arXiv:2601.01098v1 [math.AP] 3 Jan 2026

有界区域上具有临界 Choquard 型非线性的 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组的归一化解

LiChen, Li Wang*

华东交通大学理学院，中国南昌，330013

2026年1月6日

摘要

本文研究以下具有临界非线性的 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组的归一化解：

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)\phi u = \lambda u + |u|^{p-2}u + \left(I_\alpha * |u|^{3+\alpha}\right)|u|^{1+\alpha}u, & \text{in } \Omega_r, \\ -\Delta\phi + \Delta^2\phi = q(x)u^2, & \text{in } \Omega_r, \end{cases}$$

其中 $\Omega_r \subset \mathbb{R}^3$ 是一个光滑有界区域，$p \in \left(2, \frac{8}{3}\right)$，$q(x) \in C(\bar{\Omega}_r)\backslash\{0\}$ 并且 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是与约束 $\int_{\Omega_r} |u|^2 \mathrm{d}x = b^2$（对某个 $b > 0$）相关联的拉格朗日乘子。这里，$\alpha > 0$，I_α 表示黎斯势，而区域参数 r 反映了 Ω_r 的大小，其精确定义将在第 3 节给出。通过应用特殊的极小极大原理结合截断技巧，我们证明存在 $b^* > 0$，使得当 $b \in (0, b^*)$ 时，该方程组在 Navier 边界条件下具有多个归一化解。

关键词： Schr¨ödinger-Bopp-Podolsky 方程组，归一化解，临界 Choquard 非线性。**2020 年数学学科分类：** 35J60, 35J50, 35B38, 35J20。

1 引言与主要结果

由 Bopp 独立提出 [5]，并由 Podolsky [21], 独立发展而来，Bopp-Podolsky 理论是一种用于电磁学的二阶规范场理论。该理论最初旨在解决经典麦克斯韦模型中众所周知的无穷大问题。关于

*通讯作者。 chenlimath0318@163.com（L. Chen），wangli.423@163.com（L. Wang）。

这一理论框架下的后续发展及相关成果，请参阅 [3, 4, 7, 6, 10,9]。

在经典静电表述中，电荷密度 ρ 产生的势 ϕ 满足泊松方程

$$-\Delta\phi = \rho \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

对于位于 $x_0 \in \mathbb{R}^3$ 的点电荷，即 $\rho = 4\pi\delta_{x_0}$，其解变为$\phi(x) = |x - x_0|^{-1}$。因此，相应的静电能发散：

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2 \, \mathrm{d}x = +\infty.$$

为解决这一发散问题，Bopp 和 Podolsky 引入了修正场方程

$$-\Delta\phi + a^2\Delta^2\phi = \rho \quad \text{in } \mathbb{R}^3,$$

其中，$a > 0$ 是 Bopp-Podolsky 参数。对于同一个点电荷 $\rho = 4\pi\delta_{x_0}$，修正方程的显式解为

$$\mathcal{K}(x) = \frac{1 - e^{-|x|/a}}{|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

该势在原点处仍保持有限，并满足有限性条件

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\mathcal{K}|^2 \, \mathrm{d}x + a^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta\mathcal{K}|^2 \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

因此，在 Bopp-Podolsky 框架下，点电荷产生的静电场在 BP 范数 $\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla\phi|^2 + a^2|\Delta\phi|^2\right) \mathrm{d}x$ 下具有有限能量。

从静电学的角度来看，将 Bopp-Podolsky 方程与非线性薛定谔方程耦合起来是顺理成章的一步 [11, 19]。由此得到的耦合方程组称为薛定谔-Bopp-Podolsky 方程组，可视为著名的薛定谔-Poisson 方程组或薛定谔-Maxwell 方程组的推广。

近年来，涉及非线性薛定谔方程与各种电磁场理论的耦合方程组引起了广泛关注。其中，作为经典薛定谔-泊松模型推广形式的薛定谔-Bopp-Podolsky 方程组，一直是数学物理领域的重要研究课题。该方程组源于薛定谔方程与 Bopp-Podolsky 电磁理论的耦合；后者是一种二阶规范理论，旨在解决经典麦克斯韦理论中点电荷固有的能量发散问题。在静电框架下，该方程组可表述为：

$$\begin{cases} -\Delta u + \omega u + q^2\phi u = |u|^{p-2}u, & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi + a^2\Delta^2\phi = 4\pi u^2, & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， $a > 0$ 为 Bopp-Podolsky 参数， $\omega > 0$、 $q \neq 0$，且非线性指数满足 $p \in (2, 6)$。

在论文 [11], 中，d'Avenia 和 Siciliano 首次系统研究了 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组（1.1），见 $\mathbb{R}^3$。作者通过变分方法构造了相应的能量泛函，并运用截断法、单调性技巧和拓扑工具等方法，解决了非线性增长和平移不变性导致的紧性缺失问题。

近年来，含有非局部项的 Schr¨odinger 型方程在数学物理领域受到了广泛关注。其中，Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组因其在广义电动力学中的物理背景而尤为引人关注。在现有文献中，Figueiredo 和 Siciliano 在 [12] 中深入研究了该方程组在正势 V 下解的多重性。该方程组描述了 Bopp-Podolsky 框架中带电粒子的静电相互作用，其形式如下：

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + Vu + \lambda \phi u + f(u) = 0, \\ -\varepsilon^2 \Delta \phi + \varepsilon^4 \Delta^2 \phi = u^2. \end{cases}$$

作者运用 Krasnoselski亏格理论证明，该方程组存在无穷多个解，其能量和范数均趋于无穷大，而相应的拉格朗日乘子趋于 $-\infty$。此外，在满足 f和 V的一些适当假设下，他们通过极小化获得了一个基态解，且该解可以取为负解。他们为研究非局部 Schr¨odinger 型方程组的多解现象提供了一个稳健的框架，并推动了对变号非线性或退化非线性问题的进一步研究。

最近，Li、Pucci 和 Tang 在 [17]中研究了以下具有临界 Sobolev 指数的方程组：

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + q^2 \phi u = \mu |u|^{p-1} u + |u|^4 u & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi + a^2 \Delta^2 \phi = 4\pi u^2 & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

其中 $\mu > 0$ 和 $2 < p < 5$。对势 V作出一些技术性假设后，他们证明了非平凡基态解的存在性。他们的方法依赖于 Poho˘zaev-Nehari 流形方法，并结合了 Br´ezis-Nirenberg 型论证、单调性技巧和全局紧性引理。他们证明，当 $p \in (3,5)$ 时，对任意 $\mu > 0$，该方程组都存在基态解；而当 $p \in (2, 3]$, 时，只要 μ 充分大，基态解便存在。这项工作将早期结果推广到了临界情形，并为进一步研究存在紧性缺失和平移不变性的非线性耦合场系统奠定了基础。

在关于.....的研究中 Schr¨ödinger-Bopp-Podolsky 方程组，除了临界指数情形之外 ，

Silva 和 Siciliano 在 [24] 研究了以下方程组：

$$\begin{cases} -\Delta u + \omega u + q^2 \phi u = |u|^{p-2}u, & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi + a^2 \Delta^2 \phi = 4\pi u^2, & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

其中 $p \in (2, 3]$、a，$\omega > 0$ 和 $q \neq 0$。通过运用纤维映射分析、Nehari流形方法和山路定理，他们证明存在两个临界参数值 q^* 和 q_0^*：当 $q > q^*$ 时，该方程组不存在非平凡解；而当 $q < q_0^*$ 时，该方程组在径向函数空间 $H_r^1(\mathbb{R}^3)$ 中有两个正解，其中一个是全局或局部极小值，另一个是山路型解。这一结果揭示了电荷参数 q 对次临界增长范围内解的结构与存在性所起的关键作用。关于全空间中的 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组，感兴趣的读者可参阅 [8, 15, 19] 中的更多研究论文。

在有界区域中，对 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组的研究也引起了广泛关注。Afonso 和 Siciliano 在 [1] 中研究了以下方程组：

$$\begin{cases} -\Delta u + q\phi u - \kappa |u|^{p-2}u = \omega u, & \text{in } \Omega, \\ -\Delta \phi + \Delta^2 \phi = q u^2, & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

该方程组满足诺伊曼边界条件 $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = h_1$，$\frac{\partial \Delta \phi}{\partial \mathbf{n}} = h_2$，并受归一化约束 $\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x = 1$限制。在假设 $\kappa > 0$，$p \in (2, 10/3)$ 成立，且边界积分组合 $\alpha = \int_{\partial\Omega} h_2 \mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega} h_1 \, \mathrm{d}s$ 满足 $\inf_\Omega q < \alpha < \sup_\Omega q$，并且 $|q^{-1}(\alpha)| = 0$ 的条件下，他们通过结合变分方法与拓扑理论，证明该问题存在无穷多个解 (u_n, ω_n, ϕ_n)，且满足 $\|\nabla u_n\|_2 \to +\infty$。

基于上述工作，我们考虑光滑有界区域 $\Omega_r \subset \mathbb{R}^3$上的如下 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组：

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)\phi u = \omega u + |u|^{p-2}u + (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{1+\alpha}u, & \text{in } \Omega_r, \\ -\Delta \phi + \Delta^2 \phi = q(x)u^2, & \text{in } \Omega_r, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega_r, \\ \int_{\Omega_r} u^2 \, \mathrm{d}x = b^2, & \text{in } \Omega_r. \end{cases} \tag{1.3}$$

在该方程组中，$\lambda \in \mathbb{R}$ 是作为拉格朗日乘子出现的未知频率，$b > 0$ 是给定质量，而函数 $q \in C(\Omega) \setminus \{0\}$ 表示非均匀电荷分布。对于静电势 ϕ，我们施加齐次纳维型边界条件：

$$\phi = 0, \quad \text{on } \partial\Omega_r. \tag{1.4}$$

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_r. \tag{1.5}$$

这里选取零边界条件是为了简化技术处理。

本文的主要研究结果如下：

定理 1.1. 对于任意给定的 $k \in \mathbb{N}$，存在一个常数 $b^* > 0$，使得对每个$b \in (0, b^*)$，方程 (1.3) 在边界条件 (1.4)-(1.5) 下至少有 k 个解

$$(u_j, \phi_j, \lambda_j) \in H_0^1(\Omega_r) \times H^2(\Omega_r) \times \mathbb{R},$$

满足该约束

$$\int_{\Omega_r} u_j^2 \, \mathrm{d}x = b^2$$

对任意 $j = 1,2, \cdots, k$。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们为问题（1.3）建立变分框架，将自然能量泛函化简为仅依赖于 u的单变量泛函，并推导静电势范数的精细上界。第 3 节讨论归一化解的多重性，并给出 定理 1.1的证明。

2 预备知识

在本文中，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为一个固定的有界光滑区域。对任意 $r > 0$，定义缩放后的区域

$$\Omega_r = \{rx \in \mathbb{R}^3 : x \in \Omega\}.$$

缩放参数 r 的精确取值将与另一个参数 t_0 相关，并将在第 3 节中确定。

我们用 $H^2(\Omega_r)$ 和 $H_0^1(\Omega_r)$ 表示通常的索博列夫空间。特别地， $H_0^1(\Omega_r)$ 上的内积和范数分别定义为

$$(u, v) := \int_{\Omega_r} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x, \quad \|u\| := \left(\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

对于给定质量 $b > 0$，我们定义 L^2-约束球面

$$S_{r,b} := \{u \in H_0^1(\Omega_r) : \|u\|_2^2 = b, \ b > 0\}.$$

对于 $1 \leq p \leq 6$，我们使用如下记号

$$\|u\|_p := \left(\int_{\Omega_r} |\nabla u| \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

表示 $L^p(\Omega_r)$ 中的范数，而 $\|u\|_\infty$ 表示 $L^\infty(\Omega_r)$ 中的范数。为简洁起见，除非另有说明以强调函数非常数，否则下文所有函数中的空间变量 $x \in \Omega_r$ 均予以省略。

在变分框架下，由方程组（1.3）及条件（1.4）-（1.5）构成的边值问题对应于泛函

$$\mathcal{F}(u,\phi)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_r}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2(3+\alpha)}\int_{\Omega_r}(I_a*|u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\Omega_r}q(x)\phi u^2\,\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{p}\int_{\Omega_r}|u|^p\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_{\Omega_r}|\Delta\phi|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_{\Omega_r}|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x$$

定义在乘积空间 $H_0^1(\Omega_r)\times H^2(\Omega_r)$ 上。然而，该泛函既无上界也无下界；因此，无法直接应用标准的临界点方法。沿用 [13, 23], 中所采用的约化策略，我们首先将（1.3）中的第二个方程求解为关于势的唯一表达式 $\phi=\Phi(u)$。代入该关系后，可得到一个仅依赖于变量 u的约化泛函。

回顾一下，在 Ω_r上满足齐次 Navier 条件 $\phi=\Delta\phi=0$ 时，如果 $\phi=\Delta\phi=0$在 Ω_r上成立，则有如下椭圆估计：存在一个常数 $C=C(\Omega_r)>0$，使得

$$\int_{\Omega_r}|D^2\phi|^2\,\mathrm{d}x\le C\int_{\Omega_r}|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x,\quad\forall\phi\in H_0^1(\Omega_r)\cap H^2(\Omega_r),$$

记

$$\mathbb{H}:=H_0^1(\Omega_r)\cap H^2(\Omega_r),\qquad\|\phi\|_{\mathbb{H}}:=\left(\int_{\Omega_r}|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_r}|\Delta\phi|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

内积为

$$(\phi,\psi)_{\mathbb{H}}:=\int_{\Omega_r}\nabla\phi\nabla\psi\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_r}\Delta\phi\Delta\psi\,\mathrm{d}x.$$

如前所述，λ 是与质量约束 $\int_{\Omega_r}u^2\,\mathrm{d}x=b^2$相关的拉格朗日乘子。集合 $S_{r,b}=\{u\in H_0^1(\Omega_r):\|u\|_2^2=b^2\}$ 将作为我们变分问题的自然约束集。

以下部分在 Navier 边界条1.4）—（1.5）框架下展开。若三元组（u，ϕ，λ）$\in H_0^1(\Omega_r)\times\mathbb{H}\times\mathbb{R}$ 满足以下积分恒等式，则称其为满足边界条件（1.4）—（1.4）1.5）的方程组（1.3）的弱解:

$$\int_{\Omega_r}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_r}q(x)\phi u\varphi\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega_r}|u|^{p-2}u\varphi\,\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Omega_r}u\varphi\,\mathrm{d}x$$
$$-\int_{\Omega_r}(I_\alpha*|u|^{3+\alpha})|u|^{1+\alpha}u\varphi\,\mathrm{d}x=0,\quad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega_r)\tag{2.1}$$

and

$$\int_{\Omega_r}\nabla\phi\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_r}\Delta\phi\Delta\varphi\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega_r}q(x)u^2\varphi\,\mathrm{d}x,\quad\forall\varphi\in\mathbb{H}.\tag{2.2}$$

我们考虑自然能量泛函 $\mathcal{F}$: $H_0^1(\Omega_r) \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, 其推导如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u,\phi) = &\frac{1}{2}\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} q(x)\phi u^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2(3+\alpha)}\int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha} \,\mathrm{d}x \\ &- \frac{1}{p}\int_{\Omega_r} |u|^p \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{\Omega_r} |\Delta\phi|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{\Omega_r} |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.3}$$

可以直接 验证 $\mathcal{F} \in C^1(H_0^1(\Omega_r) \times \mathbb{H}, \mathbb{R})$, 其偏导数为 :

$$\begin{aligned}\langle \partial_u \mathcal{F}(u,\phi), \varphi\rangle = &\int_{\Omega_r} \nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega} q(x)\phi u\varphi \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_r} |u|^{p-2}u\varphi \,\mathrm{d}x \\ &- \int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{1+\alpha} u\varphi \,\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_r),\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\langle \partial_\phi \mathcal{F}(u,\phi), \xi\rangle = \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} q(x)u^2\xi \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} \Delta\phi\Delta\xi \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} \nabla\phi\nabla\xi \,\mathrm{d}x, \quad \forall \xi \in \mathbb{H}. \tag{2.5}$$

引理 *2.1.* 设 $(u,\phi,\lambda) \in H_0^1(\Omega_r) \times \mathbb{H} \times \mathbb{R}$。那么，$(u,\phi,\lambda)$ 是方程组 *(1.3)* 在边界条件 *(1.4)-(1.5)* 下的弱解，当且仅当 (u,ϕ) 是泛函 $\mathcal{F}$（定义见 *(2.3)*）在约束 $S_{r,b} \times \mathbb{H}$ 下的临界点。在此设定下，λ 表示与该约束相关联的拉格朗日乘子。

因此， $\mathcal{F}$ 在集合上限制后的任意临界点

$$S_{r,b} \times \mathbb{H} = \{(u,\phi) \in H_0^1(\Omega_r) \times \mathbb{H} : \ \|u\|_2^2 = b^2\}$$

都给出方程组 (1.3) 在 (1.4)-(1.5) 下的一个弱解。实数 λ 出现在 (2.1) 中，对应于相关的拉格朗日乘子。该结果的证明与 [23], 中给出的推理过程完全类似，因此此处省略。

取定一个元素 $u \in H_0^1(\Omega_r)$。我们引入线性泛函

$$L_u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}, \quad L_u(\xi) := \int_{\Omega_r} q(x)u^2\xi \,\mathrm{d}x.$$

结合 H¨older 不等式与 Sobole夫嵌入，可推得对任意 $\xi \in \mathbb{H}$，有

$$|L_u(\xi)| \le \|q(x)\|_\infty \|u\|_4^2 \|\xi\|_2 \le C_1\|q(x)\|_\infty \|u\|_4^2 \|\xi\|_{\mathbb{H}} \le C_2 \|\nabla u\|_2^2 \|\xi\|_{\mathbb{H}}, \tag{2.6}$$

其中常数 C_1、 $C_2 > 0$ 仅依赖于 Ω_r。这证实了 L_u 在$\mathbb{H}$上的连续性。根据 Riesz 表示定理，存在唯一的元素 $\Phi(u) \in \mathbb{H}$满足

$$L_u(\xi) = (\Phi(u),\xi)_{\mathbb{H}} = \int_{\Omega_r} \nabla\Phi(u)\cdot\nabla\xi \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_r} \Delta\Phi(u)\Delta\xi \,\mathrm{d}x, \quad \forall \xi \in \mathbb{H}. \tag{2.7}$$

等价地，对于每个 $u \in H_0^1(\Omega_r)$，Bopp-Podolsky 方程

$$-\Delta\phi + \Delta^2\phi = q(x)u^2, \quad \text{in } \Omega_r, \quad \phi = \Delta\phi = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_r$$

存在一个由 $\phi = \Phi(u) \in \mathbb{H}$ 给出的唯一弱解。

将 $\xi = \Phi(u)$ 代入 (2.7) 可得关系式

$$(\Phi(u), \Phi(u))_{\mathbb{H}} = \int_{\Omega_r} q(x) u^2 \Phi(u)\, \mathrm{d}x, \tag{2.8}$$

这一关系将在后续讨论中频繁使用。利用 (2.3) 和 (2.8)，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u, \Phi(u)) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} q(x) u^2 \Phi(u)\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2(3+\alpha)}\int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha}\, \mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{p}\int_{\Omega_r} |u|^p\, \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\|\Phi(u)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2\, \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\Omega_r} |u|^p\, \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{\Omega_r} q(x) u^2 \Phi(u)\, \mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{2(3+\alpha)}\int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha}\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

据此，我们定义约化泛函

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2\, \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\Omega_r} |u|^p\, \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{\Omega_r} q(x) u^2 \Phi(x)\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2(3+\alpha)}\int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha}\, \mathrm{d}x.$$

与 [22], 中的讨论类似，假设 $b > 0$ 且 $u \in S_{r,\, b}$。那么，u 是 J在 S_r上的临界点, b 当且仅当 $(u, \lambda, \Phi(u))$ 是满足条件 (1.3) 和 (1.4)-(1.5) 的弱解，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是与该约束相关的拉格朗日乘子。

接下来，我们介绍一些有用的不等式。

引理 2.2 (Gagliardo-Nirenberg 不等式，[25])。设 $2 < s < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, 则存在一个最佳常数 $C_{N,\, s}$ 使得对所有 $u \in H_0(\Omega_r)$

$$\|u\|_s^s \le C_{N,s} \|u\|_2^{\frac{2s - N(s-2)}{2}} \|\nabla u\|_2^{\frac{N(s-2)}{2}}.$$

则存在一个与 f、g 无关的最佳常数 $C(N, \lambda, r, r)$，使得（Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，[18])

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x) g(y)}{|x-y|^\lambda}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right| \le C(N, \lambda, r, s) \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^s(\mathbb{R}^N)}, \tag{2.9}$$

设 r、$s > 1$、$0 < \lambda < N$，其中 $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{\lambda}{N} = 2$、$f \in L^r(\mathbb{R}^N)$、$g \in L^s(\mathbb{R}^N)$。

根据 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，我们可以定义最佳常数

$$S_{h,l} := \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, \mathrm{d}x}{\left[\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha}\, \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{3+\alpha}}}.$$

接下来，我们回顾与亏格相关的定义，并陈述后续各节将用到的极小极大定理。

设 X 为一个巴拿赫空间，且 $A \subseteq X$；若 $u \in A$ 蕴含 $-u \in A$，则称集合 A 是对称的。记：$\Sigma := \{A \subset X \backslash \{0\} : A$ 是关于原点$\}$闭且对称的。对于 $A \in \Sigma$，令

$$\gamma(A) := \begin{cases} 0, & \text{if } A = \emptyset, \\ \inf\{k \in \mathbb{N} : \exists \text{ 以及一个奇映射 } \varphi \in C(A, \mathbb{R}^k \backslash \{0\})\}, & \text{若不存在这样的奇映射。} \\ +\infty, & \end{cases}$$

且 $\Sigma_k := \{A \in \Sigma : \gamma(A) \geq k\}$。

现在定义如下流形

$$S_{r,b} := \{u \in H_0^1(\Omega_r) | (u,u)_{L^2} = b^2\},$$

其带有从 $H_0^1(\Omega_r)$ 继承的拓扑。$S_{r,b}$ 在点 $u \in S_{r,b}$ 处的切空间定义为

$$T_u S_{r,b} = \{v \in H_0^1(\Omega_r) : (u,v)_{L^2} = 0\}.$$

设 $J \in C^1(H_0^1(\Omega_r), \mathbb{R})$，则 $J|_{S_{r,b}}$ 属于 C^1。$J|_{S_{r,b}}$ 在任意点 $u \in S_{r,b}$ 处的导数范数为

$$\|J|_{S_{r,b}}(u)\| = \sup_{\|v\| \leq 1,\ v \in T_u S_{r,b}} |\langle J'(u), v \rangle|.$$

注意到 $S_{r,b}$ 关于 $0 \in S_{r,b}$ 和 $0 \notin S_{r,b}$ 是对称的。令 $\Sigma(S_{r,b})$ 表示 $S_{r,b}$ 的闭对称子集族；对每个 $j \in S_{r,b}$，令 $\Gamma_j = \{A \in \Sigma(S_{r,b}) | \gamma(A) \geq j\}$。

命题 2.1。 *[20]* 设 $J \in C^1(H_0^1(\Omega_r), \mathbb{R})$ 是一个偶泛函。假设 $\Gamma_j \neq \emptyset$ 对于每个 $j \in \mathbb{N}$，$J|_{S_{r,b}}$ 有下界，并且对所有 $d < 0$ 满足 $(PS)_d$ 条件。定义

$$d_j := \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A} J(u), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

于是，以下结论成立：

(i) $-\infty < d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ *and* d_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *is a critical value of* $J|_{S_{r,b}}$ *if* $d_j < 0$.

(ii) 若对于某些 j, $l \geq 1$ 有 $d := d_j = d_{j+1} = \cdots = d_{j+l-1} < 0$，则 $\gamma(K_d) \geq l$，其中 K_d 表示 $J|_{S_{r,b}}$ 在水平 d 处的临界点集合。特别地，$J|_{S_{r,b}}$ 在水平 d 处至少有 n 个临界点。

现在，我们介绍 $\Phi(u)$ 的一些性质，相关内容可见 [23]。

引理 2.3。

(i) 若 $u_n \rightharpoonup u$ 属于 $H_0^1(\Omega_r)$，则

$$\int_{\Omega_r} q(x)u_n^2\Phi(u_n)\,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega_r} q(x)u^2\Phi(u)\,\mathrm{d}x.$$

此外，映射 Φ 是紧的。

(ii) 若 $u_n \rightharpoonup u$ 属于 $H_0^1(\Omega_r)$，则

$$\int_{\Omega_r} q(x)\Phi(u_n)u_n\varphi\,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega_r} q(x)\Phi(u)u\varphi\,\mathrm{d}x.$$

在本节末尾，我们将重新讨论浓缩紧性原理，该原理将用于克服泛函的紧性缺失。

引理 2.4 ([14]). 设 $\{u_n\}$ 是 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中的有界序列，它弱收敛且几乎处处收敛于某个 $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$。设

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \mu,$$

$$(I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha})|u_n|^{3+\alpha} \rightharpoonup \nu$$

在测度空间中弱收敛，其中 μ, ν 是 $\mathbb{R}^3$上的有界正测度。于是存在一个集合 I（至多可数）以及 $\{\mu_j\}_{j\in I}, \{\nu_j\}_{j\in I} \subset [0,\infty)$，使得

$$\mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_{j\in I} \mu_i \delta_{z_j},$$

$$\nu = (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha} + \sum_{j\in I} \nu_j \delta_{z_j}, \quad \sum_{j\in I} \nu_j^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

and

$$\mu_j \geq S_{h,l}\nu_j^{\frac{1}{3+\alpha}}, \tag{2.10}$$

其中 δ_{z_j} 是集中于 z_j 且质量为 *1* 的狄拉克质量，而 $\{z_j\} \subset \mathbb{R}^3$是子序列。

引理 2.5 ([14])。 设 $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是 引理 *2.4* 中的一个序列，并定义

$$\mu_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x,$$

$$\nu_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

于是可得

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mu + \mu_\infty, \tag{2.11}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\nu + \nu_\infty \tag{2.12}$$

and

$$S_{h,l}^2 \nu_\infty^{\frac{2}{3+\alpha}} \leq \mu_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mu + \mu_\infty \right). \tag{2.13}$$

3 定理 1.1 的证明

对于 $u \in S_{r,\ b}$，由 引理 2.2 以及 $S_{h,\ l}$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\Omega_r} |u|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{\Omega_r} q(x)u^2\Phi(u)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2(3+\alpha)}\int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha}\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\Omega_r} |u|^p \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2(3+\alpha)} S_{h,l}^{-(3+\alpha)} \|\nabla u\|_2^{2(3+\alpha)} \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p} C_{N,p} \|u\|_2^{p-\frac{3(p-2)}{2}} \|\nabla u\|_2^{\frac{3(p-2)}{2}} - \frac{1}{2(3+\alpha)} S_{h,l}^{-(3+\alpha)} \|\nabla u\|_2^{2(3+\alpha)} \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p} C_{N,p} b^{p-\frac{3(p-2)}{2}} \|\nabla u\|_2^{\frac{3(p-2)}{2}} - \frac{1}{2(3+\alpha)} S_{h,l}^{-(3+\alpha)} \|\nabla u\|_2^{2(3+\alpha)} \\
&:= h(\|\nabla u\|_2),
\end{aligned}$$

其中

$$h(t) := \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{p} C_{N,p} b^{p-\frac{3(p-2)}{2}} t^{\frac{3(p-2)}{2}} - \frac{1}{2(3+\alpha)} S_{h,l}^{-(3+\alpha)} t^{2(3+\alpha)}.$$

由 $0 < \alpha < 3$，$2 < p \leq \frac{8}{3}$，存在 $b^* > 0$，使得对所有 $b \in (0,\ b^*)$，$h(t)$ 均达到其正局部极大值，即存在 $0 < R_1 < R_2 < +\infty$，使得 $h(t) > 0$ 当 $t \in (R_1,\ R_2)$ 时成立，并且 $h(t) < 0$ 当 $t \in (0,\ R_1)$ 或 $t \in (R_2,\ +\infty)$ 时成立。令 $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^+,\ [0,1])$ 满足

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \leq R_1, \\ 0, & \text{if } t \geq R_2. \end{cases}$$

现在，我们引入截断泛函

$$\begin{aligned}
J^T(u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\Omega_r} |u|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{\Omega_r} q(x)u^2\Phi(u)\,\mathrm{d}x \\
- \frac{\xi(\|\nabla u\|_2)}{2(3+\alpha)}\int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{h}(t) := \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{p} C_{N,p} b^{p-\frac{3(p-2)}{2}} t^{\frac{3(p-2)}{2}} - \frac{\xi(t)}{2(3+\alpha)} S_{h,l}^{-(3+\alpha)} t^{2(3+\alpha)}.$$

于是，根据 ξ 的定义，并且由于 $b \in (0,\ b^*)$，我们有 $h(t) < 0$ 对所有 $t \in (0,\ R_1)$ 成立，且 $\widetilde{h}(t) > 0$ 对所有 $t \in (R_1,\ +\infty)$ 成立。此外，我们将选择足够小的 $R_1 > 0$，使得

$$\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2(3+\alpha)} S_{h,l}^{-(3+\alpha)} r^{2(3+\alpha)} \geq 0, \quad \text{for all } r \in [0, R_1] \text{ and } R_1^2 < S_{h,l}^{\frac{3+\alpha}{\alpha+2}}. \tag{3.1}$$

引理 3.1。泛函 J^T 具有以下性质：

(i) $J^T \in C^1$（H_0^1（Ω_r） $\mathbb{R}$）*;*

(ii) J^T在 $S_{r,b}$ 上具有强制性且有下界。此外，如果 $J^T(u) \le 0$，那么 $\|\nabla u\|_2 \le R_1$ 和 $J^T(u) = J(u)$;

(iii) J 在 $S_{r,b}$ 上满足 $(PS)_d$ 条件。

证明。 (i) 可用标准论证轻易证明。

对于 (ii)，若 $\|\nabla u\|_2 > R_1$ 并考虑 $\|\nabla u\|_2 \to +\infty$，则有

$$J^T(u) \ge \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p}C_{N,p}b^{p-\frac{3(p-2)}{2}}\|\nabla u\|_2^{\frac{3(p-2)}{2}} - \frac{\xi(\|\nabla u\|_2)}{2(3+\alpha)}S_{h,l}^{-(3+\alpha)}\|\nabla u\|_2^{2(3+\alpha)}.$$

~于是可得 J^T 具有强制性。根据 $h(t)$ 的定义，当 $\|\nabla u\|_2 \in [0, R_1]$ 时，我们推得 $J^T(u) \ge h(\|\nabla u\|_2) = h(\|\nabla u\|_2)$。因此， J^T 在 $S_{r,b}$ 上有下界。

对于 (iii)，定义

$$d := \liminf_{u \in S_{r,b}} J^T(u).$$

对于任意 $u \in S_{1,\ b}$，缩放

$$u_t(x) := t^{\frac{3}{2}}u(tx) \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{3.2}$$

保持 L^2-范数不变，即，

$$\|u_t(x)\|_2 = \int_{\Omega_r} |t^{\frac{3}{2}}u(tx)|^2 \,\mathrm{d}x = t^3 \int_{\Omega_{\frac{1}{t}}} |u(tx)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} |u(y)|^2 dy = b^2.$$

利用H¨older不等式以及 $H_0^1(\Omega_r) \hookrightarrow L^6(\Omega_r) \hookrightarrow L^2(\Omega_r)$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r} |\Phi(u_t)|^2 \,\mathrm{d}x &\le \left(\int_{\Omega_r} |\Phi(u_t)|^6 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} |\Omega_r|^{\frac{2}{3}} = \left(\int_{\Omega_r} |\Phi(u_t)|^6 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} (r^3|\Omega|)^{\frac{2}{3}} \\ &= r^2 \left(\int_{\Omega_r} |\Phi(u_t)|^6 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} |\Omega|^{\frac{2}{3}} \\ &\le r^2 \left(S^{-3}\|\nabla\Phi(u_t)\|_2^6\right)^{\frac{1}{3}} |\Omega|^{\frac{2}{3}} = r^2 S^{-1}\|\nabla\Phi(u_t)\|_2^2 |\Omega|^{\frac{2}{3}},\end{aligned}$$

其中 $S^{\frac{1}{2}}$是Sobole夫嵌入中的常数 $D^{1,\ 2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$。

由于

$$\int_{\Omega_r} |\nabla\Phi(u_t)|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_{\Omega_r} (|\nabla\Phi(u_t)|^2 + |\Delta\Phi(u_t)|^2) \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_r} q(x)u_t^2\Phi(u_t) \,\mathrm{d}x,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r} q(x)u_t^2\Phi(u_t) \,\mathrm{d}x &\le \|q(x)\|_\infty \|u_t^2\|_2 \|\Phi(u_t)\|_2 \le \|q(x)\|_\infty \|u_t\|_4^2 (rS^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{3}})\|\nabla\Phi(u_t)\|_2 \\ &\le \|q(x)\|_\infty S^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{3}} r \|u_t\|_4^2 \left(\int_{\Omega_r} q(x)u_t^2\Phi(u_t) \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

注意到

$$\begin{aligned}\|u_t\|_4^2 &= \left(\int_{\Omega_r} |u_t|^4 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega_r} |t^{\frac{3}{2}} u(tx)|^4 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= t^3 \left(\int_{\Omega_r} |u(tx)|^4 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^4 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

令 $r = \frac{1}{t}$，由（3.3）和（3.4）可得

$$\int_{\Omega_{\frac{1}{t}}} q(x) u_t^2 \Phi(u_t) \,\mathrm{d}x \le \left(\|q(x)\|_\infty S^{-\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{3}}\right) t^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u|^4 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_{\frac{1}{t}}} q(x) u_t^2 \Phi(u_t) \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

记 $\tilde{c} := \|q(x)\|_\infty S^{-\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{3}}$，则有

$$\int_{\Omega_{\frac{1}{t}}} q(x) u_t^2 \Phi(u_t) \,\mathrm{d}x \le \tilde{c}^2 t \int_{\Omega} |u|^4 \,\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

另一方面，取$u_0 \in S_{1,\ b}$，将（3.2）代入 J^T，并注意到 t 相对较小，由（3.5）可得

$$\begin{aligned}J^T(u_t(x)) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\frac{1}{t}}} |\nabla u_t|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p} \int_{\Omega_{\frac{1}{t}}} |u_t|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int_{\Omega_{\frac{1}{t}}} q(x) u_t^2 \Phi(u_t) \,\mathrm{d}x \\ &\quad - \frac{t^{3+3\alpha}}{2(3+\alpha)} \int_{\Omega} (I_\alpha * |u_0|^{3+\alpha}) |u_0|^{3+\alpha} \,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p} t^{\frac{3p}{2}-3} \int_{\Omega} |u_0|^p \,\mathrm{d}x + \frac{\tilde{c}^2}{4} t \int_{\Omega} |u_0|^4 \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由Ekeland变分原理，存在一个序列 $\{u_n\} \subset S_{r,\ b}$，它是 $J^T(u)$ 的 Palais-Smale (PS) 序列。由于 $p \in \left(2, \frac{3}{8}\right)$，因此存在足够小的 $t_0 > 0$，使得$J^T(u_{t_0}(x)) < 0$。

现在，固定 $r = \frac{1}{t_0}$（因此 $\Omega_r = \Omega_{\frac{1}{t_0}}$）。于是，我们确定了 Ω_r 的大小。此外，我们知道，当 n 充分大时，$J^T(u_n) < 0$，因此由 (ii) 得 $\|\nabla u_n\|_2 \le R_1$，且$J(u_n) = J^T(u_n)$。因此，$\{u_n\}$ 是 J 的 $(PS)_d$ 序列，即

$$J(u_n) \to d < 0, \quad \|J'_{s,b}(u_n)\| \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

由于我们已经知道 $\Omega_r = \Omega_{\frac{1}{t_0}}$，为方便起见，在下文中我们将用 Ω_r 替代 $\Omega_{\frac{1}{t_0}}$。

此外，我们知道 $\{u_n\}$ 是 $H_0^1(\Omega_r)$ 中的有界序列，因此存在一个子序列（仍记为 $\{u_n\}$）以及 $\bar{u} \in H_0^1(\Omega_r)$，使得

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{in } H_0^1(\Omega_r), \quad u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{in } L^t(\Omega_r), \quad \text{for } 2 \le t < 6. \tag{3.6}$$

因此，由 $p \in (2, 3+\frac{8}{3})$，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_r} |u_n|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_r} |\bar{u}|^p \,\mathrm{d}x.$$

接下来，我们证明 $\bar{u} \neq 0$。反设 $\bar{u} = 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_r} |u_n|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_r} |\bar{u}|^p \,\mathrm{d}x = 0.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned} 0 > d &= \lim_{n\to\infty} J^T(u_n) = \lim_{n\to\infty} J(u_n) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_r} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p} \int_{\Omega_r} |u_n|^p \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2(3+\alpha)} S_{h,l}^{-(3+\alpha)} \|\nabla u_n\|_2^{2(3+\alpha)} \right) \\ &\geq -\frac{1}{p} \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_r} |u_n|^p \,\mathrm{d}x = 0, \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。因此，$\bar{u} \neq 0$。

根据 [26], 中的命题 5.2，对任意 $\varphi \in H_0^1(\Omega_r)$，存在 $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_r} \nabla u_n \nabla \varphi \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_r} |u_n|^{p-2} u_n \varphi \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_r} q(x) \Phi(u_n) u_n \varphi \,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha}) |u_n|^{1+\alpha} u_n \varphi \,\mathrm{d}x - \lambda_n \int_{\Omega_r} u_n \varphi \,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

取 $\varphi = u_n$，我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_r} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_r} |u_n|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_r} q(x) u_n^2 \Phi(u_n) \,\mathrm{d}x \\ &- \int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha}) |u_n|^{3+\alpha} \,\mathrm{d}x = \lambda_n \int_{\Omega_r} u_n^2 \,\mathrm{d}x = \lambda_n b^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

此外，

$$\int_{\Omega_r} |u_n|^p \,\mathrm{d}x \leq \widehat{c} \|\nabla u_n\|_2^p, \tag{3.9}$$

其中 $\widehat{c} > 0$ 是一个常数。应用（2.6）和（2.8），我们得到

$$\left(\int_{\Omega_r} q(x) u_n^2 \Phi(u_n) \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \|\Phi(u_n)\|_{\mathbb{H}} \leq C_2 \int_{\Omega_r} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

此外，根据 $S_{h,l}$ 的定义，我们得到

$$\int_{\Omega_r} \left(I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha}\right) |u_n|^{3+\alpha} \,\mathrm{d}x \leq S_{h,l}^{3+\alpha} \left(\int_{\Omega_r} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{3+\alpha}. \tag{3.11}$$

结合式（3.8）-（3.12）以及 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega_r)$ 中的有界性，容易看出$\{\lambda_n\}$ 有界。取一个子序列后，不妨设 $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$。由式（3.6），可得

$$-\Delta \bar{u} + q(x)\Phi(\bar{u})\bar{u} = \lambda \bar{u} + (I_\alpha * |\bar{u}|^{3+\alpha})|\bar{u}|^{1+\alpha}\bar{u} + |\bar{u}|^{p-2}\bar{u}. \tag{3.12}$$

事实上，对于任意 $\varphi \in H_0^1(\Omega_r)$，取 $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ in $H_0^1(\Omega_r)$ 和 $u_n \to \bar{u}$ in $L^p(\Omega_r)$ for $p \in [2,6)$，可得

$$\int_{\Omega_r} \nabla u_n \nabla \varphi \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega_r} \nabla \bar{u} \nabla \varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{as } n \to \infty, \tag{3.13}$$

$$\int_{\Omega_r} |u_n|^{p-2}u_n \varphi \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega_r} |\bar{u}|^{p-2}\bar{u}\varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{as } n \to \infty, \tag{3.14}$$

$$\lambda_n \int_{\Omega_r} u_n \varphi \,\mathrm{d}x \to \lambda \int_{\Omega_r} \bar{u}\varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.15}$$

由引理 2.3，可得

$$\int_{\Omega_r} q(x)\Phi(u_n)u_n \varphi \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega_r} q(x)\Phi(\bar{u})\bar{u}\varphi \,\mathrm{d}x. \tag{3.16}$$

由 Sobole夫嵌入可知，$u_n \rightharpoonup u$ 在 $L^6(\Omega_r)$ 中弱收敛，且 $u_n \rightharpoonup u$ 在 Ω_r 中几乎处处成立。于是

$$|u_n|^{3+\alpha} \rightharpoonup |\bar{u}|^{3+\alpha} \quad \text{weakly in } L^{\frac{6}{3+\alpha}}(\Omega_r)$$

当 $n \to \infty$时。由 (2.9可知，序列 $I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha}$ 在 $L^{\frac{6}{3-\alpha}}(\Omega_r)$ 中有界。因此，

$$I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha} \rightharpoonup I_\alpha * |\bar{u}|^{3+\alpha} \quad \text{weakly in } L^{\frac{6}{3-\alpha}}(\Omega_r)$$

当 $n \to \infty$ 时。结合这一点和以下事实

$$|u_n|^{3+\alpha}u_n \rightharpoonup |\bar{u}|^{3+\alpha} \quad \text{weakly in } L^{\frac{6}{2+\alpha}}(\Omega_r)$$

当 $n \to \infty$ 时，我们得到

$$(I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha})|u_n|^{1+\alpha}u_n \rightharpoonup (I_\alpha * |\bar{u}|^{3+\alpha})|\bar{u}|^{1+\alpha}u \quad \text{weakly in } L^{\frac{6}{5}}(\Omega_r)$$

如 $n \to \infty$。因此，对于任意 $\varphi \in H_0^1(\Omega_r)$，我们有，

$$\int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha})|u_n|^{1+\alpha}u_n \varphi \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega_r} (I_\alpha * |\bar{u}|^{3+\alpha})|\bar{u}|^{1+\alpha}u\varphi \,\mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

因此，由（3.13）-（3.17），可得（3.12）。接下来，我们证明

$$\int_{\Omega_r} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega_r} |\nabla \bar{u}| \,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\Omega_r} (I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha})|u_n|^{3+\alpha} \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega_r} (I_\alpha * |\bar{u}|^{3+\alpha})|\bar{u}|^{3+\alpha} \,\mathrm{d}x.$$

我们将序列 u_n 视为 $H_0^1(\Omega_r$中的元素，并将其在 Ω 外延拓为零，从而视为 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中的元素$_r$，然后应用紧性原理。当 n充分大时， $\|\nabla u_n\| \leq R_1$；由 引理 2.4 和 引理 2.5，存在正测度 μ， ν以及 μ， ν 它们在 Ω 外为零$_r$，使得

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \mu, \quad (I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha})|u_n|^{3+\alpha} \rightharpoonup \nu$$

如 $n \to \infty$。

设泛函 $\Psi(v): H_0^1(\Omega_r) \to \mathbb{H}$ 由 $\Psi(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} v^2 \,\mathrm{d}x$给出。因此，我们可以看到 $S_{r,b} = \Psi^{-1}\left(\left\{\frac{b^2}{2}\right\}\right)$。

首先，我们证明 I 为空。根据质量守恒， I 不是无穷大的。如果 I 非空且有限，那么 μ_j 和 ν_j 是由引理 2.4导出的正测度。

令 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 为一个截断函数，使得 $\varphi \in [0,1]$, $\varphi \equiv 1$属于 $B_{\frac{1}{2}}(0)$，且 $\varphi \equiv 0$属于 $\mathbb{R}^3 \backslash B_1(0)$。对于任意 $\rho > 0$，令

$$\varphi_\rho(x) := \varphi\left(\frac{x - x_j}{\rho}\right) = \begin{cases} 1, & \text{if } |x - x_j| \leq \frac{\rho}{2}, \\ 0, & \text{if } |x - x_j| \geq \rho. \end{cases}$$

Si由于 $\{u_n\}$在 $H_0^1(\Omega_r)$ 中有界， $\{\varphi_p u_n\}$在 $H_0^1(\Omega_r)$ 中也有界。因此

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \langle J'(u_n) - \lambda_n \Psi'(u_n), \varphi_\rho u_n \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\rho |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \varphi_\rho \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^p \varphi_\rho u_n \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} q(x) u_n^2 \Phi(u_n) \varphi_\rho \,\mathrm{d}x - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 \varphi_\rho \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} (I_a * |u_n|^{3+\alpha})|u_n|^{3+\alpha} \varphi_\rho \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.18}$$

首先，我们将 u_n 和 $\bar{u}$ 视为 H^1（$\mathbb{R}^3$函数（在 Ω 外取零延拓$_r$）。结合勒贝格积分的绝对连续性以及 $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ 在 H_0^1（Ω_r）中， $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ 在 L^p（Ω_r）中的性质（对于 $p \in [2,6)$， 由引理 2.4 可得

$$\lim_{\rho \to 0} \lim_{n \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \varphi_\rho \,\mathrm{d}x = 0, \tag{3.19}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^p \varphi_\rho = \lim_{\rho \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{u}|^p \varphi_\rho \,\mathrm{d}x = 0, \tag{3.20}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^3} q(x) u_n^2 \Phi(u_n) \varphi_\rho = \lim_{\rho \to 0} \int_{\mathbb{R}^3} q(x) \bar{u}^2 \Phi(\bar{u}) \varphi_\rho = 0, \tag{3.21}$$

and

$$\lim_{\rho \to 0} \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\rho u_n^2 \,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.22}$$

于是，根据（3.18）-（3.22）， 引理 2.4 以及 φ_ρ的定义，可得

$$\lim_{\rho \to 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} (I_\alpha * |u|^{3+\alpha})|u|^{3+\alpha} \varphi_\rho + \sum_{j \in I} \nu_j \delta_{x_j} \varphi_\rho \,\mathrm{d}x \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\rho\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_\rho \,\mathrm{d}\nu = \lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}(I_a * |u_n|^{3+\alpha})|u_n|^{3+\alpha}\varphi_\rho \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\varphi_\rho \,\mathrm{d}x = \lim_{\rho\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_\rho \,\mathrm{d}\mu \\
&\geq \lim_{\rho\to 0}\left\{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\varphi_\rho \,\mathrm{d}x + \sum_{j\in I}\mu_j\delta_{x_j}\varphi_\rho \,\mathrm{d}x\right\} = \mu_j.
\end{aligned}
$$

因此我们可以推得 $\nu_j \geq \mu_j$。结合（2.10），可得 $\mu_j \geq S_{h,l}\nu_j^{\frac{3+\alpha}{3+\alpha}} \geq S_{h,l}\mu_j^{\frac{3+\alpha}{3+\alpha}}$。因此，有 $\mu_j \geq S_{h,l}\mu_j^{\frac{3+\alpha}{3+\alpha}}$，从而

$$
R_1^2 \geq \lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\|\nabla u_n\|_2^2 \geq \lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\varphi_\rho \,\mathrm{d}x = \lim_{\rho\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_\rho \,\mathrm{d}\mu \geq \mu_j \geq S_{h,l}^{\frac{3+\alpha}{\alpha+2}},
$$

这与（3.1）矛盾，因此 I 是空集。

考虑到 μ 和 ν 在 Ω 外为零，我们有 $\nu_\infty = M_\infty = 0$。由引理 2.5，进一步得到

$$
\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * |u_n|^{3+\alpha})|u_n|^{3+\alpha}\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3}(I_a * |\bar{u}|^{3+\alpha})|\bar{u}|^{3+\alpha}\,\mathrm{d}x.
$$

由于 $u_n \rightharpoonup \bar{u}$，在方程（$\varphi = \bar{u}$ 中取 3.7），再减去（3.8），得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}q(x)\Phi(u_n)u_n^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\,\mathrm{d}x - \lambda_n\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2\,\mathrm{d}x\right. \\
&\left. - \int_{\mathbb{R}^3}(I_a * |u_n|^{3+\alpha})|u_n|^{3+\alpha}\,\mathrm{d}x\right) \\
&- \left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\bar{u}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}q(x)\Phi(\bar{u})\bar{u}^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}|\bar{u}|^p\,\mathrm{d}x\right. \\
&\left. - \lambda\int_{\mathbb{R}^3}\bar{u}^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}(I_a * |\bar{u}|^{3+\alpha})|\bar{u}|^{3+\alpha}\,\mathrm{d}x\right) = o_n(1).
\end{aligned}
$$

由于 $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ 在 $H_0^1(\Omega_r)$ 中，$u_n \to \bar{u}$ 在 $L^p(\Omega_r)$ 中，其中 $p \in [2,6)$；并且由引理 2.3的 (i)，可得

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_r}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_r}|\nabla\bar{u}|^2\,\mathrm{d}x,
$$

即，$u_n \to \bar{u}$ 属于 $H_0^1(\Omega_r)$。 □

对于任意 $\varepsilon > 0$，定义集合

$$
(J^T)^{-\varepsilon} := \{u \in S_{r,b} : J^T(u) \leq -\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega_r).
$$

由于 $J^T(u)$ 在 $H_0^1(\Omega_r)$ 上具有强制性且为偶函数，我们知道 $(J^T)^{-\varepsilon}$ 是闭且对称的。为证明 定理 1.1，我们给出以下两个引理。 引理 3.2的证明可仿照 [2]中的引理 3.2 完成。

引理 3.2。 给定 $k \in \mathbb{N}$，存在 $\varepsilon_k = \varepsilon(k) > 0$ 使得 $\gamma((J^T)^{-\varepsilon}) \geq k$ 对所有$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_k$均成立。

对于任意 $\varepsilon_k > 0$，我们定义集合

$$\Sigma_k := \{D \subset S_{r,b} : \ D \text{ is closed and symmetric, } \gamma(D) \geq k\}.$$

根据 引理 3.1的 (ii)，我们定义极小极大值

$$d_k := \inf_{D \in \Sigma_k} \sup_{u \in D} J^T(u) > -\infty$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。此外，我们定义集合

$$K_d := \{u \in S_{r,b} : (J^T)'(u) = 0, \ J^T(u) = d\}.$$

然后，我们可以证明以下结果。

引理 3.3。 若 $d = d_k = d_{k+1} = \ldots = d_{k+l}$，则 $\gamma(K_d) \geq l + 1$。特别地， J^T至少有 $l + 1$ 个非平凡临界点。

证明。 对于 $\varepsilon > 0$，容易看出 $(J^T)^{-\varepsilon} \subset \Sigma$。对于任意固定的 $k \in \mathbb{N}$，根据 引理 3.2，有 $(J^T)^{-\varepsilon} \in \Sigma_k$。 此外， $d_k \leq$上确界$_{u \in (J^T)^{-\varepsilon_k}} J^T(u) = -\varepsilon_k < 0$。

若 $0 > d = d_k = d_{k+1} = \ldots = d_{k+l}$，则引理 3.1 的 (iii) 部分表明， J^T满足 $S_{r,\ b}$ 上关于 $d < 0$ 的 Palais-Smale（PS）$_d$ 条件。因此，我们推得 K_d 是紧的。根据 [16], 中的定理 2.1，至少存在 $l + 1$ 个非平凡临界点 $J^T|_{S_{r,\ b}}$。 □

定理 定理 1.1的证明： 根据 引理 3.1的 (ii) 部分， J 的临界点也是 J^T的临界点。因此，根据 引理 3.3， 定理 1.1 的证明完成。 □

4 声明

致谢 Li Wang 获国家自然科学基金委员会（项目编号：12161038、12301584）、江西省自然科学基金（项目编号：20232BAB201009）以及江西省教育厅科学技术项目（项目编号：GJJ2400901）资助。

作者贡献 所有作者均已对本稿件此版本的全部内容承担责任，并同意将其提交至期刊；他们审阅了所有结果，并批准了稿件的最终版本。Li Chen 提出了研究构想并撰写了初稿。Li Wang 为本研究提供了这一构想，并负责监督稿件的实施审查与修订。所有作者均已阅读并同意稿件的已发表版本。

利益冲突 作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] D. G. Afonso 和 G. Siciliano：诺伊曼边界条件下 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组的归一化解。《当代数学通讯》，25(02)，2150100（2023）。[2] C. O. Alves、C. Ji和 O. H. Miyagaki：具有临界增长的非线性 Schr¨odinger 方程归一化解的多重性，见 $\mathbb{R}^N$。《微积分变分与偏微分方程》，61(18)，24（2022）。[3] M. Bertin 等：零平面上波多尔斯基电磁理论的哈密顿-雅可比形式体系。《数学物理杂志》，58，082902（2017）。[4] C. Bonin、B. Pimentel和 P. Ortega：广义电动力学中的多极展开。《国际现代物理学杂志 A》，34(24)，1950134（2019）。[5] F. Bopp：电子的线性理论。《物理年鉴》，430(5)，345-384（1940）。[6] R. Bufalo、B. Pimentel和 D. Soto：从因果视角对广义量子电动力学进行可归一化性分析。《国际现代物理学杂志 A》，32(27)，1750165（2017）。[7] R. Bufalo、B. M. Pimentel和 D. E. Soto：广义量子电动力学中电子-正电子散射的因果方法。《物理评论 D》，90(8)，085012（2014）。[8] E. Caponio 等：零质量情形下非线性 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组：泛函框架与存在性。arXiv:2506.09752（2025）。[9] R. Cuzinatto 等：博普-波多尔斯基黑洞与无毛定理。《欧洲物理学杂志 C》，78(1)，43（2018）。[10] R. Cuzinatto等：宇宙学中的德布罗意-普罗卡与博普-波多尔斯基有质量光子气体。《欧洲物理快报》，118(1)，19001（2017）。[11] P. d'Avenia 和 G. Siciliano：Bopp-Podolsky 电动力学中的非线性 Schr¨odinger 方程：静电情形下的解。《微分方程杂志》，267(2)，1025-1065（2019）。[12] G. M. Figueiredo 和 G. Siciliano：具有正势的 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组的多重解。《数学新闻》，296(6)，2332-2351（2023）。

[13] V. B.-D. Fortunato：Schr¨odinger-Maxwell 方程的特征值问题。J. Juliusz Schauder 中心，11，283-293（1998）。[14] F. Gao 等：利用集中紧性方法证明临界 Choquard 方程解的存在性。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑：数学》，150(2)，921-954（2020）。[15] E. Hebey：Proca 框架下与 Bopp-Podolsky 电动力学耦合的非线性 Schr¨odinger 方程的电磁静力学研究。《离散与连续动力系统 A 辑》，39(11)（2019）。[16] L. Jeanjean 和 S. -S. Lu：非线性标量场方程的非径向归一化解。《非线性》，32(12)，4942（2019）。[17] L. Li、 P. Pucci和 X. Tang：具有临界 Sobolev 指数的 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组的基态解。《非线性研究进展》，20(3)，511-538（2020）。[18] L. Nirenberg：关于椭圆型偏微分方程。《比萨高等师范学院科学纪要》，13(2)，115-162（1959）。[19] G. de Paula Ramos 和 G. Siciliano：有界区域中受约束 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组的最小能量解的存在性与极限行为，见 $\mathbb{R}^3$。《应用数学与物理杂志》，74(2)，56（2023）。[20] X. Peng：临界 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组的归一化解。《马来西亚数学科学学会通报》，47(1)，9（2024）。[21] B. Podolsky：广义电动力学（一）：非量子理论。《物理评论》，62(1-2)，68（1942）。[22] K. Sheng：有界区域中具有一般非线性项的 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组的归一化解。arXiv:2511.21303（2025）。[23] G. Siciliano：有界区域中 Schr¨odinger-Bopp-Podolsky 方程组的归一化解。arXiv:2504.10385（2025）。[24] K. Silva 和 G. Siciliano：非线性 Schr¨odinger 方程与电磁场耦合的纤维化方法。《数学出版物》，64，373-390（2020）。[25] J. Wang 和 Z. Yin：大型凸区域中涉及临界情形的、带势且具有一般非线性项的 Schr¨odinger 方程的归一化解。《电子定性理论微分方程杂志》，53，1-53（2024）。[26] M. Willem：Minimax th定理。Springer Science & Business Medi a, 24 86 87（2012）.