具有循环正规边的立方复形图中的有限阶

CHANGQIAN LI

Abstract. 设紧立方复形 X 可分解为虚拟特殊立方复形图。假设边空间基本群在相邻顶点空间基本群中是循环正规的。我们证明， $\pi_1 X$ 相对于顶点群具有 Huang–Wise 意义下的有限 stature。特别地，当顶点群是双曲的时，由此可以推出 X的虚拟特殊性。

arXiv:2601.01057v1 [math.GR] 3 Jan 2026

1. Introduction

虚拟特殊立方复形的概念由 Haglund and Wise 在 [HW08]中引入。在此框架的基础上，Haglund and Wise 证明了下面的自正规化组合定理。

定理 1.1 ([HW12，定理 8。2])。 设 X 是一个紧致、连通、非正曲率的立方复形，且设 P 是 X 中的一个超平面，并满足以下条件：

(1) $\pi_1 X$ 是双曲的。*(2)* P 是 X 中一个嵌入的 2 侧超平面。*(3)* $\pi_1 P$ 在 $\pi_1 X$ 中是自正规化的。*(4)* $X \setminus N_o(P)$ 的每个连通分支都是虚拟特殊的。

那么 X 是虚拟特殊的。

该定理在 Wise 的自正规化拟凸层级定理[AGM16] 和 Malnormal Special Quotient 定理 [Wis21] 的证明中发挥着本质作用。这些结果也是 Agol 证明长期悬而未决的虚拟 Haken 猜想 [Ago13]的关键组成部分。然而，上述定理仅适用于双曲情形。相对双曲背景下的相关推广已在 [Wis21], [GM22], 和 [OR23]中得到研究。鉴于虚拟特殊性的诸多有趣推论，将这一理论推广到不一定（相对）双曲的群上是值得探索的，而这一方向至今仍鲜有研究。

回忆一下，群的子群 H G 称为圆正规，如果对任意 $g \in G \setminus H$，交集 $H \cap gHg^{-1}$要么是平凡群，要么是循环子群。我们将在第 节回顾4.1立方复形图的概念。设立方复形 X 分解为非正曲率立方复形图。若每条边空间的基本群都是相邻顶点空间基本群中的圆正规子群（见定义6.1），则称其具有循环正规边。我们的主要结果如下：

定理 1.2 （参见推论6.5）。设 X 是一个紧立方复形，它分解为具有循环正规边的非正曲率立方复形图。若顶点群是双曲的，则 X 是虚拟特殊的。

请注意，此结果与定理1.1 的主要区别在于，尽管要求顶点群是双曲的， $\pi_1 X$ 本身却不必是双曲的或相对双曲的。作用 $\pi_1 X$ 在相应的 Bass–Serre 树上不一定是几乎圆柱的。此外，我们提醒读者，尽管假设边是圆正规的，Bass–Serre 树中无限子树的逐点稳定子可能比循环群更复杂。

此外，定理 1.2 将定理 1.1 中的非正规性假设推广到了圆正规性。请注意，如果我们去掉圆正规边的假设，定理 1.2便不成立。例如，Wise 在 [Wis96] 中构造了一个并非虚拟特殊的图的图。

研究双曲情形之外的虚拟特殊性，一个动机来自某些局部紧群中格的分类。例如，设 Δ是由有限群的图积实现的直角建筑。那么，若一致格是虚拟特殊的，则 $\mathrm{Aut}(\Delta)$ 中的一致格彼此可公度 [She24]。此外，虚拟特殊性与某些立方群的拟等距刚性密切相关 [Hua18]。

虽然定理 1.2 推广了定理 1.1，但其证明基于 [HW24，定理 1。4]，其论证依赖于 Malnormal Special Quotient 定理，尤其依赖于定理1.1。因此，定理 1.2 并未为定理 1.1提供新的证明。

事实上，定理 1.2 是以下定理 1.3 借助有限 stature 的概念推得的推论。

群 G相对于子群集合 $\Omega = \{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 具有$H \in$ 有限 stature，若对每个 $H\Omega$，都只有有限多个形如 $H \cap C$的无限子群的 C-共轭类，其中 G是 Ω 中元素的 [-共轭子群的交集。有限 stature 由 Huang 和 Wise 在 19]HW G 中引入。同一篇论文中，他们将群 G 按群图分解时的有限 stature，改用 X 在 Bass–Serre 树上的作用的逐点稳定子来表述。特别地，当一个紧致立方复形 X 分解为由双曲顶点群组成的非正曲率立方复形图时，这两位作者证明，$\pi_1 X$ 是虚拟特殊的，当且仅当 [相对于顶点群具有有限 stature24]HW。定理 1.2 是以下结果的推论：

定理 1.3。设 X 为一个紧立方复形，它分裂为一个带有循环正规边的虚拟特殊立方复形图，则 $\pi_1 X$ 相对于顶点群具有有限 *stature*。

与定理1.2相比，该结果仅假设顶点空间是虚拟特殊的，而不要求其具有双曲性。事实上，[HW24] 中猜想，当仅假设顶点空间是虚拟特殊时，有限 stature 与虚拟特殊性之间的等价关系仍然成立。在我们的设定下，因此我们预期定理1.2在这一较弱的假设下仍然成立。

猜想 1.4。设 X 为一个带有循环正规边的虚拟特殊立方复形图，则 X 是虚拟特殊的。

定理 1.3是定理 6.4 和推论 6.7 中关于近似循环正规性的更一般结果的特例。

当 X 分解为图的图时，定理 1.3 可由 [Wis96第一部分定理 4.5 中 Wise 的论证推得。4] 适用于圆正规 VH-复形。

论文结构。第 2 节介绍非正曲率立方复形和虚拟特殊立方复形的一些预备知识。第3 节讨论 CAT(0) 立方复形中的投影映射。第4 节回顾有限身量的定义，并讨论它与 Bass–Serre 树上逐点稳定子的关系。第 5 节引入拟直线的概念，并研究其中的超平面。最后，我们在第 1.3 节6证明定理。

致谢。作者感谢 Jingyin Huang 在该主题上的指导以及许多富有成果的讨论。

2. Preliminary

本节回顾与非正曲率立方复形、超平面和特殊立方复形相关的定义。例如，参见 [Wis21] 以了解更多详情。

2.1. 非正曲率立方复形与超平面。

定义 2.1. 一个 n维立方体是 I^n 的一个副本，其中 $I = [0, 1]$。其子立方体通过将某些坐标限制为 0、另一些坐标限制为 1 得到。立方复形由一族立方体沿其子立方体等距粘合而成。旗复形是具有如下性质的单纯复形：每个有限的两两相邻顶点集合都张成一个单形。若立方复形 X 中每个 0-立方体（顶点）v 的链接 lk(v) 都是旗复形，则称其为非正曲率的。单连通的非正曲率立方复形是 CAT(0) 的。

定义 2.2. 一个 n-立方体 I^n 中的中立方体是将一个坐标限制为$_1$ $_2$所得的子空间。CAT(0)立方复形 $\tilde{X}$ 中的超平面 H 是一个连通子空间，对于 X 中的每个立方体 C~，$H \cap C = \emptyset$ 或 $H \cap C$ 是 C 的一个中立方体。超平面 H 的载体是子复形 $N(H)$，由所有与 H 相交的闭立方体组成。H 的开载体是子复形$N_o(H)$，由所有与 H 相交的开立方体组成。非正曲率立方复形 X 中的浸入超平面是映射 $H/\mathrm{Stab}_{\pi_1 X}(H) \to X$ 的像，其中 H 是万有覆盖~X 中的一个超平面。

~ ~CAT(0)立方复形的一个超平面 H X 将其分隔 X 为两个连通分支 [Sag95]。这两个连通分支称为 $\tilde{X} \setminus N_o(H$的半空间 H，记作 H^+，H^-。我们用 H^ϵ 表示 H的一个选定半空间，其中 $\epsilon \in \{+, -\}$。

定义 2.3。令 $f\colon Y \to X$ 为非正曲率立方复形之间的一个组合映射。若对于 Y 中的每个 0-立方体 y，所诱导的链接映射 $\mathrm{lk}(y) \to \mathrm{lk}(f(y))$ 都是一个嵌入，且其像是满的（单纯复形 B 的子复形 A 若其中每个顶点都属于 A 的单形 B 完全包含于 A，则称其为 满的），则称 f 为一个局部等距映射。

设 $f\colon Y \to X$ 是连通非正曲率立方复形之间的局部等距，则万有覆盖之间的映射 $\tilde{f}\colon \tilde{Y} \to \tilde{X}$ 是一个等距嵌入，并且 $\tilde{f}(\tilde{Y})$ 是 $\tilde{X}$ 的凸子复形。此外，f 是 π_1-单射的。参见 [HW08，引理 2。11]关于完备非正曲率度量空间的一般讨论，参见 [BH99]。

定义 2.4。设 $f : Y \to X$ 是连通非正曲率立方复形之间的局部等距。我们称 f 表示 子群 $\pi_1 Y \cong f_*(\pi_1 Y) \leq \pi_1 X$（的共轭类）。

2.2。**组合距离和平移长度**。

定义 2.5。设 p、q 是 CAT(0)立方复形 X的两个顶点。从 p到 q的 X组合路径，是 X的顶点序列 $\gamma = (p = v_0, v_1, \ldots\ldots, v_n = q)$，使得对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，$v_{i-1} = v_i$ 或 v_{i-1}、v_i 是 X的一条边的端点。γ 的长度为 n。两个顶点 p、q的组合距离 $d(p, q)$，是从 p到 q的组合路径的最小长度 n。p、q之间的组合测地线，是从 p到 q且长度为 $d(p, q)$的组合路径。子复形 $Y \subset X$称为凸的，如果对于任意一对顶点 p、q，连接 p、q的每条组合测地线都包含于 Y中。集合 $S \subset X$ 的凸包 $\mathrm{Hull}(S)$，是包含 S的 X 中最小的凸子复形。

我们回顾 [Sag95] 中关于组合测地线的以下事实。

引理 2.6。设 X 是一个 $\mathrm{CAT}(0)$ 立方复形。当且仅当组合路径 X 穿过彼此不同的超平面时，它是测地线。立方复形 X 中两个顶点 p、q 之间的组合距离，是分隔 p 与 q的超平面数目。

我们回顾 [Hag23] 中的以下内容。

定义 2.7。设 X 是一个 CAT(0) 立方复形。X 的自同构 ϕ 是 X的等距映射，它将每个整数 $n \geq 0$对应的 n-立方体映射为一个 n-立方体。ϕ的 CAT(0) 平移长度 定义为 $\delta(\phi) = \inf_{x \in \tilde{X}} d(x, \phi(x))$。$\phi$ 的组合平移长度定义为 $|\phi| = \inf_{v \in V(\tilde{X})} d(v, \phi(v))$，其中 $V(X)$表示 X的顶点集合。

注记 2.8. 根据定义可知 $|\phi| \geq \delta(\phi)$。设 X 是一个紧致非正曲率立方复形。那么 $\pi_1 X$ 通过等距变换在其万有覆盖上 X 的 X作用是适当且余紧的，并且 $\pi_1 X$ 的每个元素都是半单等距变换（见 [BH99，II，第 6 号命题。10]）。由于 $\pi_1 X$ 是无挠的，每个非平凡元素 $\phi \in \pi_1 X$ 都是双曲等距变换。特别地，$|\phi| \geq \delta(\phi) > 0$。

2.3. **特殊立方复形**。我们回顾以下来自 [HW08] 和 [HW12]的内容。

定义 2.9. 若一个非正曲率立方复形 X 满足特殊，则其每个浸入超平面都是嵌入的、双侧的且不自相切，并且任意两个超平面都不相互相切。若它存在一个特殊的有限层覆盖空间，则称其虚拟特殊。如果一个群是某个紧致特殊立方复形的基本群，则称该群为特殊。

设 $f\colon A \to X$ 是紧致特殊立方复形之间的局部等距。Haglund–Wise [HW08，命题 6.5]，给出的典范完备与收缩构造，产生一个有限层覆盖映射 $p\colon C(A, X) \to X$，以及一个嵌入 $j\colon A \hookrightarrow C(A, X)$ 和一个胞腔映射 $r\colon C(A, X) \to A$，使得 $f = pj$ 且 $1_A = rj$。另见 [HW12，定义 3.4]，其中通过纤维积给出了构造。Shepherd [She23，构造 3.1] 还将其解释为行者与模仿者构造。

2.4. **提升**。我们回顾以下内容，摘自 [HW12]。

定义 2.10。设 $f\colon Y \to X$ 是连通非正曲率立方复形之间的局部等距，且设 $p\colon \hat{X} \to X$ 是一个覆盖映射。纤维积 $Y \otimes_X \hat{X}$ 定义为

$$Y \otimes_X \hat{X} = \{(a, b) \in Y \times \hat{X} \mid f(a) = p(b)\}.$$

从 Y 到 X 的提升 $\hat{Y}$ 是 $Y \otimes_X \hat{X}$ 的一个连通分支。特别地，我们有如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \hat{Y} & \xrightarrow{p_{\hat{X}}} & \hat{X} \\ {\scriptstyle p_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow[f]{} & X \end{array}$$

当 $f\colon (Y,y)\to(X,x)$ 且 $\pi\colon (\hat{X},\hat{x})\to(X,x)$ 是基点映射，并且 $f(y)=x=p(\hat{x})$ 时，从 Y 到 X 的提升 $\hat{f}$ 基点是 $Y\otimes_X\hat{X}$ 中包含基点 $(y,\hat{x})$ 的连通分支。

注 2.11. 将 $\pi_1 Y$ 和 $\pi_1 X$ 分别视为 $f_*(\pi_1 X)$ 和 $p_*(\pi_1 X)$ 的子群。

于是，Y 到 X 的提升与双陪集 $\pi_1 X\backslash\pi_1 X/\pi_1 Y$ 之间存在一一对应关系（见 [SW79，引理 3.12] 或 [Wil08，引理 2.6]）。特别地，当 X 是 X 的正则覆盖时，提升与陪集 $\pi_1 X/(\pi_1 X\pi_1 Y)$ 相对应。假设基点提升 Y 嵌入 X。由于 $\hat{X}$ 是正则的，所有提升都嵌入 X。将基点提升视为子复形 $Y\subset X$ 后，其他提升具有如下形式：gY，其中 $g\in\pi_1 X$。那么，在 $\pi_1 X$ 对 X 的作用下，提升 $g\tilde{Y}$ 的稳定子为 $\mathrm{Stab}(g\tilde{Y})=\pi_1\hat{X}\cdot g\pi_1 Y g^{-1}$。

3. Projection

我们回顾以下内容，取自 [HW08，附录 B]。

定义 3.1. 设 X 是一个 CAT(0)立方复形，且 $Y\subset X$ 是一个凸子复形。从 $\tilde{X}$ 到 $\tilde{Y}$的投影是组合映射 $\Pi_{\tilde{Y}}\colon \tilde{X}\to\tilde{Y}$，它将每个顶点 $x\in\tilde{X}^0$ 映到 $\tilde{Y}^0$中距离最近的唯一顶点。

设 X 是一个紧致非正曲率立方复形。若子群 H、$K\le\pi_1 X$ 余紧地作用于凸子复形 A、B，分别属于 X，则 $H\cap K$ 余紧地作用于凸子复形 $\Pi_{\tilde{A}}B$ [Fio23，引理 2。8]这表明，投影$\Pi_{\tilde{A}}B$起到了交集的类似作用，尽管 $A\cap B$ 可能为空。因此，为简洁起见，我们将 $\Pi_{\tilde{A}}B$ 记作 $A\pitchfork B$。请注意，这种记号并不对称，因为 $A\pitchfork B\subset A$，而 $B\pitchfork A\subset B$。

下面的定理表明，存在一个等距映射 $A\pitchfork B\cong B\pitchfork A$，它在凸子复形之间诱导出桥结构。证明见 [Hag19，定理 1。22]（另见 [CFI16，引理 2。18] 以及 [She23，定理 5。2]）。

定理 3.2 (桥定理)。设 X 是一个 $\mathrm{CAT}(0)$ 立方复形，且 A、$B\subset X$ 是凸子复形。则有以下结论：

(1) 超平面 H 与 $A\pitchfork B$ 相交，当且仅当 H 同时与 A 和 B相交。超平面 H 分隔 $A\pitchfork B$与 $B\pitchfork A$，当且仅当 H分隔 A与 B。

(2) $\cup(B\pitchfork A)$ 的凸包是一个与 $C\times(A\pitchfork B)$同构的凸子复形，其中 C 是顶点 $a\in A\pitchfork B$ 和 $b\in B\pitchfork A$的凸包。特别地，$A\pitchfork B$ 和 $B\pitchfork A$ 是等距的。

推论 3.3. 设 A、B、C 是 $\mathrm{CAT}(0)$ 立方复形 X 的凸子复形，则

(1) $(A\pitchfork B)\pitchfork C=A\pitchfork(B\pitchfork C)$;

(2) $(A\pitchfork B)\cap(A\pitchfork C)\subset A\pitchfork(B\pitchfork C)$。

证明。对于 (1)，只需证明 $\Pi_{\tilde{A}\pitchfork\tilde{B}}=\Pi_{\tilde{A}}\circ\Pi_{\tilde{B}}$。对于每个顶点 $x\in X$，注意到 $\Pi_{\tilde{A}\pitchfork\tilde{B}}(x)$ 和 $\Pi_{\tilde{A}}\circ\Pi_{\tilde{B}}(a)\in\Pi_{\tilde{A}}(B)=A\pitchfork B$ 都是 $A\pitchfork B$ 中的元素。因此，我们只需证明它们没有被任何与 $A\pitchfork B$ 相交的超平面 H 分隔。

设 H 是一个与 $A\pitchfork B$ 相交的超平面。那么它不会将 x 与 $A\pitchfork B$ 分隔开。因此，根据桥定理 3.2，x 和它的投影 $\Pi_{\tilde{A}\pitchfork\tilde{B}}(x)$ 位于 H 的同一个半空间中。此外，由于 H 与 $A\pitchfork B$ 相交，它也与 A 和 B 都相交。因此，它不会将 x 与 $\Pi_{\tilde{B}}(x)$ 分隔开，也不会将 $\Pi_{\tilde{B}}(x)$ 与 $\Pi_{\tilde{A}}(\Pi_{\tilde{B}}(x))$ 分隔开。由此可知，对于任何与 $A\pitchfork B$ 相交的超平面 H，三个点 x、$\Pi_{\tilde{A}\pitchfork\tilde{B}}(x)$ 和 $\Pi_{\tilde{A}}(\Pi_{\tilde{B}}(x))$ 都位于 H 的同一个半空间中。这表明，对于任意顶点 x，$\Pi_{\tilde{A}\pitchfork\tilde{B}}(x)=\Pi_{\tilde{A}}\circ\Pi_{\tilde{B}}(x)$，如所需。

现在，我们证明 (2)。注意，若 $(A\pitchfork B)\cap(A\pitchfork C)$ 为空，则包含映射平凡成立。假设存在一个顶点 $a\in(A\pitchfork B)\cap(A\pitchfork C)$。令 $c=\Pi_{\tilde{C}}(a)\in C\pitchfork A$和 $b=\Pi_{\tilde{B}}(c)\in B\pitchfork C$。要证明 $a\in A\pitchfork(B\pitchfork C)$，只需证明 $a=\Pi_{\tilde{A}}(b)$，也就是说，a和 $\Pi_{\tilde{A}}(b)$ 不被任何穿过 A的超平面分隔。

对于每个穿过 A的超平面 H，若 H 不穿过 B，则 H 不会将 $A\pitchfork B$ 与 B 分隔，因此也不会将 a 与 b 分隔。若 H 穿过 B，则分两种情况：

- 如果 H 不与 C相交，那么 H 不会将 $a\in A\pitchfork C$ 与 C分隔开，也不会将 $b\in B\pitchfork C$与 C 分隔开。因此，a,b,C位于 H的同一半空间内。
- 如果 H 与 C相交，那么 H 不会将 a 与其到 C的投影 $c=\Pi_{\tilde{C}}(a)$ 分隔开。同样，由于 H与 B相交，它不会将 b，c 分隔开。因此，a，b，c位于 H的同一半空间内。

以上说明 H 不会将 a，b分隔开。此外，由于 H 与 A相交，它不会将 b与 $\Pi_{\tilde{A}}(b)$分隔开。这表明，对于每个与 A相交的超平面 H，a，$\Pi_{\tilde{A}}(b)$都位于 H 的同一半空间内。□

注 3.4. 推论3.3(1) 也可由 [Bow24，引理 7.3 得出。3], 该引理讨论了中位代数背景下的投影。

注意，推论 3.3(1) 表明运算 $\pitchfork$ 具有结合性。因此，为简洁起见，我们将 $(\tilde{A} \pitchfork \tilde{B}) \pitchfork \tilde{C} = \tilde{A} \pitchfork \tilde{B} \pitchfork \tilde{C}$ 简记为 $\tilde{A} \pitchfork (\tilde{B} \pitchfork \tilde{C})$。更一般地，对于凸子复形的序列 $A_1, \ldots, A_n$，我们记为

$$\pitchfork_{i=1}^{n} \tilde{A}_i = \tilde{A}_1 \pitchfork \tilde{A}_2 \pitchfork \cdots \pitchfork \tilde{A}_n = \tilde{A}_1 \pitchfork (\tilde{A}_2 \pitchfork (\cdots (\pitchfork \tilde{A}_{n-1} \pitchfork \tilde{A}_n) \cdots)),$$

它是 A_1 的一个凸子复形。

注 3.5. 设 $A \to X$ 和 $B \to X$ 是连通非正曲率立方复形之间的局部等距映射。记 $\pi_1 A^{g_1^{-1}}$ 和 $\pi_1 B^{g_2^{-1}}$ 为当 $g_1, g_2 \in \pi_1 X$ 时，共轭子群 $g_1 \cdot \pi_1 A \cdot g_1^{-1}$ 和 $g_2 \cdot \pi_1 B \cdot g_2^{-1}$。那么，子群 $\pi_1 A^{g_1^{-1}} \cap \pi_1 B^{g_2^{-1}}$ 由局部等距映射 $(g_1\tilde{A} \pitchfork g_2\tilde{B})/\pi_1 A^{g_1^{-1}} \cap \pi_1 B^{g_2^{-1}} \to X$ 表示。

更确切地说，设 A 和 B 是 A、B 到万有覆盖 X 的带基点提升。根据注 2.11，A 和 B 到 X 的提升具有 $g_1 A$ 和 $g_2 B$ 的形式，其中 g_1、$g_2 \in \pi_1 X$ 的稳定子分别为 $\mathrm{Stab}(g_1 A) = \pi_1 A^{g_1^{-1}}$ 和 $\mathrm{Stab}(g_2 B) = \pi_1 B^{g_2^{-1}}$。因此，$\pi_1 A^{g_1^{-1}} \cap \pi_1 B^{g_2^{-1}}$ 在投影 $g_1\tilde{A} \pitchfork g_2\tilde{B}$上余紧地作用。$g_1 A \pitchfork g_2 B \hookrightarrow X$ 的嵌入进而诱导一个局部等距映射

$$g_1\tilde{A} \pitchfork g_2\tilde{B}/\pi_1 A^{g_1^{-1}} \cap \pi_1 B^{g_2^{-1}} \to \tilde{X}/\pi_1 X = X$$

其诱导的基本群映射的像为 $\pi_1 A^{g_1^{-1}} \cap \pi_1 B^{g_2^{-1}}$。

更一般地，给定有限多个局部等距映射 A_1，……，$A_n \to X$，它们的定义域是连通的非正曲率立方复形。设 A_i 是 A 到 X的基点提升。那么，对于 g_1，……，$g_n \in \pi_1 X$，子群$\pi_1 A_1^{g_1^{-1}} \cap \cdots \cap \pi_1 A_n^{g_n^{-1}}$ 由局部等距映射表示

$$\pitchfork_{i=1}^{n} g_i A_i/\pi_1 A_1^{g_1^{-1}} \cap \cdots \cap \pi_1 A_n^{g_n^{-1}} \to X.$$

以下结论证明见 [She25，命题 3。11]。

引理 3.6。设 A, B 是特殊立方复形 X 的连通局部凸子复形。设 A, B 分别是 A, B 到万有覆盖 X 的带基点提升。对任意 $g_1, g_2 \in \pi_1 X$，有

$$\mathrm{Stab}(g_1\tilde{A}) \cap \mathrm{Stab}(g_2\tilde{B}) = \mathrm{Stab}(g_1\tilde{A} \pitchfork g_2\tilde{B})$$

及复形 $(g_1 A \pitchfork g_2 B)$/稳定子$(g_1 A \pitchfork g_2 B)$ 嵌入到 X 中。

注 3.7。 [She25，命题 3。11] 只要求 X 是弱特殊的，即没有超平面自相交或自相切。有关特殊性的不同概念，参见 [She25，定义 2。12] 。

推论 3.8。设 $A_1, \cdots, A_n \to X$ 是连通紧致虚拟特殊立方复形之间的局部等距映射。对每个 i，设 A_i 是 A_i 到 X 的基点提升。则有以下结论：

(1) 存在一个常数 S，它取决于局部等距映射 A_1、$\cdots$、$A_n \to X$，使得对于任意整数 $m > 0$ 以及元素 g_1、……、$g_m \in \pi_1 X$，都有

$$\mathrm{diam}\left(\pitchfork_{i=1}^{m} g_i\tilde{A}_{n_i}/\cap_{i=1}^{m} \pi_1 A_{n_i}^{g_i^{-1}}\right) \le S,$$

其中，A_{n_i} 是 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ 中的元素（不一定彼此不同）。*(2)* 在 $\pi_1 X$-共轭子群 $\pi_1 A_1$、……、$\pi_1 A_n$ 的所有有限交集中，只有有限多个 $\pi_1 X$-共轭类。

证明。我们首先取 X 的一个有限层特殊覆盖 X，使得 A_i 到 X 的所有提升都嵌入。为此，我们先取 X 的一个紧致特殊覆盖 X，并令 A_i 为对每个~~i~~，A_i 到 X 的基点提升。然后取局部等距映射 $A_i \to X$ 的规范完备化 $C(A_i, X)$。最后，选择一个紧致正规覆盖 X 的 X，记为 —— ——，使其经过每个 $C(A_i, X)$，并令 A_i 为 A_i 到 X 的基点提升，它同时也是 A_i 的基点提升。由于 A_i 嵌入 $C(A_i, X)$ 中，A_i 嵌入 X 中。由 X 的正规性，对于 $g \in \pi_1 X$，A_i 到 X 的每个提升 gA_i 都嵌入 X 中。

现在我们通过对 m 使用归纳法，证明 $\left(\pitchfork_{i=1}^{m} g_i\tilde{A}_{n_i}\right)/\left(\cap_{i=1}^{m} \pi_1 \widehat{A}_{n_i}^{g_i^{-1}}\right)$ 嵌入 $\widehat{X}$。当 $m = 1$ 时，该结论成立，因为每个 $g\tilde{A}_i/\pi_1 \widehat{A}_i^{g^{-1}}$ 都是将 $g\widehat{A}_i$ 从 A_i 提升至 $\widehat{X}$ 所得，因此根据

我们的构造。假设该结论对 $m-1$ 成立。那么对于任意 g_1、……、$g_m \in \pi_1 X$ 以及（不一定互不相同的）复形 A_{n_1}、……、A_{n_m}，$g_1\tilde{A}_{n_1}/\pi_1\widehat{A}_{n_1}^{g_1^{-1}}$ 和 $\left(\pitchfork_{i=2}^m g_i\tilde{A}_{n_i}\right)/\left(\cap_{i=2}^m\pi_1\widehat{A}_{n_i}^{g_i^{-1}}\right)$ 都嵌入 X。注意，它们到 X 的带基点提升分别为 $g_1A_{n_1}$ 和 $\pitchfork_{i=2}^m g_iA_{n_i}$。因此，由引理3.6，复形

$$g_1\tilde{A}_{n_1}\pitchfork\left(\pitchfork_{i=2}^m g_i\tilde{A}_{n_i}\right)/\pi_1\widehat{A}_{nm}^{g_m^{-1}}\cap\left(\cap_{i=1}^m\pi_1\widehat{A}_{ni}^{g_i^{-1}}\right)=\left(\pitchfork_{i=1}^m g_i\tilde{A}_{n_i}\right)/\left(\cap_{i=1}^m\pi_1\widehat{A}_{ni}^{g_i^{-1}}\right)$$

也嵌入到 X 中。这就完成了归纳法。

为证明 (1)，令 $S=\mathrm{diam}(X)$。由上可知

$$\mathrm{diam}\left(\pitchfork_{i=1}^m g_i\tilde{A}_{n_i}/\cap_{i=1}^m\pi_1\widehat{A}_{n_i}^{g_i^{-1}}\right)\leq\mathrm{diam}(\widehat{X})=S.$$

由于对于每个 i，π_1A_i 都是 π_1A_i 的子群，因此存在覆盖映射

$$\pitchfork_{i=1}^m g_i\tilde{A}_{n_i}/\cap_{i=1}^m\pi_1\widehat{A}_{ni}^{g_i^{-1}}\twoheadrightarrow\pitchfork_{i=1}^m g_i\tilde{A}_{n_i}/\cap_{i=1}^m\pi_1A_{ni}^{g_i^{-1}}.$$

特别地，对于任意整数 $m>0$ 及元素 $g_1,\ldots,g_m\in\pi_1X$，我们有

$$\mathrm{diam}\left(\pitchfork_{i=1}^m g_i\tilde{A}_{n_i}/\cap_{i=1}^m\pi_1A_{ni}^{g_i^{-1}}\right)\leq\mathrm{diam}\left(\pitchfork_{i=1}^m g_i\tilde{A}_{n_i}/\cap_{i=1}^m\pi_1\widehat{A}_{ni}^{g_i^{-1}}\right)\leq S.$$

对于 (2)，根据注记 3.5，每个有限交集 $\cap_{i=1}^m\pi_1A_{ni}^{g_i^{-1}}$ 都由局部等距映射表示 $\left(\pitchfork_{i=1}^m g_i\tilde{A}_{n_i}\right)/\left(\cap_{i=1}^m\pi_1A_{ni}^{g_i^{-1}}\right)\to X$。由于 $\left(\pitchfork_{i=1}^m g_i\tilde{A}_{n_i}\right)/\left(\cap_{i=1}^m\pi_1A_{ni}^{g_i^{-1}}\right)$ 的直径一致有界，这类复形只有有限个同构类。由于 X 是紧致的，每个同构类都只允许有限个到 X的局部等距映射。因此，这些有限个复形同构类只允许有限个到 X的局部等距映射，它们诱导出有限个π_1X-共轭类，其成员是形如 $\cap_{i=1}^m\pi_1A_{ni}^{g_i^{-1}}$ 的子群。这就完成了 (2) 的证明。□

注记 3.9。推论 3.8 如果去掉虚拟特殊性的假设，结论可能不成立。例如，Wise 构造了一个 VH-复形 X，见 [Wis96，第二部分，2。1] 该复形不是虚拟特殊的。这个 VH-复形X 具有图的图结构，并且存在一个局部等距映射 $X_e\to X$ 从边空间 X_e 到 X。如 [Wis96，第二部分，推论 3.4b], 所示，存在一个元素 $t\in\pi_1X$ 使得子群$\left\{\cap_{i=0}^n\pi_1X_e^{t^i}\right\}_{n\geq0}$ 是秩各不相同的自由群，因此代表了 π_1X的无限多个子群共轭类。

我们以以下相关结果结束本节，该结果将在引理 4.7的证明中用到。

引理 3.10。设 $A\to X$ 是连通紧致非正曲率立方复形之间的局部等距映射。那么，π_1X 的子群 π_1A 不与 π_1A的任何真子群共轭。

证明。令 A 为 A 到万有覆盖 X的基点提升。由于 π_1A 在 A上余紧地作用，它在一个最小的 π_1A-不变凸子复形 $C\subset A$ [HJP16，引理 37]上余紧地作用。因此，对于任意 $g\in\pi_1X$，$g\tilde{C}\subset g\tilde{A}$ 都是一个最小的 $\pi_1A^{g^{-1}}$-不变凸子复形。

假设 $\pi_1A^{g^{-1}}$ 是某个 $g\in\pi_1X$的 π_1A 子群。那么 $\pi_1A^{g^{-1}}=\pi_1A\cap\pi_1A^{g^{-1}}$ 在两个投影 $C\pitchfork gC$ 和 $gC\pitchfork C$上余紧地作用。对于第一个投影 $C\pitchfork gC$，包含映射 $C\pitchfork gC\hookrightarrow C$ 诱导一个局部等距

$$f:\tilde{C}\pitchfork g\tilde{C}/\pi_1A\cap\pi_1A^{g^{-1}}\to\tilde{C}/\pi_1A,$$

它通过覆盖映射 $p\colon\tilde{C}/\pi_1A\cap\pi_1A^{g^{-1}}\to\tilde{C}/\pi_1A$ 分解。因此，我们得到以下交换图。

$$\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{C}/\pi_1A\cap\pi_1A^{g^{-1}} \\
 & \overset{i}{\nearrow} & \downarrow p \\
\tilde{C}\pitchfork g\tilde{C}/\pi_1A\cap\pi_1A^{g^{-1}} & \xrightarrow[f]{} & \tilde{C}/\pi_1A
\end{array}$$

对于第二个投影 $gC\pitchfork C$，由于它是 gC的一个凸子复形，gC 作为 $\pi_1A^{g^{-1}}$-不变凸子复形的极小性迫使 $g\tilde{C}=g\tilde{C}\pitchfork\tilde{C}$。因此，$g\tilde{C}\pitchfork\tilde{C}/\pi_1A\cap\pi_1A^{g^{-1}}=g\tilde{C}/\pi_1A^{g^{-1}}$。桥定理 3.2 以及同构 $\tilde{C}/\pi_1A\cong g\tilde{C}/\pi_1A^{g^{-1}}$ 于是给出

$$\tilde{C}\pitchfork g\tilde{C}/\pi_1A\cap\pi_1A^{g^{-1}}\cong g\tilde{C}\pitchfork\tilde{C}/\pi_1A\cap\pi_1A^{g^{-1}}=g\tilde{C}/\pi_1A^{g^{-1}}\cong\tilde{C}/\pi_1A.$$

这意味着 f 是同构的紧致非正曲率立方复形之间的局部等距。因此， f 必定是一个同构 [Wis04，引理 6。3]。因此，在上面的交换图中，复合 $p\circ i\circ f^{-1}=1$ 是 $\tilde{C}/\pi_1 A$的恒等映射。特别地， p 是 π_1-满射，并且$\pi_1 A=\pi_1 A\cap\pi_1 A^{g^{-1}}$。这证明子群 $\pi_1 A^{g^{-1}}\leq\pi_1 A$ 不可能是真子群。□

4. 身量

4.1. **立方复形图**。 本节回顾与群图相关的概念。参见[Ser80]或 [SW79]。

定义 4.1. 设 Γ 是一个图，其顶点为 $V(\Gamma)$，边为 $E(\Gamma)$。定义在 Γ上的非正曲率立方复形图 X_Γ 由以下部分组成:

- 每个顶点 $v\in V(\Gamma)$对应一个顶点空间 X_v ，它是一个连通非正曲率立方复形;
- 每条边 $e\in E(\Gamma)$对应一个边空间 X_e ，它是一个连通非正曲率立方复形;
- 粘接映射 φ_e^-:$X_e\to X_{\iota(e)}$ 和 φ_e^+: $X_e\to X_{\tau(e)}$，对于每条边e 及其两个端点 $\iota(e)$ $\tau(e)$，它们都是局部等距映射。

X_Γ 的全空间 定义为商空间

$$\left(\bigsqcup_{v\in V(\Gamma)}X_v\right)\sqcup\left(\bigsqcup_{e\in E(\Gamma)}X_e\times I\right)/\sim$$

其中 $X_e\times\{0\}\sim\varphi_e^-(X_e)$ 且 $X_e\times\{1\}\sim\varphi_e^+(X_e)$。如果立方复形 X 是非正曲率立方复形图的全空间，则称其分解为非正曲率立方复形图 。

注记 4.2。 注意，当边 e 的两个端点 $\iota(e)$ 和 $\tau(e)$ 重合时，粘接映射 φ_e^-和 φ_e^+对应于同一个边空间 X_e 和同一个顶点空间 $X_{\iota(e)}=X_{\tau(e)}$。 当底层图 Γ 是单纯图时，不会出现这个问题。对于一般的非正曲率立方复形图，我们可以通过细分每条环边，使底层图成为单纯图。在本文余下部分，我们假设非正曲率立方复形图 X_Γ 定义在一个单纯图上。

一个非正曲率立方复形图 X_Γ 关联着一个群图 G_Γ ，其中每个顶点 $v\in V(\Gamma)$ 和每条边 $e\in E(\Gamma)$ 分别对应一个顶点群 π_1X_v 和一个边群 π_1X_e 。粘接映射 φ_e^-和 φ_e^+分别为每条边 $e\in E(\Gamma)$诱导包含映射 $(\varphi_e^-)_*:\ \pi_1X_e\hookrightarrow\pi_1X_{\iota(e)}$ 和 $(\varphi_e^+)_*:\ \pi_1X_e\hookrightarrow\pi_1X_{\tau(e)}$ 。

假设 X 分解为一个非正曲率立方复形图 X_Γ。那么，万有覆盖 $\tilde{X}$ 是由 X_v 和 $X_e\times I$ 的多个副本组成的并集，每个顶点 $v\in V(\Gamma)$ 和每条边 $e\in E(\Gamma)$各对应一个副本，其中 X_v、 X_e 分别是顶点空间 X_v 和边空间 X_e的万有覆盖。与 X_Γ 关联的 Bass–Serre 树 $\mathcal{T}$由 X 得到：将 X_v 的每个副本识别为一个点，并将 $X_e\times I$ 的每个副本识别为 I的一个副本。π_1X 在 X 上的作用由此诱导出在 $\mathcal{T}$上的作用。对于每个顶点 $\tilde{v}$ 和每条边 $\tilde{e}$，其稳定子 Stab($\tilde{v}$) 和 Stab($\tilde{e}$)分别是 π_1X中 π_1X_v 和 π_1X_e 的共轭子群。一般而言，令 Stab 表示 π_1X 在 $\mathcal{T}$上的作用的逐点稳定子。对于每条有限路径 $\rho\subset\mathcal{T}$，群 Stab(ρ)在以下意义下由一个局部等距表示。

引理 *4.3.* 假设 X 是一个立方复形，它分解为由非正曲率立方复形构成的图X_Γ，其关联的 *Bass–Serre* 树为 $\mathcal{T}$。设 $\tilde{v}$ 是顶点 $v\in V(\Gamma)$ 在 $\mathcal{T}$中的一个提升，且满足 *Stab*($\tilde{v}$) $=\pi_1X_v$。那么，对于每条从 $\tilde{v}$出发的有限路径 $\rho\subset\mathcal{T}$，子群 *Stab*(ρ) 都余紧地作用在一个凸子复形 $Y\subset X_v$ 上，并由局部等距映射 $Y/$*Stab*(ρ) $\to X_v$表示。

证明。 从 Bass–Serre 树中的 $\rho(0)=\tilde{v}$ 出发的路径 $\rho:\ [0,n]\to\mathcal{T}$，对应于万有覆盖 $\tilde{X}$ 中的一个子空间，其定义如下:

$$\left(\bigsqcup_{i=0}^{n}\tilde{X}_i\right)\sqcup\left(\bigsqcup_{j=1}^{n}\tilde{Y}_i\times[0,1]\right)/\sim,$$

其中 $X_0=X_v$， X_1、……、 X_n和 Y_1、……、 Y_n是（不一定互不相同的）顶点空间和边空间。对于每个 i, $\tilde{Y}_i\times\{0\}$ 都附着在 Y_i到 $\tilde{X}_{i-1}$的提升 $\tilde{Y}_i^0\subset\tilde{X}_{i-1}$上，而 $\tilde{Y}_i\times\{1\}$ 附着在 Y_i 到 $\tilde{X}_i$的提升 $\tilde{Y}_i^1\subset\tilde{X}_i$ 上。特别地，由于每个 $\tilde{Y}_i\times I$ 都会分隔其他边空间，因此我们有

$$\tilde{Y}_1^0\pitchfork\tilde{Y}_n^0=\tilde{Y}_1^0\pitchfork\tilde{Y}_2^0\pitchfork\cdots\pitchfork\tilde{Y}_n^0.$$

˜分别考虑 $\pi_1 X$ 在 $\mathcal{T}$和 X 上的作用，可得

$$\mathrm{Stab}(\rho(i)) = \mathrm{Stab}(\tilde{X}_i), \quad \mathrm{Stab}(\rho[i-1,i]) = \mathrm{Stab}(\tilde{Y}_i \times I) = \mathrm{Stab}(\tilde{Y}_i^0) = \mathrm{Stab}(\tilde{Y}_i^1).$$

Then

$$\$\mathrm{tab}(\rho) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Stab}(\rho[i-1,i]) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Stab}(\tilde{Y}_i \times I) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Stab}(\tilde{Y}_i^0).$$

由于每个稳定子$(\tilde{Y}_i^0)$ 在 $\tilde{Y}_i^0$ 上余紧地作用，逐点稳定子 $\mathrm{Stab}(\rho)$ 在投影上余紧地作用

$$\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0 = \tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_2^0 \pitchfork \cdots \pitchfork \tilde{Y}_n^0.$$

于是，根据注记 3.5，子群 $\mathrm{Stab}(\rho) \trianglelefteq$稳定子$(\tilde{v})$ 可由局部等距表示 ry

$$\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0 / \$\mathrm{tab}(\rho) \to \tilde{X}_0 / \mathrm{Stab}(X_0) \cong X_0 = X_v.$$

这就证明了关于 $\tilde{Y} = \tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0$ 的陈述。 □

推论 *4.4*。设 X 是一个立方复形，它分解为一个由非正曲率立方复形组成的图X_Γ，其关联的 *Bass–Serre* 树为 $\mathcal{T}$。设 $\tilde{v}$ 是顶点 $v \in V$ （Γ）在 $\mathcal{T}$ 中的一个提升，且满足稳定子 $(\tilde{v}) = \pi_1 X_v$。那么，对于每个包含 $\tilde{v}$ 的有限子树 $T \subset \mathcal{T}$，子群稳定子(T) 可由局部˜ ˜ ˜等距映射 $\tilde{Y}/$稳定子$(T) \to X_v$ 表示，其中某个凸子复形为 $Y \vdash X_v$。

证明。有限子树 T 是从 $\tilde{v}$ 出发的有限条路径 ρ_1、……、 ρ_n 的并。因此，逐点稳定子是有限交集 $\mathrm{Stab}(T) = \cap_{i=1}^n \mathrm{Stab}(\rho_i)$。根据引理 4.3，每个逐点稳定子˜$\mathrm{Stab}(\rho_i)$ 都由局部等距 $Y_i/\mathrm{Stab}(\rho_i) \to X_v$ 表示，其中 $\mathrm{Stab}(\rho_i)$ 余紧地作用于该凸子复形 $Y_i \subset X_v$˜ ˜。因此，交集 $\mathrm{Stab}(T) = \cap_{i=1}^n \mathrm{Stab}(\rho_i)$ 余紧地作用于投影

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 \pitchfork \tilde{Y}_2 \pitchfork \ldots \pitchfork \tilde{Y}_n.$$

˜ ˜等距嵌入 $Y \hookrightarrow X_v$ 随即诱导出一个局部等距

$$\tilde{Y} / \$\mathrm{tab}(T) \to \tilde{X}_v / \pi_1 X_v = X_v,$$

它表示子群 $\mathrm{Stab}(T) \leq \pi_1 X_v$。 □

4.2. **有限身量**。我们回顾以下来自 [HW19] 的概念。

定义 4.5。设 G 是一个群，且 $\Omega = \{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 G的一个子群集合。若对于每个 $H \in \Omega$，形如 $H \cap C$的无限子群只有有限个 H-共轭类，其中 C 是 Ω 中元素的 G-共轭子群的交集，则称G 相对于 Ω 具有有限 *stature*。

设立方复形 X 分解为非正曲率立方复形的群图 X_Γ。其基本群 $\pi_1 X$ 于是分解为群图。我们尤其关注 $\pi_1 X$ 相对于顶点群 $\{\pi_1 X_v \mid v \in V(\Gamma)\}$的有限 stature。以下定理由 Huang 和 Wise 提出 [HW24，定理 1。4]，表明在这一情形下，有限 stature 与虚拟特殊性相关。

定理 4.6。设 X 是一个紧致立方复形，它分解为非正曲率立方复形的群图。假设每个顶点群都是双曲的。则以下条件等价。

(1) $\pi_1 X$ 相对于顶点群具有有限 *stature*。*(2)* X 是虚拟特殊的。

回想一下，对于每个顶点群 $\pi_1 X_v$，其共轭子群 $\pi_1 X_v^g$ 在 $\pi_1 X$ 中对应于关联的 Bass–Serre 树 $\mathcal{T}$ 中某个顶点 $\tilde{v}$ 的稳定子。因此，定义 $H \cap C$ 中的交集 4.5 对应于某个（可能是无限）子树 $\mathrm{Stab}(T)$ 的逐点稳定子 $T \subset \mathcal{T}$。因此，要证明有限 stature，只需考虑子树的逐点稳定子（见 [HW19，引理 3。9]）。以下结果表明，只需关注有限路径的逐点稳定子即可。

引理 4.7。设 X 是一个紧立方复形，它分解为虚拟特殊立方复形图。设 $\mathcal{T}$是关联的 *Bass–Serre* 树。则以下条件等价。

(1) $\pi_1 X$ 相对于顶点群具有有限身量。*(2)* 对于每个顶点 $v \in V(\Gamma)$，形如 $\pi_1 X_v \cap (\cap_{e \in \mathcal{E}}$ *Stab(e))* 的无限子群只有有限个 $\pi_1 X_v$-共轭类，其中 $\mathcal{E} \subset E(\mathcal{T})$。*(3)* 对于每个顶点 $v \in V(\Gamma)$ 以及满足 *Stab*$(\tilde{v}) = \pi_1 X_v$ 的提升 $\tilde{v} \in V(\mathcal{T})$，形如 *Stab(T)* 的无限子群只有有限个$\pi_1 X_v$-共轭类，其中 $T \subset \mathcal{T}$ 是包含 $\tilde{v}$的子树。

(4) 对于每个顶点 $v \in V(\Gamma)$ 以及满足 $Stab(\tilde{v}) = \pi_1 X_v$ 的提升 $\tilde{v} \in V(\mathcal{T})$，形如 $Stab(T)$ 的无限子群只有有限个$\pi_1 X_v$-共轭类，其中 $T \subset \mathcal{T}$ 是包含 $\tilde{v}$的有限子树。*(5)* 对于每个顶点 $v \in V(\Gamma)$ 以及满足 $Stab(\tilde{v}) = \pi_1 X_v$ 的提升 $\tilde{v} \in V(\mathcal{T})$，形如 $Stab(\rho)$ 的无限子群只有有限个$\pi_1 X_v$-共轭类，其中 ρ是从 $\tilde{v}$出发、位于 $\mathcal{T}$中的有限路径。

证明。 (1) 与 (2) 的等价性已在 [HW19，引理 3 中证明。9]。注意，(2) 显然蕴含 (5)。我们证明 (5) $\Longrightarrow$(4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2)。

假设 (3). 对于每个边集 $\mathcal{E} \subset E(\mathcal{T})$，取凸包 $T =$ 凸包$(\mathcal{E} \cup \{\tilde{v}\})$，它 is 一个子树 $\mathcal{T}$ 的。于是

$$\pi_1 X_v \cap (\cap_{e\in\mathcal{E}} \mathrm{Stab}(e)) = \mathrm{Stab}(\tilde{v}) \cap (\cap_{e\in\mathcal{E}} \mathrm{Stab}(e)) = \$\mathrm{tab}(T).$$

有限多个 $\pi_1 X_v$-共轭类的无限子群 $\mathrm{Stab}(T)$ 因此给出有限多个$\pi_1 X_v$-共轭类的无限子群（见 (2)）。

假设 (4) 成立。对于每棵子树 $T \subset \mathcal{T}$，我们可以将其写成递增并 $T = \cup_{i=1}^{\infty} T_i$，其中$T_i \subseteq T_{i+1}$ 且每个 T_i 都是包含 $\tilde{v}$ 的有限子树。于是 $\mathrm{Stab}(T) = \cap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Stab}(T_i)$ 是子群的递减交

$$\$\mathrm{tab}(T_1) \supset \$\mathrm{tab}(T_2) \supset \cdots. \tag{4.1}$$

我们断言，上述下降链 (4.1) 只有有限多个真包含关系。否则，假设对于无限多个整数 $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ （其中 $k_i < k_{i+1}$），有 $\mathrm{Stab}(T_{k_i}) \supsetneq \mathrm{Stab}(T_{k_{i+1}})$。根据推论 4.4，每个 $\mathrm{Stab}(T_i)$ 都由虚拟特殊立方复形 $Y_i/\mathrm{Stab}(T_i) \to X_v$ 之间的局部等距表示。由此，根据引理 3.10，对于任意 $n > k_i$，$\mathrm{Stab}(T_{k_i})$ 都不与 $\mathrm{Stab}(T_n)$ $\pi_1 X_v$-共轭。因此，子群集合 $\{\mathrm{Stab}(T_{k_i})\}_{i=1}^{\infty}$ 代表了无限多个不同的 $\pi_1 X_v$-共轭子群类。这与 (4) 的假设矛盾。因此，下降链 (4.1) 只有有限多个真包含关系。特别地，对于某个足够大的 n，有 $\mathrm{Stab}(T) = \mathrm{Stab}(T_n)$。因此，(3) 中无限子群的 $\pi_1 X_v$-共轭类与 (4) 中的 $\pi_1 X_v$-共轭类一致，而根据假设后者是有限的。这表明 (4) $\Longrightarrow$ (3)。

最后，我们证明 (5) $\Longrightarrow$ (4)。注意，每个包含 $\tilde{v}$ 的有限子树 T 都是有限条路径 $T = \rho_1 \cup \cdots \cup \rho_m$ 的并，其中每条 ρ_i 都从 $\tilde{v}$ 出发。因此，$\mathrm{Stab}(T)$ 是有限个 $\mathrm{Stab}(T) = \cap_{i=1}^{m} \mathrm{Stab}(\rho_i)$ 的交集。选取有限路径 ρ_1、$\cdots$、ρ_n，使其逐点稳定子代表 (5) 中的 $\pi_1 X_v$-共轭类。根据引理 4.3，每个 $\mathrm{Stab}(\rho_i)$ 都由某个凸子复形 $Y_i \subset X_v$ 的局部等距 $A_i = Y_i/\mathrm{Stab}(\rho_i) \to X_v$ 表示。由于每个无限的 $\mathrm{Stab}(\rho_i)$ 都属于某个 $1 \le n_i \le n$ 的 $\$\mathrm{tab}(\rho_{n_i})$ 的 $\pi_1 X_v$- 共轭类，因此存在元素 g_1、 ..... 、 $g_m \in \pi_1 X_v$，使得

$$\$\mathrm{tab}(T) = \bigcap_{i=1}^{m} \$\mathrm{tab}(\rho_i) = \bigcap_{i=1}^{m} \$\mathrm{tab}(\overline{\rho}_{n_i})^{g_i^{-1}} = \bigcap_{i=1}^{m} \pi_1 A_{n_i}^{g_i^{-1}}.$$

根据推论 3.8(b)，上述有限交集仅有有限多个 $\pi_1 X_v$-共轭类的无限子群。这就证明了 (4)。□

注 4.8。 当顶点群是双曲群且边群是拟凸子群时，引理 4.7 在 [HW19 的引理 3 中得到证明。19] 以及 [Jan23 的命题 3 中也得到了证明。3]这些证明利用了双曲群的拟凸子群具有有限高度这一事实 [GMRS98]。

5. Quasilines in CAT(0) cube complexes

5.1. 拟直线中的超平面。

定义 5.1。 设 X 是一个紧致非正曲率立方复形，且 X 是其万有覆盖。 X 中的一个拟直线 是一个有序对 (Y, ϕ)，由一个凸子复形 $Y \subset X$ 和一个非平凡元素 $\phi \in \pi_1 X$ 组成，且子群 $\langle\phi\rangle$ 在 Y 上余紧地作用。若存在 $g \in \pi_1 X$ 使得 $(\tilde{Y}_2, \phi_2) = (g\tilde{Y}_1, g\phi_1 g^{-1})$，则称两个拟直线 (Y_1, ϕ_1)，(Y_2, ϕ_2) 在 $\tilde{X}$ 中同构 。

备注 5.2。 由于 Y具有无限循环群 $\langle\phi\rangle \cong \mathbb{Z}$的几何作用，因此它与 $\mathbb{Z}$ 拟等距，故有两个端。根据注记 2.8， ϕ 是双曲等距变换，且具有正的组合平移长度 $|\phi| > 0$。特别地， ϕ 保持 Y的两个端。

例 5.3. 令 X为一个紧致非正曲率立方复形，并令 G_1、 $\cdots$、 G_n 为 $\pi_1 X$的子群。假设每个 G_i 都余紧地作用于 X的一个凸子复形 Y_i ，那么交集 $G_1 \cap \cdots \cap G_n$ 余紧地作用于投影 $Y_1 \pitchfork \cdots \pitchfork Y_n$。若 $G_1 \cap \cdots \cap G_n \cong \mathbb{Z}$，则通过选取 $\cap_{i=1}^{n} G_i$的一个生成元 ϕ ，我们可在 $\tilde{X}$中得到一条拟直线 $\left(\pitchfork_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i, \phi\right)$ 。

我们回顾以下内容，摘自 [CS11]。

定义 5.4. 设 H 是 CAT(0)立方复形 X中的一个超平面。若半空间 H 包含距 H任意远的点，则称其为深浅；否则称其为浅。若超平面 H 的两个半空间 $H^{\pm}$ 都是深的，则称其为本质；若二者都是浅的，则称其为平凡；若二者中恰有一个是深的，则称其为半本质。

引理 5.5. 设 X 是一个紧致非正曲率立方复形。假设 (Y,ϕ) 是 X中的一条拟直线。那么对于 Y中的每个超平面 H，有：

(1) H 是平凡的当且仅当 直径$(H)=\infty$。*(2)* H 是半本质的当且仅当它有一个紧致半空间。*(3)* H 是本质的当且仅当 直径$(H)<\infty$ 且 H 只有非紧致半空间。

证明。 对于 (1)，注意到超平面 H 是平凡的当且仅当 Y 包含在某个常数 r的 r-邻域 $N_r(H)$ 内。由于拟直线 Y的直径为直径$(Y)=\infty$，包含映射 $Y\subset N_r(H)$ 成立仅当直径$(H)=\infty$。

反过来，假设 $\mathrm{diam}(H)=\infty$。由于 Y是 $\langle\phi\rangle$-余紧的，存在一个紧致子复形 $K\subset Y$，使得 $\langle\phi\rangle\cdot K=Y$。由于 H 是无限的，对于无穷多个 n， $H\cap\phi^n(K)\neq\emptyset$。因此，对于无穷多个整数 n， K与超平面 $\phi^{-n}(H)$ 相交。然而，紧致复形 K在 Y 中仅与有限多个超平面相交。因此，存在整数 $m\neq n$，使得 $\phi^{-m}(H)$ 和$\phi^{-n}(H)$ 是同一个超平面，且与 K 相交。特别地， $\phi^k\in$ 是 $\mathrm{Stab}(\phi^{-n}(H))$，其中 $k=n-m$。由于 $\langle\phi\rangle\cdot K=\tilde{Y}$，令 $K'=\bigcup_{i=0}^{|k|-1}\phi^i(K)$，可得 $\langle\phi^k\rangle\cdot K'=\tilde{Y}$。现在取 $r=\mathrm{diam}(K')$。选取一点 $x\in K\cap\phi^{-n}(H)\subset K'\cap\phi^{-n}(H)$，则

$$\tilde{Y}=\langle\phi^k\rangle\cdot K'\subset\langle\phi^k\rangle\cdot N_r(x)=N_r\left(\langle\phi^k\rangle\cdot x\right)\subset N_r(\phi^{-n}(H)).$$

因此，

$$\tilde{Y}=\phi^n(\tilde{Y})\subset\phi^n(N_r(\phi^{-n}(H)))=N_r(H),$$

这意味着 H 是平凡的。至此，(1) 的证明完成。

对于 (2)，设 H 是一个半本质超平面。那么，它的浅半空间（记作 H^+）包含于某个常数 k 的 k-邻域 $N_k(H)$ 中，其中 H 是某个常数。由 (1)，$\mathrm{diam}(H)<\infty$，因此 H^+ 是紧致的。反过来，设 H^+ 是 H 的一个紧致半空间。由于 H 包含于 1-邻域$N_1(H^+)$ 中，我们有 $\mathrm{diam}(H)<\infty$，且 H 不可能是本质的，因为 H^+ 不是深的。

最后，设 H 是一个本质超平面。它的两个半空间都是深的，因此都是非紧致的；由 (1)，我们有 $\mathrm{diam}(H)<\infty$。反过来，有限直径意味着 H 不是平凡的。由于它只有非紧致半空间，由 (2) 可知 H 不是半本质的。这就证明了 (3)。□

引理 5.6. 设 X 是一个紧致非正曲率立方复形。假设(Y,ϕ) 是X中的一条拟直线，那么

(1) 存在一个常数 D，使得对于 Y 中每个非平凡超平面 H，$\leq D$ 直径(H)；*(2)* 存在一个常数 K，使得对于每个半本质超平面H的浅半空间 H^ϵ，$\leq K$直径(H^ϵ)；*(3)* 存在一个整数 d，使得对于每个本质超平面 H，H 和 $\phi^d(H)$ 不相交，并且只有平凡超平面会同时与二者相交；*(4)* Y 只有有限个平凡超平面。

常数 K、D、d仅取决于拟直线(Y,ϕ)。此外，任意常数 $D\geq D$、$K\geq K$和整数 $\overline{d}\geq d$ 也分别满足 *(1)*、*(2)*、*(3)*。

证明。 对 Y 的余紧作用 在 Y 的超平面上诱导出一个作用，且只有有限个轨道，记为 $\langle\phi\rangle\cdot H_1,\cdots,\langle\phi\rangle\cdot H_n$。由引理 5.5可知，只有平凡超平面的直径是无限的，而半本质超平面的浅半空间的直径是有限的。取

$$D=\max_{1\leq i\leq n}\{\mathrm{diam}(H_i)\mid\mathrm{diam}(H_i)<\infty\}$$

and

$$K=\max_{1\leq j\leq n}\{\mathrm{diam}(H_j^\epsilon)\mid\mathrm{diam}(H_j^\epsilon)<\infty,\ H_j^\epsilon\text{ is a halfspace of }H_j\},$$

我们在 (1) 和 (2) 中得到了所需的 D 和 K。

对于每个本质超平面 H，其载体 $N(H)$ 与平移 $\phi^d(N(H))$ 之间的距离满足

$$d(N(H),\phi^d(N(H)))\geq d|\phi|-2\,\mathrm{diam}(N(H))\geq d|\phi|-2D-2.$$

选择足够大的 d，使得 $d|\phi| > 3D + 2$。于是，$d|\phi| - 2D - 2 > D > 0$。因此，H 和 $\phi^d(H)$ 不相交，并且只有直径为 $> D$ 的超平面会同时穿过它们。根据我们在 (1) 中对 D 的选择，这些超平面是平凡的。这就证明了 (3)。

对于 (4)，注意到每个本质超平面都与每个平凡超平面相交。事实上，如果本质超平面 H 与平凡超平面 J 不相交，则 J 的某个半空间 J^{ϵ_J} 包含于 H的某个半空间H^{ϵ_H} 中。但此时 H 有一个深半空间，因为 J^{ϵ_J} 包含距 J任意远的点，因此也包含距 H任意远的点。

由于每个本质超平面 H 的直径有限，因此它与有限个超平面相交。特别地，Y 只有有限个平凡超平面。

最后，请注意，我们对 D 的任意常数 $D \geq D$ 取决于拟直线 (Y, ϕ)。请注意，任意常数 $d \geq d$ 也适用于上述论证，因此分别满足 (1)、(2)、(3)。证明完毕。□

引理 5.7。设 X 是一个紧致非正曲率立方复形。假设 $(Y、\phi)$ 是 X中的拟直线。那么存在仅取决于 $(Y、\phi)$的常数 N、M，使得对于任意整数 $k > 0$，都有以下结论：

(1) 直径$(H^+ \cap \phi^{\pm k}(H^-)) \leq kN$ 对于 H 中的任意本质超平面 Y. *(2)* 假设 Y 中的本质超平面 H 在边 e_0 处与组合测地线 γ 相交。若 e_0 到 γ 两个端点的距离为 $\geq kM$，则 $\phi^{\pm k}(H)$ 与 γ 相交。

此外，任意常数 $M \geq M$、$N \geq N$ 也分别满足 *(1)* 和 *(2)*。

证明。对于 Y 的每个本质超平面 H，由于它在 Y 中的两个半空间都是深的，因此它分隔 $\tilde{Y}$ 的两个端。根据备注 5.2，ϕ 保持 $\tilde{Y}$ 的两个端。特别地，子空间 $H^+ \cap \phi(H^+)$ 和 $H^- \cap \phi(H^-)$ 分别是非紧致的，并且分别包含 Y 的两个端。我们断言子空间 $H^+ \cap \phi(H^-)$ 和 $H^- \cap \phi(H^+)$ 都是紧致的。事实上，由于 diam$(H) < \infty$，若 $H^+ \cap \phi(H^-)$ 或 $H^- \cap \phi(H^+)$ 中任一个非紧致，它就会包含 $\tilde{Y}$ 的另一个端，这与 $\tilde{Y}$ 有两个端这一事实矛盾。图 1 展示了 $H^+ \cap \phi(H^-)$ 非紧致的情形。

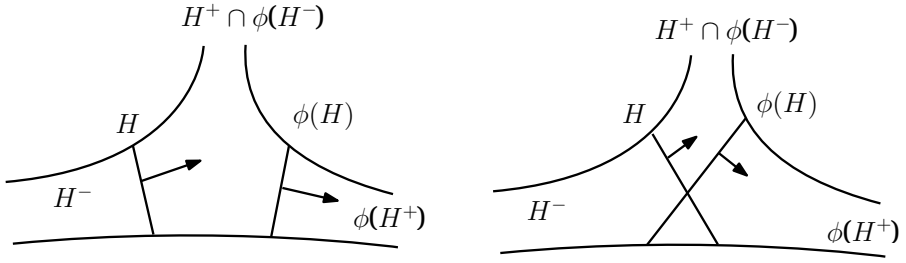

FIGURE 1. 如果子空间 $H^+ \cap \phi(H^-)$ 非紧致，那么它包含拟直线的一个端。

$\langle \phi \rangle$ 在 Y 上的余紧作用在 Y 的本质超平面集合上诱导出一个作用，且其轨道有限 $\langle \phi \rangle \cdot H_1$，$\cdots$，$\langle \phi \rangle \cdot H_n$。取 D 如引理 5.6(1) 所述。特别地，对于每个 $N(H_i)$，diam($\leq D + 1$ i。令

$$N = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \operatorname{diam}(H_i^- \cap \phi(H_i^+)),\ \operatorname{diam}(H_i^+ \cap \phi(H_i^-)) \right\} + D + 1$$

这是有限的，因为对于每个 $1 \leq i \leq n$，$H_i^- \cap \phi(H_i^+)$ 和 $H_i^+ \cap \phi(H_i^-)$ 都是紧致的。

我们对 k 使用归纳法证明 (1)．当 $k = 1$，我们对 N 的构造给出

$$\operatorname{diam}\left(H^+ \cap \phi(H^-)\right) < N$$

and

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}\left(H^+ \cap \phi^{-1}(H^-)\right) &= \operatorname{diam}\left(\phi\left(H^+ \cap \phi^{-1}(H^-)\right)\right) \\ &= \operatorname{diam}\left(\phi\left(H^+\right) \cap H^-\right) < N. \end{aligned}$$

假设该陈述对 $k - 1$ 成立。由于

$$\begin{aligned} H^+ \cap \phi^k(H^-) &= H^+ \cap \phi^k(H^-) \cap \left(\phi^{k-1}(H^-) \cup \phi^{k-1}(N(H)) \cup \phi^{k-1}(H^+)\right) \\ &\subset \left(H^+ \cap \phi^{k-1}(H^-)\right) \cup \phi^{k-1}(N(H)) \cup \left(\phi^{k-1}(H^+) \cap \phi^k(H^-)\right) \\ &= \left(H^+ \cap \phi^{k-1}(H^-)\right) \cup \phi^{k-1}(N(H)) \cup \phi^{k-1}\left(H^+ \cap \phi(H^-)\right), \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}\left(H^+ \cap \phi^k(H^-)\right) &\le \operatorname{diam}\left(H^+ \cap \phi^{k-1}(H^-)\right) + \operatorname{diam}\left(\phi^{k-1}(N(H))\right)\\ &\quad + \operatorname{diam}\left(\phi^{k-1}\left(H^+ \cup \phi(H^-)\right)\right)\\ &\le (k-1)N + (D+1) + \operatorname{diam}\left(H^+ \cup \phi(H^-)\right)\\ &\le kN.\end{aligned}$$

类似地，在上述内容中交换 H^- 和 H^+ 后，我们有 $\operatorname{diam}\left(H^- \cap \phi^k(H^+)\right) \le kN$。因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}\left(H^+ \cap \phi^{-k}(H^-)\right) &= \operatorname{diam}\left(\phi^k\left(H^+ \cap \phi^{-k}(H^-)\right)\right)\\ &= \operatorname{diam}\left(\phi^k\left(H^+\right) \cap H^-\right) \le kN.\end{aligned}$$

这就完成了 (1) 的证明。

对于 (2)，选取 d，如引理 5.6(3) 中所述。特别地，H 与 $\phi^{d+1}(H)$ 和 $\phi^{-d}(H)$ 不相交。回顾一下，由于 ϕ 保持了 $\tilde{Y}$的两个端，如有必要，交换 H^+ 和 H^- 后，我们可以假设 $\phi^{d+1}(H^+) \subset H^+ \subset \phi^{-d}(H^+)$，如图 2 所示。令 $M = (d+2)N$。我们通过对 k使用归纳法来证明 (2)。当 $k = 1$时，根据 (1)，我们有

$$\operatorname{diam}(H^+ \cap \phi^{d+1}(H^-)) \le (d+1)N, \quad \operatorname{diam}(H^- \cap \phi^{-d}(H^+)) \le dN.$$

由于 e_0与 $\ge M > (d+1)N$的距离为 γ的两个端点分别位于 $\phi^{d+1}(H^+)$ 和 $\phi^{-d}(H^-)$ 中。现在考虑超平面 $\phi(H)$。由引理 5.6(3) 以及我们对 d的选择，$\phi(H$不与$\phi^{d+1}(H$相交，也不与 $\phi^{-d}(H$相交。因此，我们得到嵌套半空间

$$\phi^{d+1}(H^+) \subset \phi(H^+) \subset \phi^{-d}(H^+).$$

特别地，γ 的两个端包含在 $\phi^{d+1}(H^+) \subset \phi(H^+)$和 $\phi^{-d}(H^-) \subset \phi(H^-)$中，并且 $\phi(H)$与 γ交叉。类似的论证表明，$\phi^{-1}(H)$与 γ交叉。这就证明了当 $k = 1$时的(2)。

假设该命题对 $k-1$成立。若 e_0 到两个端点的距离为 $\ge kM$，则 $\phi^{k-1}(H)$在边 e_{k-1}处与 γ 交叉。此外，由(1)可得

$$d(e_0, e_k) \le \operatorname{diam}\left(H^+ \cap \phi^{k-1}(H^-)\right) \le (k-1)N < (k-1)M.$$

因此，e_k 到 γ的两个端点的距离为 $> kM - (k-1)M = M$。按照我们在$k = 1$情形下的论证，超平面 $\phi^k(H) = \phi(\phi^{k-1}(H))$与 γ交叉。类似的论证表明，$\phi^{-k}(H)$与γ交叉。由此完成归纳法，并证明了(2)。

最后，由于引理 5.5 中的常数 D、d 仅取决于拟直线 (Y, ϕ)，根据我们对 N和 M的构造可知，这些常数也仅取决于 (Y, ϕ)。此外，任意常数 $N \ge N$和 $M \ge M$ 也适用于上述论证，因此分别满足 (1) 和 (2)。□

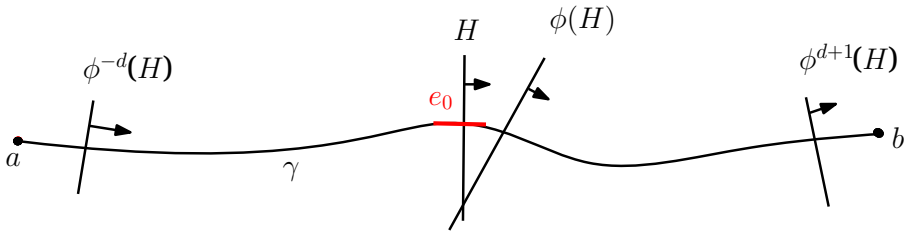

FIGURE 2. 四个超平面与组合测地线 γ相交。箭头表示半空间 $\phi^{-d}(H^+)$ H^+、$\phi(H^+)$ $\phi^{d+1}(H^+)$。γ在边 e_0处与 H 相交，该边到 γ的两个端点 a、b的距离均为 $\ge M$。

5.2. 与一条测地线伴行的拟直线中的凸子复形。

引理 5.8。设 X 是一个紧致非正曲率立方复形，并设 (Y, ϕ) 是X中的一条拟直线。假设 H 是 Y 中的一个本质超平面，使得 H 与 $\phi(H)$ 不相交，并且没有 Y 中的超平面同时与它们相交。取一个顶点 $a \in N(H) \pitchfork \phi(N(H))$。考虑凸子复形 $C =$ 凸包$\{a, \phi^2(a)\}$。则以下结论成立。

(1) 设 γ 是 $\tilde{Y}$ 中的一条组合测地线，它在边 e_i 处穿过超平面 $\phi^i(H)$，其中 $i = 0$、1、2、3。记 $\gamma_{[e_i, e_j]}$ 为 γ 中介于 e_i 和 e_j 之间的子线段。则

$$\gamma_{[e_1, e_2]} \subset C \subset \operatorname{Hull}\{e_0, e_3\}.$$

(2) 对任意整数 $n \geq 0$，有 $\cup_{i=0}^{n}\phi^i(C) = $ 凸包$\{a, \phi^{n+2}(a)\}$。特别地，子复形$\cup_{i=0}^{n}\phi^i(C)$是凸的。

证明。由于 H 和 $\phi(H)$ 不相交，且不存在任何超平面同时穿过它们，根据桥定理 3.2，投影 $N(H) \pitchfork \phi(N(H))$ 是一个单元素集。因此必有$\{a\} = N(H) \pitchfork \phi(N(H))$。将另一个投影记为 $\{b\} = N(H) \pitchfork \phi(N(H))$。根据备注 5.2，$\phi$保留 $\tilde{Y}$的两个端。因此，或者 $\phi(H^+) \subset H^-$，或者 $\phi(H^+) \subset H^-$。如有必要，交换 H^+ 和 H^-，我们可以假设 $\phi(H^+) \subset H^+$。于是我们得到嵌套半空间 $\phi^3(H^+) \subset \phi^2(H^+) \subset \phi(H^+) \subset H^+$。设 e_i 在 $\phi^i(H)^-$ 和 $\phi^i(H)^+$ 中的端点分别为 u_i 和 v_i，且端点 u_i、v_i 沿着 γ 交替出现。见图 3(A)。

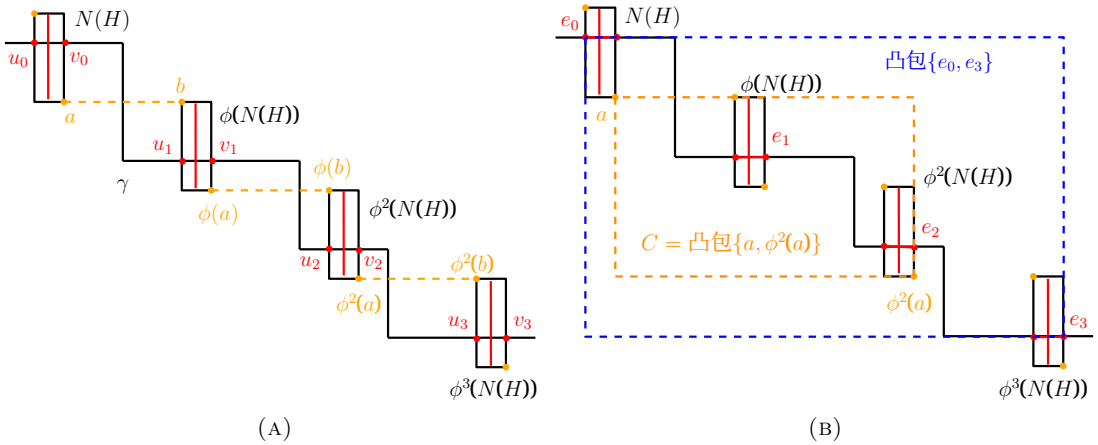

FIGURE 3. 组合测地线 γ 穿过四个超平面。点 u_i, v_i 沿 γ 交替排列，如 (A) 所示。两个凸子复形 $C =$ 凸包$\{a, \phi^2(a)\}$ 和 凸包$\{e_0, e_3\}$ 分别以 (B) 中的橙色和蓝色区域表示。

要证明 (1)，只需证明 $e_1, e_2 \subset C$。我们先考虑 $i = 0,1,2$ 时从 v_i 到 u_{i+1} 的子线段 $\gamma_{[v_i,u_{i+1}]}$。选取以下组合测地线（选取方式可能不唯一）：

- 一条从 v_i 到 ϕ^i 的组合测地线 $[v_i, \phi^i(a)]$，
- 一条从 $\phi^i(a)$ 到 $\phi^i(b)$ 的组合测地线 $[\phi^i(a)\ \phi^i(b)]$，
- 一条从 $\phi^i(b)$ 到 u_{i+1} 的组合测地线 $[\phi^i(b)\ u_{i+1}]$。

注意，$[v_i, \phi^i(a)]$ 穿过与 $\phi^i(H)$相交的超平面，$[\phi^i(a)\ \phi^i(b)]$ 穿过分离$\phi^i(H)$与 $\phi^{i+1}(H)$的超平面（根据桥定理 3.2），并且 $[\phi^i(b)\ u_{i+1}]$ 穿过与 $\phi^{i+1}(H)$相交的超平面。由于 $\phi^i(H)$ 与 $\phi^{i+1}(H)$不会同时被任何超平面穿过，上述三条组合测地线穿过彼此不同的超平面。因此，将它们首尾相接，便得到一条从v_i 到 u_{i+1} 的组合测地线，其形式为

$$\gamma_i = [v_i, \phi^i(a)] * [\phi^i(a), \phi^i(b)] * [\phi^i(b), u_{i+1}].$$

因此，我们得到一对具有相同端点的组合测地线 $\gamma_{[v_i,u_{i+1}]}$ 和 γ_i。特别地，它们穿过同一族超平面，即分离 v_i 与 u_{i+1}的那些超平面。由于组合测地线 $\gamma_{[u_0,v_3]}$ 是一个拼接

$$\gamma_{[u_0,v_3]} = e_0 * \gamma_{[v_0,u_1]} * e_1 * \gamma_{[v_1,u_2]} * e_2 * \gamma_{[v_2,u_3]} * e_3.$$

用 γ_i替换$\gamma_{[v_i,u_{i+1}]}$，我们得到一条从 u_0 到 v_3的路径

$$\gamma' = e_0 * \gamma_0 * e_1 * \gamma_1 * e_2 * \gamma_2 * e_3,$$

它与 $\gamma_{[u_0,v_3]}$ 穿过同一族超平面。因此，γ' 也是一条组合测地线。特别地，从 a 到 $\phi^2(a)$ 的子线段 $\gamma'_{[a,\phi^2(a)]}$ 是一条组合测地线。因此，

$$e_1, e_2 \subset \gamma'_{[a,\phi^2(a)]} \subset \mathrm{Hull}\{a, \phi^2(a)\} = C. \tag{5.1}$$

同理，由于 $a, \phi^2(a)$ 包含在子线段 $\gamma'_{[v_0,u_3]}$ 中，我们有

$$a, \phi^2(a) \in \gamma'_{[v_0,u_3]} \subset \mathrm{Hull}\{e_0, e_3\}. \tag{5.2}$$

由于 C 和凸包$\{e_0, e_3\}$ 是凸的，（5.1）和（5.2）共同推出

$$\gamma_{[e_1,e_2]} \subset C = \mathrm{Hull}\{a, \phi^2(a)\} \subset \mathrm{Hull}\{e_0, e_3\}.$$

This证明了（1）。我们在图中说明上述内容 3（B）。

在证明 (2) 之前，我们先作如下观察。考虑从 a到 $\phi(a)$ 的组合测地线

$$\lambda = \gamma'_{[a,\phi(a)]} = [a,b] * [b,u_1] * e_1 * [v_1,\phi(a)].$$

对于每个与 λ 相交的超平面，它要么分隔 H 和 $\phi(H)$（若它与 $[a,b]$ 相交），要么与 $\phi(H)$ 相交（若它与 $[b,u_1] * e_1 * [v_1,\phi(a)]$ 相交）。由于 $H, \phi(H)$ 不相交，且没有任何超平面同时与二者相交，因此，所有与 λ 相交的超平面都包含在 H^+ 中。因此， $\phi^k(\lambda)$ 只与包含在 $\phi^k(H^+)$ 中的超平面相交。另一方面，任意组合测地线 $[a,\phi^k(a)]$ ，从 a 到$\phi^k(a)$，所穿过的超平面要么与 $\phi^k(H)$ 相交，要么包含在 $\phi^k(H^-)$ 中。因此，它总能延伸为一条更长的组合测地线 $[a,\phi^k(a)] * \phi^k(\lambda)$，从 a 到 $\phi^{k+1}(a)$。

现在，我们通过对 n 使用归纳法，证明 (2) 中的 $\bigcup_{i=0}^{n} \phi^i(C)$ =凸包$\{a, \phi^{n+2}(a)\}$。当 $n = 0$ 时，该结论成立，因为C =凸包$\{a, \phi^2(a)\}$。假设对于 $n \geq 1$， $\cup_{i=0}^{n-1} \phi^i(C)$ =凸包$\{a, \phi^{n+1}(a)\}$。由于任意组合测地线 $[a, \phi^{n+1}(a)]$ 都可以延伸为一条从 a 到 $\phi^{n+1}(a)$ 的组合测地线 $[a, \phi^{n+1}(a)] * \phi^{n+1}(\lambda)$，因此我们有

$$\text{Hull}\{a, \phi^{n+1}(a)\} \subset \text{Hull}\{a, \phi^{n+2}(a)\}. \tag{5.3}$$

此外，由于 $\bigcup_{k=0}^{n+1} \phi^k(\lambda)$ 是一条从 a 到 $\phi^{n+2}(a)$ 且包含 $\phi^n(a)$ 的组合测地线，我们有 $\phi^n(a) \in$ 凸包 $\{a, \phi^{n+2}(a)\}$。因此，

$$\phi^n(C) = \text{Hull}\{\phi^n(a), \phi^{n+2}(a)\} \subset \text{Hull}\{a, \phi^{n+2}(a)\}. \tag{5.4}$$

结合（5.3）和（5.4），我们得到

$$\bigcup_{i=0}^{n} \phi^i(C) = \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \phi^i(C)\right) \cup \phi^n(C) = \text{Hull}\{a, \phi^{n+1}(a)\} \cup \phi^n(C) \subset \text{Hull}\{a, \phi^{n+2}(a)\}. \tag{5.5}$$

反之，如有必要，交换 H^+ 和 H^- ，不妨设 $\phi(H^+) \subset H^+$。因此，我们有嵌套半空间

$$H^+ \supset \phi(H^+) \supset \phi^2(H^+) \supset \cdots \supset \phi^{n+2}(H^+).$$

设 γ 是从 a 到 $\phi^{n+2}(a)$ 的任意组合测地线。由于 $a \in H^+ \setminus \phi(H^+)$ 和 $\phi^{n+2}(a) \in \phi^{n+2}(H^+)$， γ 必须在某个 e_i 处穿过每个 $\phi^i(H)$，其中 $1 \leq i \leq n+2$。设 e_0 是与 H 对偶且端点为 a 的边。于是， $e_0 * \gamma$ 是一条组合测地线，如图 4 所示，它依次穿过 H、$\phi(H) \ldots$、$\phi^{n+2}(H)$。由于 $n \geq 1$， γ 穿过四个超平面 $\phi^{n-1}(H)$ $\phi^n(H)$ $\phi^{n+1}(H)$ $\phi^{n+2}(H)$。因此，根据 (1)，子线段 $\gamma_{[e_n,e_{n+1}]}$ 包含于 $\phi^{n-1}(C)$ 中。特别地，

$$e_{n+1} \subset \phi^{n-1}(C) = \text{Hull}\{a, \phi^{n+1}(a)\}. \tag{5.6}$$

或者，延拓组合测地线 $\gamma * \phi^{n+2}(\lambda)$ 穿过四个超平面 $\phi(H) \ldots, \phi^{n+3}(H)$（见图 4）。根据（1），子线段 $\gamma_{[e_{n+1},e_{n+2}]}$ 包含于 $\phi^n(C)$ 中。特别地， $e_{n+1} \subset \phi^n(C)$。结合（5.6），得到

$$\gamma = \gamma_{[a,e_{n+1}]} \cup \gamma_{[e_{n+1},\phi^{n+2}(a)]} \subset \text{Hull}\{a, \phi^{n+1}(a)\} \cup \phi^n(C) = \bigcup_{i=0}^{n} \phi^i(C).$$

由于 γ 是从 a 到 ϕ^{n+2} 的任意组合测地线（a），这意味着

$$\text{Hull}\{a, \phi^{n+2}(a)\} \subset \bigcup_{i=0}^{n} \phi^i(C). \tag{5.7}$$

由（5.5）和（5.7）可得 $\bigcup_{i=0}^{n} \phi^i(C)$ =凸包$\{a, \phi^{n+2}(a)\}$。至此，归纳法完成，也就证明了（2）。□

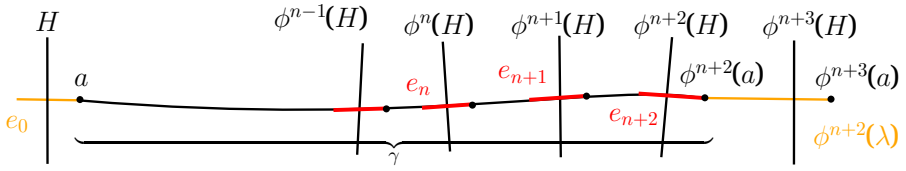

FIGURE 4. 组合测地线 γ 可以延伸至 $e_0 * \gamma$ 和 $\gamma * \phi^{n+1}(\lambda)$。

命题 5.9。设 X 是一个紧致非正曲率立方复形，并且(Y,ϕ) 是 X 中的一条拟直线。那么存在仅依赖于拟直线(Y,ϕ)的常数 B_0 和整数 n，使得对于任意常数 $B \geq B_0$，以下结论成立：

令Y,W并为 $\gamma \subset W$ 为一条组合测地线，它不穿过 Y的任何平凡超平面。若直径$(\gamma) \geq 3B$，则存在一个凸子复形 $C \subset Y$ 和一个整数 l，使得

(1) γ 包含一个子线段 $\widehat{\gamma}$，其长度为直径$(\widehat{\gamma}) > B$，且满足

$$\widehat{\gamma} \subset C \cup \phi^n(C) \cup \cdots \cup \phi^{nl}(C) \subset W;$$

(2) $\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \phi^{nk}(C)\phi^n\right)$ 是 $\tilde{X}$中的一条拟直线。

注 5.10. 我们称（Y,ϕ）中的凸子复形 C与组合测地线伴随行进 γ。其直观含义是，C 的平移像 $\bigcup_{k=0}^{l} \phi^{nk}(C)$的并集足够薄且足够长，具体来说：

- 子复形 $\bigcup_{k=0}^{l} \phi^{nk}(C)$ 足够长，并包含 γ 的一个长子线段 $\widehat{\gamma}$，其长度为 $\mathrm{diam}(\widehat{\gamma}) > B$。
- 子复形 $\bigcup_{k=0}^{l} \phi^{nk}(C)$ 足够薄，因此仍包含于 W 中。

命题 *Pr* 的证明 命题*5.9*。由引理 5.6可知，拟直线 Y 有有限多个平凡超平面，记为 h。取 $K(D)$, d 如引理 5.6 中那样，并取 M，N如引理 5.7所述。令 $n = 2d \cdot h!$ 并

$$B_0 = \max\left\{K+1, 2nM, \left\lfloor \frac{2nN+D}{n|\phi|} + 2 \right\rfloor nM\right\}.$$

由于常数 D, K, d, M, N仅取决于拟直线（Y,ϕ），常数 B_0, n 也仅取决于（Y,ϕ）。我们分四个步骤证明这些结论。不等式 $B \geq B_0 \geq K+1$ 将在步骤1中用于找到一个本质超平面 H。不等式 $B \geq B_0 \geq 2nM$ 将在步骤 2 中用于构造 $\widehat{\gamma}$。最后，$B \geq B_0 \geq \left\lfloor \frac{2nN+D}{n|\phi|} + 2 \right\rfloor nM$将在步骤 4 中用于验证不等式 $\mathrm{diam}(\widehat{\gamma}) > B$。

步骤1。找到一个与 γ相交的本质超平面 H。在 γ的中间 1/3 选择一条边 e_0。令H 为与 e_0相交的超平面。由于 γ 不与平凡超平面相交，H 要么是本质的，要么是半本质的。因为 γ 的长度为 $\mathrm{diam}(\gamma) \geq 3B$，且 e_0 位于 1/3的中间，e_0 到 γ两个端点的距离均为 $\geq B$。因此，H 的两个半空间的直径均为 $\geq B \geq K+1$。根据引理5.6(2)以及我们对 K的选择，超平面 H 是本质的。

步骤 2. 构造凸子复形 C和子线段 $\widehat{\gamma}$. 令 h 为 Y 的平凡超平面，它们为 $H_1, \cdots, H_h$。$\langle\phi\rangle$ 对 $\tilde{Y}$ 的作用在这些超平面上诱导出一个置换。因此，$\phi^{2\cdot h!}$ 保持每个平凡超平面 H_i 及其半空间 $H_i^{\pm}$ 不变。特别地，每个半空间交集 $H_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap H_h^{\epsilon_h}$ 都在 $\phi^{2\cdot h!}$的作用下保持不变，其中 $H_i^{\epsilon_i}$ 表示 H_i 的半空间 $H_i^{\pm}$ 的一种选取。

由于 γ 不与平凡超平面相交，$\gamma \subset H_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap H_h^{\epsilon_h}$ 对某个交集成立。考虑 H 在 $H_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap H_h^{\epsilon_h}$ 中作为超平面的限制 $\overline{H} = H \cap (H_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap H_h^{\epsilon_h})$。注意，任何平凡超平面都不与 H 相交。此外，由于 $\phi^{2\cdot h!}$ 作用于子空间 $H_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap H_h^{\epsilon_h}$，对任意整数 k，超平面 $\phi^{2k\cdot h!}(H)$ 也位于 $H_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap H_h^{\epsilon_h}$ 中。将 H 在 $H_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap H_h^{\epsilon_h}$ 中的载体记为 $N(H)$。回想一下，我们取 $n = 2d \cdot h!$ 特别地，$\phi^n(H) \subset H_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap H_h^{\epsilon_h}$。

回想一下，d 的选取如引理5.6所述。由于 $n = 2d \cdot h! \geq d$，H 和 $\phi^n(H)$互不相交，且只有平凡超平面会同时与它们相交。因此 H 和 $\phi^n(H)$互不相交，也不存在任何超平面同时与它们相交。由桥定理 3.2可知，投影$N(H) \pitchfork N(\phi^n(H)) = \{a\}$是一个单元素集。

令 $q \leq 0$ 为使 $\phi^{kn}(H)$与 γ相交的最小整数 k，并令 $p \geq 0$为最大值。我们断言 p，$-q \geq 2$。事实上，回想一下，e_0 位于 1/3 的中点 γ，且到 $\geq B \geq 2(2dM \cdot h!) = 2nM$的两个端点的距离为 γ。由引理5.7 以及 M的选取，得 p，$-q \geq \left\lfloor \frac{B}{nM} \right\rfloor \geq 2$。

现在，令 C为由以下条件定义的 $H_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap H_h^{\epsilon_h}$的凸子复形：

$$C = \mathrm{Hull}\{\phi^{qn}(a), \phi^{(q+2)n}(a)\}.$$

对于每个 $q \leq k \leq p$，令 e_k 为穿过 $\phi^{kn}(H)$ 的 γ 的边。用 $\gamma_{[e_i,e_j]}$ 表示 γ上从 e_i 到 e_j的子线段。然后取

$$\widehat{\gamma} = \gamma_{[e_{q+1}, e_{p-1}]}.$$

我们在图中展示 C 和 $\widehat{\gamma}$ 的构造，见图 5。

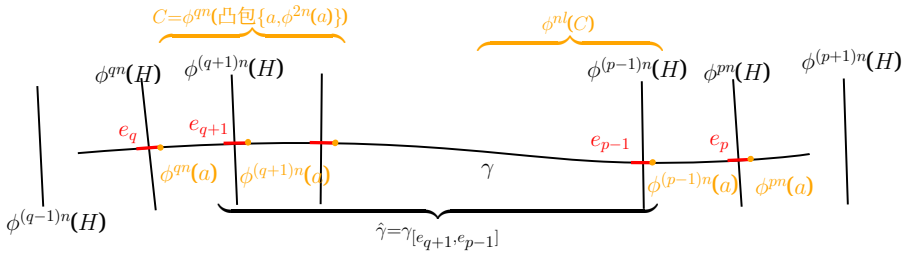

FIGURE 5. 组合测地线 γ穿过超平面 $\phi^{qn}(H)\cdots,\ \phi^{pn}(H)$。子线段 $\widehat{\gamma}$ 由黑色括号标示。凸子复形 C 及其最后一次平移 $\phi^{nl}(C)$由橙色括号标示。

Step 3. 验证包含关系与凸性。 由引理 5.8(1)，对于每个 $q\le k\le p-3$，我们有

$$\widehat{\gamma}_{[e_{k+1},e_{k+2}]}\subset\phi^{k-q}(C)=\mathrm{Hull}\{\phi^{kn}(a),\phi^{(k+2)n}(a)\}\subset\mathrm{Hull}\{e_k,e_{k+3}\}.$$

因此，

$$\widehat{\gamma}=\bigcup_{i=q+1}^{p-2}\widehat{\gamma}_{[e_i,e_{i+1}]}\subset\bigcup_{k=0}^{p-q-3}\phi^{kn}(C)\subset\bigcup_{j=q}^{p-3}\mathrm{Hull}\{e_j,e_{j+3}\}\subset\mathrm{Hull}(\gamma)\subset W.$$

这证明了 (1) 中的包含关系，其中 $l=p-q-3$。

为证明 (2)，注意到由引理 5.8(2)，子复形$\bigcup_{k=0}^{m}\phi^{nk}(C)$ 对每个整数 m 因此， 子复形

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\phi^{nk}(C)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=-m}^{m}\phi^{nk}(C)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\phi^{-m}\left(\bigcup_{k=0}^{2m}\phi^{nk}(C)\right)\right)$$

是凸子复形的递增并，因此也是凸的。根据我们的构造，子复形C是紧致的。因此，群 $\langle\phi^n\rangle$ 在$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\phi^{nk}(C)$上余紧地作用，而对 $(C,\ \phi^k)$ 而言，$(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\phi^{nk}$是一条拟直线。

步骤 4. 验证不等式。 最后，我们证明 $\mathrm{diam}(\widehat{\gamma})>B$。由于 $\mathrm{diam}(\gamma)\ge 3B$，只需证明 $\mathrm{diam}(\widehat{\gamma})\ge\mathrm{diam}(\gamma)/2$。

回顾一下， D 的选取如引理 5.6(1) 所述。由于超平面 $\phi^{(q+1)n}(H)$ 和 $\phi^{(p-1)n}(H)$ 与 γ 在边 e_{q+1} 和 e_{p-1}处相交， $\widehat{\gamma}=\gamma_{[e_{q+1},e_{p-1}]}$ 的长度满足

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}\,(\widehat{\gamma})&\ge((p-1)n-(q+1)n)|\phi|-2\,\mathrm{diam}(H)\\&\ge((p-1)-(q+1))n|\phi|-2D\\&=(p-q-2)n|\phi|-2D.\end{aligned}$$

另一方面，因为 p，q 是满足 $\phi^{kn}(H)$ 与 γ相交的最小和最大整数 k， e 补集 γ 中 $\widehat{\gamma}$ 的补集满足（如有必要，我们交换 H^+ 和 H^-）

$$\gamma\setminus\widehat{\gamma}\subset(\phi^{(q-1)n}(H^+)\cap\phi^{(q+1)n}(H^-))\cup(\phi^{(p-1)n}(H^+)\cap\phi^{(p+1)n}(H^-)).$$

由引理 5.7 以及我们对 N的选取，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}(\gamma\setminus\widehat{\gamma})&\le\mathrm{diam}\left((\phi^{(q-1)n}(H^+)\cap\phi^{(q+1)n}(H^-))\cup(\phi^{(p-1)n}(H^+)\cap\phi^{(p+1)n}(H^-))\right)\\&\le((q-1)-(q+1))nN+((p+1)-(p-1))nN\\&\le 4nN.\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{\mathrm{diam}(\widehat{\gamma})}{\mathrm{diam}(\gamma\setminus\widehat{\gamma})}\ge\frac{n(p-q-2)|\phi|-2D}{4nN}.$$

由于 e_0 与 $\ge B\ge\left\lfloor\frac{2nN+D}{n|\phi|}+2\right\rfloor nM$的两个端点相距 γ，引理5.7(2)以及我们对 M的选择表明 p，$-q\ge\lfloor\frac{B}{nM}\rfloor\ge\left\lfloor\frac{2nN+D}{n|\phi|}+2\right\rfloor$。因此，

$$\frac{\mathrm{diam}(\widehat{\gamma})}{\mathrm{diam}(\gamma\setminus\widehat{\gamma})}\ge\frac{\left(2\left\lfloor\frac{2nN+D}{n|\phi|}+2\right\rfloor-2\right)\cdot n|\phi|-2D}{4nN}\ge\frac{\left(2\left(\frac{2nN+D}{n|\phi|}+1\right)-2\right)\cdot n|\phi|-2D}{4nN}=1.$$

这表明，子线段 $\widehat{\gamma}$ 包含 γ的边数超过一半。因此，

$$\operatorname{diam}(\widehat{\gamma}) \geq \frac{\operatorname{diam}(\gamma)}{2} \geq \frac{3B}{2} > B.$$

证明至此完成。 □

注 5.11。 注意，凸子复形 C 是在步骤 2 中通过一个本质超平面H 在拟直线 Y中得到的，其中 $a \in N(H) \cap C$。因此，当我们将命题 5.9 应用于拟直线中的组合测地线 γ 时，会自动得到一个本质超平面 H 在 Y 中与 $\widehat{\gamma}$相交，其载体$N(H)$ 与 C相交。

注 5.12。 对 C 在命题 5.9中的构造仅取决于拟直线(Y, ϕ) 的几何性质，而其平移次数 l 主要取决于 B。事实上，由引理 5.7 以及证明中对整数 $l, p, -q$ 的构造，我们有

$$l = p - q - 3 \geq 2\left\lfloor \frac{B}{nM} \right\rfloor - 3 > 2\frac{B}{nM} - 5,$$

其中 M和 $n = 2d \cdot h!$ 仅取决于（Y， ϕ）的几何性质。特别地，当我们将命题 5.9 应用于较大的 B 时，就能得到较大的 l。

本节最后给出以下结果，它将在定理6.4的证明中用到。回想一下，群 G 满足唯一根性质，是指对于任意元素 $x, y \in G, x^n = y^n$， $x = y$ 对任意非零整数 n均成立。由于有限生成右角阿廷群是双序的 [DK92], ，且所有双序群都满足唯一根性质 [Min12，引理 6.3], 表明有限生成右角阿廷群满足唯一根性质。注意，唯一根性质对子群也成立。由于特殊群嵌入直角阿廷群 [HW08，定理 1.1], 表明它们也满足唯一根性质。

引理 5.13。 设 X 是一个紧致虚特殊立方复形。令(Y_1, ϕ_1) 和(Y_2, ϕ_2) 为 X中的拟直线。那么存在常数 S, m，它们取决于拟直线(Y_1, ϕ_1)、(Y_2, ϕ_2) 以及 X，使得当直径$(\tilde{Y}_1 \pitchfork \tilde{Y}_2) > S$时， $\phi_1^{m|\phi_2|} = \phi_2^{\pm m|\phi_1|}$。

此外，如果 $\overline{S} \geq S$，且 $\overline{m}$ 是 m 的倍数，那么 S、$\overline{m}$也满足该陈述。

证明。 由于 X 是紧致虚拟特殊的，因此它有一个紧致特殊覆盖 X。取一个紧致的正则覆盖 $\hat{X}$，使其覆盖 X 并经由 X分解。于是 $\pi_1 X \lhd \pi_1 X$ 是一个有限指数正规子群 $m = [\pi_1 X : \pi_1 X]$。此外， X 作为特殊立方复形 X [HW08的覆盖空间，是特殊的，引理 3。7]。特别地，正规子群 $\pi_1 X$ 满足唯一根性质。

对于每条拟直线（Y_i， ϕ_i），包含映射 $Y_i \hookrightarrow X$ 诱导一个局部等距映射 $Y_i/\langle\phi_i\rangle \to X/\pi_1 X = X$。根据推论 3.8，存在一个常数 S，它取决于局部等距映射 $Y_1/\langle\phi_1\rangle$， $Y_2/\langle\phi_2\rangle \to X$ 使得直径$(Y_1 \pitchfork Y_2/\langle\phi_1\rangle \cap \langle\phi_2\rangle) \leq S$。因此，当投影的直径为直径$(Y_1 \pitchfork Y_2) > S$时，交集 $\langle\phi_1\rangle \cap \langle\phi_2\rangle$ 非平凡，并且存在非零整数 d_1， d_2 使得 $\phi_1^{d_1} = \phi_2^{d_2}$。特别地， $|d_1||\phi_1| = |d_2||\phi_2|$。因此，

$$\left(\phi_1^{m|\phi_2|}\right)^{|d_1||\phi_1|} = \phi_1^{m|d_1||\phi_1||\phi_2|} = \phi_2^{\pm m|d_2||\phi_1||\phi_2|} = \left(\phi_2^{\pm m|\phi_1|}\right)^{|d_2||\phi_2|} = \left(\phi_2^{\pm m|\phi_1|}\right)^{|d_1||\phi_1|},$$

其中， ϕ_2 和 ϕ_2^{-1}的选择取决于 d_1/d_2 是正数还是负数。由于 $m = [\pi_1 X : \pi_1 \hat{X}]$是正规子群 $\pi_1 \hat{X}$的指数，元素 $\phi_1^{m|\phi_2|}$， $\phi_2^{m|\phi_1|}$ 包含于 $\pi_1 \hat{X}$中。由于 $\pi_1 \hat{X}$满足唯一根性质，因此 $\phi_1^{m|\phi_2|} = \phi_2^{m|\phi_1|}$ 或 $\phi_1^{m|\phi_2|} = \phi_2^{-m|\phi_1|}$。

最后请注意，上述论证同样适用于任意常数 $S \geq S$。此外，对于$\overline{m}$的任意倍数 m， $\phi_1^{m|\phi_2|} = \phi_2^{\pm m|\phi_1|}$显然蕴含$\overline{m}$ $\phi_1^{m|\phi_2|} = \phi_2^{\pm m|\phi_1|}$。证明至此完成。□

6. Graph of cube complexes with almost cyclonormal edges

6.1. **几乎循环正规边**。 回忆一下，群的子群 H 属于群 G称为 圆正规，如果对任意元素 $g \in G \setminus H$，子群 $H \cap H^g$ 要么是平凡子群，要么是循环群，其中 H^g 表示共轭子群$g^{-1}Hg$。以下定义将 [Wis96，定义 4.51] 推广到了非正曲率立方复形图。

定义 6.1。 设 X_Γ 是一个非正曲率立方复形图。若 X_Γ 具有循环正规边，则称之为如此；具体而言，对每条边 $e \in \Gamma$、 e 的每个端点 v，以及相应的粘接映射$\varphi : X_e \to X_v$，子群 $\varphi_*(\pi_1 X_e) \leq \pi_1 X_v$ 是圆正规的。

我们称 若 X_Γ 具有几乎循环正规边，则对于 Γ的每个顶点 v，以下条件均成立 d:

(1) 对于任意一条边 e，其端点为 v，粘接映射为 φ：$X_e \to X_v$。若元素 $g_1, g_2, g_3 \in \pi_1 X_v$代表 $\pi_1 X_v$ 中 $\varphi_*(\pi_1 X_e)$的不同左陪集，则子群 $\varphi_*(\pi_1 X_e)^{g_1} \cap \varphi_*(\pi_1 X_e)^{g_2} \cap \varphi_*(\pi_1 X_e)^{g_3}$ 不是平凡群就是循环群。
(2) 对于任意两条不同的边 e, f，它们有一个公共端点 v，粘接映射分别为 φ：$\pi_1 X_e \to \pi_1 X_v$、ψ：$\pi_1 X_f \to \pi_1 X_v$。若元素 g_1, g_2 代表 $\pi_1 X_v$中 $\psi_*(\pi_1 X_f)$的不同左陪集，则子群 $\varphi_*(\pi_1 X_e) \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_1} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_2}$ 不是平凡群就是循环群。

注6.2. 回顾注记 4.2，非正曲率立方复形图 X_Γ 被假定定义在单纯图 Γ上。一般而言，当底层图 Γ 不是单纯图时，我们还应考虑 $e = f$ 中的情形 (2)。

根据定义，具有循环正规边的非正曲率立方复形图 X_Γ 也具有几乎循环正规边。

由于每个顶点空间的基本群 $\pi_1 X_v$ 均为无挠群，其非平凡循环子群都是无限的。因此，定义 6.1 中的三重交集要么是平凡的，要么是无限循环的。

备注 6.3. 设 X 是一个分解为非正曲率立方复形图Γ的立方复形。考虑 $\pi_1 X$ 在相应的 Bass–Serre 树 $\mathcal{T}$上的作用。设 $\tilde{e}, f$ 是 $\mathcal{T}$中两条不同的边$\tilde{}$ $\tilde{}$，且它们有一个公共顶点 $\tilde{v}$。若存在 $g \in$稳定子$(\tilde{e})$ \稳定子(f)。那么，无论 $\tilde{e}, f$是否是 Γ 中同一条边或不同边的提升，三个子群稳定子$(\tilde{e})$, 稳定子$(\tilde{f})$, 稳定子$(\tilde{f})^{g^{-1}}$在稳定子$(\tilde{v})$中均不相同。因此，当 X_Γ 具有近似循环正规边时，三重交集

$$\mathrm{Stab}(\tilde{e}) \cap \mathrm{Stab}(\tilde{f}) \cap \mathrm{Stab}(\tilde{f})^{g^{-1}}$$

要么是平凡群，要么是无限循环群。

定理 6.4。 设 X 是一个紧立方复形，它分解为一个由虚拟特殊立方复形构成、且边近似循环正规的图。那么 $\pi_1 X$ 关于顶点群具有有限身量。

根据定理 4.6，我们得到以下关于虚拟特殊性的判别准则。

推论 6.5。 设 X 是一个紧立方复形，它分解为一个由非正曲率立方复形构成、且边（近似）圆正规的图。若顶点群是双曲的，则 X 是虚拟特殊的。

定理 6.4 的证明。设 X 分解为一个由非正曲率立方复形 X_Γ 构成、且边近似循环正规的图。令 $\mathcal{T}$ 为相应的 Bass–Serre 树。对于 Γ 的每个顶点 v，令 $\tilde{v}$ 为 $\mathcal{T}$ 中 v 的提升，且 Stab$(\tilde{v})$ 为 $= \pi_1 X_v$。令 ρ：$[0, n] \to \mathcal{T}$ 为一条从 $\tilde{}$ 顶点 $\rho(0) = \tilde{v}$ 出发的任意有限路径。回顾引理 4.3 的证明，在 X 的万有覆盖 X 中，这条有限路径ρ 对应于一个子复形

$$\bigsqcup_{i=0}^{n} \tilde{X}_i \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} \tilde{Y}_j \times [0,1] \right) / \sim$$

其中 $X_0 = X_v$、X_1、……、X_n和 Y_1、……、Y_n是（不一定彼此不同的）顶点空间和边空间。对于每个 j，$\tilde{Y}_j \times \{0\}$ 都附着于 $\tilde{Y}_j^0 \subset \tilde{X}_{i-1}$ 的一个提升上，而 $\tilde{Y}_j \times \{1\}$ 附着于一个提升$\tilde{Y}_j^1 \subset \tilde{X}_i$上。为简便起见，我们用 $\tilde{Y}_j^i$表示满足 $i = 0$、1 的 $\tilde{Y}_j \times \{i\}$。考虑投影

$$\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0 = \tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_2^0 \pitchfork \cdots \pitchfork \tilde{Y}_n^0 \subset \tilde{Y}_1^0 \subset \tilde{X}_0.$$

由引理 4.3，局部等距映射

$$(\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0)/\,\$\mathrm{tab}(\rho) \longrightarrow X_0 = X_v$$

表示子群 S稳定子$(\rho) \leq \pi_1 X_v$。我们声称，存在一个常数 P，使得对于每条具有无限逐点稳定子的此类有限路径 ρ，其无限逐点稳定子S稳定子(ρ)满足

$$\mathrm{diam}\left((\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0)/\,\$\mathrm{tab}(\rho)\right) \leq P. \tag{6.1}$$

特别地，这意味着形如$(\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0)/$ S稳定子$(\rho) \to X_v$的局部等距映射只有有限多个，它们诱导出 $\pi_1 X_v$-共轭类；而 $\pi_1 X_v$ 中形如 S稳定子(ρ)的无限子群也只有有限多个。由引理4.7可知，$\pi_1 X$ 相对于顶点群具有有限 stature。

我们通过以下步骤证明（6.1）：

- 在步骤1中，我们找到了一个足够大的常数 P。
- 在步骤 2 中，我们从 $\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0$ 中任意取一条长度为 P 的组合测地线 γ，并利用它为特定的 k 在 $\tilde{Y}_k^1$ 中构造一条拟直线（L_k，ϕ_k）。此外，L_k 包含一条很长的组合测地线 γ_b^k。

- 在步骤3中，我们将命题 5.9 应用于 γ_b^k 中拟直线 L_k的一条子线段，并得到一个与其拟同行的凸子复形 C_k。
- 在步骤4–5中，我们使用元素 ϕ_k 构造一个元素 ϕ，并通过反证法证明 $\phi \in \mathrm{Stab}(\rho)$。
- 在步骤 6 中，我们通过取 $\alpha \cdot \gamma \cap \gamma \neq \emptyset$ 来证明 $\alpha = \phi^d$，其中幂 d为某个值。这蕴含（6.1）。

步骤1。 求直径的上界 P。 我们考虑以下仅依赖于 X的常数：

(a) 假设 e, f 是 Γ 中的一对（不一定不同的）边，且有一个公共顶点 v。设它们的边空间的粘接映射分别为 $\varphi\colon X_e \to X_v$ 和 $\psi\colon X_f \to X_v$。根据推论 3.8，存在一个常数$S_{e,f,v}$，使得

$$\operatorname{diam}\left(g_1\tilde{X}_e \pitchfork g_2\tilde{X}_f \pitchfork g_3\tilde{X}_f / \varphi_*(\pi_1 X_e)^{g_1^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_2^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_3^{-1}}\right) \le S_{e,f,v}$$

对于任意 $g_1, g_2, g_3 \in \pi_1 X_v$。由于 X 是紧致的， Γ 是一个有限图。因此，这样的常数$S_{e,f,v}$只有有限多个。令

$$S = \max\{S_{e,f,v} \mid e, f \in E(\Gamma),\ v \text{ is a common vertex of } e, f\}.$$

(b) 再次假设， e、 f 是 Γ 中一对具有公共顶点v的边（不一定不同）。设它们的边空间的粘接映射分别为 φ: $X_e \to X_v$ 和 ψ： $X_f \to X_v$。回忆一下， X_Γ 的边是近似循环正规边。对于任意 g_1、 g_2、 $g_3 \in \pi_1 X$，假设以下条件之一成立：

- $e = f$ and g_1、 g_2、 g_3 表示 t distinct left cosets of $\varphi_*(\pi_1 X_e)$ in $\pi_1 X_v$;
- $e \neq f$和 g_2、 g_3表示 $\pi_1 X_v$中 $\psi_*(\pi_1 X_f)$ 的不同左陪集。

于是，子群 $\varphi_*(\pi_1 X_e)^{g_1^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_2^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_3^{-1}}$ 要么是平凡的，要么是无限循环的。在循环群情形下，该复形

$$g_1\tilde{X}_e \pitchfork g_2\tilde{X}_f \pitchfork g_3\tilde{X}_f / \varphi_*(\pi_1 X_e)^{g_1^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_2^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_3^{-1}}$$

提升为一条拟直线

$$\left(L = g_1\tilde{X}_e \pitchfork g_2\tilde{X}_f \pitchfork g_3\tilde{X}_f, \phi\right)$$

其中， ϕ 是 $\varphi_*(\pi_1 X_e)^{g_1^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_2^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_3^{-1}}$ 的生成元。根据推论3.8 以及我们在 S 中的选择（a），我们有

$$\operatorname{diam}\left(L/\varphi_*(\pi_1 X_e)^{g_1^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_2^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_3^{-1}}\right) \le S.$$

因此，在所有具有公共顶点 v 的（不一定互不相同的）边对 e、 $f \in E(\Gamma)$ 中，这类复形只有有限多个同构类。它们导出有限多个形如以下形式的 $\pi_1 X_v$-共轭子群类

$$\varphi_*(\pi_1 X_e)^{g_1^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_2^{-1}} \cap \psi_*(\pi_1 X_f)^{g_3^{-1}} \le \pi_1 X_v$$

对每个顶点 $v \in V(\Gamma)$ 都成立。因此，对每个 $v \in V(\Gamma)$，形如 $\left(g_1\tilde{X}_e \pitchfork g_2\tilde{X}_f \pitchfork g_3\tilde{X}_f, \phi\right)$ in $\tilde{X}_v$ 的拟直线只有有限多个同构类。收集 v 遍历 Γ 的顶点时， X_v 中所有拟直线的同构类，我们得到有限多个同构类，其代表元为

$$(L_1', \phi_1'), \ldots, (L_s', \phi_s').$$

假设 L_i' 具有 h_i 个平凡超平面。取 $h = \max\{h_i \mid 1 \le i \le s\}$。

(c) A应用命题 5.9 于 $(L_i'$、 $\phi_i')$，对于一条足够长的组合测地线，我们得到一条拟直线，其 e form

$$\left(\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} (\phi_i')^{pn_i}(C_i), (\phi_i')^{n_i}\right)$$

对于某个伴行凸子复形 C_i。根据命题5.9中的构造，每个准直线代表元（L_i'， ϕ_i'）在（b）中产生有限多个伴行子复形的同构类 C_i，它们在（ϕ_i'）^{n_i} 下的平移给出有限多个拟直线的同构类，其代表元为

$$(J_1, \xi_1), \cdots, (J_r, \xi_r).$$

将引理 5.13 应用于由上述一个代表元（J_i, ξ_i）和L'_j（ϕ'_j）中的一个代表元组成的对，我们得到一个常数 Q_{ij} 和一个整数 m_{ij}，使得 $\xi_i^{m_{ij}|\phi'_j|} = (\phi'_j)^{\pm m_{ij}|\xi_i|}$，只要 $\mathrm{diam}(J_i \pitchfork L'_j) \geq Q_{ij}$。然后令 Q 为最大值

$$Q = \max\{Q_{ij} \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s\}$$

并令 m 最小公倍数

$$m = LCM\{m_{ij} \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s\}.$$

(d) 根据引理 5.6，对于 L'_i, ϕ'_i 中 (b) 的每个拟直线代表元，L'_i 中所有本质超平面的直径都有一个上界。因此，对于 H 的每个本质超平面L'_i，其顶点数 $\#V(H)$ 有限。令

$$\mathcal{L} = \max_{1\leq i\leq s}\{\#V(H) \mid H \text{ is an essential hyperplane in } L'_i\}.$$

特别地，组合测地线穿过 L'_i的每个本质超平面 H 的可能方式至多有 $\mathcal{L}$ 种。

(e) Fo对于拟直线同构类的每个代表元 (L'_i, ϕ'_i)，在 (b) 中，引理 5.7 和命题 i-tio引理 5.9分别给出常数 M'_i和 B'_i, n'_i。取 $M =$最大值$_{1\leq i\leq s} M'_i$。然后令

$$B = \max_{1\leq i\leq s}\left\{B'_i, \frac{(2m\cdot|\phi'_1|\cdots|\phi'_s|\cdot\mathcal{L}+5)\,n'_iM}{2}, 2S, 2Q\right\}.$$

特别地，$B \geq B'_i$ 对于每个 i，$B \geq 2S$以及 $B \geq 2Q$。进一步地，如果我们将命题 5.9 应用于（L'_i, ϕ'_i），对于一条长度为 γ的组合测地线 $\geq 3B$，并得到子复形 $C_i \cup \phi_i^n(C_i) \cup \cdots \cup \phi_i^{n_i l_i}(C_i)$，根据注记 5.12,

$$l'_i \geq 2\frac{B}{n_iM_i} - 5 \geq 2m\cdot|\phi'_1|\cdots|\phi'_s|\cdot\mathcal{L}.$$

(f) 令 $R = 3B(h+1)+h$。特别地，$R > B > S$和 $\frac{R-h}{h+1} \geq 3B$。

(g) 最后，令 $T = \max\{(\#E(X_e))^R \mid e \in E(\Gamma)\}$。特别地，对于每个边空间 X_e，在 X_e 中长度为 R的可能组合路径至多有 T 条。

我们声称常数 $P = (T+1)R$ 满足（6.1），即对于 Bass–Serre 树中任意一条 ρ 且具有无限 $\mathrm{Stab}(\rho)$ 的有限路径，都有直径 $\left((\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0)/\mathrm{Stab}(\rho)\right) \leq P$。我们将在步骤 2–7 中证明这一点。

步骤 2. 构造第一条拟直线。设 $\rho: [0,n] \to \mathcal{T}$是一条具有无限 S稳定子$(\rho)$ 的有限路径。要证明 (6.1)，只需证明对每条长度为 P 的组合测地线 $\gamma \subset \tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0$，都存在$\alpha \in$ S稳定子(ρ)，使得 $\alpha\cdot\gamma \cap \gamma \neq \emptyset$。

设 $\gamma \subset \tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0 \subset \tilde{Y}_1^0$是一条任意的、长度为 $P = (T+1)R$ 的组合测地线。将其分解为 $T+1$ 条组合测地线 $\gamma = \gamma_0 * \gamma_1 * \cdots * \gamma_T$ 的连接，其中每条 γ_i的长度为R。根据我们在 T 中对 (g) 的选择，其中两条，记作 γ_a 和 γ_b，满足 $a \neq b$，在 Y_1 中有相同的像。因此，存在非平凡的 $g \in$稳定子$(\tilde{Y}_1^0) =$稳定子$(\rho[0,1])$，使得 $g\cdot\gamma_a = \gamma_b$。

若 $g \notin$ S稳定子(ρ)，那么 $\gamma_b = g\cdot\gamma_a \subset g\cdot\gamma \cap \gamma \neq \emptyset$ 且 g 是所需的元素 α。假设 $g \notin$ S稳定子(ρ)，那么存在一个最小的 $k \geq 1$ 使得 $g \in$ S稳定子$(\rho[0,k]) \setminus$ S稳定子$(\rho[k,k+1])$. 特别地，

$$g \in \mathrm{Stab}(\rho[k-1,k]) \setminus \$\mathrm{tab}(\rho[k,k+1]) = \mathrm{Stab}(\tilde{Y}_k^1) \setminus \mathrm{Stab}(\tilde{Y}_{k+1}^0).$$

那么，Stab$(\tilde{Y}_k^1)$、Stab$(\tilde{Y}_{k+1}^0)$、Stab$(\tilde{Y}_{k+1}^0)^{g^{-1}}$ 在 Stab$(\tilde{X}_k)$ 中是彼此不同的。由于这些边是近似循环正规的，根据备注 6.3，交集 Stab$(\tilde{Y}_k^1) \cap$Stab$(\tilde{Y}_{k+1}^0) \cap$Stab$(\tilde{Y}_{k+1}^0)^{g^{-1}}$要么是平凡的，要么是无限循环群。当它是无限循环群时，取 Stab$(\tilde{Y}_k^1) \cap$Stab$(\tilde{Y}_{k+1}^0) \cap$Stab$(\tilde{Y}_{k+1}^0)^{g^{-1}}$的一个生成元 ϕ_k，我们得到一条拟直线

$$\left(L_k = \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_{k+1}^0 \pitchfork g\tilde{Y}_{k+1}^0, \phi_k\right)$$

在 $\tilde{Y}_k^1 \subset \tilde{X}_k$ 如图6所示。

我们声称，子群稳定子$(\tilde{Y}_k^1) \cap$稳定子$(\tilde{Y}_{k+1}^0) \cap$稳定子$(\tilde{Y}_{k+1}^0)^{g^{-1}}$必为无限循环群。事实上，回忆一下 $\gamma_b = g\cdot\gamma_a \subset \gamma \cap g\cdot\gamma$。由于$\gamma \subset \tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_n^0 = \tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0$且 $g \in$稳定子$(\rho[0,k]) =$

稳定子$(\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_k^1)$，我们有

$$\begin{aligned}\gamma_b \subset \gamma \cap g\cdot\gamma &\subset (\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0) \cap g(\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0)\\ &\subset (\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_{k+1}^0) \cap g(\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_{k+1}^0)\\ &= (\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_{k+1}^0) \cap (\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork g\tilde{Y}_{k+1}^0)\\ &\subset \tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_{k+1}^0 \pitchfork g\tilde{Y}_{k+1}^0\\ &= \tilde{Y}_1^0 \pitchfork L_k.\end{aligned}$$

将此与包含映射 $\gamma_b \subset \gamma$ 结合起来，我们得到

$$\gamma_b \subset (\tilde{Y}_1^0 \pitchfork L_k) \cap \gamma \subset (\tilde{Y}_1^0 \pitchfork L_k) \cap (\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0) \subset \tilde{Y}_1^0 \pitchfork L_k \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0.$$

根据桥定理 3.2， γ_b 与其投影等距

$$\gamma_b^k := \Pi_{L_k \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0}(\gamma_b) \subset L_k \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0. \tag{6.2}$$

特别是，

$$\operatorname{diam}(L_k) \geq \operatorname{diam}(L_k \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0) \geq \operatorname{diam}\left(\gamma_b^k\right) = \operatorname{diam}(\gamma_b) = R > S.$$

另一方面，根据推论 3.8 以及我们在 S 中的选择 (a)，我们得到

$$\operatorname{diam}\left(L_k / \operatorname{Stab}(\tilde{Y}_k^1) \cap \operatorname{Stab}(\tilde{Y}_{k+1}^0) \cap \operatorname{Stab}(\tilde{Y}_{k+1}^0)^{g^{-1}}\right) \leq S.$$

这表明子群 $\operatorname{Stab}(\tilde{Y}_k^1) \cap \operatorname{Stab}(\tilde{Y}_{k+1}^0) \cap \operatorname{Stab}(\tilde{Y}_{k+1}^0)^{g^{-1}}$ 是非平凡的。

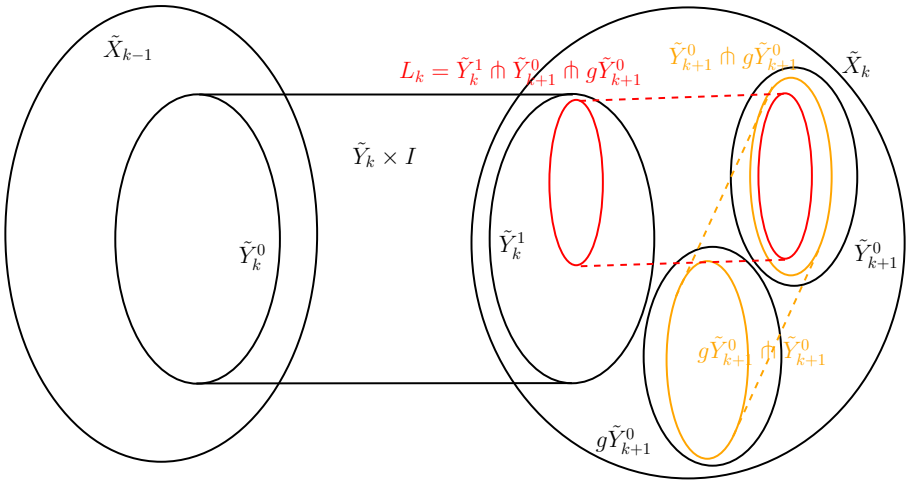

FIGURE 6. 拟直线 $L_k = \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_{k+1}^0 \pitchfork g\tilde{Y}_{k+1}^0$ 在 $\tilde{Y}_k^1$中显示为红色区域。虚线表示投影的桥结构。

步骤3。 在拟直线 C_k 中构造一个伴行凸子复形。 回顾（6.2）可知$\gamma_b^k \subset L_k \pitchfork \tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0$。特别地， γ_b^k是拟直线（L_k， ϕ_k）中的一条组合测地线，其长度为

$$\operatorname{diam}(\gamma_b^k) = \operatorname{diam}(\gamma_b) = R = 3B(h+1) + h.$$

根据我们在 h （b）中对 L_k 的选择，拟直线 $\leq h$ 具有 γ_b^k 个平凡超平面。由于 γ_b^k 至多穿过每个超平面一次，因此它包含一个长度为$\geq \frac{R-h}{h+1} \geq 3B$ 的子线段 $\bar{\gamma}_b^k$， 该子线段不穿过 L_k的任何平凡超平面。将命题5.9 应用于拟直线（ $\bar{\gamma}_b^k$中的组合测地线L_k， ϕ_k）以及凸子复形 $W = L_k \pitchfork (\tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0)$ ，我们得到一个伴行凸子复形$C_k \subset L_k$ 和整数 n_k， l_k 使得

- $\bar{\gamma}_b^k$ 包含一个长度为直径$(\bar{\gamma}_b^k)$的子线段 $\hat{\gamma}_b^k > B$ ，满足

$$\hat{\gamma}_b^k \subset C_k \cup \phi_k^{n_k}(C_k) \cup \cdots \cup \phi_k^{n_k l_k}(C_k) \subset L_k \pitchfork (\tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0); \tag{6.3}$$

- the pair $\left(\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \phi_k^{pn_k}(C_k), \phi_k^{n_k}\right)$ is a quasiline.

此外，根据我们对 B 在(e)中的选择，我们有

$$l_k \geq 2m \cdot |\phi_1'| \cdots |\phi_s'| \cdot \mathcal{L} \geq 2m \cdot |\phi_1'| \cdots |\phi_s'|. \tag{6.4}$$

特别是，

$$\operatorname{diam}\left(\bigcup_{p=m\cdot|\phi_1'|\cdots|\phi_s'|}^{l_k} \phi_k^{pn_k}(C_k)\right) \geq \frac{1}{2}\operatorname{diam}\left(\bigcup_{p=0}^{l_k} \phi_k^{pn_k}(C_k)\right) \geq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\widehat{\gamma}_b^k) > B/2 \geq S. \tag{6.5}$$

步骤 4。 构造一个元素 ϕ 属于 S稳定子(ρ)ₕ 我们声称 $\phi = \phi_k^{n_k\beta} \in$ S稳定子(ρ)，其中整数 $\beta = m \cdot |\phi_1'| \cdots |\phi_s'|$。我们在步骤4–5中证明这一点。

假设 $\phi_k^{n_k\beta} \notin$ S稳定子(ρ)。回想一下，由于 $\phi_k \in$ 稳定子$(L_k) \leq$ S稳定子$(\rho[k-1,k+1])$，存在一个整数 $t \neq k$ 使得 $\phi_k^{n_k\beta} \notin$ 稳定子$(\rho[t,t+1])$。不失一般性，假设 $t > k$，而情形 $t < k$ 可由对称性类似处理。

令 $t \geq k+1$ 为满足下列条件的最小整数

$$\phi_k^{n_k\beta} \in \operatorname{Stab}(\rho[k-1,t]) \setminus \operatorname{Stab}(\rho[t,t+1]) \leq \operatorname{Stab}(\tilde{Y}_t^1) \setminus \operatorname{Stab}(\tilde{Y}_{t+1}^0). \tag{6.6}$$

于是，Stab($\tilde{Y}_t^1$)、Stab($\tilde{Y}_{t+1}^0$)、Stab($\tilde{Y}_{t+1}^0$)$^{\phi_k^{-n_k\beta}}$ 是 Stab($\tilde{X}_t$) 中彼此不同的三个子群。由于这些边是近似循环正规，根据备注 6.3，子群 Stab($\tilde{Y}_t^1$) ∩Stab($\tilde{Y}_{t+1}^0$) ∩Stab($\tilde{Y}_{t+1}^0$)$^{\phi_k^{-n_k\beta}}$ 要么是平凡群，要么是无限循环群。当它是无限循环群时，取 Stab($\tilde{Y}_t^1$) ∩Stab($\tilde{Y}_{t+1}^0$) ∩Stab($\tilde{Y}_{t+1}^0$)$^{\phi_k^{-n_k\beta}}$ 的一个生成元 ϕ_t，我们得到一条拟直线

$$\left(L_t = \tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_{t+1}^0 \pitchfork \phi_k^{n_k\beta}(\tilde{Y}_{t+1}^0), \phi_t\right)$$

在 $\tilde{Y}_t^1$中，如图7所示。

我们断言，子群 稳定子($\tilde{Y}_t^1$) ∩稳定子($\tilde{Y}_{t+1}^0$) ∩稳定子($\tilde{Y}_{t+1}^0$)$^{\phi_k^{-n_k\beta}}$ 必为无限循环。为说明这一点，注意到（6.3）给出

$$C_k \cup \phi_k^{n_k}(C_k) \cup \cdots \cup \phi_k^{n_k l_k}(C_k) \subset L_k \pitchfork (\tilde{Y}_k^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0) = L_k \pitchfork (\tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0). \tag{6.7}$$

由于 $\phi_k^{n_k\beta} \in$ 稳定子$(\rho[k-1,t]) \cap$ 稳定子$(L_k) \leq$ 稳定子$(L_k \pitchfork \tilde{Y}_t^1)$，我们有

$$\begin{aligned}
\bigcup_{p=\beta}^{l_k} \phi^{pn_k}(C_k) &\subset \left(C_k \cup \cdots \cup \phi_k^{n_k l_k}(C_k)\right) \cap \phi_k^{n_k\beta}\left(C_k \cup \cdots \cup \phi_k^{n_k l_k}(C_k)\right) \\
&\subset \left(L_k \pitchfork (\tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0)\right) \cap \phi_k^{n_k\beta}\left(L_k \pitchfork (\tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0)\right) \\
&\subset \left(L_k \pitchfork (\tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_{t+1}^0)\right) \cap \phi_k^{n_k\beta}\left(L_k \pitchfork (\tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_{t+1}^0)\right) \\
&= \left(L_k \pitchfork \tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_{t+1}^0\right) \cap \left(L_k \pitchfork \tilde{Y}_t^1 \pitchfork \phi_k^{n_k\beta}(\tilde{Y}_{t+1}^0)\right) \\
&\subset L_k \pitchfork \left(\tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_{t+1}^0 \pitchfork \phi_k^{n_k\beta}(\tilde{Y}_{t+1}^0)\right) \\
&= L_k \pitchfork L_t.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

结合（6.7），我们有

$$\bigcup_{p=\beta}^{l_k} \phi^{pn_k}(C_k) \subset (L_k \pitchfork L_t) \cap (L_k \pitchfork \tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0) \subset L_k \pitchfork L_t \pitchfork \tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0. \tag{6.9}$$

由（6.5）回忆，直径 $\left(\bigcup_{p=\beta}^{l_k} \phi^{pn_k}(C_k)\right) > S$。因此，

$$\operatorname{diam}(L_t) \geq \operatorname{diam}(L_k \pitchfork L_t \pitchfork \tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0) \geq \operatorname{diam}\left(\bigcup_{p=\beta}^{l_k} \phi^{pn_k}(C_k)\right) > S.$$

另一方面，根据推论 3.8 以及我们在 S 中对(a)的选择，我们有

$$\operatorname{diam}\left(L_t / \operatorname{Stab}(\tilde{Y}_t^1) \cap \operatorname{Stab}(\tilde{Y}_{t+1}^0) \cap \operatorname{Stab}(\tilde{Y}_{t+1}^0)^{\phi_k^{-n_k\beta}}\right) \leq S.$$

这表明子群 Stab($\tilde{Y}_t^1$) ∩Stab($\tilde{Y}_{t+1}^0$) ∩Stab($\tilde{Y}_{t+1}^0$)$^{\phi_k^{-n_k\beta}}$ 是非平凡的。

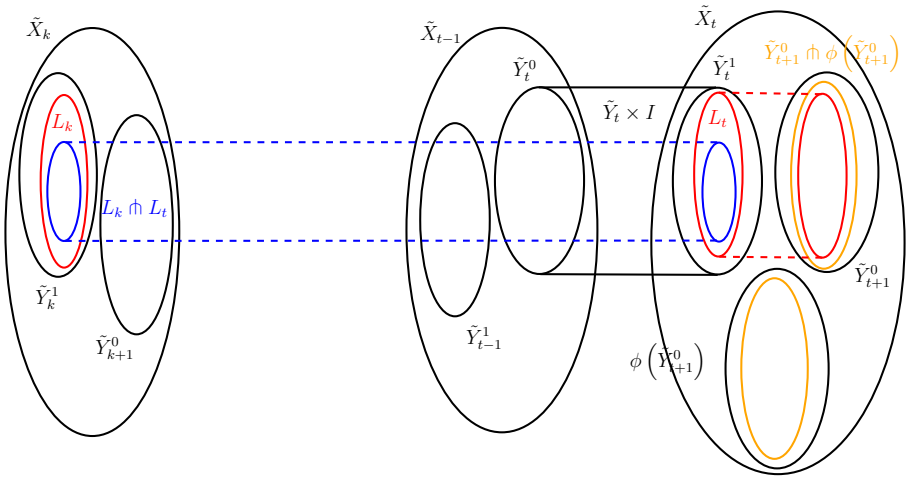

FIGURE 7. 图中以红色区域表示两条拟直线 L_k 和 L_t 。蓝色区域是它们的投影 $L_k \pitchfork L_t \cong L_t \pitchfork L_k$的桥。

步骤 5。 通过矛盾证明 $\phi \in \mathrm{Stab}(\rho)$ 。基于步骤 *4* 中拟直线（L_t， ϕ_t）的构造，我们断言（$\phi_k^{n_k}$）$^{m|\phi_t|} = \phi_t^{\pm m n_k |\phi_k|}$ 。由于（L_t， ϕ_t）属于(b)中的一个拟直线同构类，因此存在 i_t 使得（L_t， ϕ_t）与代表元（L'_{i_t}， ϕ'_{i_t}）同构。于是元素

$$\phi = \phi_k^{n_k \beta} = \phi_k^{n_k \cdot m \cdot |\phi'_1| \cdots |\phi'_s|} = \phi_t^{\pm n_k \cdot m \cdot |\phi'_1| \cdots |\widehat{\phi'_{i_t}}| \cdots |\phi'_s| \cdot |\phi_k|}$$

是 ϕ_t 的幂，因此是稳定子 $\mathsf{Stab}(\rho[t, t+1])$ 的一个元素。这与 (6.6) 中的假设矛盾。因此，我们必有 $\phi = \phi_k^{n_k \beta} \in \mathrm{Stab}(\rho)$。

现在，我们证明断言 $(\phi_k^{n_k})^{m|\phi_t|} = \phi_t^{\pm m n_k |\phi_k|}$ 。思路是比较同一顶点空间 $\tilde{}$中的两条 X_t拟直线。为此，回顾 (6.9) 可知

$$\bigcup_{p=\beta}^{l_k} \phi^{p n_k}(C_k) \subset L_k \pitchfork L_t \pitchfork \tilde{Y}_t^1 \pitchfork \tilde{Y}_n^0 \subset L_k \pitchfork L_t \subset L_k \pitchfork \tilde{Y}_t^1. \tag{6.10}$$

由 (6.4)， $l_k \geq 2m \cdot |\phi'_1| \cdots |\phi'_s| \cdot \mathcal{L} \geq 2\beta$。因此，

$$\bigcup_{p=\beta}^{2\beta} \phi^{p n_k}(C_k) \subset \bigcup_{p=\beta}^{l_k} \phi^{p n_k}(C_k) \subset L_k \pitchfork \tilde{Y}_t^1.$$

由于 $\phi_k^{n_k \beta} \in \mathsf{Stab}(L_k) \cap \mathsf{Stab}(\rho[k-1, t]) \leq \mathsf{Stab}(L_k \pitchfork \tilde{Y}_t^1)$，我们有

$$\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \phi^{p n_k}(C_k) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \phi_k^{p n_k \beta} \left(\bigcup_{p=\beta}^{2\beta} \phi^{p n_k}(C_k) \right) \subset L_k \pitchfork \tilde{Y}_t^1.$$

将其投影到 $\tilde{Y}_t^1$ 后，我们得到 $\tilde{Y}_t^1 \subset \tilde{X}_t$ 中的一条拟直线，表示为

$$\left(J_t = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \phi^{p n_k}(C_t), \phi_k^{n_k} \right),$$

˜其中 $C_t = \Pi_{\tilde{Y}^1_t}(C_k)$。现在我们比较 X_t 中的两条拟直线 $(J_t, \phi_k^{n_k})$ 和 (L_t, ϕ_t)。

根据我们的构造，我们有 $\bigcup_{p=\beta}^{l_k} \phi^{p n_k}(C_k) \subset L_k \pitchfork \left(\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \phi^{p n_k}(C_t) \right) = L_k \pitchfork J_t$。结合这一点和 (6.10)，我们得到

$$\bigcup_{p=\beta}^{l_k} \phi^{p n_k}(C_k) \subset (L_k \pitchfork J_t) \cap (L_k \pitchfork L_t) \subset L_k \pitchfork J_t \pitchfork L_t.$$

由（6.5）以及我们在 B 中(e)的选择可知

$$\operatorname{diam}(J_t \pitchfork L_t) \geq \operatorname{diam}\left(\bigcup_{p=\beta}^{l_k} \phi^{p n_k}(C_k) \right) > \frac{B}{2} \geq Q.$$

注意，L_t、ϕ_t）和（J_t、$\phi_k^{n_k}$）分别是在(b) 和(c) 中构造的拟直线。将引理5.13应用于两条拟直线（J_t、$\phi_k^{n_k}$）和（L_t、ϕ_t）。根据我们在 Q 和 m 中的(c)选择，有

$$(\phi_k^{n_k})^{m|\phi_t|} = \phi_t^{\pm m|\phi_k^{n_k}|} = \phi_t^{\pm mn_k|\phi_k|}.$$

这就完成了该断言的证明。

步骤 6. 证明该断言 $\alpha \cdot \gamma \cap \gamma \neq \emptyset$。根据步骤 5，我们得到一个元素 $\phi \in \mathrm{Stab}(\rho)$。我们声称，取 $\alpha = \phi^d$ 某个非零整数 d，即可得到 $\alpha \cdot \gamma \cap \gamma \neq \emptyset$ 步骤 2 中原始断言所要求的结果。

回忆 (6.4) 可知

$$l_k \geq 2m \cdot |\phi_1'| \cdots |\phi_s'| \cdot \mathcal{L} = 2\beta\mathcal{L} > \beta\mathcal{L}.$$

因此，$n_k l_k > n_k \beta \mathcal{L}$。根据注记 5.11，存在一个本质超平面 H，位于 L_k 并与 $\widehat{\gamma}_b$相交，其载体$N(H)$与 C_k相交。它在 $\langle \phi = \phi_k^{n_k\beta} \rangle$ 的作用下的轨道随后给出至少 $\mathcal{L}+1$ 个与$\widehat{\gamma}_b$ 的交集，如下所示

$$v_0 = H \cap \widehat{\gamma}_b, \quad v_1 = \phi(H) \cap \widehat{\gamma}_b, \quad \ldots, \quad v_{\mathcal{L}} = \phi^{\mathcal{L}}(H) \cap \widehat{\gamma}_b,$$

这诱导出下方给出的 $\mathcal{L}+1$ H 的顶点

$$v_0, \quad \phi^{-1}(v_1), \quad \ldots, \quad \phi^{-\mathcal{L}}(v_{\mathcal{L}}).$$

By o我们在 $\mathcal{L}$ 步骤1(d)的构造中，存在 $p \neq q$ 使得 $\phi^{-p}(v_p) = \phi^{-q}(v_q)$。因此 ,

$$v_q = \phi^{p-q}(v_p) \in \widehat{\gamma}_b \cap \phi^{p-q}(\widehat{\gamma}_b) \subset \gamma \cap \phi^{p-q}(\gamma).$$

这说明 $\gamma \cap \alpha \cdot \gamma \neq \emptyset$ 满足 $\alpha = \phi^{p-q}$。如步骤 2 中所述，由于组合测地线 γ 是任意的，我们得出 (6.1) 成立。证明完毕。□

6.2. **近似循环正规路径**。在定理 6.4的证明中，我们使用边近似循环正规的条件来构造拟直线。事实上，可以将此条件推广为假设长度为 n的路径稳定子群具有几乎 cyclonormal 性。

定义 6.6。设 X_Γ 是一个非正曲率立方复形图，其关联的 Bass– Serre 树为 $\mathcal{T}$。设 $n > 0$ 为一个整数。若 X_Γ 具有长度为 n 的近似循环正规路径，则称之为此性质；若对 $\mathcal{T}$ 的任意顶点 $\tilde{v}$，以下条件均成立：

(1) 对于从 $\tilde{v}$ 出发的任意长度为 n 的路径 $\rho\colon [0,n] \to \mathcal{T}$。若 $g_1, g_2, g_3 \in \mathrm{Stab}(\tilde{v})$ 表示 $\mathrm{Stab}(\tilde{v})$ 中 $\mathrm{Stab}(\rho)$ 的不同左陪集，则子群 $\mathrm{Stab}(\rho)^{g_1} \cap \mathrm{Stab}(\rho)^{g_2} \cap \mathrm{Stab}(\rho)^{g_3}$ 或为平凡群，或为循环群。(2) 对于从 $\tilde{v}$ 出发的任意两条不同的长度为 n 的路径 $\rho, \sigma\colon [0,n] \to \mathcal{T}$。若 $g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}(\tilde{v})$ 表示 $\mathrm{Stab}(\tilde{v})$ 中 $\mathrm{Stab}(\sigma)$ 的不同左陪集，则子群 $\mathrm{Stab}(\rho) \cap \mathrm{Stab}(\sigma)^{g_1} \cap \mathrm{Stab}(\sigma)^{g_2}$ 或为平凡群，或为循环群。|

Noti说明 X_Γ 在具有长度为 1 的近似循环正规路径时，其边几乎循环正规 .

推论 6.7。设 X 是一个紧立方复形，并且分解为虚拟特殊立方复形X_Γ的图。如果 X_Γ 具有长度为 n 的几乎循环正规路径，其中 $n > 0$为某个整数，则 $\pi_1 X$ 关于顶点群具有有限 *stature*。

在证明推论 6.7之前，我们引入以下结果，作为推论 3.8的类比。

引理 6.8。设 X 为一个紧致虚特殊立方复形。对于任意常数 $S > 0$，存在一个取决于 X、S 的常数 T，使得以下结论成立：

对于任意整数 $m > 0$ 以及紧致虚特殊˜ ˜立方复形的局部等距映射序列 A_1、$\cdots$、$A_m \to X$。设 A_i 为 A_i 到 X的基点提升。若对于每个 i都有 直径$(A_i) \leq S$，则

$$\mathrm{diam}\left(\pitchfork_{i=1}^m g_i \tilde{A}_i / \cap_{i=1}^m \mathrm{Stab}(g_i \tilde{A}_i)\right) \leq T$$

对于任意 g_1、$\cdots$、$g_m \in \pi_1 X$。

证明。注意，直径为 $\leq S$ 且存在到 X的局部等距映射的非正曲率立方复形只有有限多个同构类。这些复形给出了到 X的有限多个可能的局部等距映射，记为 $B_1, \cdots, B_n \to X$。这里，复形 $B_1, \cdots, B_n$不一定彼此不同，因为它们可能对应于同一同构类的不同局部等距映射。于是，每个局部等距映射 $A_i \to X$ 都与某个 $B_{n_i} \to X$ 重合，其中 n_i。因此，由推论 3.8(1)，存在一个常数 T，它取决于局部等距映射 $B_1, \cdots, B_n \to X$，因而取决于 X, S，使得

$$\mathrm{diam}\left(\pitchfork_{i=1}^m g_i \tilde{A}_i / \cap_{i=1}^m \pi_1 A_i^{g_i^{-1}}\right) = \mathrm{diam}\left(\pitchfork_{i=1}^m g_i \tilde{B}_{n_i} / \cap_{i=1}^m \pi_1 B_{n_i}^{g_i^{-1}}\right) \leq T$$

对于任意整数 m和元素 g_1，$\cdots$，$g_m \in \pi_1 X$。 □

˜回顾一下，在万有覆盖 X中，有限路径 $\rho:\ [0,m]\to\mathcal{T}$对应于一个子空间 e

$$\bigsqcup_{i=0}^{m}\tilde{X}_i\sqcup\left(\bigsqcup_{j=1}^{m}\tilde{Y}_j\times[0,1]\right)/\sim$$

其中 X_0、X_1、……、X_m和 Y_1、……、Y_m是 X_Γ中的顶点空间和边空间（不一定互不相同）。

推论 6.9。设 X 是一个可分解为虚拟特殊立方复形图X_Γ的紧立方复形。设 $\mathcal{T}$ 是相应的 *Bass–Serre* 树。那么，对于任意整数 $n\geq 1$，存在一个依赖于 n 和 X的常数 S，使得对于任意长度为 $1\leq m\leq n$ 的路径 $\rho:\ [0,m]\to\mathcal{T}$，使用上述记号，有

$$\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_1^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0/\$\mathrm{tab}(\rho)\right)\leq S.$$

证明。我们对 n使用归纳法证明。当 $n=1$时，考虑 X_Gamma的边空间 $\{X_e\mid e\in\Gamma\}$。取

$$S_1=\max\{\operatorname{diam}(X_e)\mid e\in E(\Gamma)\}.$$

˜由于 $Y_1/\mathsf{Stab}(\rho[0,1])=Y_1$是一个边空间，其直径有上界 S_1。

现在假设该命题对 $n-1$ 成立，且常数为 S_{n-1}。特别地，根据我们对 S_1的构造，有 $S_{n-1}\geq S_1$。对于每个顶点空间 X_v，将引理 6.8 应用于常数 S_{n-1}，可得到一个常数 T_v，它依赖于 X_v和 S_{n-1}。我们断言 $S=\max\{T_v,S_{n-1}\mid v\in V(\Gamma)\}$ 满足该命题。

事实上，对于任意路径 $\rho:\ [0,m]\to\mathcal{T}$，若 $m\leq n-1$，则由归纳假设可得

$$\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_1^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0/\$\mathrm{tab}(\rho)\right)\leq S_{n-1}\leq S.$$

若 ρ的长度为 n，则可将其分解为长度为 1 的路径$\rho[0,1]$与长度为 $(n-1)$ 的路径 $\rho[1,n]$的串接 $\rho=\rho[0,1]*\rho[1,n]$。此时有

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_1^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0/\$\mathrm{tab}(\rho)\right)&=\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_1^0\pitchfork\left(\tilde{Y}_2^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0\right)/\$\mathrm{tab}(\rho[0,1])\cap\$\mathrm{tab}(\rho[1,n])\right)\\&=\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_1^0\pitchfork\left(\tilde{Y}_2^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0\right)/\operatorname{Stab}\left(\tilde{Y}_1^0\right)\cap\operatorname{Stab}\left(\tilde{Y}_2^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0\right)\right).\end{aligned}$$

注意，X_1是某个 $v\in V(\Gamma)$ 的顶点空间 X_v。因为，$\tilde{Y}_1^0$是 $\tilde{Y}_1^0/\operatorname{Stab}\left(\tilde{Y}_1^0\right)$到$\tilde{X}_v$的一个提升，而 $\tilde{Y}_2^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0$是 $\left(\tilde{Y}_2^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0\right)/\operatorname{Stab}\left(\tilde{Y}_2^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0\right)$的一个提升。根据归纳假设，有

$$\operatorname{diam}(Y_1)\leq S_1\leq S_{n-1},\quad\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_2^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0\right)/\operatorname{Stab}\left(\tilde{Y}_2^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0\right)\leq S_{n-1}.$$

因此，由引理 6.8 以及我们对 T_v的构造，可得

$$\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_1^0\pitchfork\left(\tilde{Y}_2^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0\right)/\operatorname{Stab}\left(\tilde{Y}_1^0\right)\cap\operatorname{Stab}\left(\tilde{Y}_2^0\pitchfork\tilde{Y}_m^0\right)\right)\leq T_v\leq S.$$

这就完成了归纳法，从而完成了证明。 □

推论 *6.7* 的证明。设非正曲率立方复形图 X_Γ 具有长度为 n的近似循环正规路径。正如定理6.4的证明中所述，只需证明，对于关联的 Bass–Serre 树中的任意路径 $\rho:\ [0,s]\to\mathcal{T}$，都有

$$\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_1^0\pitchfork\tilde{Y}_s^0/\$\mathrm{tab}(\rho)\right)\leq P \tag{6.11}$$

其中常数 P 仅取决于 X。为证明（6.11），我们先对 $\mathcal{T}$上的路径作如下观察。

设 $\sigma:\ [0,m]\to\mathcal{T}$ 是一条长度为 $m\leq n$、始于 $\tilde{v}=\sigma(0)$ 的路径，其中 $\mathsf{Stab}(\tilde{v})=\pi_1X_v$。假设它对应于万有覆盖 $\tilde{X}$ 中的子空间 $\bigsqcup_{i=0}^{n}\tilde{X}_i\sqcup\left(\bigsqcup_{j=1}^{n}\tilde{Y}_j\times[0,1]\right)/\sim$。记 $\tilde{Y}_1^0\pitchfork\tilde{Y}_n^0$的投影为 $\tilde{Y}_\sigma$。那么，逐点稳定子 $\mathsf{Stab}(\sigma)$ 由一个局部等距表示$Y_\sigma/\mathsf{Stab}(\sigma)\to X_0=X_v$。类似地，设 $\xi:\ [0,r]\to\mathcal{T}$ 是另一条（不一定不同的）长度为$r\leq n$、始于 $\tilde{v}=\xi(0)$ 的路径。那么，$\mathsf{Stab}(\xi)$ 由一个局部等距 $Y_\xi/\mathsf{Stab}(\xi)\to X_v$ 表示。

Since σ，ξ 都是长度为 $\leq n$ 的路径。根据推论 6.9，存在一个常数 S 使得 t

$$\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_\sigma/\$\mathrm{tab}(\sigma)\right)\leq S,\quad\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_\xi/\$\mathrm{tab}(\xi)\right)\leq S. \tag{6.12}$$

应用引理 6.8 于常数 S 和顶点空间 X_v，我们得到一个常数 T_v。特别地，对于任意 $g \in \pi_1 X_v$，都有

$$\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_\sigma \pitchfork \tilde{Y}_\xi \pitchfork g\tilde{Y}_\xi / \$\mathrm{tab}(\sigma) \cap \$\mathrm{tab}(\xi) \cap \$\mathrm{tab}(\xi)^{g^{-1}}\right) \leq T_v. \tag{6.13}$$

因此，这类复形只有有限多个同构类。

假设 σ, ξ 的长度为 n。当存在 $g \in \mathsf{Stab}(\sigma) \setminus \mathsf{Stab}(\xi)$ 时，三个子群 $\mathsf{Stab}(\sigma)$、$\mathsf{Stab}(\xi)$、$\mathsf{Stab}(\xi)^{g^{-1}}$ 在 $\mathsf{Stab}(\tilde{v})$ 中两两不同。由于 X_Γ 具有长度为 n 的近似循环正规路径，交集 $\mathsf{Stab}(\sigma) \cap \mathsf{Stab}(\xi) \cap \mathsf{Stab}(\xi)^{g^{-1}}$ 不是平凡群就是无限循环群。当它是循环群时，取一个生成元 ϕ，即可得到一条拟直线

$$\left(\tilde{Y}_\sigma \pitchfork \tilde{Y}_\xi \pitchfork g\tilde{Y}_\xi, \phi\right). \tag{6.14}$$

由于形如（6.13）的复形只有有限多个同构类，因此这类拟直线也只有有限多个同构类。

现在我们采用定理 6.4证明中的相同论证，并将步骤1(b) 中的拟直线代表替换为形如（6.14）的拟直线的有限多个同构类。于是，同样的证明给出一个常数 P_n 使得

$$\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_{kn}^0 / \$\mathrm{tab}(\rho)\right) \leq P_n$$

对任意整数 $k \geq 0$。这证明了当 6.11 中 ρ 的长度为 kn 时的结论。

更一般地，对于长度为 s 的路径 $\rho\colon [0,s] \to \mathcal{T}$，假设对于某些整数 $k \geq 0$ 和 $0 \leq m < n$，有 $s = kn + m$。那么，我们可以将 ρ 分解为拼接 $\rho = \rho[0,kn] * \rho[kn,s]$。回想一下，它对应于 $\tilde{X}$ 中的子空间 $\bigsqcup_{i=0}^{s} \tilde{X}_i \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{s} \tilde{Y}_j \times [0,1]\right) / \sim$。由于 $\rho[0,kn]$ 的长度是 n 的倍数，上述论证表明

$$\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_{kn}^0 / \$\mathrm{tab}(\rho[0,kn])\right) = \operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_{kn}^1 \pitchfork \tilde{Y}_1^1 / \$\mathrm{tab}(\rho[0,kn])\right) \leq P_n.$$

由于 $m < n$，推论 6.9 以及 (6.12) 中的讨论蕴含

$$\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_{kn+1}^0 \pitchfork \tilde{Y}_s^0 / \$\mathrm{tab}(\rho[kn,s])\right) \leq S$$

设 $X_{kn} = X_u$ 对于某个顶点 $u \in V(\Gamma)$。将引理 6.8 应用于常数 $\max\{P_n, S\}$ 和局部等距映射

$$\left(\tilde{Y}_{kn}^1 \pitchfork \tilde{Y}_1^1 / \$\mathrm{tab}(\rho[0,kn])\right) \to X_{kn} = X_u, \quad \tilde{Y}_{kn+1}^0 \pitchfork \tilde{Y}_m^0 / \$\mathrm{tab}(\rho[kn,s]) \to X_u,$$

我们得到一个常数 P_u，使得

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}\left(\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_s^0 / \$\mathrm{tab}(\rho)\right) &= \operatorname{diam}\left(\left(\tilde{Y}_1^0 \pitchfork \tilde{Y}_{kn}^0\right) \pitchfork \left(\tilde{Y}_{kn+1}^0 \pitchfork \tilde{Y}_m^0\right) / \$\mathrm{tab}(\rho)\right) \\
&= \operatorname{diam}\left(\left(\tilde{Y}_{kn}^1 \pitchfork \tilde{Y}_1^1\right) \pitchfork \left(\tilde{Y}_{kn+1}^0 \pitchfork \tilde{Y}_m^0\right) / \$\mathrm{tab}(\rho)\right) \\
&\leq P_u.
\end{aligned}$$

因此，取最大值（6.11）即可得到 $P =$ 最大值$\{P_u \mid u \in V(\Gamma)\}$。至此，证明完成。□

References

[AGM16] Ian Agol、Daniel Groves 和 Jason Fox Manning。Wise 的几何有限特殊商定理的另一种证明。 *Forum of Mathematics, Pi*, 4:e1, 2016. [Ago13] Ian Agol。虚拟 Haken 猜想。 *Documenta Mathematica*, 18:1045–1087, 2013. 附录由 Ian Agol、Daniel Groves 和 Jason Manning 撰写。[BH99] Martin R. Bridson 和 Andr´ *Metric Spaces of Non-Positive Curvature* 319 *Grundlehren* e Haefliger。 , *der mathematischen Wissenschaften* 1 1999 卷的 。施普林格出版社（柏林海德堡），柏林，海德堡，版，。[Bow24] Brian H. Bowditch。中位代数。 https://bhbowditch.com/papers/median-algebras.pdf, 2024. [CFI16] Indira Chatterji、Talia Fern´os 和 Alessandra Iozzi。CAT(0)立方复形上作用的中位类与超刚性。 *Journal of Topology*, 9(2):349–400, 2016. [CS11] Pierre-Emmanuel Caprace 和 Michah Sageev。CAT(0 *Geometric and Func-*)立方复形的秩刚性。 *tional Analysis* 21 4 851 891, 2011 , ( ): – . [DK92] G. Duchamp 和 D. Krob。自由部分交换群的下中心列。 *Semigroup Forum*, 45 385 394, 1992 : – .[Fio23] Elia Fioravanti。特殊群的自同构与分裂。 *Compositio Mathematica* 159 2 232 305, , ( ): – .[GM22] 2023 Daniel Groves 和 Jason Fox Manning。立方化相对双曲群的特殊化。 *Journal of Topology*, 15 2 398( ): –442, 2022.

[GMRS98] Rita Gitik、Mahan Mitra、Eliyahu Rips 和 Michah Sageev。子群的宽度。*Transactions of the American Mathematical Society* 350 1 321 329, 1998 , ( ): – . [Hag19] Mark F. Hagen。关于CAT(0 https:)立方复形、中位图 //www.wescac.net/into_the_forest.pdf 2019 和立方化群的讲义。 , . [Hag23] Fr´ed´eric Haglund。CAT(0)立方复形的等距变换是半单的。 *Annales mathématiques du Québec*, 47 249: –261, 2023. [HJP16] Jingyin Huang、Kasia Jankiewicz 和 Piotr Przytycki。余紧立方化二维阿廷群。 *Commentarii Mathematici Helvetici*, 91(3):519–542, 2016. [Hua18] Jingyin Huang。与直角阿廷群拟等距的群的可公度性。 *Inventiones Mathematicae*, 213(3):1179– 1247, 2018年9月. [HW08] Fr´ed´eric Haglund 和 Daniel T. Wise。特殊立方复形。 *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, 17 5 1551( ): –1620, 2008. [HW12] Fr´ed´eric Haglund 和 Daniel T. Wise。特殊立方复形的组合定理。 *Annals of Mathematics* 176 3 1427 1482, 2012 , ( ): – . [HW19] Jingyin Huang 和 Daniel T. Wise。群图中的身量与可分性，2019。 [HW24] Jingyin Huang 和 Daniel T. Wise。某些特殊立方复形群图的虚拟特殊性。 *Mathematische Annalen* 388 329 357, 2024 , : – . [Jan23] Kasia Jankiewicz。阿廷群中的有限 stature，2023。 [Min12] Ashot Minasyan。直角阿廷群的遗传共轭可分性及其应用。 *Groups, Geometry and Dynamics* 6 2 335 388, 2012 , , ( ): – . [OR23] Eduardo Oreg´on-Reyes。关于立方化相对双曲群。 *Geometry & Topology*, 27(2):575–640, 2023. [Sag95] Michah Sageev。群对的端与非正曲率立方复形。 *Proceedings of The London Mathematical Society* 585 617, 1995 , 页码 – . [Ser80] Jean-Pierre Serre。 *Trees*. 施普林格出版社，柏林，海德堡，第1版，1980。 [She23] Sam Shepherd。特殊立方复形的模仿者同态。 *Transactions of the American Mathematical Society* 376 599 641, 2023 , : – . [She24] Sam Shepherd。直角建筑中格的可公度性。 *Advances in Mathematics* 441 109522, , : . [She25] Sam Shepherd。特殊立方复形的乘积可分性，2025。 [SW79] Peter Scott 和 Terry Wall。群论中的拓扑方法，载于 C. T. C. Wall 编， *Homological Group Theory* 36 137 203 , 伦敦数学会讲义系列第 号，页码 – 。剑桥大学出版社，剑桥，英国，1979。 [Wil08] Henry Wilton。极限群的 Hall 定理。 *Geometric and Functional Analysis (GAFA)* 18 1 271 303, , ( ): – . [Wis96] Daniel T. Wise。 *Non-positively curved squared complexes: Aperiodic tilings and non-residually finite groups*. 博士论文，普林斯顿大学，1996。 [Wis04] Daniel T. Wise。截面曲率、紧核与局部拟凸性。 *Geometric and Functional Analysis* 14 2 433 468, 2004 , ( ): – . [Wis21] Daniel T. Wise。 *The Structure of Groups with a Quasiconvex Hierarchy: (AMS-209)*，第366卷。普林斯顿大学出版社，2021。

Department of Mathematics、 The Ohio State University、 Columbus、 OH, 43210、 U.S.
Email address: li.13132@osu.edu