arXiv:2601.01093v1 [math.SP] 3 Jan 2026

混合数据下扰动贝塞尔算子的逆特征值问题

ZEGUANG LIU 和 XIN-JIAN XU

Abstract. 我们研究定义在 $L^2(0,1)$ 上的扰动贝塞尔算子的逆特征值问题。（1）对于角动量量子数 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 的情形，我们利用基于特征值和范数常数构造的某个函数系的闭性条件，建立了逆谱问题的唯一性结果。（2）对于更一般的情形 $\ell \geq -1/2$，我们利用特征值和范数常数满足的稠密性条件，给出了反问题的唯一性结果；此外，还可以对势施加额外的光滑性条件。（3）本文最后一节基于（2）给出了一些推论。Gesztesy、Simon、Wei、Xu、Hatinoˇglu 等人已针对 $\ell = 0$ 的情形证明了这些推论中的结果，而我们将其推广到了更一般的情形 $\ell \geq -1/2$。

1. Introduction

本文研究区间 (0,1) 上的边值问题：

$$L(\ell, q)(f) := -f''(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} f(x) + q(x)f(x) = \lambda f(x), \tag{1.1}$$

满足边界条件

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{\ell+1}} < \infty, \ f'(1) + \beta f(1) = 0, \tag{1.2}$$

其中， λ 是谱参数， $\ell \geq -1/2$ 是角动量量子数， q 是定义在 $L^1(0,1)$ 上的实值势函数，而 $L(\ell, q)$ 是由 $-D^2 + \ell(\ell+1)x^{-2} + q$ 在 $L^2(0,1)$ 上、满足边界条件 (1.2) 所生成的自伴算子。参数 β 属于 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$；若 $\beta = \infty$，则边界条件 $f'(1) + \beta f(1) = 0$ 表示狄利克雷边界条件 $f(1) = 0$。

给定 $q \in L^1(0,1)$，算子 $L(\ell, q)$ 具有简单离散谱，记为 $\sigma(\ell, q, \beta)$，特征值 $\lambda_{\ell,\beta,n}(q) \in \sigma(\ell, q, \beta)$ 的渐近行为如下：

$$\sqrt{\lambda_{\ell,\infty,n}(q)} = \left(n + \frac{\ell}{2}\right)\pi + O(\mathrm{R}(n^2) + n^{-1}), \ n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

日期：2026年1月6日。2020 数学学科分类。34A55,34B24,34B30,34L40,47A75。关键词与短语。扰动贝塞尔算子，径向薛定谔算子，斯图姆-刘维尔算子，逆谱问题，特征值。

$$\sqrt{\lambda_{\ell,\beta,n}(q)} = \left(n + \frac{\ell - 1}{2}\right)\pi + O(\mathrm{R}(n^2) + n^{-1}),\ \beta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

其中

$$\mathrm{R}(\lambda) := \int_0^1 \frac{y\tilde{q}(y)}{1 + |\lambda|^{1/2}y} dy,\ \text{and}\ \tilde{q} := \begin{cases} |q|, & \text{if } \ell > -1/2, \\ |(1 - \ln(x))q|, & \text{if } \ell = -1/2, \end{cases} \tag{1.5}$$

参见 [28, 定理 2.5]。

设 $\psi_\ell(\lambda,\ x,\ q)$ 是方程 (1.1) 在初始条件下的一个解

$$\begin{cases} \psi_\ell(\lambda, 1, q) = 1, \psi'_\ell(\lambda, 1, q) = -\beta, & \text{if } \beta \in \mathbb{R}, \\ \psi_\ell(\lambda, 1, q) = 0, \psi'_\ell(\lambda, 1, q) = -1, & \text{if } \beta = \infty. \end{cases} \tag{1.6}$$

对于每个固定的 $x \in (0, 1],$，函数 $\psi_\ell(\lambda,\ x,\ q)$ 是 λ 的整函数。与特征值 $\lambda_{\ell,\ \beta,\ n}$ 相对应的范数化常数为

$$\zeta(\lambda_{\ell,\beta,n}, \beta, q) = \int_0^1 |\psi_\ell(\lambda_{\ell,\beta,n}, x, q)|^2 dx.$$

具有整数或半整数 ℓ 的扰动贝塞尔算子 $L(\ell,\ q)$ 源自作用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ ($n \in \mathbb{N}$) 上、具有球对称势的薛定谔算子 $-\Delta + q$ （见 [36, p.286]）。对于一般的 $\ell \geq -1/2$，算子 $L(\ell,\ q)$ 例如出现在球面上的纬向薛定谔算子以及作为旋转超曲面的黎曼流形的拉普拉斯算子的研究中 [9]。有限区间上的扰动贝塞尔算子 $L(\ell,\ q)$ 的反问题吸引了许多研究者的关注。众所周知，谱测度（或特征值及其对应的范数常数，或 Weyl-Titchmarsh m-函数）能够唯一确定势函数。此外，在不同边界条件下扰动贝塞尔算子对应的两组特征值也能够唯一确定势函数。这些反问题的研究见例如 [7, 16, 29, 31, 32] 中的 $\ell = 0$ 情形，以及 [3, 9, 12, 17, 18, 25, 28, 34, 40] 中 ℓ 的更一般取值情形。

随后，为了确立反问题的唯一性，许多研究探讨了考虑其他类型数据的反问题。给定数据包括以下几方面：

(1). 一组可能取自无穷多个不同谱的特征值。(2). 一组与已知特征值相对应的范数常数。(3). 区间（a，1） $\subset$ (0，1)上的势本身。(4). 势在 a邻域内的光滑性。

对于扰动贝塞尔算子 $L(\ell,\ q)$，其中 $\ell = 0$，基于混合数据集(1)–(4)的反问题已得到广泛研究；例如参见 [5, 11, 14, 21–24, 35], 及其中的参考文献。

对于 $L(\ell,\ q)$ 这类 ℓ 为整数或实数的扰动贝塞尔算子，也有一些基于混合数据的反问题研究

基于（1）–（4）的数据。文献 [27]讨论了根据（1）中的数据恢复势函数 q 的反问题。基于（3）中数据的反问题称为半反问题，文献 [13, 20, 26], 对此进行了研究，其中使用了一个谱。基于（1）和（3）中混合数据的反问题见文献 [37]。基于（2）和（3）中的混合数据且使用一个谱的反问题见文献 [30]。

还有一些研究利用其他类型的谱数据来求解算子 $L(\ell,\ q)$ 的逆谱问题。例如，利用对应于不同 ℓ 值的 $L(\ell,\ q)$ 的谱来恢复势函数 q 的问题（参见例如 [2, 8, 10, 33]），以及所谓的三谱反问题（参见例如 [38]）。此外，对于具有贝塞尔型奇异性的其他微分算子，反问题理论也取得了丰富的研究成果（参见例如 [4, 6, 19, 39]）。关于无穷区间上反谱问题的研究也十分广泛；然而，这与本文关系不大，因此此处不作讨论。

本文旨在分别利用混合数据 (1)–(3) 和混合数据 (1)–(4) 恢复势 q。本文的主要结果是定理 1.1–1.3，其中定理 1.1 和 1.2 使用混合数据 (1)–(3)，定理 1.3 使用混合数据 (1)–(4)。对于 $\ell = 0$，类似结果可见 [24]。

我们基于混合数据 (1)–(3) 得出的唯一性判据，与某个函数系的闭性有关。该函数系由特征值及相应的范数化常数组成。为表述结果，我们需要以下定义，该定义引自 [23]。对于 $p \in (1,\ \infty)$ $1/p + 1/p' = 1$和 $a > 0$，若系统 $\{\varphi_n \mid \varphi_n \in L^{p'}(0,\ a)\ n \geq 1\}$ 满足**闭** $L^p(0,\ a)$ 中的条件：若$h \in L^p(0,\ a)$ 且 $\int_0^a h(x)\varphi_n(x)dx = 0$ 对所有 n 均成立，则 $h = 0$，就称其为闭的。容易验证，对于 $p \in (1,\ \infty)$，$\{\varphi_n \mid n \geq 1\}$ 在 $L^p(0,\ a)$ 中的闭性等价于 $\{\varphi_n \mid n \geq 1\}$ 在 $L^{p'}(0,\ a)$ 中的完备性。

对于集合 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ 及其子集 $S \subset \Lambda$，我们定义函数系：

$$C(\Lambda, S) := \{\cos(2\sqrt{\lambda_n}x) \mid \lambda_n \in \Lambda\} \cup \{x\sin(2\sqrt{\lambda_n}x) \mid \lambda_n \in S\}.$$

给定混合数据 (1)–(3)，我们可以提出以下定理。

定理 1.1. 设 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in (1, \infty)$, $q \in L^p(0,\ 1)$, *and* $a \in (0, 1]$。假设 $\Lambda = \{\lambda_n \mid \lambda_n \in \sigma(\ell, q, \beta_n)\ n \in \mathbb{N}\}$ 中的元素 λ_n 满足 $\lambda_n \nrightarrow -\infty$，并设 $S \subset \Lambda$ 为一个子集，使得对于所有$\lambda_n \in S$，其值 $\zeta(\lambda_n, \beta_n, q)$ 均为先验已知。如果该系统

$$S_\ell(\Lambda, S) := \begin{cases} \{x^{2k} \mid k = 0, 1, 2, \cdots, \ell\} \cup C(\Lambda, S), & 0 \notin \Lambda, \\ \{x^{2k} \mid k = 0, 1, 2, \cdots, \ell + 1\} \cup C(\Lambda, S), & 0 \in \Lambda, 0 \notin S, \\ \{x^{2k} \mid k = 0, 1, 2, \cdots, \ell + 2\} \cup C(\Lambda, S), & 0 \in S, \end{cases}$$

是 *cl osed* 在 $L^p(0, a)$ 中，那么 q 在 $(a,1)$ Λ 上，并且 S 唯一确定 $q \in L^p(0, a\quad)$.

请注意，本文中“唯一确定 q”是指不存在其他满足定理或推论中相同条件的势 $\hat{q} \neq q$。

此外，我们证明，在附加假设下，定理 1.1 中的条件不仅是唯一性的充分条件，也是必要条件。为此，我们引入算子 A_q。对于 q，$\hat{q} \in L^p(0, a)$，$p \in (0, \infty)$ 和 $a \in (0, 1]$，线性算子 $A_{\hat{q}}: L^p(0, a) \to L^p(0, a)$ 是连续的，其定义如下

$$A_{\hat{q}}(f)(x) = f(x) + 2\int_x^a f(t)\frac{1}{t}M_\ell(t, x, q, \hat{q})dt, \ f \in L^p(0, a), \tag{1.7}$$

其中，函数 $M_\ell(t, x, q, \hat{q})$ 在区域$\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq x \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$内连续且一致有界。此外，

$$A_q(f)(x) = f(x) + 2\int_x^a f(t)\frac{1}{t}M_\ell(t, x, q, q)dt, \ f \in L^p(0, a).$$

关于 M_ℓ 的更多细节，请参阅文献 [37]。然而，本文不探讨其具体性质，因此不作深入介绍。

定理 1.2. 假设 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。如果系统 $S_\ell(\Lambda, S)$ 在$L^p(0, a)$，$p \in (1, \infty)$中不是闭的，且连续线性算子 A_q是同构，那么，$(a,1)$上的 q、 Λ和 S不能唯一确定 $q \in L^p(0, a)$。

我们可以用关于 q 在 a处的导数的知识，替代对有限多个特征值（及范数常数）的了解。我们将特征值和范数常数的共同计数函数定义为

$$m(t) := 2n_\Lambda(t^2) + 2n_S(t^2),$$

其中，计数函数定义为

$$n_A(t) = \sum_{\substack{\lambda \in A \\ |\lambda| \leq t}} 1,$$

对于某个数的集合 A。对于 $1 \leq p < \infty$，记 p' 为共轭指数，即对于 $p \in (1, \infty)$，有 $1/p + 1/p' = 1$，与本文前文的用法相同；此外，若 $p = \infty$，则 $p' = 1$。接下来，我们给出以下反问题具有唯一性的一个充分条件。

定理 *1.3.* 设 $\ell \geq -1/2$, $\hat{q}$, $q \in L^1(0, 1)$，且 $a \in (0, 1]$。假设在 $(a, 1)$ 上几乎处处有 $\hat{q} = q$。给定一些互异特征值 $\lambda_n \in \sigma(\ell, q, \beta_n) \cap \sigma(\ell, \hat{q}, \beta_n)$ $n \in \mathbb{N}$,$\lambda_n \nrightarrow -\infty$，以及 $\zeta(\lambda_n, \beta_n, q) = \zeta(\lambda_n, \beta_n, \hat{q})$，$\lambda_n \in S$，其中某个 $S \subset \Lambda$。

对于 $1 \leq p < \infty$，进一步假设 $q - \hat{q} \in W^{k,p}((a - \delta_0, a])$ 且 $(q - \hat{q})^{(i)}(a) = 0$，其中某些 $\delta_0 > 0$，$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，$i = 0, 1, \cdots, k - 1$。若存在一个序列$R_i \to \infty$ 使得

$$\limsup_{i \to \infty} \left[\int_0^{R_i} \frac{m(t)}{t} dt - \frac{4aR_i}{\pi} + \left(k + 2\ell + 2 + \frac{1}{p'} \right) \ln R_i \right] > -\infty. \tag{1.8}$$

则 $q = \hat{q}$ 几乎处处成立于 $(0, a)$。

对于 $p = \infty$，进一步假设 $q - \hat{q} \in C^k((a - \delta_0, a])$ 且 $(q - \hat{q})^{(i)}(a) = 0$ 对于$i = 0$、$\cdots$、k成立。则(1.8)意味着相同的结论。

本文安排如下。在第 2 节和第 3 节中，我们分别引入两个辅助函数：特征函数 $\Delta(\lambda, q)$ 和整函数$H_\ell(\lambda)$。第 4 节给出了定理 1.1–1.3 的证明，我们在此使用的方法和技巧主要基于文献 [23, 24, 37]。第 5 节中，我们给出了定理 1.3 的一些推论，其中采用了文献 [21] 中的一些思路。本文的主要结果是定理 1.1–1.3；此外，推论 5.1、5.2、5.4、5.5、5.6 和 5.9 也值得关注，其中一些推论甚至在情形 $\ell = 0$ 下改进了先前的结果。

2. The characteristic function $\Delta(\lambda, q)$

回顾一下，除了在（1.6）中定义的解 $\psi_\ell(\lambda, x, q)$ 外，方程（1.1）还有另一个解 $\phi_\ell(\lambda, x, q)$，该解满足

$$\lim_{x\to 0} x^{-\ell-1}\phi_\ell(\lambda, x, q) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right) 2^{\ell+1}},$$

其中，$\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数，见 [28]。由 [28, 引理 2.2] 和[1, （9.2.5）及（9.2.11）], 可知，对于每个固定的 $x \in (0, 1]$, ，函数 $\phi_\ell(\lambda, x, q)$ 是关于 λ 的整函数，并且当 $|\lambda| \to\infty$ 时具有如下渐近公式：

$$\phi_\ell(\lambda, x, q) = \lambda^{-\frac{\ell+1}{2}}\left(\sin\left(\sqrt{\lambda}x - \frac{\ell\pi}{2}\right) + O\left((\mathrm{R}(\lambda) + |\lambda|^{-\frac{1}{2}})e^{x|\mathrm{Im}(\sqrt{\lambda})|}\right)\right), \quad (2.1)$$

$$\phi'_\ell(\lambda, x, q) = \lambda^{-\frac{\ell}{2}}\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}x - \frac{\ell\pi}{2}\right) + O\left((\mathrm{R}(\lambda) + |\lambda|^{-\frac{1}{2}})e^{x|\mathrm{Im}(\sqrt{\lambda})|}\right)\right), \quad (2.2)$$

对每个固定的 $0 < x_0 < 1$，在 $x \in (x_0, 1)$ 上一致成立，其中 $\mathrm{R}(\lambda)$ 在（1.5）中定义。记

$$\Delta(\lambda, q) := W(\psi_\ell(\lambda, x, q), \phi_\ell(\lambda, x, q)).$$

函数 $\Delta(\lambda, q)$ 称为特征函数。显然，

$$\Delta(\lambda, q) = \begin{cases} \phi'_\ell(\lambda, 1, q) + \beta\phi_\ell(\lambda, 1, q), & \text{if } \beta \in \mathbb{R}, \\ \phi_\ell(\lambda, 1, q), & \text{if } \beta = \infty, \end{cases}$$

因此，函数 $\Delta(\lambda, q)$ 是关于 λ 的整函数。特征函数 $\Delta(\lambda, q)$ 的零点 $\{\lambda_n\}$ 与边值问题 (1.1) 和 (1.2) 的特征值重合。对于 $\lambda_n \in \sigma(\ell, q, \beta)$，函数 $\phi_\ell(\lambda_n, x, q)$ 和 $\psi_\ell(\lambda_n, x, q)$ 是特征函数，并且存在一个序列 $\{\kappa(\lambda_n, \beta, q)\}$，使得

$$\psi_\ell(\lambda_n, x, q) = \kappa(\lambda_n, \beta, q)\phi_\ell(\lambda_n, x, q), \ \kappa(\lambda_n, \beta, q) \neq 0. \quad (2.3)$$

我们采用如下记号

$$\tau(\lambda,q):=\int_0^1|\phi_\ell(\lambda,x,q)|^2dx.$$

引理 2.1. 假设 $\lambda_n\in\sigma(\ell,q,\beta)$。则有以下关系，

$$\dot{\Delta}(\lambda_n,q):=\frac{d\Delta(\lambda,q)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_n}=-\tau(\lambda_n,q)\kappa(\lambda_n,\beta,q).$$

引理 2.1 的证明可在满足条件 $\ell=0$ 和 $q\in L^2(0,1)$ 时，从 [16, 引理 1.1.1, p.7] 中得到，而非在满足条件 $\ell\geq -1/2$ 和 $q\in L^1(0,1)$ 时。证明过程非常相似，故略去。

3. The entire function $H_\ell(\lambda)$

令 $q,\hat{}q\in L^1(0,a)$，我们采用如下记号

$$H_\ell(\lambda):=\begin{vmatrix}\phi_\ell(\lambda,1,q) & \phi_\ell(\lambda,1,\hat{q})\\ \phi'_\ell(\lambda,1,q) & \phi'_\ell(\lambda,1,\hat{q})\end{vmatrix}.$$

显然，函数 $H_\ell(\lambda)$ 可表示为（参见 [37, 引理 3.2]）

$$H_\ell(\lambda)=\int_0^1(q(x)-\hat{q}(x))\phi_\ell(\lambda,x,q)\phi_\ell(\lambda,x,\hat{q})dx.$$

显然，若 $q(x)=\hat{}q(x)$ 在 $(a,1)$ 上几乎处处成立，则有

$$H_\ell(\lambda)=\int_0^a(q(x)-\hat{q}(x))\phi_\ell(\lambda,x,q)\phi_\ell(\lambda,x,\hat{q})dx. \tag{3.1}$$

接下来，我们给出整函数 $H_\ell(\lambda)$ 的一些性质。

引理 3.1. *[37, (4.3)]*假设 $\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $q,\hat{}q\in L^p(0,1)$, $p\in(1,\infty)$, *and* $q(x)=\hat{}q(x)$ 在 $(a,1)$ 上几乎处处成立。那么

$$\begin{aligned}\lambda^{\ell+1}H_\ell(\lambda)=&\frac{1}{2}\int_0^a(q(x)-\hat{q}(x))dx\\&+\frac{1}{2}\int_0^a\cos(2\sqrt{\lambda}x)(A_{\hat{q}}((q-\hat{q})(x))dx,\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中，算子 $A_{\hat{q}}$ 定义于 (1.7)。

注 3.1. 假设 $\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\}$和 $q,\hat{}q\in L^p(0,a)$, $p>1$. 若 $\lambda_n\in\sigma(\ell,q,\beta_n)\cap\sigma(\ell,\hat{}q,\beta_n)$ 对于 $n\in\mathbb{N}$ 两两不同且 $\lambda_n\nrightarrow-\infty$，那么

$$\int_0^a(q(x)-\hat{q}(x))dx=0. \tag{3.3}$$

一个详细的 该过程的详细验证可见于 [37, 定理 1 的证明2] .

注 3.2。我们注意到，对于所有 $c\in(0,\ a)$，$A_{\hat{q}}(f)(x)=0$ 是区间 $(c,\ a)$ 上的沃尔泰拉积分方程。因此，如果在 $(c,\ a)$ 上 $A_{\hat{q}}(f)(x)=0$ 几乎处处成立，则在 $(c,\ a)$ 上 $f=0$ 几乎处处成立。由 c 的任意性可知，如果在 $(0,\ a)$ 上 $A_{\hat{q}}(f)(x)=0$几乎处处成立，则在 $(0,\ a)$ 上 $f=0$ 几乎处处成立。

引理 3.2. 设 $\ell\geq -1/2$ 和 $q,\ \hat{}q\in L^1(0,\ a)$。则有：

(1). $H_\ell(\lambda)=0$ 当且仅当存在 $\beta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 使得

$$\lambda\in\sigma(\ell,q,\beta)\cap\sigma(\ell,\hat{q},\beta).$$

(2). 若 $\lambda\in\sigma(\ell,\ q,\ \beta)\cap\sigma(\ell,\ \hat{}q,\ \beta)$，则 $\zeta(\lambda,\ \beta,\ \hat{}q)=\zeta(\lambda,\ \beta,\ q)$ 当且仅当

$$\dot{H}_\ell(\lambda):=\frac{\partial H_\ell(\lambda)}{\partial\lambda}=0.$$

证明。**(1).** $\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 的情形的证明见 [37, 引理 3.1]；更一般的情形 $\ell\geq -1/2$ 可用类似方法证明。

(2). 若 $\beta=\infty,\ \lambda\in\sigma(\ell,q,\infty)\cap\sigma(\ell,\hat{}q,\infty)$，则

$$\begin{aligned}\dot{H}_\ell(\lambda)&=\frac{\partial(\phi_\ell(\cdot,1,q)\phi'_\ell(\cdot,1,\hat{q})-\phi_\ell(\cdot,1,\hat{q})\phi'_\ell(\cdot,1,q))}{\partial\lambda}(\lambda)\\&=\phi'_\ell(\cdot,1,\hat{q})\frac{\partial\phi_\ell(\cdot,1,q)}{\partial\lambda}(\lambda)-\phi'_\ell(\cdot,1,q)\frac{\partial\phi_\ell(\cdot,1,\hat{q})}{\partial\lambda}(\lambda)\\&=\phi'_\ell(\lambda,1,\hat{q})\dot{\Delta}(\lambda,q)-\phi'_\ell(\lambda,1,q)\dot{\Delta}(\lambda,\hat{q})\\&=-\kappa(\lambda,\infty,q)\tau(\lambda,q)\phi'_\ell(\lambda,1,\hat{q})+\kappa(\lambda,\infty,\hat{q})\tau(\lambda,\hat{q})\phi'_\ell(\lambda,1,q)\\&=\frac{\kappa^2(\lambda,\infty,\hat{q})\tau(\lambda,\hat{q})-\kappa^2(\lambda,\infty,q)\tau(\lambda,q)}{\kappa(\lambda,\infty,q)\kappa(\lambda,\infty,\hat{q})},\end{aligned}\tag{3.4}$$

(3.4) 中的第四个等式由引理 2.1 得出，而 (3.4) 中的最后一个等式由恒等式 (2.3) 得出。由 (2.3) 可知

$$\begin{aligned}\kappa^2(\lambda,\infty,q)\tau(\lambda,q)&=\int_0^1|\kappa(\lambda,\infty,q)\phi_\ell(\lambda,x,q)|^2dx\\&=\int_0^1|\psi_\ell(\lambda,x,q)|^2dx=\zeta(\lambda,\infty,q).\end{aligned}\tag{3.5}$$

由 (3.4) 和 (3.5) 可得，$H_\ell(\lambda)=0$ 当且仅当 $\zeta(\lambda,\ \infty,\ \hat{}q)=\zeta(\lambda,\ \infty,\ q)$。

情形 $\beta\in\mathbb{R}$ 的证明与情形 $\beta=\infty$ 类似，故略去。 □

引理 3.3. 设 $\ell\geq -1/2,\ q,\ \hat{}q\in L^1(0,a)$ 满足 $q=\hat{}q$ 在 $(a,1)$ 上几乎处处成立，其中 $0<a\leq 1$ 为某个常数。进一步假设：

对于 $1\leq p<\infty$ 和 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，存在 $\delta_0>0$，使得 $q-\hat{}q\in W^{k,\ p}((a-\delta_0,a])$，且 $(q-\hat{}q)^{(i)}(a)=0$，对于 $i=0$、1、$\cdots$、$k-1$。那么对于任意 $\varepsilon>0$，

存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得

$$|H_\ell(z^2)|\le \frac{e^{2a|\mathrm{Im}z|}}{|z|^{2\ell+2}|\mathrm{Im}z|^{k+\frac{1}{p'}}}\left(\varepsilon+C|z|^{\gamma}e^{-\delta(\varepsilon)|\mathrm{Im}z|}+C|\mathrm{Im}z|^{k+\frac{1}{p'}}e^{-2\delta(\varepsilon)|\mathrm{Im}z|}\right), \quad (3.6)$$

其中 $\mathrm{Im}z\neq 0$，且常数 $C>0$ 和 $0<\gamma<1$ 与 ε、δ和 z无关。

对于 $p=\infty$，若 $q-\hat{}q\in C^k((a-\delta_0,a])$ 且 $(q-\hat{}q)^{(i)}(a)=0$ 对于 $i=0,\cdots,k$成立，则(3.6) 成立。

证明。 固定 $x_0\in(0,a-\delta_0)$。由渐近估计 (2.1) 和 (2.2)，我们可以选取一个常数 $0<\gamma<1$，使得

$$\phi_\ell(z^2,x,q)=z^{-\ell-1}\left(\sin\left(zx-\frac{\ell\pi}{2}\right)+O(|z|^{\gamma-1}e^{x|\mathrm{Im}z|})\right), \quad (3.7)$$

and

$$\phi'_\ell(z^2,x,q)=z^{-\ell}\left(\cos\left(zx-\frac{\ell\pi}{2}\right)+O\left(|z|^{\gamma-1}e^{x|\mathrm{Im}(z)|}\right)\right), \quad (3.8)$$

对 $x\in[x_0,1]$一致成立。恒等式 (3.1) 可改写为

$$\begin{aligned}H_\ell(z^2)=&\left(\int_0^{x_0}+\int_{x_0}^{a}\right)(q-\hat{q})(x)\phi_\ell(\lambda,x,q)\phi_\ell(\lambda,x,\hat{q})dx\\ =&\phi_\ell(z^2,x_0,q)\phi'_\ell(z^2,x_0,\hat{q})-\phi_\ell(z^2,x_0,\hat{q})\phi'_\ell(z^2,x_0,q)\\ &+\int_{x_0}^{a}(q-\hat{q})(x)\phi_\ell(\lambda,x,q)\phi_\ell(\lambda,x,\hat{q})dx.\end{aligned} \quad (3.9)$$

将估计式 (3.7) 和 (3.8) 代入恒等式 (3.9)，对于 $\delta\in(0,\delta_0)$，有

$$\begin{aligned}H_\ell(z^2)=&z^{-2\ell-2}\int_{x_0}^{a}(q-\hat{q})(x)f_0(x)dx+z^{-2\ell-2}g(z)\\ =&z^{-2\ell-2}\left(\int_{x_0}^{a-\delta}+\int_{a-\delta}^{a}\right)(q-\hat{q})(x)f_0(x)dx+z^{-2\ell-2}g(z),\end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $f_0(x)=O\left(e^{2x|\mathrm{Im}z|}\right)$ 关于 $x\in[x_0,a]$一致，且对于 $|z|\to\infty$，$g(z)=O\left(|z|^{\gamma}e^{2x_0|\mathrm{Im}z|}\right)$。

另一方面，由于 $q-\hat{}q\in W^{k,p}(a-\delta_0,a]$ and $(q-\hat{}q)^{(i)}(a)=0$ for $i=0,\cdots,k-1$, and $1\le p<\infty$，通过进行 k 次分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{a-\delta}^{a}(q-\hat{q})(x)f_0(x)dx=&(-1)\int_{a-\delta}^{a}(q-\hat{q})'(x)f_1(x)dx=\cdots\\ =&(-1)^k\int_{a-\delta}^{a}(q-\hat{q})^{(k)}(x)f_k(x)dx,\end{aligned}$$

其中

$$f_{i+1}(x)=\int_{a-\delta}^{x} f_i(t)dt.$$

通过对 i 归纳可知

$$f_i(x)=O\left(\frac{e^{2|\mathrm{Im}z|x}}{|\mathrm{Im}z|^i}\right) \tag{3.11}$$

在 $x\in[a-\delta,a]$ 上一致。注意，H¨older 不等式给出

$$\int_{a-\delta}^{a}\left|(q-\hat{q})^{(k)}(x)\right|e^{2|\mathrm{Im}z|x}dx\le C_1\|(q-\hat{q})^{(k)}\|_{L^p(a-\delta,a)}\frac{e^{2|\mathrm{Im}z|a}}{|\mathrm{Im}z|^{1/p'}}, \tag{3.12}$$

其中某个常数为 $C_1>0$。当 δ 较小时，$(q-\hat{q})^{(k)}$ 的 L^p-范数较小。由事实 (3.11) 和 (3.12) 可知，当 δ较小时，我们有

$$\left|\int_{a-\delta}^{a}(q-\hat{q})(x)f_0(x)dx\right|\le\varepsilon\frac{e^{2|\mathrm{Im}z|a}}{|\mathrm{Im}z|^{k+1/p'}}. \tag{3.13}$$

由附加信息可知，不等式 (3.13) 对$p=\infty$也成立。

另一方面，

$$\left|\int_{x_0}^{a-\delta}(q-\hat{q})(x)f_0(x)dx\right|\le C_2e^{2|\mathrm{Im}z|(a-\delta)}, \tag{3.14}$$

其中 $C_2>0$ 为某个常数。此外，(3.10) 中的函数 $g(z)$ 满足以下估计：

$$|g(z)|\le C_3\frac{e^{2|\mathrm{Im}z|a}}{|\mathrm{Im}z|^{k+1/p'}}|z|^\gamma e^{-(a-x_0)|\mathrm{Im}z|}\le C_3\frac{e^{2|\mathrm{Im}z|a}}{|\mathrm{Im}z|^{k+1/p'}}|z|^\gamma e^{-\delta|\mathrm{Im}z|}, \tag{3.15}$$

其中 $C_3>0$ 为某个常数。利用 (3.10)、(3.13)、(3.14) 和 (3.15)，我们完成了证明。□

4. Proofs of Theorems 1.1–1.3

在证明主要结果定理 1.1–1.3 之前，我们先给出一个关于 $F(\lambda)$ 的导数的引理。

引理 4.1. 给定 $f\in L^1(0,1)$，$a\in(0,1)$，定义

$$F(\lambda)=\int_0^a\cos(2\sqrt{\lambda}x)f(x)dx.$$

Then

$$F'(\lambda)=-\int_0^a\sin(2\sqrt{\lambda}x)\frac{x}{\sqrt{\lambda}}f(x)dx,$$

and

$$F^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{4^k(k)!}{(2k)!} \int_0^a x^{2k} f(x)dx,\ k = 0, 1, 2, \cdots .$$

引理 4.1 的证明很直接，因此略去。现在我们准备证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明。我们首先考虑情形 $0 \notin \Lambda$。假设存在另一个势 $\hat{q} \in L^p(0,1)$，使得 $q(x) = \hat{q}(x)$，几乎处处成立于 $(a,1)$ 上，$\lambda_n \in \sigma(\ell, q, \beta_n) \cap \sigma(\ell, \hat{q}, \beta_n)$ 对于 $\lambda_n \in \Lambda$ 成立，并且 $\zeta(\lambda_n, \beta_n, q)=\zeta(\lambda_n, \beta_n, \hat{q})$ 对于 $\lambda_n \in S$ 成立。

如果 λ_n 的取值有一个有限聚点，那么整函数$\lambda^{\ell+1}H_\ell(\lambda) \equiv 0$。此外，(3.2) 中 $\lambda^{\ell+1}H_\ell(\lambda)$ 的表达式给出

$$\int_0^a (q(x) - \hat{q}(x))dx = 0,$$

这意味着

$$\int_0^a \cos(2\sqrt{\lambda}x)(A_{\hat{q}}(q - \hat{q})(x))dx \equiv 0,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

因此，有 $A_{\hat{q}}(q - \hat{q})(x) \equiv 0$；结合注 3.2 可知，$q(x) = \hat{q}(x)$ 几乎处处成立于 $(0, a)$ 上。

如果 λ_n 的值没有有限聚点，根据引理 3.1 和注 3.1，可得

$$\lambda^{\ell+1}H_\ell(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^a \cos(2\sqrt{\lambda}x)(A_{\hat{q}}(q - \hat{q})(x))dx, \tag{4.1}$$

其中 $A_{\hat{q}}(q - \hat{q}) \in L^p(0,\ a)$。将 $\lambda = \lambda_n$ 代入恒等式 (4.1)，可得

$$\int_0^a \cos(2\sqrt{\lambda_n}x)(A_{\hat{q}}(q - \hat{q})(x))dx = 0,\ \lambda_n \in \Lambda. \tag{4.2}$$

由引理 3.2 和引理 4.1，再结合恒等式 (4.1)，可得

$$\int_0^a x\sin(2\sqrt{\lambda_n}x)(A_{\hat{q}}(q - \hat{q})(x))dx = 0,\ \lambda_n \in S, \tag{4.3}$$

and

$$\int_0^a x^{2k}(A_{\hat{q}}(q - \hat{q})(x))dx = 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots, \ell. \tag{4.4}$$

由于系统 $S_\ell(\Lambda,\ S)$ 在 $L^p(0,\ a)$ 中是闭的，由 (4.2)–(4.4) 可得 $A_{\hat{q}}(q - \hat{q})(x) = 0$ 在 $(0,\ a)$ 上几乎处处成立。然后由注 3.2 可知，$q(x) = \hat{q}(x)$ 在 $(0,\ a)$ 上几乎处处成立。

对于 $0 \in \Lambda$ 和 $0 \notin S$ 的情形（或 $0 \in S$ 的情形），证明中唯一的区别在于，0 是 $\lambda^{\ell+1}H_\ell(\lambda)$ 的一个重数为 $\ell + 2$（或 $\ell + 3$）的零点。因此，等式 (4.4) 改为

$$\int_0^a x^{2k}(A_{\hat{q}}(q - \hat{q})(x))dx = 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots, \ell + 1,$$

$$(\text{or } \int_0^a x^{2k}(A_{\hat{q}}(q-\hat{q})(x))dx = 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots, \ell+2,)$$

证明的其他部分保持不变。证明至此完成。 □

为了证明定理 1.2，我们需要以下辅助引理。

引理 4.2. *[23,* 引理 *2.1]* 设 B_1 和 B_2 为巴拿赫空间。假设对每个 $q \in B_1$，都有一个连续线性算子

$$A_q : B_1 \to B_2$$

定义如下，使得对于某个 $q_0 \in B_1$,

$$A_{q_0} : B_1 \to B_2$$

is 是一个同构，并且映射 $q \to A_q$ 是 ***Lipschitz*** 连续的，其意义是 at

$$\|(A_{q_1} - A_{q_2})h\| \le c(q_0)\|q_1 - q_2\|\|h\|, \tag{4.5}$$

对所有 h、q_1、$q_2 \in B_1$ 和 $\|q_1\|$、$\|q_2\| \le 2\|q_0\|$均成立，其中常数 $c(q_0)$ 与 h、q_1、q_2无关。则集合 $\{A_{q_1}(q_1 - q_0) \mid q_1 \in B_1\}$ 在 B_2 中包含一个以原点为中心的球。

就我们的目的而言，令 $B_1 = B_2 = L^p(0, a)$。在（1.7）中定义的连续线性算子 $A_{\hat{q}}$满足利普希茨条件（4.5）（见 [37, 引理 6.1]）。为应用引理 4.2 的结论，我们假设连续线性算子 A_q 是一个同构。接下来，我们着手证明定理 1.2。

定理 1.2的证明。 我们首先考虑情形 $0 \notin \Lambda$。设 $q \in L^p(0,1)$。我们将证明存在一个不同的 $\hat{}q \in L^p(0, 1)$，使得在 $(a,1)$ 上几乎处处有 $\hat{}q = q$，并且对于给定的集合 Λ 和 S，存在边界参数 $\{\beta_n\}$，使得对于 $\lambda_n \in \Lambda$，$\lambda_n \in \sigma(\ell, q, \beta_n) \cap \sigma(\ell, \hat{}q, \beta_n)$；对于$\lambda_n \in S$，$\zeta(\lambda_n, \beta_n, q) = \zeta(\lambda_n, \beta_n, \hat{}q)$。

由于集合 $S_\ell(\Lambda, S)$ 在 $L^p(0, a)$ 中不是闭集，因此存在 $h \in L^p(0, a), h \neq 0$, 使得

$$\int_0^a h(x)\cos(2\sqrt{\lambda_n}x)dx = 0,\ \lambda_n \in \Lambda, \tag{4.6}$$

$$\int_0^a h(x)x\sin(2\sqrt{\lambda_n}x)dx = 0,\ \lambda_n \in S, \tag{4.7}$$

$$\int_0^a h(x)x^{2k}dx = 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots, \ell. \tag{4.8}$$

根据引理 4.2，存在一个充分小的常数 η，满足 $\eta > 0$，使得$\eta h \in \{A_{q_1}(q_1 - q) \mid q_1 \in L^p(0, a)\}$。因此，存在 $\hat{}q \in L^p(0, a)$，使得

$$A_{\hat{q}}(\hat{q} - q) = \eta h. \tag{4.9}$$

由于 $h \neq 0$，可得 $q - \hat{}q \neq 0$。

由等式 (3.2) 和 (4.9) 可得

$$\lambda^{\ell+1}H_\ell(\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^a(q-\hat{q})(x)dx+\frac{1}{2}\eta\int_0^a h(x)\cos(2\sqrt{\lambda}x)dx. \tag{4.10}$$

将 $\lambda=0$ 代入 (4.10)，并结合 (4.8)，得到

$$\int_0^a(q-\hat{q})(x)dx=-\eta\int_0^a h(x)dx=0.$$

于是，等式 (4.10) 变为

$$\lambda^{\ell+1}H_\ell(\lambda)=\frac{1}{2}\eta\int_0^a h(x)\cos(2\sqrt{\lambda}x)dx. \tag{4.11}$$

对于 $k=0$，1，2，$\cdots$，ℓ，等式 (4.8) 保证函数 $\lambda^{\ell+1}H_\ell(\lambda)$ 有一个重数为 $\ell+1$的零点 $\lambda=0$。等式 (4.6) 和 (4.7) 意味着

$$\lambda_n^{\ell+1}H_\ell(\lambda_n)=\frac{1}{2}\eta\int_0^a h(x)\cos(2\sqrt{\lambda_n}x)dx=0,\ \lambda_n\in\Lambda,$$

$$\lambda_n^{\ell+1}\dot{H}_\ell(\lambda_n)=-\frac{1}{2}\eta\int_0^a h(x)\frac{x\sin(2\sqrt{\lambda_n}x)}{\sqrt{\lambda_n}}dx=0,\ \lambda_n\in S.$$

因此，存在一个 β_n，使得当 $\lambda_n\in\Lambda$ 时，$\lambda_n\in\sigma(\ell,\ q,\ \beta_n)\cap\sigma(\ell,\ \hat{}q,\ \beta_n)$；当 $\lambda_n\in S$ 时，$\zeta(\lambda_n,\ \beta_n,\ q)=\zeta(\lambda_n,\ \beta_n,\ \hat{}q)$。至此，情形 $0\notin\Lambda$ 的证明完成。

现在，假设 $0\in\Lambda$ 和 $0\notin S$。与情形 $0\notin\Lambda$ 唯一的区别是，我们还需要证明，对于某个 $\beta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，有 $0\in\sigma(\ell,\ q,\ \beta)\cap\sigma(\ell,\ \hat{}q,\ \beta)$。

由于 $S_\ell(\Lambda,S)$ 不是闭的，我们选取 $h\neq0$ 属于 $L^p(0,a)$，使得 (4.6)–(4.7) 成立，并且

$$\int_0^a x^{2k}h(x)dx=0,\ k=0,1,2,\cdots,\ell+1. \tag{4.12}$$

其余步骤与情形 $0\notin\Lambda$ 的证明相同。等式 (4.12) 表明 0 是 $\lambda^{\ell+1}H_\ell(\lambda)$ 的一个重数为 $\ell+2$ 的零点，这意味着 $H_\ell(0)=0$，也就是说，对于某个 $\beta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，有 $0\in\sigma(\ell,q,\beta)\cap\sigma(\ell,\hat{}q,\beta)$。

最后，设 $0\in S$。与其他情形唯一的区别是，我们还应证明，对于某个 $\beta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，$0\in\sigma(\ell,q,\beta)\cap\sigma(\ell,\hat{}q,\beta)$，且 $\zeta(0,\beta,q)=\zeta(0,\beta,\hat{}q)$。

由于 $S_\ell(\Lambda,S)$ 不是闭的，我们选择 $h\neq0$ 属于 $L^p(0,a)$，使得 (4.6) 成立，并且 $-(4.7)$

$$\int_0^a x^{2k}h(x)dx=0,\ k=0,1,2,\cdots,\ell+2. \tag{4.13}$$

其余步骤与情形 $0\notin\Lambda$ 的证明相同。等式 (4.13) 表明，0 是 $\lambda^{\ell+1}H_\ell(\lambda)$ 的一个重数为 $\ell+3$ 的零点，这意味着$H_\ell(0)=0$且 $H_\ell(0)=0$，即 $0\in\sigma(\ell,\ q,\ \beta)\cap\sigma(\ell,\ \hat{}q,\ \beta)$，并且 $\zeta(0,\ \beta,\ q)=\zeta(0,\ \beta,\ \hat{}q)$，其中 $\beta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 为某个常数。证明完毕。□

注 4.1. </style}算子 A_q 是同构这一假设非常强，而且可能不成立；参见 [37, 注 5.1]。

本节最后，我们给出定理 1.3 的证明。

定理 1.3的证明。 反证法。假设 $\hat{q} \neq q$。那么 $z^{2\ell+2}H_\ell(z^2)$ 不可能恒等于零。这是因为，若 $z^{2\ell+2}H_\ell(z^2) \equiv 0$，那么

$$\frac{\phi'_\ell(z^2,1,q)}{\phi_\ell(z^2,1,q)} \equiv \frac{\phi'_\ell(z^2,1,\hat{q})}{\phi_\ell(z^2,1,\hat{q})},$$

由此，结合基于 Weyl-Titchmarsh m-函数的逆谱问题唯一性定理（见 [28]），可得 $q = \hat{q}$ 在 (0,1) 上几乎处处成立。

不失一般性，设 $0 \notin \Lambda$，即 $H_\ell(0) \neq 0$。那么 $H_\ell(z^2)$ 是关于 z 的非平凡整函数，其零点位于 $\pm\sqrt{\lambda_n}$，且 $\lambda_n \in S$ 处至少为二重零点。

回顾 Jensen 公式：设 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 上解析，且 $f(0) \neq 0$。若$n(t)$ 是 $f(z)$ 在 $|z| \leq t$ 内的零点个数，则对于 $0 < r < R$,

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|d\varphi - \ln|f(0)|.$$

将 Jensen 公式应用于 $H_\ell(z^2)$，并采用记号 $m(t) = 2n_\Lambda(t^2) + 2n_S(t^2)$，可得：

$$\int_0^r \frac{m(t)}{t}dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|H_\ell(r^2e^{2i\varphi})|d\varphi + C_4, \tag{4.14}$$

其中 $C_4 = |\ln|H_\ell(0)||$。将不等式 (3.6) 中 $H_\ell(z^2)$ 的估计代入 (4.14)，经过一些简单计算可得：

$$\begin{aligned}&\int_0^r \frac{m(t)}{t}dt - \frac{4ra}{\pi} + \left(k + 2\ell + 2 + \frac{1}{p'}\right)\ln r\\ \leq&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(\varepsilon + Cr^\gamma e^{-\delta r|\sin\varphi|} + C(r|\sin\varphi|)^{k+\frac{1}{p'}}e^{-2\delta r|\sin\varphi|}\right)d\varphi + C_4.\end{aligned} \tag{4.15}$$

容易验证：

$$r^\gamma e^{-\delta r|\sin\varphi|} \leq \frac{(\gamma e)^\gamma}{\delta^\gamma|\sin\varphi|^\gamma},$$

$$(r|\sin\varphi|)^{k+1/p'}e^{-2\delta r|\sin\varphi|} \leq \left(\frac{k+1/p'}{2\delta}\right)^{k+1/p'} e^{-(k+1/p')}.$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理，我们有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(\varepsilon + cr^\gamma e^{-\delta r|\sin\varphi|} + c(r|\sin\varphi|)^{k+\frac{1}{p'}}e^{-2\delta r|\sin\varphi|})d\varphi = \ln\varepsilon. \tag{4.16}$$

对不等式 (4.15) 的两边取上极限 $r \to \infty$，并结合 (4.16)，可得

$$\limsup_{r\to\infty} \int_0^r \frac{m(t)}{t}dt - \frac{4ra}{\pi} + \left(k + 2\ell + 2 + \frac{1}{p'}\right) \ln r \le \ln\varepsilon + C_4. \tag{4.17}$$

由 ε 的任意性，不等式 (4.17) 推出

$$\int_0^r \frac{m(t)}{t}dt - \frac{4ra}{\pi} + \left(k + 2\ell + 2 + \frac{1}{p'}\right) \ln r \to -\infty,\ r \to \infty,$$

这与假设矛盾。因此，在 $(0,\ a)$ 上几乎处处有 $q = \hat{}q$。证明完毕。□

5. 定理 1.3 的推论

本节给出定理 1.3 的一些推论，它们利用不同类型的已知数据，为逆谱问题提供唯一性结果。对于固定的边界条件，给定某个区间 $(a,\ 1)$ 上的部分势函数 q，我们在推论 5.1 中给出了基于特征值序列的唯一性结果；在推论 5.2 中给出了基于一对特征值及相应范数常数的唯一性结果；并在推论 5.4 中给出了势满足某种光滑性条件时半反问题的唯一性结果。对于两种不同边界条件下、特征值与范数常数未配对的谱数据，推论 5.5、5.6 和 5.9 给出了唯一性结果。

记

$$L^1_\ell(0,1) = \begin{cases} L^1(0,1), & \ell > -1/2, \\ \left\{ f \in L^1(0,1) \middle| \int_0^1 |(1-\ln x) f(x)| dx < \infty \right\}, & \ell = -1/2. \end{cases}$$

给定 $q \in L^1_\ell(0,\ 1)$，由 (1.3)、(1.4) 和 (1.5) 可知，特征值 $\lambda_{\ell,\ \beta,\ n}(q) \in \sigma(\ell,\ q,\ \beta)$ 具有如下渐近行为：

$$\sqrt{\lambda_{\ell,\infty,n}(q)} = \left(n + \frac{\ell}{2}\right)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

$$\sqrt{\lambda_{\ell,\beta,n}(q)} = \left(n + \frac{\ell-1}{2}\right)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right),\ \beta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

推论 5.1。设 $\ell \ge -1/2,\ a \in (0,\ 1/2],$ 以及 $q,\ \hat{}q \in L^1_\ell(0,\ 1)$。考虑子集 $S \subset \sigma(\ell,\ q,\beta) \cap \sigma(\ell,\ \hat{}q,\beta)$。假设 $q = \hat{}q$ 几乎处处成立于 $(a,\ 1)$。若集合 S 满足

$$n_S(t) \ge \begin{cases} 2an_{\sigma(\ell,q,\beta)}(t) + (a-1)\ell, & \beta = \infty, \\ 2an_{\sigma(\ell,q,\beta)}(t) + (a-1)\ell - 2a, & \beta \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.3}$$

对所有充分大的 $t > 0,$ 则 $q = \hat{}q$ 几乎处处成立于 $(0, a)$。

推论 *5.2.* 设 $\ell \geq -1/2$, $a \in (0,1]$, 和 $q, \hat{}q \in L^1_\ell(0,1)$。考虑一个子集合 $S \subset \sigma(\ell, q, \beta) \cap \sigma(\ell, \hat{}q, \beta)$，满足 $\zeta(\lambda_n, \beta, q) = \zeta(\lambda_n, \beta, \hat{}q)$，其中 $\lambda_n \in S$。假设在 $(a, 1)$ 上 $q = \hat{}q$ 几乎处处成立。若集合 S 满足

$$n_S(t) \geq \begin{cases} an_{\sigma(\ell,q,\beta)}(t) + \frac{(a-1)\ell}{2}, & \beta = \infty, \\ an_{\sigma(\ell,q,\beta)}(t) + \frac{(a-1)\ell}{2} - \frac{a}{2}, & \beta \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.4}$$

对所有充分大的 $t > 0$，则 $q = \hat{}q$ 几乎处处成立于 $(0, a)$。

对于情形 $\ell = 0$，推论 5.1 的结果出自 Gesztesy 和 Simon [15,定理 1.3]，；推论 5.2 的结果出自 Wei 和 Xu [35, 定理 4.1]。类似的结果也可见于推论 5.1 和推论 5.2，其中 $\ell \geq 0$ 在狄利克雷和诺伊曼边界条件下的结果可见于 [30, 定理 4.1 和 4.2]。

我们只证明推论 5.2；推论 5.1 的证明与推论 5.2 的证明类似，因此略去。在证明推论 5.2 之前，我们先给出以下引理。

引理 5.3. *[24,* 引理 *3.2]* 设 $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ 为趋于 $+\infty$ 的实数，且 $m(t) = \sum 1$。若对所有充分大的指标 $\overline{k}$，$\sqrt{\mu_k} \leq \alpha_1 k + \alpha_2 + O(1/k)$ 成立 $\mu_k \leq t$，则

$$\int_1^R \frac{2m\left(t^2\right)}{t} dt \geq \frac{2}{\alpha_1} R + \left(1 - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \ln R + O(1), R \to \infty.$$

推论 5.2 的证明。我们首先考虑情形 $\beta = \infty$。设 $m(t) = 4n_S(t^2)$。条件 (5.4) 对 $\beta = \infty$ 给出

$$\begin{aligned} &\int_0^r \frac{m(t)}{t} dt - \frac{4ra}{\pi} + (2\ell + 2)\ln r \\ \geq &2a \int_1^r \frac{2n_{\sigma(\ell,q,\infty)}(t^2)}{t} dt + 2a\ell \ln r - \frac{4ra}{\pi} + 2\ln r. \end{aligned} \tag{5.5}$$

渐近公式 (5.1) 和引理 5.3 得出

$$\int_1^r \frac{2n_{\sigma(\ell,q,\infty)}(t^2)}{t} dt \geq \frac{2}{\pi} r - (\ell + 1)\ln r + O(1), \ r \to \infty. \tag{5.6}$$

由不等式 (5.5) 和 (5.6)，可得

$$\int_0^r \frac{m(t)}{t} dt - \frac{4ra}{\pi} + (2\ell + 2)\ln r > -\infty, \ r \to \infty.$$

由定理 1.3，我们有 $q = \hat{}q$ 几乎处处成立于 $(0, a)$。

现在我们考虑情形 $\beta \in \mathbb{R}$。由于 $m(t) = 4n_S(t^2)$ 这一事实，以及 $\beta \in \mathbb{R}$ 的条件 (5.4)，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^r \frac{m(t)}{t}dt - \frac{4ra}{\pi} + (2\ell+2)\ln r\\ \geq& 2a\int_1^r \frac{2n_{\sigma(\ell,q,\beta)}(t^2)}{t}dt + 2a(\ell-1)\ln r - \frac{4ra}{\pi} + 2\ln r.\end{aligned} \tag{5.7}$$

渐近行为 (5.2) 和引理 5.3 得出

$$\int_1^r \frac{2n_{\sigma(\ell,q,\beta)}(t^2)}{t}dt \geq \frac{2}{\pi}r - \ell\ln r + O(1),\ r\to\infty. \tag{5.8}$$

由不等式 (5.7) 和 (5.8)，可得

$$\int_0^r \frac{m(t)}{t}dt - \frac{4ra}{\pi} + (2\ell+2)\ln r > -\infty,\ r\to\infty.$$

由定理 1.3，可得在 $(0,\ a)$ 上 $q = \hat{}q$ 几乎处处成立。证明完毕。 □

注 5.1. 对于 $\ell = -1/2$ 和 $q,\ \hat{}q \in L^1(0,\ 1)$，因为 $\alpha_1 = \pi$ 和

$$\alpha_2 = \begin{cases}(\frac{\ell}{2}+1)\pi + c, & \beta = \infty,\\ \frac{\ell+1}{2}\pi + c, & \beta \in \mathbb{R},\end{cases}$$

对于充分小的 $c > 0$，采用引理 5.3 中的符号 α_1 和 α_2，推论 5.1 的结果除 $a = 1/2$ 外均成立；然而，若在不等式 (5.3) 右端加上任意正数，则该结果对 $a = 1/2$ 也成立。推论 5.2 的结果除 $a = 1$ 外也成立；但是，若在不等式 (5.4) 右端加上任意正数，则该结果对 $a = 1$ 也成立。

对于 $x \in \mathbb{R}$，我们用符号 $[x]$ 表示不超过x的最大整数，并给出以下推论。

推论 5.4. 设 $\ell \geq -1/2$ 和 $q \in L^1_\ell(0,\ 1)$。假设 q 是某个 $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $\varepsilon > 0$ 对应的 $C^{2k}((1/2-\varepsilon,\ 1/2+\varepsilon))$。则以下结论成立。

(1). 区间 $(1/2,\ 1)$ 上的势 q，以及集合 $\sigma(\ell,\ q,\ \infty)$（除 $([\ell/2]+k+1)$ 元素的数量外），唯一确定 q。(2). 区间 $(1/2,\ 1)$ 上的势 q，以及集合 $\sigma(\ell,\ q,\ \beta)$（除 $([(\ell+1)/2]+k+1)$ 元素的数量外），唯一确定 q，其中 $\beta \in \mathbb{R}$。

对于情形 $\ell = 0$，推论 5.4 的结果归功于 Gesztesy 和 Simon[15, 定理 1.2]。

推论的证明 5.4. (1). 假设 $S \subseteq \sigma(\ell,\ q,\ \infty)$ 满足集合 $\sigma(\ell,\ q,\ \infty)\setminus S$ 中的元素个数小于 $[\ell/2]+k+1$，并令 $m(t) = 2n_S(t^2)$。则有

$$m(t) \geq 2n_{\sigma(\ell,q,\infty)}(t^2) - \ell - 2k - 2, \tag{5.9}$$

对所有充分大的 $t>0$，不等式 (5.6) 和 (5.9) 蕴含

$$\int_0^r \frac{m(t)}{t}dt-\frac{2r}{\pi}+(2k+2\ell+3)\ln r \geq \int_0^r \frac{2n_{\sigma(\ell,q,\infty)}(t^2)}{t}dt-\frac{2r}{\pi}+(\ell+1)\ln r \\ >-\infty,\ r\to\infty.$$

因此，由定理 1.3 可证明结论 (1)。

(2). 设 $\beta\in\mathbb{R}$。假设 $S\subseteq\sigma(\ell,q,\beta)$，使得集合 $\sigma(\ell,q,\beta)$ 中的元素个数 $\setminus S$ 小于 $[(\ell+1)/2]+k+1$，并设 $m(t)=2n_S(t^2)$。则有

$$m(t)\geq 2n_{\sigma(\ell,q,\beta)}(t^2)-\ell-2k-3, \tag{5.10}$$

对所有充分大的 $t>0$，不等式 (5.8) 和 (5.10) 蕴含

$$\int_0^r \frac{m(t)}{t}dt-\frac{2r}{\pi}+(2k+2\ell+3)\ln r \geq \int_0^r \frac{2n_{\sigma(\ell,q,\beta)}(t^2)}{t}dt-\frac{2r}{\pi}+\ell\ln r \\ >-\infty,\ r\to\infty.$$

因此，由定理 1.3 可证明结论 (2)。 □

注5.2. 对于 $\ell=-1/2$，如果使用 $q\in L^1(0,1)$ 而不是 $q\in L^1_\ell(0,1)$，那么只要在原条件中增加一个特征值，推论 5.4 的结论仍然成立。

推论 5.5。令 $\ell\geq -1/2$, $q\in L^1_\ell(0,\ 1)$，β_1、$\beta_2\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$、$\beta_1\neq\beta_2$ 和$M\subseteq\mathbb{N}$。则有以下结论成立。

(1). 如果 $\beta_1=\infty$ 或 $\beta_2=\infty$，则集合 $\sigma(\ell$、q、$\beta_1)$、$\{\zeta(\lambda_{\ell}$、$_{\beta_1}$、$_n(q)\ \beta_1$、$q)\}_{n\in M}$和 $\{\lambda_{\ell,\beta_2,n}(q)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus M}$ 唯一确定 q。*(2).* 如果 $\beta_1\neq\infty$ 和 $\beta_2\neq\infty$，则集合 $\sigma(\ell$、q、$\beta_1)$、$\{\zeta(\lambda_{\ell}$、$_{\beta_1}$、$_n(q)\ \beta_1$、$q)\}_{n\in M}$和 $\{\lambda_{\ell,\beta_2,n}(q)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus(M\cup\{k\})}$ 对于正整数 $k\notin M$ 唯一确定q。

对于情形 $\ell=0$，Hatinoˇglu[21, Theorems 4.2 and 4.11] 给出了推论 5.5 中的类似结果。与 [21], 定理 4.11 相比，推论 5.5 的 (2) 中所需的特征值信息可以减少一项。

推论 *5.5* 的证明。众所周知，两个集合 $\sigma(\ell,\ q,\ \beta_1)$ 和 $\sigma(\ell,\ q,\ \beta_2)$ 中的元素在实轴上交错出现。因此，以下两种情形之一成立。

情形 1:

$$n_{\{\lambda_{\ell,\beta_1,n}(q)\}_{n\in S_0}}(t^2)\geq n_{\{\lambda_{\ell,\beta_2,n}(q)\}_{n\in S_0}}(t^2)\geq n_{\{\lambda_{\ell,\infty,n}(q)\}_{n\in S_0}}(t^2),$$

对所有充分大的 $t>0$，其中集合 S_0 分别取为 $\mathbb{N}$、M 和 $\mathbb{N}\setminus M$。

情形 2:

$$n_{\{\lambda_{\ell,\beta_2,n}(q)\}_{n\in S_0}}(t^2)\geq n_{\{\lambda_{\ell,\beta_1,n}(q)\}_{n\in S_0}}(t^2)\geq n_{\{\lambda_{\ell,\infty,n}(q)\}_{n\in S_0}}(t^2),$$

对所有充分大的 $t>0$，其中集合 S_0 分别取为 $\mathbb{N}$、 M 和 $\mathbb{N}\setminus M$。

Let

$$m(t)=2n_{\sigma(\ell,q,\beta_1)}(t^2)+2n_{\{\lambda_{\ell,\beta_1,n}(q)\}_{n\in M}}(t^2)+2n_{\{\lambda_{\ell,\beta_2,n}(q)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\tilde{M}}}(t^2).$$

我们有

$$m(t)\geq 2n_{\sigma(\ell,q,\beta_1)}(t^2)+2n_{\{\lambda_{\ell,\beta_1,n}(q)\}_{n\in M}}(t^2)+2n_{\{\lambda_{\ell,\beta_2,n}(q)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus M}}(t^2)-2\chi(\beta_1,\beta_2),$$

对所有充分大的 $t>0$，其中

$$\tilde{M}:=\begin{cases}M, & \text{if } \beta_1=\infty \text{ or } \beta_2=\infty,\\ M\cup\{k\}, & \text{if } \beta_1\neq\infty \text{ and } \beta_2\neq\infty,\end{cases}$$

and

$$\chi(\beta_1,\beta_2):=\begin{cases}0, \text{ if } \beta_1=\infty \text{ or } \beta_2=\infty,\\ 1, \text{ if } \beta_1\neq\infty \text{ and } \beta_2\neq\infty.\end{cases}\tag{5.11}$$

于是，有

$$m(t)\geq\begin{cases}4n_{\sigma(\ell,q,\beta_2)}(t^2)-2\chi(\beta_1,\beta_2), \text{ if case 1 holds},\\ 4n_{\sigma(\ell,q,\beta_1)}(t^2)-2\chi(\beta_1,\beta_2), \text{ if case 2 holds},\end{cases}\tag{5.12}$$

对所有充分大的 $t>0$。不等式 (5.6)、(5.8) 和 (5.12) 给出

$$\int_0^r\frac{m(t)}{t}dt-\frac{4r}{\pi}+(2\ell+2)\ln r>-\infty,\ r\to\infty.$$

由定理 1.3 可知，结论 (1) 和 (2) 成立。证明至此完成。□

注 5.3. 考虑情形 $\ell=-1/2$ 和 $q\in L^1(0,1)$。若 $\beta_1\neq\infty$和 $\beta_2\neq\infty$，则在原条件中增加一个特征值后，推论 5.5 的结论仍然成立。若 $\beta_1=\infty$ 或 $\beta_2=\infty$，则只要存在一个正常数 c，使得

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\setminus A\\ |\lambda_{\ell,\infty,k}|\leq r^2}}\int_{\sqrt{\lambda_{\ell,\beta,k}}}^{\sqrt{\lambda_{\ell,\infty,k}}}\frac{1}{t}dt>c\ln r,\ r\to\infty.$$

在推论 5.5 中，对于我们给出的第二谱子集 $\sigma(l,q,\beta_2)$，我们实际上知道每个特征值的指标，也就是说，我们知道某个特征值在序列 $\sigma(l,q,\beta_2)$ 中所处的位置。接下来，在推论 5.6 和 5.9 中，我们考虑给定 $\sigma(l,q,\beta_2)$ 的某个子集中各特征值、但未知这些特征值指标的情形；Hatinoˇglu [21]为 Sturm-Liouville算子给出了这类条件下反问题具有唯一性的条件。

推论 5.6。 设 $\ell \geq -1/2$, $q \in L^1_\ell(0,1)$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\beta_1 \neq \beta_2$, $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(\ell, q, \beta_1)$, 和 $B = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(\ell, q, \beta_2)$, 使得

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{|A_{n,m} - A_n|}{a_n^2} < \infty,$$

以及 $\{A_n/a_n^2\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$, 其中

$$A_{n,m} := \frac{a_n}{b_n}(a_n - b_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{m} \frac{a_j}{b_j} \frac{a_n - b_j}{a_n - a_j}, \quad A_n := \frac{a_n}{b_n}(a_n - b_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{\infty} \frac{a_j}{b_j} \frac{a_n - b_j}{a_n - a_j}.$$

那么集合 $\sigma(\ell, q, \beta_1)$ 、 $\{\zeta(a_n, \beta_1, q)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 以及 $\sigma(\ell, q, \beta_2) \setminus B$ 唯一确定q。

对于情形 $\ell = 0$, Hatinoˇglu 在 [21, 定理 4.6 和 4.13] 中给出了推论 5.6 的类似结果。在那里，为了得到唯一性，还需要额外的特征值数据；此外，当 $\beta_1 \neq \infty$ 和 $\beta_2 \neq \infty$时，对特征值的选取还有额外限制。然而，在推论 5.6 中，这些条件并非必要。在证明推论 5.6 之前，我们先给出以下两个引理。

引理 5.7。 设亚纯函数 G 由下式给出

$$G(z) = az^2 + bz + c + \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right),$$

其中 a、 b、 c、 $A_n \in \mathbb{R}$ 和 $\sum |A_n|/a_n^2 < \infty$。则存在常数 C 使得

$$\int_0^r \frac{n_B(t^2)}{t} dt - \int_0^r \frac{n_A(t^2)}{t} dt \leq \frac{1}{2} \ln r + C, \tag{5.13}$$

对所有充分大的 $r > 0$, 其中 B 和 A 分别是G的零点集合和极点集合。

证明。 回顾亚纯函数的 Jensen 公式：设 $f(z)$ 关于 $|z| < R$、 $f(0) \neq 0$ 以及 $f(0) \neq \infty$ 为亚纯函数。则，对于 $0 < r < R$, 有

$$\int_0^r \frac{n_{\{z|f(z)=0\}}(t)}{t} dt - \int_0^r \frac{n_{\{z|f(z)=\infty\}}(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi - \ln|f(0)|.$$

不失一般性，令 $G(0) \neq 0$ 且 $G(0) \neq \infty$。对 G应用 Jensen 公式，可得

$$\int_0^r \frac{n_B(t^2)}{t} dt - \int_0^r \frac{n_A(t^2)}{t} dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\sqrt{r}} \frac{n_B(t)}{t} dt - \int_0^{\sqrt{r}} \frac{n_A(t)}{t} dt \right)$$

$$\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln|G(\sqrt{r}e^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{2} |\ln|G(0)||$$

$$\leq\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(|a|r+|b|\sqrt{r}+|c|+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{|A_n|\sqrt{r}}{|\sqrt{r}e^{i\varphi}-a_n||a_n|}\right)d\varphi+\frac{1}{2}|\ln|G(0)||$$

$$\leq\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(|a|r+|b|\sqrt{r}+|c|+\frac{\sqrt{r}}{|\sin\varphi|}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{|A_n|}{a_n^2}\right)d\varphi+\frac{1}{2}|\ln|G(0)||.$$

由于 $\sum_{n\in\mathbb{N}}|A_n|/a_n^2<\infty$，存在与 r无关的常数 C_5、C_6、$C_7>0$，使得

$$\int_0^r\frac{n_B(t^2)}{t}dt-\int_0^r\frac{n_A(t^2)}{t}dt\leq\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(C_5+\frac{C_6}{|\sin\varphi|}\right)d\varphi+\frac{1}{2}\ln r+C_7,$$

对所有充分大的 $r>0$。容易验证，$\ln(C_5+C_6/|\sin\varphi|)$ 在 $(0,\ 2\pi)$ 上可积；因此，证明完成。□

引理 5.8。设 $\ell\geq-1/2$, $q\in L^1(0,1)$, $\beta_1,\ \beta_2\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $\beta_1\neq\beta_2$, $A=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\sigma(\ell,q,\beta_1)$，且 $B=\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\sigma(\ell,q,\beta_2)$。则存在常数$C>0$，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(|b_n||b_n-a_k|)^{-1}\leq C|a_k|^{-1}\tag{5.14}$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$。

证明。若 $\beta_1=\infty$ 或 $\beta_2=\infty$，由 (1.3) 和 (1.4) 可得

$$d=\inf_{n,k\in\mathbb{N}}|b_n-a_k|>0.$$

若 $\beta_1\neq\infty$ 且 $\beta_2\neq\infty$，由 (1.4)、(2.1) 和 (2.2) 可知

$$\begin{aligned}\beta_2-\beta_1=&\frac{\phi_\ell'(\lambda_{\ell,\beta_1,n},1,q)}{\phi_\ell(\lambda_{\ell,\beta_1,n},1,q)}-\frac{\phi_\ell'(\lambda_{\ell,\beta_2,n},1,q)}{\phi_\ell(\lambda_{\ell,\beta_2,n},1,q)}\\=&\frac{\phi_\ell'\left(\lambda_{\ell,\beta_1,n},1,q\right)\phi_\ell\left(\lambda_{\ell,\beta_2,n},1,q\right)-\phi_\ell'\left(\lambda_{\ell,\beta_2,n},1,q\right)\phi_\ell\left(\lambda_{\ell,\beta_1,n},1,q\right)}{\phi_\ell(\lambda_{\ell,\beta_1,n},1,q)\phi_\ell(\lambda_{\ell,\beta_2,n},1,q)}\\=&n(\sqrt{\lambda_{\ell,\beta_2,n}}-\sqrt{\lambda_{\ell,\beta_1,n}})+o(1),\end{aligned}$$

因此 $\lim_{n\to\infty}(\lambda_{\ell,\beta_2,n}-\lambda_{\ell,\beta_1,n})=2(\beta_2-\beta_1)$. 于是，有

$$d=\inf_{n,k\in\mathbb{N}}|b_n-a_k|>0.$$

注意到 $(|b_n||b_n-a_k|)^{-1}\leq(|b_n|||b_n|-|a_k||)^{-1}$。

若 $|b_n|>|a_k|$，则 $(|b_n||b_n-a_k|)^{-1}\leq(d|a_k|)^{-1}$。

若 $|b_n|<|a_k|$，则

$$\begin{aligned}(|b_n||b_n-a_k|)^{-1}\leq&(|b_n|(|a_k|-|b_n|))^{-1}\\\leq&\min\{((\min_{n\in\mathbb{N}}|b_n|)(|a_k|-(\min_{n\in\mathbb{N}}|b_n|)))^{-1},(d(|a_k|-d))^{-1}\},\end{aligned}$$

并且存在常数 $C > d^{-1}$，使得

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k| \min\{((\min_{n\in\mathbb{N}} |b_n|)(|a_k| - (\min_{n\in\mathbb{N}} |b_n|)))^{-1}, (d(|a_k| - d))^{-1}\} \le C.$$

因此，(5.14) 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。证明完毕。 □

推论 5.6 的证明。令

$$\begin{aligned} m(t) &= 2n_{\sigma(\ell,q,\beta_1)}(t^2) + 2n_A(t^2) + 2n_{\sigma(\ell,q,\beta_2)\setminus B}(t^2) \\ &= 2n_{\sigma(\ell,q,\beta_1)}(t^2) + 2n_{\sigma(\ell,q,\beta_2)}(t^2) - 2(n_B(t^2) - n_A(t^2)). \end{aligned} \tag{5.15}$$

由 (5.14)、[21, 引理 4.5], 和引理 5.7 的证明可知，不等式 (5.13) 对 A 和 B 成立，其中 A 和 B 在推论 5.6 中定义。因此，不等式 (5.6)、(5.8)、(5.13) 和 (5.15) 给出

$$\int_0^r \frac{m(t)}{t} dt - \frac{4r}{\pi} + (2\ell + 2)\ln r > -\infty, \ r \to \infty.$$

由定理 1.3 即可完成证明。 □

注 5.4。令 $\ell = -1/2$ 和 $q \in L^1(0, 1)$。如果 $\beta_1 \neq \infty$ 和 $\beta_2 \neq \infty$，则推论 5.6 的结论同样成立。如果 $\beta_1 = \infty$ 或 $\beta_2 = \infty$，则在原条件中增加一个特征值后，推论 5.6 的结论成立。

推论 5.9. 设 $\ell \ge -1/2$, $q \in L^1_\ell(0, 1)$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\beta_1 \neq \beta_2$, *and* $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(\ell, q, \beta_1)$, $B = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(\ell, q, \beta_2)$，使得 $\prod (a_n/b_n)$ 绝对收敛。则有以下结论。

(1). 若 $\beta_1 = \infty$ 或 $\beta_2 = \infty$，则集合 $\sigma(\ell, q, \beta_1)$、$\{\zeta(a_n, \beta_1, q)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\sigma(\ell, q, \beta_2) \setminus B$ 唯一确定 q。*(2).* 若 $\beta_1 \neq \infty$ 和 $\beta_2 \neq \infty$，则集合 $\sigma(\ell, q, \beta_1)$、$\{\zeta(a_n, \beta_1, q)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\sigma(\ell, q, \beta_2) \setminus (B \cup \{\lambda_{\ell,\beta_2,k}(q)\})$ 对于 $\lambda_{\ell,\beta_2,k}(q) \notin B$ 唯一确定 q。

对于情形 $\ell = 0$，推论 5.9 的结果源自 Hatinoˇglu [21, 定理 4.8 和 4.14]。推论 5.9 中关于特征值选取的附加限制条件，在 [21, 定理 4.14] 中并非必要。此外，与 [21, 定理 4.14], 相比，推论 5.9 的 (2) 中所需的特征值信息可以减少一项。在证明推论 5.9 之前，我们先给出以下引理。

引理 5.10。假设序列 $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $B = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $a_n = b_n + t_n b_n$, 其中 $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| < \infty$。那么存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\left| \int_0^r \frac{n_A(t^2)}{t} dt - \int_0^r \frac{n_B(t^2)}{t} dt \right| \le C, \tag{5.16}$$

对所有 $r > 0$。

证明。 注意到

$$\int_0^r \frac{n_A(t^2)}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \max\left\{0, \ln r - \frac{1}{2}\ln|a_n|\right\},$$

and

$$\int_0^r \frac{n_B(t^2)}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \max\left\{0, \ln r - \frac{1}{2}\ln|b_n|\right\}.$$

Let

$$d_n := \max\left\{0, \ln r - \frac{1}{2}\ln|a_n|\right\} - \max\left\{0, \ln r - \frac{1}{2}\ln|b_n|\right\},$$

于是，有

$$\left|\int_0^r \frac{n_A(t^2)}{t}dt - \int_0^r \frac{n_B(t^2)}{t}dt\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} d_n\right|.$$

不失一般性，设 $1+t_n \neq 0$ 对于任意 $n \in \mathbb{N}$。那么，对于每个 n，我们有

- 若 $|b_n| < r^2$ 且 $|a_n| < r^2$，则 $|d_n| = \frac{1}{2}\left|\ln \frac{|b_n|}{|a_n|}\right| = \frac{1}{2}|\ln|1+t_n||$。
- 若 $|b_n| < r^2 \le |a_n|$，则 $\frac{1}{2}\ln\frac{|b_n|}{|a_n|} \le d_n < 0$，因此 $|d_n| \le \frac{1}{2}|\ln|1+t_n||$。
- 若 $|a_n| < r^2 \le |b_n|$，则 $0 < d_n \le \frac{1}{2}\ln\frac{|b_n|}{|a_n|}$，因此 $|d_n| \le \frac{1}{2}|\ln|1+t_n||$。
- 若 $b_n \ge r^2$ 且 $a_n \ge r^2$，则 $d_n = 0$。

因此，对每个 n，$|d_n| \le \frac{1}{2}|\ln|1+t_n||$。条件 $\sum_{n=1}^{\infty}|t_n| < \infty$ 给出

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} d_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|d_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}|\ln|1+t_n|| < \infty,$$

也就是说，存在常数 $C > 0$，使得（5.16）成立。至此证明完成。□

推论5.9的证明。设

$$m(t) = 2n_{\sigma(\ell,q,\beta_1)}(t^2) + 2n_A(t^2) + 2n_{\sigma(\ell,q,\beta_2)\setminus\tilde{B}}(t^2).$$

我们有

$$m(t) = 2n_{\sigma(\ell,q,\beta_1)}(t^2) + 2n_{\sigma(\ell,q,\beta_2)}(t^2) + 2n_A(t^2) - 2n_B(t^2) - 2\chi(\beta_1,\beta_2), \quad (5.17)$$

对所有充分大的 $t > 0$，其中

$$\tilde{B} := \begin{cases} B, & \text{if } \beta_1 = \infty \text{ or } \beta_2 = \infty, \\ B \cup \{\lambda_{\ell,\beta_2,k}(q)\}, & \text{if } \beta_1 \neq \infty \text{ and } \beta_2 \neq \infty, \end{cases}$$

且 $\chi(\beta_1,\beta_2)$ 在 (5.11) 中定义。由不等式 (5.6)、(5.8)、(5.17) 及引理 5.10 可得

$$\int_0^r \frac{m(t)}{t}dt - \frac{4r}{\pi} + (2\ell+2)\ln r > -\infty,\ r\to\infty.$$

证明由定理 1.3 完成。 □

注 5.5。 设 $\ell = -1/2$ 和 $q \in L^1(0,1)$。若 $\beta_1 = \infty$ 或 $\beta_2 = \infty$，则推论 5.9 的结论也成立。若 $\beta_1 \neq \infty$ 和 $\beta_2 \neq \infty$，则在原条件中增加一个特征值后，推论 5.9 的结论成立。

致谢。 作者感谢段永江教授和李玉飞教授提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议改进并完善了本文的表述。作者 Xu 得到了国家自然科学基金委员会（12501216）和江苏省自然科学基金（BK20241437）的资助。

Data 可用性。 本文所述研究未使用任何数据 .

利益冲突声明。作者声明不存在利益冲突。

References

[1] M. Abramovitz 和 I. A. Stegun，《数学函数手册》，1972年，纽约: Dover。[2]L. Aceto、P. Ghelardoni 和 M. Marletta，具有角动量奇点的正向与反向斯图姆-刘维尔问题的数值解，《反问题》**24** (2008)，第 1 期，015001，21 页。[3]S. Albeverio、R. Hryniv 和 Ya. Mykytyuk，贝塞尔算子的反谱问题，《微分方程杂志》**241** (2007)，第 1 期，130–159。[4] S. Albeverio、R. Hryniv 和 Ya. Mykytyuk，径向狄拉克算子的重构，《数学物理杂志》**48** (2007)，第 4 期，043501，14 页。[5] L. Amour、J. Faupin 和 T. Raoux，单位区间上仅给定部分势信息时薛定谔算子的反谱结果，《数学物理杂志》**50**(2009)，第 3 期，033505，14 页。[6]N. Bondarenko，具有贝塞尔型奇点的矩阵斯图姆–刘维尔方程的反问题，《应用分析》**97** (2018)，第 7 期，1209–1222。[7] G. Borg，斯图姆-刘维尔特征值问题的逆转，《数学学报》**78** (1946年)，1–96。[8] R. Carlson 和 C. Shubin，径向薛定谔算子的谱刚性，《微分方程杂志》**113**(1994年)，338–354。[9] R. Carlson，贝塞尔算子的博格–莱文森定理，《太平洋数学杂志》**177** (1997年)，第 1 期，1–26。

[10] S. C. Christ，具有径向势的薛定谔方程的一个反问题，《微分方程杂志》103 (1993)，第 2 期，247–259。[11] R. del Rio、F. Gesztesy 和 B. Simon，势函数部分信息下的逆谱分析。III. 更新边界条件，《国际数学研究通知》1997，第 15 期，751–758。[12]J. Eckhardt，利用 de Branges 理论得到的薛定谔算子逆唯一性结果，《复分析与算子理论》8 (2014)，第 1 期，37–50。[13]J. Eckhardt 和 G. Teschl，纯离散谱的一维薛定谔算子的唯一性结果，《美国数学会会刊》365 (2013)，第 7 期，3923–3942。[14]F. Gesztesy 和 B. Simon，逆谱理论的新方法。II. 一般实势及其与谱测度的联系，《数学年刊》(2) 152 (2000)，第 2 期，593–643。[15] F. Gesztesy 和 B. Simon，势函数部分信息下的逆谱分析。II. 离散谱情形，《美国数学会会刊》352 (2000)，第 6 期，2765–2787。[16] G. Freiling 和 V. Yurko，逆斯图姆-刘维尔问题及其应用，Nova Science Publishers, Inc.，纽约州亨廷顿，2001，x+356 页。[17] G. Freiling 和 V. Yurko，具有奇异边界条件的微分算子的反问题，《数学新闻》278 (2005)，第 12–13 期，1561–1578。[18] M. G. Gasymov，由两个谱确定具有奇点的斯图姆-刘维尔方程，《苏联科学院学报》161 (1965)，274–276。[19] O. Gorbunov 和 V. Yurko，内部点有奇点的狄拉克系统反问题，数学物理分析 6 (2016)，第 1 期，1–29。[20]N. J. Guliyev，逆平方奇点与依赖特征参数的边界条件实为一体的两面，《数学季刊》74 (2023)，第 3 期，889–910。[21] B. Hatinoˇglu，薛定谔算子反谱问题中的混合数据，谱理论杂志 11 (2021)，第 1 期，281–322。[22] H. Hochstadt 和 B. Lieberman，一个具有混合给定数据的逆斯图姆–刘维尔问题，SIAM 应用数学杂志 34 (1978)，第 4 期，676–680。[23] M. Horv´ath，反谱问题与闭指数系统，《数学年刊》(2) 162 (2005)，第 2 期，885–918。[24] M. Horv´ath 和 O. S´af´ar，逆特征值问题，《数学物理杂志》57 (2016)，第 11 期，112102，16 页。[25] R. Hryniv 和 P. Sacks，贝塞尔算子反谱问题的数值解，《计算与应用数学杂志》235 (2010)，第 1 期，120–136。[26] H. Koyunbakan 和 E. S. Panakhov，奇异微分算子的半逆问题，《应用分析》84 (2005)，247–252。[27] H. Koyunbakan，某些奇异微分算子的反谱问题，淡江牛津数学科学杂志 25 (2009)，第 3 期，277–283。

[28]A. Kostenko、A. Sakhnovich 和 G. Teschl，扰动球面薛定谔算子的逆特征值问题，《反问题》26（2010），第10期，105013，共14页。[29] B. M. Levitan，逆斯图姆-刘维尔问题，英文译本。乌得勒支：VNU科学出版社（1987）。[30] Y. Liu、G. L. Shi 和 J. Yan，狄拉克-贝塞尔算子的不完全逆谱问题，《数学物理杂志》60（2019），第8期，083503，共17页。[31] V. A. Marchenko，斯图姆-刘维尔算子及其应用，《算子理论进展与应用》，第22卷，巴塞尔：Birkh¨auser Verlag，1986年，xii+367页。[32] J. P¨oschel 和 E. Trubowitz，逆谱理论，《纯粹与应用数学》，第130卷，波士顿：学术出版社，1987年。[33] W. Rundell 和 P. Sacks，由两个谱序列重建径向对称势，《数学分析与应用杂志》264（2001），第2期，354–381。[34] F. Serier，径向薛定谔算子的逆谱问题，发表于$[0,1]$，《微分方程杂志》235（2007），第1期，101–126。[35] G. S. Wei 和 H. K. Xu，给定势和范数常数部分信息的逆谱问题，美国数学会会刊364（2012），3265–3288。[36]J. Weidmann，常微分算子的谱理论，《数学讲义》，第1258卷，柏林：施普林格出版社，1987年，vi+303 页。[37]X. J. Xu、C. F. Yang 和 N. Bondarenko，径向薛定谔算子与闭系统的逆谱问题，《微分方程杂志》342（2023），343–368。[38] X. J. Xu 和 C. F. Yang，扰动贝塞尔算子的三谱逆问题，《微分方程杂志》402（2024），422–442。[39] V. A. Yurko，具有奇点的高阶微分算子的逆谱问题，《逆问题与病态问题杂志》10（2002），第4期，413–425。[40] L. A. Zhornitskaya 和 V. S. Serov，区间上的奇异斯图姆-刘维尔算子的逆特征值问题，$[0,1]$，《反问题》10（1994），第4期，975–987。

School of Mathematics and Statistics,
Northeast (Dongbei) Normal Univer-sity, Changchun, 130024, Jilin,
People's Republic of China电子邮件地址：liuzeguang205@nenu.edu.cn
Department of Mathematics, School of Mathematics and Statistics, Nanjing

University of Science and Technology, Nanjing, 210094, Jiangsu, People's Republic of China
电子邮件地址: xxjxuxinjian@163.com