arXiv:2601.01078v1 [quant-ph] 3 Jan 2026

利用猫态量子比特单步传输多体 W 态的混合连续变量–离散变量传输

Muhammad Nehal Khan[1], **Sumrah Hussain**[1]

[1]物理系，计算、数据科学与物理学院，威廉与玛丽学院，美国弗吉尼亚州威廉斯堡，邮编 23185

电子邮箱：mkhan05@wm.edu

2026年1月

摘要。 我们提出一种确定性的混合连续变量-离散变量（CV-DV）方案，用于在电路量子电动力学架构中单步传输编码于光子薛定谔猫态量子比特中的 n量子比特 W 态。逻辑量子比特编码在玻色模式的偶宇称和奇宇称猫态中，而谐振器对之间的有效拉曼型相互作用由一个工作在色散区的超导磁通量子三能级系统介导。该协议通过一次集体操作相干地传输多体 W 态，且不会占据更高激发原子能级，从而显著抑制退相干。基于完整林德布拉德主方程的数值模拟纳入了实际的腔耗散、三能级量子比特弛豫与退相位，以及腔间串扰，结果表明，三量子比特猫态 W 态的传输保真度最高约为 0。92。这些结果证明，利用当前的电路量子电动力学技术实现可扩展的混合连续变量-离散变量纠缠传输是可行的。

1. 引言

腔量子电动力学（QED）通过量子化电磁场与受限于高品质谐振器中的原子或人工原子系统之间的相干相互作用，为量子信息处理提供了强大的平台[1, 2, 3]。特别是，基于腔和电路的 QED 架构已实现可扩展的量子网络、远距离量子通信以及多体纠缠生成 [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]。在多体纠缠态中，W 态因其能够抵抗粒子损失且在量子通信协议中具有重要作用而占据核心地位 [13]。

在固态领域，基于超导量子比特与微波谐振器相互作用的电路量子电动力学已成为大规模量子信息处理的主要候选方案之一 [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]。这种架构已实现高保真度量子门 [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30], 量子算法[31], 量子存储器 [32, 33, 34, 35], ，并能可控地产生多体纠缠态 [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42]。尤其是，已有多种方案

被提出并通过实验验证，可借助色散相互作用或共振相互作用
[43, 44, 45, 46, 47, 48, 49]生成超导量子比特的 W 态。

近年来，研究关注点转向了混合连续变量-离散变量（CV-DV）编码，其中逻辑量子比特编码在玻色模式的非经典态中。一个典型例子是猫态量子比特（cqubit），其逻辑态由谐振子的偶、奇宇称薛定谔猫态表示。猫态量子比特天生能够抵御单光子损失，并可借助量子纠错技术加以稳定和保护 [50, 51]。在实现猫态纠缠 [52], 单量子比特门和双量子比特门[53, 54, 55, 56], 以及多量子比特受控操作 [57]方面，已经取得了显著进展。此外，已有实验演示了谐振器之间的猫态传输 [58, 59]。

尽管取得了这些进展，但对于在空间分离的腔之间直接传输编码于猫态量子比特中的多体 W 态，尚未进行深入探索。特别是，能够单步运行、避免占据高激发原子能级，且与当前电路量子电动力学技术兼容的可扩展方案，仍是一项尚待解决的挑战。在本研究中，我们针对这一空白提出一种方案，可在两组 n微波谐振器之间传输编码于猫态中的 n量子比特 W 态。该协议采用 $2n$ 与单个超导磁通量子三能级系统耦合的谐振器，实现有效的腔间相互作用，同时通过频率选择性抑制不必要的串扰。该协议具有确定性，无需测量，并完全在混合连续变量-离散变量框架内运行。

2. 以猫态编码的 W 态传输

我们考虑一种连续变量–离散变量（CV-DV）架构，由 $2N$ 个玻色微波谐振器与一个超导三能级人工原子（量子三能级系统）耦合而成，如图 1(a) 所示。每对谐振器 $\{2j-1, 2j\}$ 利用彼此正交的薛定谔猫态编码一个逻辑量子比特，从而在连续变量希尔伯特空间中实现一个离散变量量子比特。超导三能级系统的能量本征态为 $|g\rangle$、$|e\rangle$ 和 $|f\rangle$ [图 1(b)], ；它充当公共量子总线，介导各谐振器对之间的有效相互作用。

为抑制不必要的谐振器间串扰，假设每个谐振器均与所有非目标量子三能级系统跃迁充分失谐。具体而言，在每个谐振腔对 $\{2j-1, 2j\}$ 中，奇数编号的谐振器与 $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle$跃迁色散耦合，而偶数编号的谐振器与 $|e\rangle \leftrightarrow |f\rangle$跃迁色散耦合。相应的失谐量设定为 $|\Delta_{(2j-1)(2j)}| \gg g_{2j-1}$， g_{2j}，以确保在整个动力学过程中，上能级 $|f\rangle$ 仅处于虚占据状态。此外，对三能级量子比特的 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$跃迁共振施加经典微波脉冲，同时使其与所有其他跃迁保持充分失谐。该驱动场可实现受控相位演化，同时不会引起布居转移至上能级 $|f\rangle$。在实验中，三能级量子比特的跃迁频率和谐振器频率均可在纳秒时间尺度内调谐，从而使所需的色散

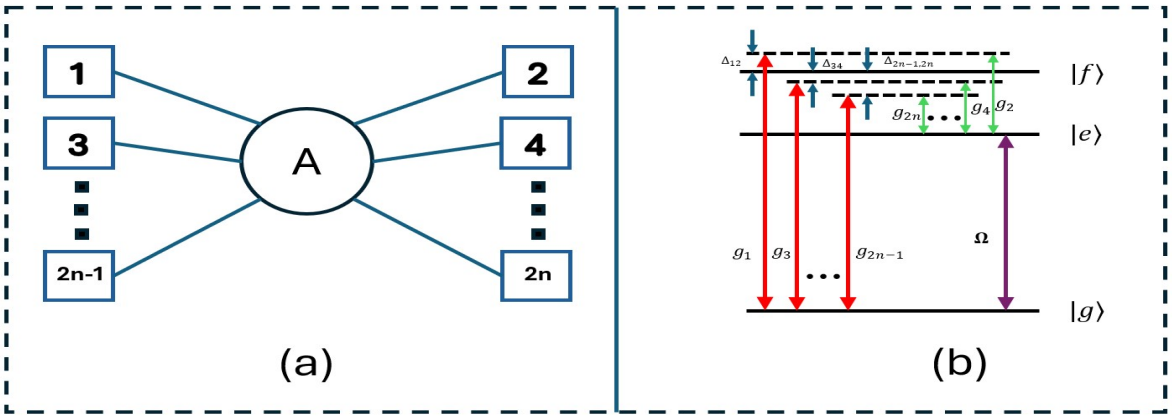


图 1. (a) 人工超导三能级量子系统（以圆圈 A 表示）和六个微波谐振器的示意图。对于一维微波谐振腔，三能级量子系统通过电容与每个谐振器耦合 [59]。(b) 三能级量子系统-腔色散相互作用和三能级量子系统脉冲共振相互作用示意图。

条件能够动态满足[60, 61]。

在上述条件下，并应用旋波近似，我们得到如下相互作用绘景中的哈密顿量（假设 $\hbar = 1$）

$$\begin{aligned} H = & (g_1 e^{i\Delta_{12}t}\hat{a}_1\sigma_{fg}^{+} + g_2 e^{i\Delta_{12}t}\hat{a}_2\sigma_{fe}^{+}) \\ & + \sum_{j=2}^{N}\left(g_{2j-1}e^{i\Delta_{2j-1,\,2j}t}\hat{a}_{2j-1}\sigma_{fg}^{+} + g_{2j}e^{i\Delta_{2j-1,\,2j}t}\hat{a}_{2j}\sigma_{fe}^{+}\right) \\ & + \Omega\sigma_{eg}^{+} + \mathrm{H.c.} \end{aligned} \tag{1}$$

这里，$\sigma_{fg}^{+} = |f\rangle\langle g|$、$\sigma_{fe}^{+} = |f\rangle\langle e|$ 和 $\sigma_{eg}^{+} = |e\rangle\langle g|$ 是三能级量子系统的升算符，Ω 表示所施加微波脉冲的拉比频率，$\hat{a}_j$ ($\hat{a}_j^{\dagger}$) 是第 j 个谐振器的湮灭（产生）算符。方程（1）描述了色散区内的混合连续变量–离散变量相互作用，这是构建谐振器对之间有效分束器型耦合的基础。

在大失谐区间内，$|\Delta_{(2j-1)(2j)}| \gg g_{2j-1}$，$g_{2j}$，三能级量子比特的上能级 $|f\rangle$ 仅被虚激发，因此可以对其进行绝热消除。由此，通过每个谐振腔对 $\{2j-1, 2j\}$，在 $|g\rangle$ 态和 $|e\rangle$态之间诱导出有效拉曼型相互作用。通过为不同的谐振腔对选择足够不同的失谐，可强烈抑制不必要的跨腔对拉曼过程，从而使每个逻辑量子比特能够独立演化。在这些条件下，有效哈密顿量的形式如方程（2） [62]所示。

$$\begin{aligned} H_{eff} = & -2\lambda_1\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1\sigma_{gg} - 2\lambda_2\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2\sigma_{ee} \\ & - \sum_{j=2}^{N}\left(2\lambda_{2j-1}\hat{a}_{2j-1}^{\dagger}\hat{a}_{2j-1}\sigma_{gg} + 2\lambda_{2j}\hat{a}_{2j}^{\dagger}\hat{a}_{2j}\sigma_{ee}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\lambda_{12}\left(\hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger}\sigma_{eg}^{+} + \hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2\sigma_{eg}^{-}\right) \\
&- \sum_{j=2}^{N} 2\lambda_{(2j-1)(2j)}\left(\hat{a}_{2j-1}\hat{a}_{2j}^{\dagger}\sigma_{eg}^{+} + \hat{a}_{2j-1}^{\dagger}\hat{a}_{2j}\sigma_{eg}^{-}\right) + \Omega\sigma_x .
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中 $\sigma_{eg}^{-} = |g\rangle\langle e|$、$\sigma_{gg} = |g\rangle\langle g|$、$\sigma_{ee} = |e\rangle\langle e|$、$\sigma_x = \sigma_{eg}^{+} + \sigma_{eg}^{-}$、$\lambda_1 = g_1^2/(2\Delta_{12})$、$\lambda_2 = g_2^2/(2\Delta_{12})$、$\lambda_3 = g_3^2/(2\Delta_{34})$、$\lambda_4 = g_4^2/(2\Delta_{34})$、$\lambda_5 = g_5^2/(2\Delta_{56})$、$\lambda_6 = g_6^2/(2\Delta_{56})$、$\lambda_{12} = g_1 g_2/(2\Delta_{12})$、$\lambda_{34} = g_3 g_4/(2\Delta_{34})$ 和 $\lambda_{56} = g_5 g_6/(2\Delta_{56})$。

方程（2）的前四项描述了每个谐振腔模式引起的、依赖于光子数的三能级量子比特能级交流斯塔克频移。其余各项对应于每个谐振腔对 $\{2j-1, 2j\}$ 内的有效拉曼介导的分束器相互作用，这些相互作用以三能级量子比特的状态为条件。这些相互作用构成了实现混合编码逻辑量子比特相干转移的物理机制。

将三能级量子比特制备在缀饰态 $|+\rangle = (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$，并工作在强驱动区 $2\Omega \gg \lambda_{2j-1}$，$\lambda_{2j}$，$\lambda_{(2j-1)(2j)}$ 时，根据旋波近似，可以忽略快速振荡项。因此，三能级量子比特实际上与系统动力学解耦，系统演化仅由作用于玻色模式的成对分束器哈密顿量支配，如方程（6）所示。这种解耦对于实现确定性混合连续变量–离散变量 W 态转移至关重要，因为它避免了三能级量子比特激发态能级被占据。

引入缀饰态基 $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle \pm |e\rangle)$ 后，方程（2）中与超导三能级系统相关的算符可以用缀饰态算符表示为 $\sigma_{gg} = \frac{1}{2}(I + \sigma^{+} + \sigma^{-})$ $\sigma_{ee} = \frac{1}{2}(I - \sigma^{+} - \sigma^{-})$ $\sigma_{eg}^{+} = \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma^{+} - \sigma^{-})$ $\sigma_{eg}^{-} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma^{+} + \sigma^{-})$，其中缀饰态泡利算符定义为 $\bar{\sigma}_z = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|$，$\bar{\sigma}^{+} = |+\rangle\langle -|$，$\bar{\sigma}^{-} = |-\rangle\langle +|$。在此表示下，横向算符满足 $\sigma_x = \sigma_z$。

利用上述变换，方程（2）可改写为缀饰态基下的形式，此时哈密顿量包含与 $e^{\pm i2\Omega t}$ 成正比的快速振荡项，其中 Ω 表示经典驱动场的拉比频率。在强驱动区，条件为 $2\Omega \gg \lambda_j$，$\lambda_{(2j-1)(2j)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$，所有以如此高频率振荡的项均可通过实施旋波近似而忽略。因此，我们得到以下哈密顿量

$$
\begin{aligned}
H_{eff} = &- \left(\lambda_1\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1 + \lambda_2\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2\right) \\
&- \sum_{j=2}^{N}\left(\lambda_{2j-1}\hat{a}_{2j-1}^{\dagger}\hat{a}_{2j-1} + \lambda_{2j}\hat{a}_{2j}^{\dagger}\hat{a}_{2j}\right) \\
&- \lambda_{12}\left(\hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger} + \hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2\right)\sigma_z \\
&- \sum_{j=2}^{N}\lambda_{(2j-1)(2j)}\left(\hat{a}_{2j-1}\hat{a}_{2j}^{\dagger} + \hat{a}_{2j-1}^{\dagger}\hat{a}_{2j}\right) + \Omega\sigma_z .
\end{aligned} \tag{3}
$$

对 $e^{-i2\Omega t}$ 施加幺正变换，其中 $H_0 = -\lambda_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \lambda_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \sum_{j=2}^{N} \lambda_{2j-1} \hat{a}_{2j-1}^\dagger \hat{a}_{2j-1} + \lambda_{2j} \hat{a}_{2j}^\dagger \hat{a}_{2j} + \Omega\sigma_z$，可得

$$\begin{aligned} H_e &= e^{iH_0 t}(H_{eff} - H_0)e^{-iH_0 t} \\ &= -\lambda \left(\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2\right)\sigma_z + \sum_{j=2}^{N} \lambda \left(\hat{a}_{2j-1}\hat{a}_{2j}^\dagger + \hat{a}_{2j-1}^\dagger \hat{a}_{2j}\right)\sigma_z, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \lambda_{2j-1} = \lambda_{2j} \quad (j = 2, 3, \ldots, N). \tag{5}$$

通过对跃迁能级 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$施加 π脉冲，我们可以轻松地将三能级量子比特制备到 $|+\rangle$态；该能级最初处于 $|g\rangle$ 态。态$|+\rangle$ 不会受到哈密顿量（4）的任何影响，因此三能级量子比特将保持该态不变。因此，我们可以忽略三能级量子比特部分，并将有效哈密顿量（4）进一步简化为

$$H_e = H_{e1} + \sum_{j=2}^{N} H_{ej} \tag{6}$$

with

$$H_{e1} = -\lambda \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger\right) \tag{7}$$

$$H_{ej} = \lambda \left(\hat{a}_{2j-1}^\dagger \hat{a}_{2j} + \hat{a}_{2j-1}\hat{a}_{2j}^\dagger\right), \qquad j = 2, 3, \ldots, N. \tag{8}$$

式（6）中的哈密顿量描述了每对谐振腔内由独立三能级量子比特介导的分束器相互作用（$2j-1$，$2j$）（$j = 1$，2，.....，N）。这些相互作用仅作用于玻色模式，并保持各谐振器中的光子数奇偶性，从而保护在猫态基中实现的逻辑量子比特编码。因此，该哈密顿量能够将混合连续变量—离散变量（CV-DV） n量子比特 W 态从奇数编号谐振器集合 $\{1, 3, \ldots, 2N-1\}$ 确定性地传输到对应的偶数编号谐振器集合 $\{2, 4, \ldots, 2N\}$。

初始时，逻辑 n 量子比特 W 态采用猫态量子比特编码在奇数编号谐振器 $\{1, 3, \ldots, 2N-1\}$ 中，而所有偶数编号谐振器 $\{2, 4, \ldots, 2N\}$均制备为真空态。在这种混合 CV-DV 编码中，每个逻辑量子比特由一对玻色模式实现；W 态由一个奇宇称猫态构成，并在 n 个逻辑量子比特之间相干且对称地离域分布，其余所有模式均处于偶宇称猫态。

为了在玻色谐振器中编码逻辑量子比特，我们采用具有确定光子数奇偶性的薛定谔猫态。在这种 CV-DV 混合编码中，偶宇称猫态表示逻辑态 $|0\rangle$，而奇宇称猫态表示

逻辑态 $|1\rangle$。这些态构成一个正交基，能够抵御单光子损失，并且天然兼容电路量子电动力学平台 [50, 51]。

$$\begin{aligned}|\mathrm{cat}\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m}\,|2m\rangle\,,\\ \left|\overline{\mathrm{cat}}\right\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}\,|2n+1\rangle\,.\end{aligned} \tag{9}$$

其中 n 和 m 是非负整数，$C_{2m}=2N_{\alpha}^{+}e^{-|\alpha|^2/2}\alpha^{2m}/\sqrt{(2m)!}$，且 $C_{2n+1}=2\overline{N_{\alpha}^{-}e^{-|\alpha|^2/2}}\alpha^{2n+1}/\sqrt{(2n+1)!}$。我们可以注意到，$\overline{|cat\rangle}$ 态与 $\left|cat\right\rangle$态正交，且与 α 无关（$\alpha=0$除外）。在量子光学中，猫态 $|cat\rangle$ 表示 $|0\rangle$ 逻辑态，而另一个猫态 $\left|cat\right\rangle$ 表示 $|1\rangle$ 逻辑态。

将 n 量子比特 W 态从奇数编号谐振器传输到偶数编号谐振器的过程可描述为

$$\left|W_n^{(\mathrm{cat})}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{cat}\rangle_1 |\mathrm{cat}\rangle_2 \cdots \left|\overline{\mathrm{cat}}\right\rangle_j \cdots |\mathrm{cat}\rangle_n\,. \tag{10}$$

根据式 (9) 中给出的猫态定义，第 j 个谐振器的福克态可写为 $|2m\rangle_j = (\hat{a}_j^{\dagger})^{2m}|0\rangle_j/\sqrt{(2m)!}$ 和 $|2n+1\rangle_j = (\hat{a}_j^{\dagger})^{2n+1}|0\rangle_j/\sqrt{(2n+1)!}$。利用这些关系，对于任意谐振器 $j\,(j=1、2、.....、2N)$，在混合连续变量–离散变量架构中编码逻辑量子比特的偶宇称和奇宇称薛定谔猫态可表示为

$$|cat\rangle_j = \Sigma_{m=0}^{\infty} C'_{2m}(\hat{a}_j^{\dagger})^{2m}|0\rangle_j\,,\quad \overline{|cat\rangle}_j = \Sigma_{n=0}^{\infty} C'_{2n+1}(\hat{a}_j^{\dagger})^{2n+1}|0\rangle_j\,, \tag{11}$$

其中，$C'_{2m}=C_{2m}/\sqrt{(2m)!}$ 和 $C'_{2n+1}=C_{2n+1}/\sqrt{(2n+1)!}$。

根据式 (6)，系统动力学由有效哈密顿量 $H_e=\sum_{j=1}^{N}H_{ej}$ 控制，其中每个 H_{ej} 描述谐振腔对 $\{2j-1,2j\}$ 内彼此独立的分束器型相互作用。由于这些成对哈密顿量彼此对易，即

$$[H_{ej},H_{e\ell}]=0,\qquad j\neq\ell,$$

全局时间演化算符可分解为若干独立双模演化的乘积。因此，可以通过分别考察每个 H_{ej} 的作用，来计算编码在混合连续变量-离散变量猫态量子比特中的 N量子比特 W 态的演化，从而得到以下态演化。

$$\begin{aligned}&e^{-iH_e t}\left[\Big(\prod_{j=1,\,j\neq k}^{N}|\mathrm{cat}\rangle_{2j-1}\Big)\left|\overline{\mathrm{cat}}\right\rangle_{2k-1}\Big(\prod_{j=1}^{N}|0\rangle_{2j}\Big)\right]\\ &=\prod_{j=1}^{N}\left(e^{-iH_{ej}t}\,|\psi_j\rangle_{2j-1}\,|0\rangle_{2j}\right)\end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1,\, j\neq k}^{N} \left[\sum_{m=0}^{\infty} C'_{2m} \left(e^{-iH_{ej}t} \hat{a}^{\dagger}_{2j-1} e^{iH_{ej}t} \right)^{2m} |0\rangle_{2j-1} |0\rangle_{2j} \right]$$

$$\otimes \left[\sum_{n=0}^{\infty} C'_{2n+1} \left(e^{-iH_{ek}t} \hat{a}^{\dagger}_{2k-1} e^{iH_{ek}t} \right)^{2n+1} |0\rangle_{2k-1} |0\rangle_{2k} \right]. \tag{12}$$

其中我们用到了

$$e^{-iH_{ej}t} |0\rangle_{2j-1} |0\rangle_{2j} = |0\rangle_{2j-1} |0\rangle_{2j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{13}$$

因为每个 H_{ej} 都会湮灭双模真空态。

$$\begin{aligned} e^{-iH_{e1}t} \hat{a}^{\dagger}_{1} e^{iH_{e1}t} &= \cos(\lambda t)\, \hat{a}^{\dagger}_{1} + i \sin(\lambda t)\, \hat{a}^{\dagger}_{2}, \\ e^{-iH_{ej}t} \hat{a}^{\dagger}_{2j-1} e^{iH_{ej}t} &= \cos(\lambda t)\, \hat{a}^{\dagger}_{2j-1} - i \sin(\lambda t)\, \hat{a}^{\dagger}_{2j}, \qquad j = 2、3、\ldots\ldots、N. \end{aligned} \tag{14}$$

对于 $\lambda t = \pi/2$，我们有

$$\begin{aligned} e^{-iH_{e1}t} \hat{a}^{\dagger}_{1} e^{iH_{e1}t} &= i \hat{a}^{\dagger}_{2}, \\ e^{-iH_{ej}t} \hat{a}^{\dagger}_{2j-1} e^{iH_{ej}t} &= -i \hat{a}^{\dagger}_{2j}, \qquad j = 2, 3, \ldots, N. \end{aligned} \tag{15}$$

因此，对于 $t = T = \pi/(2\lambda)$，由方程（13）和（14）可得

$$e^{-iH_e T} \left[\Big(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} |\mathrm{cat}\rangle_{2j-1} \Big) \, |\overline{\mathrm{cat}}\rangle_{2k-1} \, \Big(\prod_{j=1}^{N} |0\rangle_{2j} \Big) \right] =$$

$$\Big(\prod_{j=1}^{N} |0\rangle_{2j-1} \Big) \otimes \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \left(\sum_{m=0}^{\infty} C'_{2m}\, e^{-im\pi}\ |2m\rangle_{2j} \right) \right]$$

$$\otimes \left[\sum_{n=0}^{\infty} C'_{2n+1}\, e^{-i(2n+1)\pi/2}\ |2n+1\rangle_{2k} \right]. \tag{16}$$

其中我们使用了

$$|2m\rangle_j = \frac{(\hat{a}^{\dagger}_j)^{2m}}{\sqrt{(2m)!}} |0\rangle_j, \qquad |2n+1\rangle_j = \frac{(\hat{a}^{\dagger}_j)^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |0\rangle_j, \quad (j = 2, 4, 6),$$

以及上文给出的系数 C'_{2m} 和 C'_{2n+1} 的定义。

方程（16）表明，在相互作用时间 $T = \pi/(2\lambda)$，每个逻辑猫态量子比特都会从谐振器 $2j-1$ 确定性地转移到谐振器 $2j$，同时保持全局的 N量子比特 W 态叠加。

返回原始相互作用绘景后，整个系统初态的时间演化为

$$|\mathrm{cat}(\theta_{2j})\rangle_{2j} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m}\, e^{i\,2m\,\theta_{2j}}\, |2m\rangle_{2j}\,, \tag{17}$$

$$\left|\overline{\mathrm{cat}}(\theta_{2j})\right\rangle_{2j} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}\, e^{i\,(2n+1)\,\theta_{2j}}\, |2n+1\rangle_{2j}\,. \tag{18}$$

$$e^{-iH_0\tau} e^{-iH_e\tau}\, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \left[\left|\overline{\mathrm{cat}}\right\rangle_{2k-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} |\mathrm{cat}\rangle_{2j-1} \right] \times \left(\prod_{j=1}^{N} |0\rangle_{2j} \right) |+\rangle =$$

$$e^{-i\phi_0} \left(\prod_{j=1}^{N} |0\rangle_{2j-1} \right) \times \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \left[\left|\overline{\mathrm{cat}}(\theta_{2k})\right\rangle_{2k} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} |\mathrm{cat}(\theta_{2j})\rangle_{2j} \right] |+\rangle \tag{19}$$

公式（19）明确表明，混合 CV-DV 编码的 N 量子比特 W 态在单个确定性步骤中从谐振器组 $\{2j-1\}$ 相干转移到 $\{2j\}$，而超导三能级系统在整个演化过程中始终与态 $|+\rangle$ 保持因子化。

这里，$\phi_0 = \Omega\pi/(2\lambda)$。我们进一步定义

$$\eta_{12} = \frac{\lambda_2}{2\lambda} + \frac{1}{2}, \tag{20}$$

对于其余的模式对，

$$\eta_{(2j-1)(2j)} = \frac{\lambda_{2j}}{2\lambda} - \frac{1}{2}, \qquad j = 2, 3, \ldots, N. \tag{21}$$

与上文及下文相同

$$\lambda_2 = \lambda, \tag{22}$$

$$\lambda_{2j} = -\lambda, \qquad j = 2, 3, \ldots, N, \tag{23}$$

由此可得

$$\eta_{12} = 1, \qquad \eta_{(2j-1)(2j)} = -1, \quad j = 2, 3, \ldots, N.$$

对于这些参数值，相位因子可简化为

$$\begin{aligned} e^{i2\eta_{(2j-1)(2j)} m\pi} &= 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \\ e^{i2\eta_{(2j-1)(2j)}(2n+1)\pi} &= -1, \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned} \tag{24}$$

因此，所有偶宇称分量都获得一个平凡相位，而所有奇宇称分量则获得一个相对负号。

$$\left(\prod_{j=1}^{N}|0\rangle_{2j-1}\right)\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{N}\sum_{m=0}^{\infty}C_{2m}\,|2m\rangle_{2j}\right)\otimes\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n+1}\,|2n+1\rangle_{2k}\right)\right]. \quad (25)$$

其中省略了公共相位因子 $e^{-i\phi_0}$ 。根据公式，态（25）可写为 (12),

$$\left(\prod_{j=1}^{N}|0\rangle_{2j-1}\right)\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\left[|\overline{\text{cat}}\rangle_{2k}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{N}|\text{cat}\rangle_{2j}\right]. \quad (26)$$

上述表达式展示了将连续变量—离散变量（CV-DV）编码的 N量子比特 W 态，从奇数编号谐振器集合 $\{1,3,\ldots,2N-1\}$ 确定性地传输到对应的偶数编号谐振器 $\{2,4,\ldots,2N\}$。在此方案中，每个逻辑量子比特都使用正交的薛定谔猫态编码在一对玻色模式中，并且 W 态相干性在整个传输过程中得以保持。

该传输操作依赖于对三能级量子比特能级间隔的精确控制，以确保达到所需的相互作用时间后，三能级量子比特与所有谐振器模式有效解耦 [56]。或者，也可以通过动态调节谐振器频率实现相同的解耦条件；这在电路量子电动力学架构中是常规可行的 [57]。这些控制技术可确保单步传输后有效相互作用被关闭，从而冻结已传输的混合 W 态。

式（27）中的结果源于式（5）、式（23）及其 N-模推广中规定的参数条件。特别是，等耦合条件 $g_{2j-1}=g_{2j}(j=1$，2、.....、$N)$ 确保了每个谐振腔对内的对称拉曼介导相互作用。这些耦合要求在一维和三维谐振器实现中均可满足。对于三维腔，可通过适当设计三能级量子比特环路几何结构和腔场分布来调控耦合强度 g_j ；而在一维传输线谐振器中，则可通过调节每个谐振器与超导三能级系统之间的电容 C_j 来实现调谐。

我们可以很容易地确认，式（6）和式（25）中的所有条件将导致

$$\frac{g_1g_2}{\Delta_{12}}=-\frac{g_{2j-1}g_{2j}}{\Delta_{(2j-1)(2j)}},\qquad j=2,3,\ldots,N. \quad (27)$$

也就是说，

$$\frac{g_1 g_2}{\Delta_{12}} = \frac{g_1 g_2}{\omega_{fg} - \omega_1} = \frac{g_1 g_2}{\omega_{fe} - \omega_2}. \tag{28}$$

$$\frac{g_{2j-1} g_{2j}}{\Delta_{(2j-1)(2j)}} = \frac{g_{2j-1} g_{2j}}{\omega_{2j-1} - \omega_{fg}} = \frac{g_{2j-1} g_{2j}}{\omega_{2j} - \omega_{fe}}, \qquad j = 2, 3, \ldots, N. \tag{29}$$

通过调节谐振器频率、耦合强度或三能级量子比特的能级间距可以获得更多。

根据上述分析可知，在整个 W 态传输过程中，超导三能级系统始终被限制在 $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ 流形中，而上能级 $|f\rangle$ 仅以虚跃迁方式参与，且从未被布居。因此，与 $|f\rangle$ 能级弛豫和退相位相关的退相干受到显著抑制，从而大幅增强了所提出的混合连续变量–离散变量协议的稳健性。

方程（22）表明，编码于猫态量子比特的 N-量子比特 W 态的传输，是通过作用于系统初态的全局幺正算符 $U = e^{-iH_0\tau} e^{-iH_e\tau}$ 实现的。这里，变换 $e^{-iH_0\tau}$ 使系统回到原始的相互作用绘景，而由 H_e 支配的有效演化则在所有谐振腔对内实现同步的分束器型相互作用。

因此，无需中间测量、前馈控制，也无需占据较高的三能级系统能级，即可通过确定性方式在单个操作步骤中，将混合连续变量–离散变量 W 态从奇数编号谐振器完整传输到偶数编号谐振器。这种单步特性使该协议特别适合在电路量子电动力学架构中实现可扩展的 N 量子比特纠缠传输。

3. 可能的实验实现

在上述分析中，我们考虑了一般类型的微波腔，它可以是三维（3D）腔，也可以是一维（1D）腔。本节将讨论一种可行的实验实现方案：将六个传输线谐振器（TLR）电容耦合到单个超导磁通型三能级系统，如图 2 所示。每个 TLR 都充当一个一维微波腔。

对于超导磁通器件（例如电容并联磁通量子比特），可以对能级间距进行设计，使其具有足够大的非谐性，并允许非相邻能级之间发生跃迁。这一特性使得可以使用三能级系统的 $|g\rangle$、$|e\rangle$ 和 $|f\rangle$ 能级，从而能够实现谐振器与 $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ 跃迁的耦合。接下来，我们将分析在空间分离的腔之间传输以光子猫态量子比特编码的多体纠缠 W 态的实验可行性。

考虑到非期望相互作用后，理想哈密顿量修正为

$$H' = H + \delta H_1 + \delta H_2, \tag{30}$$

其中， δH_1 描述非期望的腔间串扰， δH_2 表示脉冲诱发的三能级量子比特非期望跃迁。

腔间串扰可建模为

$$\delta H_1 = \sum_{j<l}^{6} g_{jl} \left(a_j a_l^\dagger e^{i\Delta_{jl}t} + \text{H.c.} \right), \tag{31}$$

其中， g_{jl} 是腔 j 与腔 l之间的串扰耦合强度， $\Delta_{jl} = \omega_l - \omega_j$是两个腔之间的频率失谐。为简化起见，在数值模拟中，我们假设串扰强度相等，即 $g_{jl} \equiv g_{\text{cr}}$ 。

三能级量子比特态 $|e\rangle$ 与 $|f\rangle$ 之间由脉冲诱导的非期望跃迁可描述为

$$\delta H_2 = \Omega_{fe} e^{i\Delta_p t} S_{fe}^+ + \text{H.c.}, \tag{32}$$

其中，Ω_{fe}是与 $|e\rangle \leftrightarrow |f\rangle$跃迁相关的拉比频率， $\Delta_p = \omega_{fe} - \omega_{eg}$是驱动场的失谐，且 $S_{fe}^+ = |f\rangle\langle e|$。

由于磁通三能级量子比特具有较大的非谐性，脉冲诱导的 $|g\rangle \nleftrightarrow |f\rangle$ 跃迁以及涉及无关能级的腔诱导跃迁都受到强烈抑制。因此，它们对态传输性能的影响可以忽略，数值模拟中不予考虑。

考虑腔耗散以及三能级量子比特能量弛豫和退相位后，在马尔可夫近似下，系统动力学由主方程描述

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -i[H', \rho] + \sum_{j=1}^{6} \kappa_j \mathcal{L}[a_j] + \gamma_{eg}\mathcal{L}[\sigma_{eg}^-] + \gamma_{fe}\mathcal{L}[\sigma_{fe}^-] + \gamma_{fg}\mathcal{L}[\sigma_{fg}^-] \\ & + \sum_{l=e,f} \gamma_{\phi,l} \left(\sigma_{ll}\rho\sigma_{ll} - \frac{1}{2}\sigma_{ll}\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_{ll} \right), \end{aligned} \tag{33}$$

其中 $\mathcal{L}[\Lambda] = \Lambda\rho\Lambda^\dagger - \Lambda^\dagger\Lambda\rho/2 - \rho\Lambda^\dagger\Lambda/2$。这里， κ_j 是腔 j的衰减率， γ_{eg} 是 $|e\rangle \to |g\rangle$ 跃迁的弛豫率， γ_{fe} (γ_{fg})表示 $|f\rangle \to |e\rangle$ ($|f\rangle \to |g\rangle$)跃迁的弛豫率， $\gamma_{\phi,\ e}$($\gamma_{\phi,\ f}$)是能级 $|e\rangle$ ($|f\rangle$)的纯退相干率。

纠缠态传输的保真度定义为

$$F = \sqrt{\langle\psi_{\text{id}}|\rho_{\text{cav}}|\psi_{\text{id}}\rangle}, \tag{34}$$

其中， $|\psi_{\text{id}}\rangle$ 是六个腔的理想目标 W 型猫态， ρ_{cav} 是通过对三能级量子比特自由度求迹得到的腔子系统约化密度算符。操作时间选为 $t = T = \pi/\left(2|\lambda_{12}|\right)$ 。

对于超导磁通量子三能级系统，相邻能级之间的跃迁频率可在 5–20 GHz 范围内调节。在模拟中，我们选择的失谐为$\Delta_j/2\pi = 0.40$–0.45 GHz，耦合强度为 $g_j/2\pi = 150$–175 MHz，均处于实验验证值范围内。

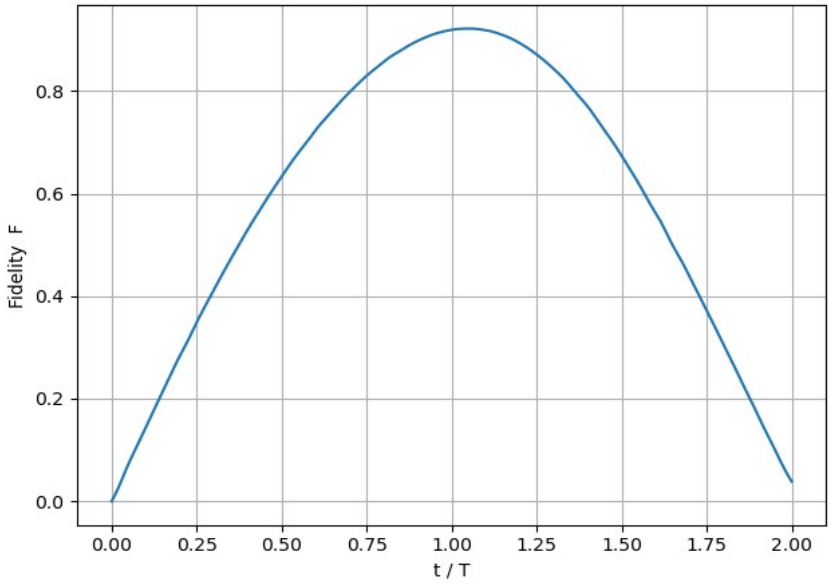


图 2. W 型猫态编码腔态传输的保真度 F 随归一化相互作用时间 t/T的时间演化，其中$T = \pi/(2|\lambda_{12}|)$为有效交换时间。该模拟纳入了腔耗散（$\kappa^{-1} = 20\ \mu$s）、三能级系统能量弛豫与退相位、腔间串扰，以及使用实验上现实参数时不希望出现的脉冲诱导跃迁。

腔频率选在 4.2–14.2 GHz 范围内，由此产生较大的腔间失谐，从而抑制不必要的共振相互作用。将不必要的驱动场设为 $\Omega_{fe}/2\pi = 47$ MHz，失谐为 $\Delta_p/2\pi = -2.5$ GHz。

腔光子寿命取为 $\kappa^{-1} = 20\ \mu$s，对应于数量级为 10^6的品质因数。三能级系统相干参数保守地取为

$$\begin{aligned} T_1^{eg} &= 30\ \mu\text{s}, \quad T_1^{fe} = 20\ \mu\text{s}, \quad T_1^{fg} = 60\ \mu\text{s}, \\ T_\phi^{e} &= 40\ \mu\text{s}, \quad T_\phi^{f} = 25\ \mu\text{s}. \end{aligned} \tag{35}$$

猫态振幅取为 $\alpha = 0.5$。

数值模拟表明，即使腔间串扰强度达到有效腔–腔耦合的百分之几，其影响仍然很弱。此外，由于相互作用时间相较于相干时间很短，三能级量子比特第二激发态的衰减对操作保真度的影响可以忽略。采用上述实验上切实可行的参数，如图 2 所示，在最佳相互作用时间下可获得约 0.92 的最高保真度。这些结果表明，利用当前电路量子电动力学技术，所提出的光子猫态量子比特编码 W 态的单步转移方案在实验上是可行的。

4. 结论

在本研究中，我们提出了一种确定性的单步协议，可在电路量子电动力学架构中转移编码于光子薛定谔猫态量子比特中的多体 W 型纠缠。该方案利用由单个超导磁通量子三能级系统介导的色散型拉曼相互作用，实现微波谐振器对之间同时发生的分束器型耦合，从而能够相干转移一个由 ¨ 个量子比特构成的连续变量–离散变量（CV–DV）混合 W 态，而无需占据更高激发原子能级。

该协议的一项核心优势在于，整个演化过程中，超导三能级系统实际上始终局限于较低的两个能级，而最高激发态仅以虚态方式参与。这显著抑制了能量弛豫和退相位导致的退相干，增强了传输过程的鲁棒性。此外，整个操作通过单次集体步骤完成，无需中间测量、前馈控制或顺序量子门操作，从而降低了操作复杂度并提升了可扩展性。

我们通过数值求解完整的林德布拉德主方程评估了该方案的性能，并纳入了多种实际的退相干来源，包括腔光子损耗、三能级系统能量弛豫与退相位、腔间串扰以及脉冲诱导的非期望跃迁。对于超导电路平台上实验可实现的参数，我们的模拟表明，三量子比特猫态 W 态的传输保真度最高可达约 0.92。这些结果证实，所提出的混合连续变量–离散变量 W 态传输协议可借助当前的电路量子电动力学技术实现，并为超导微波量子网络中可扩展的多体纠缠分发提供了切实可行的途径。

参考文献

[1] Bennett C H 1995 《今日物理》 **4**824–30[2] Raimond J M, Brune M and Haroche S 2001 《现代物理评论》 **73** 565[3] Aoki T, Dayan B, Wilcut E, Bowen W P, Parkins A S, Kippenberg T, Vahala K and Kimble H 2006《自然》 **443** 671–674[4] Duan L M, Lukin M D, Cirac J I andZoller P 2001 《自然》 **414** 413–418[5] ˇSkarja M, Borˇstnik N M, L¨offler M andWalther H 1999 *Physical Review A* **60** 3229[6] Ogden C, Irish E and Kim M 2008 *Physical Review A* **78** 063805[7] Almeida G M, Ciccarello F, Apollaro T J and Souza A M 2016 *Physical Review A* **93** 032310[8] Liu Y C, Luan X, Li H K, Gong Q, Wong C W and Xiao Y F 2014 《物理评论快报》 **112**213602[9] Badshah F, Qamar S and Paternostro M 2014 *Physical Review A* **90** 033813[10] Zhang K and Li Z Y 2010 *Physical Review A* **81** 033843[11] Zhong Z R, Lin X, Zhang B and Yang Z B 2012 *International Journal of Quantum Information***10** 1250070[12] Sampuli E M, Wang Y, Song J and Xia Y 2019 《光学快报》 **27** 22674–22684[13] Waseem M, Khan M N and Qamar S 2020 《物理学文献》 **95** 065103

[14] Yang C P, Chu S I and Han S 2003 Physical Review A 67 042311[15] You J and Nori F 2003 Physical Review B 68 064509[16] Blais A, Huang R S, Wallraff A, Girvin S M and Schoelkopf R J 2004 Physical Review A 69 062320[17] You J and Nori F 2005 《今日物理》 58 42–47[18] Clarke J and Wilhelm F K 2008 《自然》 453 1031–1042[19] You J Q and Nori F 2011 《自然》 474 589–597[20] Xiang Z L, Ashhab S, You J and Nori F 2013 《现代物理评论》 85 623[21] Gu X, Kockum A F, Miranowicz A, Liu Y x and Nori F 2017 《物理报告》 718 1–102[22] Li P B, Liu Y C, Gao S Y, Xiang Z L, Rabl P, Xiao Y F and Li F L 2015 《物理评论应用》 4 044003[23] Waseem M, Irfan M and Qamar S 2012 《物理学 C：超导》 477 24–31[24] Hua M, Tao M J and Deng F G 2014 Physical Review A 90 012328[25] Hua M, Tao M J and Deng F G 2015 《科学报告》 5 1–8[26] Waseem M, Irfan M and Qamar S 2015 Quantum Information Processing 14 1869–1887[27] Liu T, Cao X Z, Su Q P, Xiong S J and Yang C P 2016 《科学报告》 6 1–13[28] Ye B, Zheng Z F, Zhang Y and Yang C P 2018 《光学快报》 26 30689–30702[29] Liu T, Guo B Q, Zhang Y, Yu C S and Zhang W N 2018 Quantum Information Processing 17 1–16[30] Ma L h, Kang Y H, Shi Z C, Huang B H, Song J and Xia Y 2019 Quantum Information Processing 18 1–15[31] Waseem M, Ahmed R, Irfan M and Qamar S 2013 Quantum information processing 12 3649–3664[32] Waqas M, Ayaz M, Waseem M, Qamar S and Qamar S 2018 《物理学文献》 93 065101[33] Ayaz M, Waqas M, Qamar S and Qamar S 2018 Physical Review A 97 022318[34] Zhou L, Gao Y, Song Z and Sun C 2008 Physical Review A 77 013831[35] Liao J Q, Huang J F, Liu Y x, Kuang L M and Sun C 2009 Physical Review A 80 014301[36] Hu Y and Tian L 2011 《物理评论快报》 106 257002[37] Wang H, Mariantoni M, Bialczak R C, Lenander M, Lucero E, Neeley M, O'Connell A, Sank D, Weides M, Wenner J et al. 2011 《物理评论快报》 106 060401[38] Strauch F W 2012 《物理评论快报》 109 210501[39] Hua M, Tao M J, Alzahrani F, Hobiny A, Wei H R and Deng F G 2018 Quantum Information Processing 17 1–11[40] Li M, Hua M, Zhang M and Deng F G 2019 《新物理学杂志》 21 073025[41] Xiong S J, Sun Z, Liu J M, Liu T and Yang C P 2015 《光学快报》 40 2221–2224[42] Yang C P, Su Q P and Han S 2012 Physical Review A 86 022329[43] Helmer F and Marquardt F 2009 Physical Review A 79 052328[44] Gao G L, Cai G C, Huang S S, Wang M F and Jiang N Q 2012 《理论物理通讯》 57 205[45] Huang S Y, Goan H S, Li X Q and Milburn G 2013 Physical Review A 88 062311[46] Wei X and Chen M F 2015 《国际理论物理学杂志》 54 812–820[47] Kang Y H, Chen Y H, Wu Q C, Huang B H, Song J and Xia Y 2016 《科学报告》 6 1–13[48] Jones D and Rahmani A 2019 arXiv preprint arXiv:1909.09289[49] Su Q P, Zhang H and Yang C P 2021 Frontiers of Physics 16 61501[50] Heeres R W, Reinhold P, Ofek N, Frunzio L, Jiang L, Devoret M H and Schoelkopf R J 2017 《自然通讯》 8 1–7[51] Ofek N, Petrenko A, Heeres R, Reinhold P, Leghtas Z, Vlastakis B, Liu Y, Frunzio L, Girvin S, Jiang L et al. 2016 《自然》 536 441–445[52] Yang C P and Zheng Z F 2018 《光学快报》 43 5126–5129[53] Mirrahimi M, Leghtas Z, Albert V V, Touzard S, Schoelkopf R J, Jiang L and Devoret M H 2014 《新物理学杂志》 16 045014[54] Nigg S E 2014 Physical Review A 89 022340[55] Yang C P, Su Q P, Zheng S B, Nori F and Han S 2017 Physical Review A 95 052341

[56] Zhang Y, Zhao X, Zheng Z F, Yu L, Su QP and Yang C P 2017 *Physical Review A* **96** 052317 [57] Fan Y J, Zheng Z F, Zhang Y, Lu D M andYang C P 2019 *Frontiers of Physics* **14** 1–9[58] He X L, Zheng Z F, Zhang Y and Yang C P 2020 *Quantum Information Processing* **19** 1–11[59] Liu T, Zheng Z F, Zhang Y, Fang Y L andYang CP 2020 *Frontiers of Physics* **15** 1–11[60] Leek P J, Filipp S, Maurer P, Baur M, Bianchetti R, Fink J, G¨oppl M, Steffen L and Wallraff A 2009 *Physical Review B* **79**180511[61] Sandberg M, Wilson C, Persson F, Bauch T, Johansson G, Shumeiko V, Duty T and Delsing P 2008*Applied Physics Letters* **92** 203501[62] James D and Jerke J 2007 *Canadian Journal of Physics* **85** 625–632