和中的投影和无条件基。第二部分。《数学研究》，62(2):193–201，1978年。[69] P. Wojtaszczyk。一般双正交系的贪婪算法。《逼近理论杂志》，107(2):293–314，2000年。[70] Robert M. Young。《非谐傅里叶级数导论》。Academic Press, Inc.，圣迭戈，CA，第一版，2001年。

Departamento de Matemáticas, CUNEF Universidad, Madrid 28040, Spain
电子邮件地址：pablo.berna@cunef.edu

Department of Mathematics and Statistics, St Louis University, St Louis MO 63103, USA电子邮箱地址：daniel.freeman@slu.edu

Deptartment of Mathematics, University of Illinois, Urbana IL 61801, USA电子邮箱地址：oikhberg@illinois.edu

Department of Mathematics, ETH Zürich, Ramistrasse 101 8092 Zürich, Switzerland电子邮箱地址：mitchell.taylor@math.ethz.ch