用于高超声速非平衡流计算的双温度气体动理学格式

Xingjian Gao,[1] XingJi,[1] Hualin Liu,[2] 和 Gang Chen[1]1)陕西省飞行器环境与控制重点实验室、机械结构强度与振动国家重点实验室、西安交通大学航天航空工程学院，中国西安 710049 2)中国计量大学理学院，中国杭州

（*电子邮箱：jixing@xjtu.edu.cn）

（日期：2026年1月6日）

准确的空气动力学和气动热力学预测对于众多高超声速应用至关重要。本文提出一种结合双温动力学模型的气体动理学格式（GKS），该模型区分平动-转动温度模态与振动温度模态。与单温度模型和平动-转动多温度模型相比，当空气的振动能模态被激发时，所提出的模型能够更准确地从物理角度模拟真实气体效应。另一方面，与平动、转动和振动模态彼此独立的多温度模型相比，该模型的计算更为简单。该格式可用于结构化网格和非结构化网格。为进一步增强对强激波和稀疏波的鲁棒性，本文采用间断反馈因子取代传统限制器。本文通过一维激波结构、二维（2D）圆柱绕流高超声速流动、二维楔形体绕流高超声速流动以及二维 Edney IV 型激波/激波相互作用进行数值验证。与实验数据、直接模拟蒙特卡罗（DSMC）方法的参考结果以及 Navier–Stokes（NS）求解器的结果相比，本文方法能够准确预测热非平衡激波结构和高超声速流场。

arXiv:2601.01107v1 [physics.flu-dyn] 3 Jan 2026

一、引言

空间探索的发展需要应对高超声速空气动力学中的关键挑战[1]。高超声速飞行器大气再入时，速度可达每秒数千米[2]，甚至超过 10 km/s[3]。在这些条件下，飞行器头部形成的弓形激波会使激波后气体温度升至数千开尔文，有时甚至超过 10,000 K。周围流场呈现复杂的高温现象，包括内能激发（平动、转动、振动和电子模态）、解离、电离、电子能级跃迁和辐射。除气相过程外，表面相关现象——包括表面催化、氧化和烧蚀——也发挥着重要作用。这些过程会显著影响气动特性（如稳定性、推力和升阻比）以及气动加热[4]，，统称为高温气体效应。

由于高速流动中热力学内能激发与化学反应同时发生，这些过程之间会产生强耦合作用。各种能量模态的弛豫、化学反应和流动演化通常发生在相近的时间尺度上[5]。根据达姆科勒数估算，这类条件通常处于非平衡状态。因此，流动与高温气体效应的耦合行为称为热化学非平衡[6–8]。热力学平衡假设所有内能模态均遵循基于平动温度的玻尔兹曼分布。然而，在空气密度较低、分子碰撞频率较低的高海拔地区，有限速率能量激发和化学反应以与流动时间尺度相近的时间尺度发生，导致出现热非平衡状态[9]。为模拟高超声速流中的热化学非平衡，广泛采用多温度模型[10]。这些模型为不同的能量模态分别指定温度：平动、转动、振动和电子能。Park 随后将多温度模型简化为双温度模型，其中平动能和转动能由同一温度T_t描述，而振动能和电子能则由T_{ve}[11],12描述。该模型已在工程应用中得到广泛采用。

用于热化学非平衡流动的传统计算流体力学方法依赖宏观控制方程，例如 Navier–Stokes（NS）方程，通常采用有限差分法[13]，、有限体积法[14]，或有限元方法[15]求解。然而，这些方法往往假设局部热力学平衡，因此难以准确捕捉高超声速流中的强非平衡效应。作为一种替代方案，Xu 基于介观动理学理论[16]，提出了气体动理学格式（GKS），该格式具有符合物理规律且数值稳健的框架。与传统的连续介质方法不同，GKS 直接演化由 Bhatnagar–Gross–Krook（BGK）模型导出的气体分布函数，从而自然地纳入非平衡输运和多尺度效应。

多年来，气体动理学格式已成功拓展至多种流动区间的模拟，涵盖从低马赫数到高马赫数的范围，并展现出处理激波结构、稀薄效应和复杂几何形状的强大能力[17–24]。大量数值验证已证明该方法的准确性和可靠性[25–28]。在高超声速流的研究中，气体动理学格式在模拟连续介质和

近连续区间[29], 方面均展现出强大能力，其内在耦合机制能够准确预测热通量[30–33]。对于湍流模拟，高阶气体动理学格式[34] 是直接数值模拟（DNS）湍流[35–38]的有前景工具。此外，气体动理学格式可与传统工程湍流模型[39]，有效耦合，并在实际湍流模拟[40–43]中展现出优异性能。

对于热非平衡流动，GKS可与多温度热力学模型耦合。此前的相关进展包括多重平动温度GKS[44,45]，、平动-转动多温度气体动理学格式[46–49] 以及平动-转动-振动多温度GKS[50–52]。多重平动温度GKS采用不同的温度分量，分别描述不同方向上的平动能。平动-转动多温度GKS则通过分别设置平动温度和转动温度，区分平动能与转动能。此外，平动-转动-振动多温度GKS还纳入振动能，并采用额外的振动温度对其进行表征。这些模型成功模拟了激波结构、低密度喷管流动、平板边界层以及激波/激波相互作用。

与上述格式不同，本文提出了一种双温度气体动理学格式，仅区分平动-转动能模态与振动能模态。假设平动温度与转动温度处于平衡状态，而将振动温度视为独立的热力学模态。本文仅考虑振动温度向平动-转动温度弛豫的过程，并采用基于 Landau–Teller–Jeans 型弛豫模型[53]的源项描述模态间的能量交换。采用这一模型的原因在于稀薄高超声速流动中热非平衡的特点：这种非平衡主要表现为振动温度与平动温度之间的差异。相比之下，转动温度往往会迅速与平动温度达到平衡。这一物理认识解释了双温模型在工程中的普遍应用。事实上，著名的Park模型同样假设平动温度与转动温度处于平衡状态，并且仍是实际应用中最广泛使用的高温模型之一。

需要指出的是，本研究仅考虑热非平衡效应，并通过采用化学冻结流假设忽略化学非平衡，即不考虑化学反应。因此，对于温度足以引发化学反应的情况（空气中约为 2000 K 以上），本文方法的适用性可能受到限制，本研究将对此作进一步考察。

本文结构安排如下。第2节介绍扩展气体动理学模型，以及二维双原子气体相应的宏观控制方程。第3节介绍数值方法，包括有限体积框架、气体动理学求解器、空间重构、时间积分和边界条件。第4节给出高超声速验证算例，包括一维激波结构、二维圆柱绕流高超声速流动、二维楔形体绕流高超声速流动以及二维 Edney IV 型激波/激波相互作用。最后一节给出结论。

II. 气体动理学模型与宏观控制方程

本节介绍双原子气体的扩展动理学模型及其在二维情况下推导出的宏观方程。

A. 非平衡平动-转动与振动温度模型

玻尔兹曼方程通过单个粒子气体分布函数的演化，描述多粒子动理学系统的行为。其右端项表示双分子碰撞，该描述在很宽的压力范围内均适用。通常采用 Bhatnagar–Gross–Krook（BGK）模型简化玻尔兹曼方程中的碰撞项[54]。在平衡流中，假设所有能量模态（平动、转动和振动）具有相同的温度。然而，对于非平衡流，由于平动、转动和振动能量模态的温度各不相同，这一假设便不再准确。本小节提出一种 BGK 模型，其中假设平动能和转动能处于平衡，而振动能仍处于非平衡状态。尽管早期研究已提出针对非平衡振动能的 BGK 模型，但这是首个在 BGK 框架内区分平动-转动平衡与振动非平衡，并将其与气体动理学格式中的 Park 双温度模型相结合的模型。对于非平衡双温度双原子气体流，上述 BGK 模型可扩展为以下形式：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f^{eq}-f}{\tau}+\frac{g-f^{eq}}{Z_v\tau}=\frac{f^{eq}-f}{\tau}+Q_s, \quad (1)$$

其中f 为分布函数，定义为时刻t分子在位置（x，y）且粒子速度为（u，v）时的数密度；g 表示局部平衡态，即由局部宏观量构造的麦克斯韦分布。为模拟热非平衡，引入中间平衡分布f^{eq} ，其特征是具有两个不同的温度：平动-转动温度和振动温度。 $\tau=\mu/p$ 为特征弛豫时间（μ 可由萨瑟兰定律或幂律计算），Q_s 为非弹性碰撞算子，用于描述平动-转动模态与振动模态之间的能量交换，并在宏观二维流动演化方程中充当源项，

其中Z_v称为振动碰撞数。它是一个无量纲乘数，用于关联振动弛豫时间 τ_v 与总能量的特征弛豫时间 τ，即 $\tau_v = Z_v\tau$；因此，Z_v 可缩放振动模态的整体弛豫时间尺度。方程左侧表示分子在物理空间中的自由输运，右侧则描述粒子碰撞导致的弛豫过程。中间平衡态f^{eq} 表示如下：

$$f^{eq} = \rho\left(\frac{\lambda_{tr}}{\pi}\right)^{(K_r+3)/2} e^{-\lambda_{tr}\left[(u-U)^2+(v-V)^2+\xi_t^2+\xi_r^2\right]} \left(\frac{\lambda_v}{\pi}\right)^{K_v/2} e^{-\lambda_v\xi_v^2}. \tag{2}$$

其中， ρ 为密度，(U,V)分别为 x 和 y 方向上的宏观流体速度。其中， $\lambda_{tr} = \mathrm{m}/2\mathrm{kT}_{tr}$ 与平动-转动温度 T_{tr} 相关。参数 $\lambda_v = \mathrm{m}/2\mathrm{kT}_v$ 表示振动温度 T_v。对于二维非平衡双原子气体，内变量 ξ 表示平动、转动和振动模态，其表达式为 $\xi^2 = \xi^2\mathrm{t} + \xi_r^2 + \xi_v^2$。其中， ξ_t、ξ_r和 ξ_v分别对应平动（z 方向）、转动和振动能量，其自由度分别为 K_t、K_r和 K_v 。对于二维非平衡双原子气体，$\mathrm{K}_t = 1$、$\mathrm{K}_r = 2$和 K_v 由振动能方程[55]确定。

$$K_v = \frac{2\theta_v/T_v}{e^{\theta_v/T_v}-1}, \tag{3}$$

其中 θ_v 为振动特征温度。本文中氮气采用 $\theta_v = 3393$ K。注意，比热比并非常数，BGK求解器必须在每个时间步对每个单元进行局部计算：

$$\gamma = \frac{3+K_r+K_v+2}{3+K_r+K_v}. \tag{4}$$

式 (1) 中右端的碰撞项由两项组成，分别对应弹性碰撞和非弹性碰撞，此时弛豫过程为$f \to f^{eq} \to g$。在弹性碰撞阶段，禁止转动-平动模态与振动模态之间发生内能交换。在时间尺度 τ内，气体从初始非平衡态弛豫至中间平衡态f^{eq}；此时，平动能和转动能服从由平动-转动温度T_{tr}表征的麦克斯韦分布，而振动能则服从振动温度T_v下的麦克斯韦分布。

随后，在非弹性碰撞阶段，平动-转动模态与振动模态之间会在时间尺度$Z_v\tau$内发生能量交换，分布函数进一步松弛至最终平衡态g，此时所有能量模态共享一个平衡温度，并遵循完整麦克斯韦分布。系数Z_v称为振动碰撞数。

质量 ρ、动量（ρU ρV）、总能量 ρE和振动能 ρE_v 与分布函数f 之间的关系为

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho V \\ \rho E \\ \rho E_v \end{pmatrix} = \int \psi_\alpha f \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi_t\mathrm{d}\xi_r\mathrm{d}\xi_v, \alpha = 1,2,3,4,5. \tag{5}$$

$\mathbf{W}$ 表示由上述所有守恒量与振动能组成的矩阵。振动能 ρE_v 可通过关系式$\rho E_v = \kappa_{v2}\,\rho RT_v$计算。积分在整个速度空间和内自由度空间上进行，积分限为 $-\infty$ 至 $+\infty$。矩计算的详细公式见附录 A。 ψ_α 是矩向量的分量，如下所示：

$$\begin{aligned}\psi_\alpha &= (\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5)^T \\ &= \left(1, u, v, \frac{1}{2}\left(u^2+v^2+\xi_t^2+\xi_r^2+\xi_v^2\right), \frac{1}{2}\xi_v^2\right)^T.\end{aligned} \tag{6}$$

利用附录 A 中的公式，可进一步得到如下通量表达式，供后续使用。

$$\mathbf{F} = \int u\psi_\alpha f \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi_t\mathrm{d}\xi_r\mathrm{d}\xi_v, \alpha = 1,2,3,4,5. \tag{7}$$

由于引入了独立的振动温度 T_v ，因此必须对上述扩展动理学模型施加振动能弛豫约束，才能自洽地确定所有未知量。然而，由于粒子碰撞过程中只有质量、动量和总能量守恒，而振动能会与平动-转动模态发生能量交换，原有的碰撞项相容性条件不再严格成立。因此，需施加修正后的相容性条件，其中振动能弛豫作为非守恒源项出现在宏观方程中。

$$\int \left(\frac{f^{eq}-f}{\tau} + Q_s\right)\psi_\alpha \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi_t\mathrm{d}\xi_r\mathrm{d}\xi_v = \mathbf{S} = (0,0,0,0,s)^T, \tag{8}$$

其中 $\alpha = 1$，2，3，4，5。振动能的源项s 源于非弹性碰撞过程中平动-转动能与振动能之间的能量交换，并通过如下 Landau–Teller–Jeans 型弛豫模型进行描述，

$$s = \frac{(\rho E_v)^{eq} - \rho E_v}{Z_v\tau}. \tag{9}$$

平衡能（ρE_v）^{eq} 由以下假设确定：

假设 $T_{tr}=T_v=T^{eq}$ 满足

$$\begin{aligned}\rho E_v^{eq}&=\frac{K_v}{2}\rho R T^{eq},\\ T^{eq}&=\frac{(3+K_r)T_{tr}+K_vT_v}{3+K_r+K_v}.\end{aligned}\tag{10}$$

粒子碰撞时间 τ 与振动碰撞数Z_v 的乘积，表示振动能与平动-转动能达到平衡的弛豫时间。默认情况下，Z_v 的值按以下经验表达式[56]计算：

$$Z_v=\frac{3+K_r}{3+K_r+K_v}\ \frac{c_1}{T_{tr}^{\omega}}\exp\left(\frac{c_2}{T_{tr}^{1/3}}\right),\tag{11}$$

其中，$c_1=100$、$c_2=100$和 $\omega=0.75$。后续数值算例中将对这些参数进行敏感性分析。

为了模拟任意实际普朗特数下的流动，气体动理学格式（GKS）在能量输运中采用了热流修正，本研究也采用了这一修正。

在双温度气体动理学格式中，计算实现时已用中间平衡态f^{eq} 取代平衡态g 。为保持与单温度GKS文献中的符号一致，现将符号g 正式重新定义为$g\equiv f^{eq}$，并在后续推导中均采用此定义。

B. 与当前方法对应的宏观方程

基于公式（2）给出的中间状态，并假设振动能交换被冻结，对非平衡分布函数 f 进行一阶 Chapman–Enskog 展开，可得以下表达式[57]：

$$f=f^{eq}+\varepsilon f_1=f^{eq}-\tau(\frac{\partial f^{eq}}{\partial t}+u\frac{\partial f^{eq}}{\partial x}+v\frac{\partial f^{eq}}{\partial y}).\tag{12}$$

其中，ε 是一个很小的无量纲量。相应的二维非平衡平动-转动与振动双温宏观方程可推导如下，详细推导见附录B。

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial F_v}{\partial x}+\frac{\partial G_v}{\partial y}+S,\tag{13}$$

with

$$W=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho U\\ \rho V\\ \rho E\\ \rho E_v\end{pmatrix}F=\begin{pmatrix}\rho U\\ \rho U^2+p\\ \rho UV\\ (\rho E+p)U\\ \rho E_vU\end{pmatrix}G=\begin{pmatrix}\rho V\\ \rho UV\\ \rho V^2+p\\ (\rho E+p)V\\ \rho E_vV\end{pmatrix}$$
$$F_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ U\tau_{xx}+V\tau_{xy}+q_x\\ U\tau_{tr-v}+q_{vx}\end{pmatrix}G_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{yx}\\ \tau_{yy}\\ U\tau_{yx}+V\tau_{yy}+q_y\\ V\tau_{tr-v}+q_{vy}\end{pmatrix},\tag{14}$$

其中，$\rho E=\frac{1}{2}\rho(U^2+(3+K_r)RT_{tr}+K_vRT_v)$ 为总能量，$\rho E_v=\kappa_{v2}\rho RT_v$ 为振动能。压强 p 与平动-转动温度的关系为$p=\rho RT_{tr}$。特别地，黏性法向应力项为

$$\begin{aligned}\tau_{xx}=&\tau p[2\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{2}{3+K_r}(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y})]\\ &-\frac{\rho K_v}{2(K_r+K_v+3)Z_v}(\frac{1}{\lambda_{tr}}-\frac{1}{\lambda_v}),\\ \tau_{yy}=&\tau p[2\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{2}{3+K_r}(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y})]\\ &-\frac{\rho K_v}{2(K_r+K_v+3)Z_v}(\frac{1}{\lambda_{tr}}-\frac{1}{\lambda_v}),\end{aligned}\tag{15}$$

其中黏性剪切应力分量为

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau p(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}),\tag{16}$$

热传导分量表示为

$$\begin{aligned}q_x&=\tau p[\frac{K_v}{4}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\lambda_v})+\frac{5+K_r}{4}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\lambda_{tr}})],\\ q_y&=\tau p[\frac{K_v}{4}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{\lambda_v})+\frac{5+K_r}{4}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{\lambda_{tr}})].\end{aligned}\tag{17}$$

以下各项对振动能控制方程 ρE_v有贡献：

$$\begin{aligned}\tau_{tr-v}&=\frac{(K_r+3)\rho K_v}{4(K_r+K_v+3)Z_v}(\frac{1}{\lambda_{tr}}-\frac{1}{\lambda_v}),\\ q_{vx}&=\tau p\frac{K_v}{4}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\lambda_v}),\\ q_{vy}&=\tau p\frac{K_v}{4}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{\lambda_v}).\end{aligned}\tag{18}$$

公式（13）中的源项定义见公式（9）。

注释 II.1。为进一步说明所提出的 *TR-V 2T GKS* 相较于 *Park* 的宏观双温模型的优势，下面我们重点讨论振动能量方程的形式。根据上述推导，本文双温

GKS 中的振动能量方程可表示为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E_v)+\nabla\cdot(\rho E_v\mathbf{u})=\nabla\cdot(\mathbf{u}\tau_{t-v}+\kappa_v\nabla T_v)+\mathbf{S}, \tag{19}$$

其中

$$\kappa_v=\mu R_g\left(\frac{\theta_v}{T_v}\right)\frac{1}{\exp\left(\frac{\theta_v}{T_v}\right)-1}. \tag{20}$$

相比之下，传统 *Navier–Stokes* 求解器与 *Park*模型耦合时所采用的振动能量方程形式如下：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E_v)+\nabla\cdot(\rho E_v\mathbf{u})=\nabla\cdot(\kappa_v\nabla T_v)+\mathbf{S}, \tag{21}$$

其中

$$\kappa_v=1.37\mu R_g\left(\frac{\theta_v}{T_v}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{\theta_v}{T_v}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\theta_v}{T_v}\right)-1\right)^2}. \tag{22}$$

直接比较可凸显二者的关键差异。在 *Park*模型中，振动弛豫仅作为经验源项出现在能量方程中，而热传导则通过预设的振动热导率关联式进行建模。相比之下，在 *TR-V 2T GKS* 中，平动-转动温度与振动温度的分离直接嵌入动理学碰撞算子和分布函数中。因此，推导得到的振动能量方程除了包含传统源项外，还自然地在散度项中包含额外的弛豫贡献，并采用了经修正的输运系数（见式 *20*）。

这些项并非以临时拼凑的方式引入，而是由基础动理学表述一致地推导而来。这一特性使微观弛豫过程与宏观输运之间建立了更紧密的物理联系，体现了当前 *TR-V 2T GKS* 框架相较于 *Park*经典双温度模型的一项重大进展。

III. 数值方法

A. 基于有限体积法框架的气体动理学格式

首先，在速度空间和内态空间对 BGK 模型方程（1）取矩。然后对其在控制体 Ω_i 上积分，可得

$$\int_{\Omega_i}\int(f_t+\mathbf{u}\cdot\nabla f)\,\psi\mathrm{d}\Xi\mathrm{d}V=\int_{\Omega_i}\int(\frac{f^{eq}-f}{\tau}+\frac{g-f^{eq}}{Z_v\tau})\psi\mathrm{d}\Xi\mathrm{d}V, \tag{23}$$

其中，$\mathrm{d}\Xi$ 表示 $\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi_r\mathrm{d}\xi_v$ ，而 $\mathrm{d}V$ 表示对控制体的积分。需要注意的是， ∇f 表示f 在物理空间中的散度，它与（$\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi}$）无关。因此，可得：

$$\int(\mathbf{u}\cdot\nabla f)\,\psi\mathrm{d}\Xi=\int\nabla\cdot(\mathbf{u}f)\,\psi\mathrm{d}\Xi=\nabla\cdot\int\mathbf{u}f\psi\mathrm{d}\Xi. \tag{24}$$

根据式 (5)、式 (7) 以及式 (8) 中修正后的相容条件，可由式 (23) 得到积分形式：

$$\int_{\Omega_i}\mathbf{W}_t\,\mathrm{d}V+\int_{\Omega_i}\nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}V=\int_{\Omega_i}\mathbf{S}\,\mathrm{d}V. \tag{25}$$

采用有限体积法（FVM）对式 (25) 中的积分形式进行离散，

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{W}}_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i}\nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}V+\mathbf{S}, \tag{26}$$

其中，$|\Omega_i|$为控制体的体积，$\mathbf{W}_i$ 表示单元i中的单元平均守恒变量。根据高斯定理，FVM 的半离散形式可写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{W}}_i}{\mathrm{d}t}&=\mathscr{L}(\mathbf{W}_i)=-\frac{1}{|\Omega_i|}\oint_{\partial\Omega_i}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s+\mathbf{S}\\&=-\frac{1}{|\Omega_i|}\sum_{p=1}^{N_f}\int_{\Gamma_{ip}}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_p\,\mathrm{d}s+\mathbf{S},\end{aligned} \tag{27}$$

其中，$\mathscr{L}(\mathbf{W}_i)$表示单元残差，$\partial\Omega_i$ 表示控制体的边界，$\mathrm{d}s$ 为相应的边界元（在三维中为表面积，在二维中为线长），$\mathbf{n}_p$ 为界面的单位外法向量。$\partial\Omega_i$表示其所有边界面的并集，如下所示。

$$\partial\Omega_i=\bigcup_{p=1}^{N_f}\Gamma_{ip}, \tag{28}$$

其中，Γ_{ip} 是单元 Ω_i 的相邻界面，Nf 是单元界面的数量。采用数值方法计算通量的面积分，

$$\int_{\Gamma_{ip}}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_p\,\mathrm{d}s=\left|\Gamma_{ip}\right|\mathbf{F}(\mathbf{x}_p,t)\cdot\mathbf{n}_p, \tag{29}$$

其中，$\left|\Gamma_{ip}\right|$是网格面的面积。

B. 气体动理学求解器

采用有限体积法求解 BGK 型模型。式（1）中单元处的f的一般积分解

时刻t的界面 $(x_{i+1/2},y_j)$表示为

$$\begin{aligned} & f\left(x_{i+1/2},y_j,t,u,v,\xi_t,\xi_r,\xi_v\right) \\ & =\frac{1}{\tau}\int_0^t g\left(x',y',t',u,v,\xi_t,\xi_r,\xi_v\right)e^{-(t-t')/\tau}dt' \\ & +e^{-t/\tau}f_0\left(x_{i+1/2}-ut,y_j-vt,u,v,\xi_t,\xi_r,\xi_v\right), \end{aligned} \tag{30}$$

其中，$(x'=x_{i+1/2}-u(t-t'),y'=y_j-v(t-t'))$ 是粒子运动的轨迹，而f_0 是每个时间步长开始时的初始气体分布函数。

对于黏性流动，物理碰撞时间 τ 定义为

$$\tau=\frac{\mu}{p}, \tag{31}$$

其中，μ 为动力黏度。为通过额外的数值耗散恰当地捕捉间断，数值碰撞时间修正为

$$\tau=\frac{\mu}{p}+C\frac{|p_L-p_R|}{|p_L+p_R|}\Delta t, \tag{32}$$

其中C 在计算中取5.0。p_L 和p_R 分别表示单元界面左右两侧的压力，在光滑流动区域中简化为 $\tau=\mu/p$ 。 Δt 为根据库朗-弗里德里希-刘数（CFL）条件确定的时间步长。μ 为根据萨瑟兰定律给出的动力黏度系数[58]

$$\mu=\mu_{ref}\left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{1.5}\left(\frac{T_{ref}+S}{T+S}\right), \tag{33}$$

其中，氮气的 $\mu_{ref}=1.656\times10^{-5}$ Pa·· s，T^{ref} 为 273.11 K，$S=104.7$ K。

初始气体分布函数 f_0 可构造为

$$f_0=\begin{cases} g^l(1-t(a^lu+b^lv)-\tau(a^lu+b^lv+A^l)),x\le 0 \\ g^r(1-t(a^ru+b^rv)-\tau(a^ru+b^rv+A^r)),x>0 \end{cases}, \tag{34}$$

其中，g^l 和 g^r 与单元界面两侧重构得到的宏观值有关。微观斜率 $a^l,_r,b^l,_r,A^l,_r$ 可利用宏观斜率计算。微观斜率的具体计算方法见附录 C。上式可简化为

$$f_0=\begin{cases} f_0^l, & x\le 0 \\ f_0^r, & x>0 \end{cases}, \tag{35}$$

上式可进一步简化如下：

$$f_0=f_0^l\mathbb{H}(x_1)+f_0^r(1-\mathbb{H}(x_1)), \tag{36}$$

其中，$\mathbb{H}(x_1)$是 Heaviside函数。确定动理学部分f_0, 后，中间平衡态g部分可以表示为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau}\int_0^t g\left(x',y',t',u,v,\xi_t,\xi_r,\xi_v\right)e^{-(t-t')/\tau}dt' \\ & =C_1g^c+C_2a^c(u+v)g^c+C_3A^cg^c, \end{aligned} \tag{37}$$

其中，系数 a^c,A^c 由中间平衡态 g^c 的展开定义。式 (37) 中的系数C_m（其中 $m=1,2,3$）为

$$C_1=1-e^{-t/\tau},C_2=(t+\tau)e^{-t/\tau}-\tau,C_3=t-\tau+\tau e^{-t/\tau}. \tag{38}$$

式 (34) 和式 (37) 中各微观项系数 $a^l,_r,^c$ 和 $A^l,_r,^c$ 根据宏观量计算的详细方法见附录 C。于是，单元界面处的二阶时间相关气体分布函数为

$$\begin{aligned} & f\left(x_{i+1/2},y_j,t,u,v,\xi_t,\xi_r,\xi_v\right)=\left(1-e^{-t/\tau}\right)g^c \\ & +\left((t+\tau)e^{-t/\tau}-\tau\right)(a^cu+b^cv)g^c+\left(t-\tau+\tau e^{-t/\tau}\right)A^cg^c \\ & +e^{-t/\tau}g^l\left[1-(\tau+t)(a^lu+b^lv)-\tau A^l\right]\mathbb{H}(u_1) \\ & +e^{-t/\tau}g^r\left[1-(\tau+t)(a^ru+b^rv)-\tau A^r\right](1-\mathbb{H}(u_1)). \end{aligned} \tag{39}$$

将气体分布函数f 代入式（7），即可得到式（27）的半离散有限体积公式中的通量$\mathbf{F}$ 。

注释 III.1. 不同气体的普朗特数可以取不同值，例如，空气的普朗特数为 $Pr\approx0.73$ 。然而，*BGK* 模型给出的普朗特数 $Pr=1$ 是固定的。本文根据[59],所述方法，通过修正 *GKS* 通量式（7）中的热流 q 来固定普朗特数

$$\mathbf{F}_{\rho E}^{new}=\mathbf{F}_{\rho E}+\left(\frac{1}{Pr}-1\right)q, \tag{40}$$

其中$\mathbf{F}\rho\mathbf{E}$ 表示式（7）中通量的总能量分量，$\mathbf{F}_{\rho\mathbf{E}}^{\mathbf{new}}$表示其修正形式，随时间变化的热流为

$$q=\int\frac{1}{2}(u_1-U_1)[(u_i-U_i)^2+\xi^2]fd\Xi. \tag{41}$$

如上一节所述，微观斜率$a^l,_r$，$b^l,_r$，$A^l,_r$ 可以利用宏观斜率计算。必须在每个单元内重构相应的宏观流动变量。本文采用二阶重构。为达到二阶空间精度，该格式在每个计算单元内对流动变量进行线性重构。此重构适用于结构化网格和非结构化网格。对于给定的单元i, 在面中心$\mathbf{x}f$ 处，守恒变量 ϕ 的值重构为

$$\phi_f=\phi_i+\nabla\phi_i\cdot(\mathbf{x}_f-\mathbf{x}_i), \tag{42}$$

其中，ϕ_i 是单元平均值，$\nabla\phi_i$ 是单元内的梯度

，$\mathbf{x}_i$ 表示单元质心，而$\mathbf{x}_f$ 是面中心的位置向量。

梯度计算和斜率限制的流程取决于网格拓扑。在结构化网格上，采用中心差分近似梯度，并使用 Van Leer 限制器和间断反馈因子（DFF）限制重构斜率，以抑制非物理振荡，并在间断附近实现自适应降阶。在非结构化网格上，采用 Green–Gauss 方法计算梯度，并应用 DFF 以确保稳定性和保持单调性。

以下各节将分别介绍结构化网格和非结构化网格的详细重构策略。以下所有推导均针对二维情况。

C. 结构化网格上的空间重构

在结构化网格上，宏观变量的重构采用基于相邻单元平均值计算的受限方向斜率。Van Leer 限制器给出一阶精度斜率，将其用于线性重构框架时，可在光滑流动区域得到二阶精度界面值。同时，限制器通过减小强梯度附近的斜率来抑制伪振荡，从而兼顾精度和鲁棒性。对于守恒变量 ϕ，x方向的单边斜率计算如下：

$$s = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad r = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \tag{43}$$

其中，ϕ_i 表示i单元中的单元平均值，x_i 是单元中心的坐标，而s、r 分别表示单元右侧和左侧的单边斜率。Van Leer 限制器定义如下：

$$L(s,r) = (\mathrm{sign}(s) + \mathrm{sign}(r)) \cdot \frac{sr}{|s| + |r|}, \tag{44}$$

其中，sign(·)表示符号函数：输入为正时返回 1，-1 输入为负时返回 -1，否则返回 0。该公式确保当s 和r 符号相反时，限制斜率为零，从而避免在强梯度或间断区域产生新的极值。于是，单元i内受限的线性重构为：

$$\phi(x) = \phi_i + L(s,r) \cdot (x - x_i), \tag{45}$$

该方法沿x轴对变量分布进行方向性近似。

然而，在二维情形下，要在面中心计算数值通量，还需要计算y方向的导数。为此，采用类似的重构方法，但重构模板不再由相邻单元中心构成，而是由待计算的面中心及其y方向上的相邻面中心构成。这些面心值本身由先前沿x方向进行的重构获得。

这一两阶段重构过程确保在每个面中心进行一致且准确的方向斜率计算，以用于通量计算。

为进一步增强在强间断情况下的稳健性，将间断反馈因子（DFF）作为乘法修正应用于限制斜率。DFF $\alpha \in [0,1]$ 根据单元界面两侧压力和马赫数的跃变计算得出，作为光滑度指标。当检测到强间断时，α 趋近于零，重构退化为一阶精度；在光滑区域中，$\alpha \to 1$，且不施加额外限制。因此，最终的限制斜率为

$$\tilde{L}(s,r) = \alpha_i^\star \cdot L(s,r). \tag{46}$$

这种组合限制策略使该格式在平滑区域保持二阶精度，同时在间断附近自动降至一阶精度，从而兼顾精度与鲁棒性。

D. 非结构网格上的空间重构

该方法同样适用于非结构四边形网格，可为复杂几何形状灵活生成网格。在非结构化网格上，采用格林–高斯方法计算宏观变量的空间梯度。该方法可提供一阶精度的梯度；与线性重构结合时，可在单元界面处实现二阶空间精度。对于在控制体内部及其边界上分段连续可微的守恒变量 ϕ，格林–高斯定理给出：

$$\int_{\Omega_i} \nabla\phi \, \mathrm{d}A = \oint_{\partial\Omega_i} \phi \, \mathbf{n}_p \mathrm{d}l, \tag{47}$$

其中，$\mathbf{n}_p$ 是控制体每个面的外法向单位向量。微分量 $\mathrm{d}A$表示单元面积微元，而 $\mathrm{d}l$ 表示边界长度微元。单元中心值是单元平均值的二阶精度近似，因此可将单元平均梯度估算为

$$\nabla\phi_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \oint_{\partial\Omega_i} \phi \, \mathbf{n}_p \, \mathrm{d}l + \mathcal{O}(\Delta^2), \tag{48}$$

其中，$|\Omega_i|$是二维空间中控制体 Ω_i 的面积。实际计算时，线积分采用中点近似求得：

$$\oint_{\partial\Omega_i} \phi \, \mathbf{n}_p \, \mathrm{d}l \approx \sum_{p=1}^{N_f} \tilde{\phi}_{\mathrm{mid},p} \, \mathbf{n}_p \, \Delta l_p + \mathcal{O}(\Delta^3), \tag{49}$$

其中N_f 是单元i的面数，Δl_p 是˜面p的长度，而$\phi_{\mathrm{mid},p}$ 是 ϕ 在面p中点处的值。

由此得到梯度估计：

$$\nabla\phi_i = \frac{1}{|\Omega_i|}\sum_{p=1}^{N_f}\tilde{\phi}_{\mathrm{mid},p}\,\mathbf{n}_p\,\Delta l_p + \mathscr{O}(\Delta). \tag{50}$$

关键步骤是计算面心值$\phi_{\mathrm{mid},\ p}$。假设单元 Ω_1 和 Ω_2 位于面f的两侧，其单元中心值分别为 ϕ_1 和 ϕ_2。在本研究中，面心值通过简单的算术平均近似为：

$$\tilde{\phi}_{\mathrm{mid},p} = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2), \tag{51}$$

这对应于这样一个假设：面中心位于两个相邻单元中心之间的中点处。对于轻度变形的非结构网格，通常可以满足这一条件。当与每个单元中适当重构的斜率结合时，该近似能够以直接且稳健的方式达到二阶精度。尽管在高度偏斜的网格或不规则网格上，它可能无法严格保持二阶精度，但由于其简单性以及在大多数实际应用中的可接受性能，仍被广泛用于工程计算。

为提高存在强间断时的稳健性，按照以下方式应用间断反馈因子（DFF）对计算得到的梯度进行进一步修正：

$$\widetilde{\nabla\phi_i} = \alpha_i\nabla\phi_i. \tag{52}$$

E. 间断反馈因子

为处理流场中可能存在的间断，Ji 等[60]提出了一种基于界面重构值、用于衡量界面间断强度的指标，称为间断反馈因子（DFF）。当在重构模板中检测到间断时，DFF 会使高阶多项式自动降阶为一阶精度，从而提高算法的稳健性。对于二维四边形网格，首先为每个目标单元 Ω_i 计算 DFF α_i，其形式为

$$\alpha_i = \prod_{n=1}^{4}\alpha_n, \tag{53}$$

其中，α_n 是单元 Ω_i 的第 n 个界面中心处的间断反馈因子。

为进一步改进间断检测，我们采用了一个额外步骤：将重构模板中以 Ω_i 为中心的所有网格单元上的 α_i 相乘，得到重构所用的最终间断反馈因子。这意味着，单元 Ω_i 处的整体间断反馈因子为

$$\alpha_i^{\star} = \prod_{j\in\mathscr{S}(i)}\alpha_j, \tag{54}$$

其中，$\mathscr{S}(i)$表示重构模板中所有网格单元的索引集合，该模板以单元 $\mathscr{S}$ 为中心。

然后，更新后的斜率进一步修正为

$$\widetilde{\nabla\mathbf{W}_i^{n+1}} = \alpha_i^{\star}\nabla\mathbf{W}_i^{n+1}. \tag{55}$$

界面中心处的间断反馈因子定义为

$$\alpha_n = \frac{1}{1+D_n^2}, \tag{56}$$

with

$$D = \frac{|p^l - p^r|}{p^l} + \frac{|p^l - p^r|}{p^r} + \left(\mathrm{Ma}_n^l - \mathrm{Ma}_n^r\right)^2 + \left(\mathrm{Ma}_t^l - \mathrm{Ma}_t^r\right)^2, \tag{57}$$

其中，p^l,p^r 分别表示界面 x_n 中心处的左右压力；Ma_n^l 和 Ma_t^l 分别表示基于法向速度和切向速度定义的左侧马赫数。它们可以取负值，以表示相对于界面方向的流动方向。Ma_n^r 和 Ma_t^r 是相应的右侧值。对于光滑流动，$a \to 1$，这意味着重构不施加额外限制；存在强间断时，$a \to 0$，重构则退化为一阶精度。

F. 时间积分与局部时间步进

空间离散采用式（27）所示的半离散有限体积形式。对于时间推进，采用显式单步格式：

$$\overline{\mathbf{W}}_i^{n+1} = \overline{\mathbf{W}}_i^{n} + \int_{t^n}^{t^{n+1}}\mathscr{L}(\mathbf{W}_i(t))\,dt, \tag{58}$$

其中，$\overline{\mathbf{W}}^{n}{}_{i}$ 表示时间步n的单元平均守恒变量，$\mathscr{L}(\mathbf{W}_i(t))$表示空间残差算子，其定义见式（27）的积分离散形式。该方法简单高效，与时间精确的气体动理学通量函数结合时，可达到二阶时间精度。

传统上采用全局时间步进方法，即根据整个计算域内最严格的稳定性条件确定统一的时间步长 Δt：

$$\Delta t = \min_i\left(\frac{\mathrm{CFL}\cdot\Delta x_i}{|\mathbf{u}_i| + c_i}\right), \tag{59}$$

其中，CFL 为控制稳定性的库朗-弗里德里希-刘数，Δx_i 表示单元 Ω_i的特征长度，$\mathbf{u}_i$ 表示局部流速，c_i 表示局部声速。对于结构化网格，Δx_i 取x和y方向上的最小网格间距，即：

$$\Delta x_i = \min(\Delta x, \Delta y), \tag{60}$$

而对于非结构化网格，它定义为

单元面积与最长边长度之比：

$$\Delta x_i = \frac{|\Omega_i|}{L_i^{\max}}. \tag{61}$$

尽管全局时间步进方法具有稳定性，但它可能过于受限，因为最小的网格单元决定了时间步长，从而减慢收敛速度。

为提高稳态模拟的收敛效率，采用局部时间步进（LTS）策略。在 LTS 中，每个单元使用自己的局部时间步长独立推进：

$$\Delta t_i = \frac{\mathrm{CFL}\cdot\Delta x_i}{|\mathbf{u}_i| + c_i}. \tag{62}$$

这种方法允许在稳定性约束较宽松的单元中采用更大的时间步长，从而在保持数值稳定性的同时加快收敛。

在气体动理学格式（GKS）框架中，通量函数通过在固定时间区间$[t^n, t^{n+1}]$内对随时间演化的气体分布函数进行积分，将空间与时间自然耦合起来。该区间由全局时间步长Δt确定，并在通量计算中统一使用，以确保单元界面之间的一致性。然而，由于在 LTS 下每个单元都使用自己的局部时间步长 Δt_i 推进，单元平均守恒变量的更新必须反映这种局部推进。因此，空间残差 $\mathscr{L}(\mathbf{W}_i)$ 的净贡献需按比值$\Delta t_i/\Delta t$进行缩放，得到以下更新公式：

$$\overline{\mathbf{W}}_i^{n+1} = \overline{\mathbf{W}}_i^{n} + \frac{\Delta t_i}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathscr{L}(\mathbf{W}_i(t))\,dt. \tag{63}$$

这种处理使每个单元都能够采用受稳定性约束的自身时间步长高效演化，同时保持由时间精确的气体动理学表述推导出的全局耦合通量结构。

G. 壁面边界条件

在近连续介质状态下，随着流动变得越来越稀薄，壁面附近的分子间碰撞不足以使气体分子与壁面条件达到平衡。这使经典的无滑移边界条件失效，并产生了滑移条件，即壁面附近的气体速度和温度不同于壁面的速度和温度。本文采用这些滑移边界条件。

Maxwell 首先推导出了滑移边界条件，详见文献[61]。对于等温壁面，可以忽略温度梯度，简化后的 Maxwell 滑移条件表示为：

$$U_s = U_0 - U_w = A\left(\frac{2-\sigma}{\sigma}\right)\lambda\left.\frac{\partial u_t}{\partial n}\right|_{n=0}, \tag{64}$$

其中U_s 为速度滑移，U_0 表示流体在壁面处的切向速度，而U_w 为壁面速度。对于静止壁面，$U_w = 0$。$A = \sqrt{2/\pi}$ 为比例常数，σ 为切向动量容纳系数，u_t 为表面切向方向上的速度，λ 为平均自由程，它根据典型气体流动特性计算得出，如下[62]

$$\lambda = \frac{2\mu}{\rho\bar{c}} = \frac{\mu}{\rho}\sqrt{\frac{\pi}{2RT}}, \tag{65}$$

其中，μ 为黏度，ρ 为质量密度，$\bar{c}$ 为分子平均速度。平动-转动温度跃变的边界条件同样可简化为如下形式[63]

$$T_{tr}^{j} = T_{tr} - T_{tr}^{w} = \frac{2-\alpha}{\alpha}\frac{2\gamma}{(\gamma+1)\,\mathrm{Pr}}\lambda\left.\frac{\partial T_{tr}}{\partial n}\right|_{n=0}, \tag{66}$$

其中，T_{tr}^{w}为壁面平动-转动温度，T_{tr}为气体在壁面处的平动-转动温度（其中 $T_{tr} - T_{wtr}$为温度跳跃），α为热适应系数，Pr 为普朗特数，γ为比热比。类似地，振动温度跳跃条件如下：

$$T_{v}^{j} = T_{v} - T_{v}^{w} = \frac{2-\alpha}{\alpha}\frac{2\gamma}{(\gamma+1)\,\mathrm{Pr}}Z_v\lambda\left.\frac{\partial T_{v}}{\partial n}\right|_{n=0}, \tag{67}$$

其中，T_v^w为壁面振动温度，T_v 为气体在壁面处的振动温度。在本研究中，假设壁面为完全漫反射壁面（$\sigma = 1$），同时具有热适应性（$\alpha = 1$）。

本研究采用虚单元来施加边界条件。虚单元中物理量的计算过程如下。

1）壁面处的流体性质通过速度滑移和温度跳跃条件确定。以速度滑移为例，滑移方程右侧的速度梯度可表示如下：

$$U_s = U_0 = A\left(\frac{2-\sigma}{\sigma}\right)\lambda\left.\frac{\partial u_x}{\partial n}\right|_{n=0} = A\left(\frac{2-\sigma}{\sigma}\right)\lambda\frac{U_1 - U_0}{\Delta x}. \tag{68}$$

其中，U_1 表示紧邻壁面的第一个流体单元中的切向速度，Δx 表示该单元到壁面的法向距离。根据此方程，可以求出U_0 （壁面处的流体速度）。类似地，也可以用相同的方法，利用温度跳跃条件求出壁面温度。

2) 确定壁面流体速度和温度后，假设壁面处的压力梯度为零，因此可根据以下对称关系计算幽灵单元中的物理量：

假设壁面两侧的压强相等。

$$\begin{aligned} U_{-1} &= -U_1, \\ V_{-1} &= 2V_0 - V_1, \\ P_{-1} &= P_1, \\ T_{tr}^{-1} &= 2T_{tr}^0 - T_{tr}^1, \\ T_v^{-1} &= 2T_v^0 - T_v^1. \end{aligned} \tag{69}$$

IV. 数值算例

下文将所提出的方法称为 TR-V 2T GKS。数值算例包括一维（1D）和二维（2D）测试案例，后文为简洁起见将使用缩写 1D 和 2D。

A. 一维激波结构

准确计算正激波的内部结构对许多高超声速应用至关重要。本节计算振动非平衡状态下的一维氮气流跨越平面激波的流动。参考数值结果由本文作者使用单温度GKS获得，另由 Cai等人[50] 采用平动-转动-振动多温度GKS方法获得。下文中，3T GKS 指 Cai等人[50], 提出的多温度GKS，而 1T GKS 指单温度气体动理学格式。自由来流气体为氮气，初始条件设定如下：

$$M_\infty = 5, \quad T_\infty = 226.149\,\mathrm{K}, \quad \rho_\infty = 1.7413 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg/m^3}. \tag{70}$$

由于初始温度远低于氮气的振动激发温度，因此可以假定初始振动温度等于平动-转动温度，即$T_v = T_{tr} = T_\infty$。本研究后续展示的测试案例也采用这一假设。准确设定激波后平衡状态，将其作为合适的初始条件和下游边界条件，对模拟结果有重要影响。由于考虑了振动激发，比热比 γ 不再是常数，经典Rankine–Hugoniot关系无法给出正确的激波后平衡状态。因此，必须采用广义Rankine–Hugoniot关系，如下所示。

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{[\gamma_1/(\gamma_1-1)] + (\gamma_1/2)M_1^2}{[\gamma_2/(\gamma_2-1)] + (\gamma_2/2)M_2^2}, \\ \frac{u_2}{u_1} &= \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}\frac{M_2}{M_1}\sqrt{\frac{[\gamma_1/(\gamma_1-1)] + (\gamma_1/2)}{[\gamma_2/(\gamma_1-1)] + (\gamma_2/2)}}, \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{1+\gamma_1 M_1^2}{1+\gamma_2 M_2^2}, \\ \frac{\left(1+\gamma_1 M_1^2\right)^2}{\left\{[\gamma_1/(\gamma_1-1)] + (\gamma_1/2)M_1^2\right\}\gamma_1 M_1^2} &= \frac{\left(1+\gamma_2 M_2^2\right)^2}{\left\{[\gamma_2/(\gamma_2-1)] + (\gamma_2/2)M_2^2\right\}\gamma_2 M_2^2}. \end{aligned} \tag{71}$$

推导过程与经典的 Rankine–Hugoniot 关系类似，许多教科书中均有介绍，例如参考文献[64,65]。上述方程为确定下游边界条件提供了合适的方法。为计算下游边界条件，首先，给定比热比 γ_2，使用M_1 和 γ_1 计算中间激波后马赫数M_2。其次，使用该马赫数M_2 和比热比 γ_2 确定激波后温度T_2。第三，使用式（3）和式（4）确定新的比热比 γ_2。重复上述三个步骤，直至在适当的容差范围内达到收敛。

为便于与参考结果直接比较，振动碰撞数Z_v 设为 100，与原始设置一致。动力黏度系数按照相同的公式定义：

$$\mu = 1.656 \times 10^5 \left(\frac{T}{273}\right)^{0.74}. \tag{72}$$

式（32）中的数值黏性系数C 设为 1，与参考方法一致。计算域总长度为 80 个平均自由程，并离散为 300 个等间距网格单元。

图1–2展示了采用 TR-V 2T GKS、1T GKS 和 3T GKS 模型得到的激波结构模拟结果。图1显示密度和平动-转动温度分布，图2则展示振动温度和比热比 γ。密度和温度分布曲线采用激波两端的数值进行归一化。例如，$\rho' = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$。x轴以平均自由程 λ 进行归一化。结果清楚地捕捉到了热非平衡效应及其相关弛豫过程。对于振动碰撞数 $Z_v = 100$，振动弛豫速度约比平动-转动弛豫慢100倍。这一点可从振动温度穿过激波时较缓慢的变化中明显看出。因此，激波后的平动-转动温度不会像单温模型中那样立即达到其下游值。相反，随着振动能持续增加，平动-转动温度会从较高的峰值逐渐下降，并

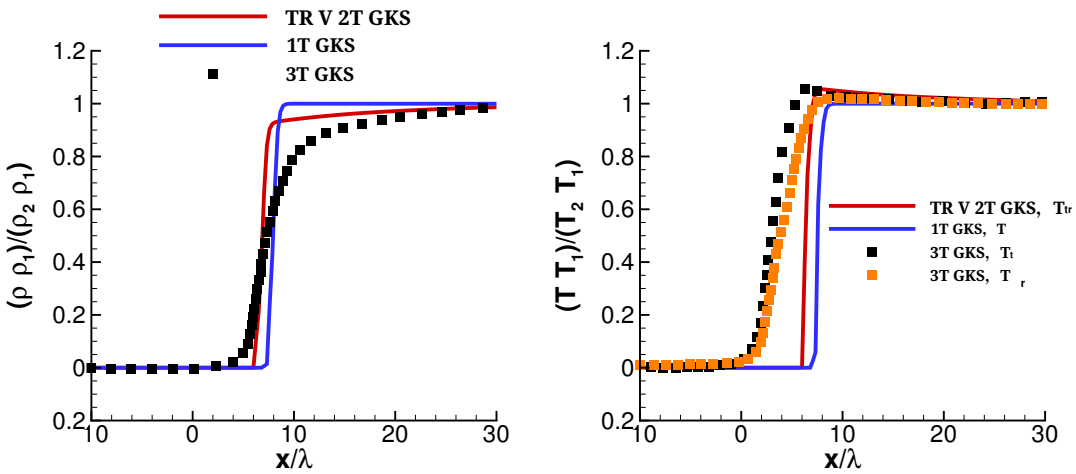


图1. 密度和平动-转动温度分布。左：密度分布。右：平动-转动温度分布。

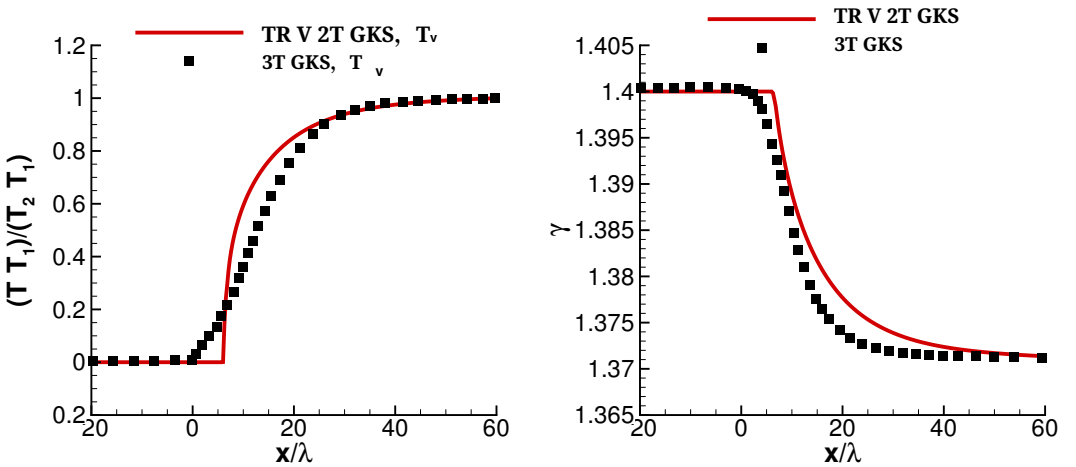


图2. 振动温度和比热比分布 γ。左：振动温度分布。右：比热比分布 γ。

在下游区域吸收部分平动-转动能。

可以观察到，当前方法与参考方法预测的激波厚度存在明显差异。具体而言，本研究预测的激波厚度约为3个平均自由程，而参考方法给出的数值约为10个平均自由程。这一差异主要源于计算弛豫时间所采用的方法不同。对于自由来流马赫数为5的情况，本研究预测的激波厚度（~3个平均自由程）仍处于以往直接模拟蒙特卡罗模拟、理论估算和现有实验数据（3~10 个平均自由程）所报告的典型范围内[55,66,67]。尽管目前尚无针对该特定情况的确定性实验测量结果，但当前结果和参考结果均处于物理上合理的范围内，表明观察到的差异与预期的物理趋势一致。

B. 二维楔形体上的高超声速流

高超声速飞行器通常分为钝头体飞行器和尖锐前缘飞行器。这两类飞行器周围的流动存在显著差异，并体现出各自独特的物理现象。本小节研究尖锐前缘飞行器周围的高超声速流。

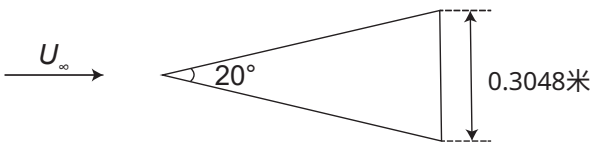


图3. 二维楔形体几何定义。

本文研究的二维楔形体半角为10度，基底高度为12英寸，如图3所示。Lofthouse[68]采用直接模拟蒙特卡罗（DSMC）方法和密歇根气动热力学纳维–斯托克斯（LeMANS）代码进行了参考数值模拟。LeMANS是一种采用双温度模型的有限体积计算流体力学求解器。自由来流气体为氮气，初始条件如下：

$$\begin{aligned} M_\infty = 10, \quad T_\infty = 200\,\mathrm{K}, \\ \rho_\infty = 9.872\times10^{-5}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad Re_\infty = 8000. \end{aligned} \tag{73}$$

壁面采用滑移边界条件，壁面温度设为$T_{\mathrm{wall}} = 500\mathrm{K}$。通过网格无关性研究确定最终网格分辨率。由于楔形体前缘附近存在较大的梯度，沿壁面方向的加密会显著影响表面特性预测的准确性。壁面法向间距对于准确捕捉表面特性也至关重要。为确保两个方向上的分辨率，逐步将前缘附近的网格节点数加倍，同时进行壁面法向加密。鉴于流场具有对称性，仅对计算域的一半进行模拟。模拟采用结构化网格和结构化求解器。

1. 网格无关性研究

经网格无关性验证的最终网格如图4所示。该网格在切向包含108个网格单元，在法向包含100个网格单元，第一层网格单元高度设为 1×10^{-4}，m，对应的单元雷诺数为$Re_{\mathrm{cell}} = 2.6455$。通过考察法向网格分辨率和壁面附近第一层网格单元高度，以及切向网格分辨率的影响，评估网格无关性。用于验证的网格汇总于表I，相应结果见图5和图6。可以看出，两个方向上进一步加密对壁面压力和热流均无显著影响，表明包含 108×100 个网格单元且第一层高度为 1×10^{-4}，m的网格已足够精细。

2. 流场特性

密度、平动-转动温度和振动温度分布如图7和图8所示，其中密度以自由来流密度归一化。两种模型的密度比分布相似，最大密度比出现在前缘激波后方紧邻处，达到3.80891。最值得关注的区域位于前缘附近，在此处，直接模拟蒙特卡罗预测的温度显著高于TR-V 2T GKS模型。具体而言，直接模拟蒙特卡罗估算的峰值温度约为1800 K，而TR-V 2T GKS预测的峰值较低，约为1400 K。由于平动-转动温度相对较低，振动激发仍然较弱。

GKS模型预测的振动温度高于直接模拟蒙特卡罗，其中GKS的峰值约为630 K，而直接模拟蒙特卡罗约为500 K。需要强调的是，振动温度的预测强烈依赖于振动碰撞数Z_v的选取。由于Z_v 的经验公式尚未经过实验验证，不同研究可能采用不同数值，从而导致预测的振动温度有所差异。尽管如此，这种振动温度差异对表面特性的影响极小。

3. 表面特性

高超声速飞行器的设计需要准确预测其飞行过程中的表面特性。这些量通常包括热流、压力和剪切应力，据此可以计算气动力和力矩。这些变量不仅决定飞行器的气动性能，还决定热防护系统（TPS）的选择和尺寸设计；热防护系统用于保护飞行器，使其免受高超声速飞行时所遭遇的极端温度影响。

以下结果中的表面特性以无量纲系数表示，

$$\begin{aligned} C_P &= \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}, \\ C_F &= \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}, \\ C_H &= \frac{q}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^3}. \end{aligned} \tag{74}$$

其中p 为压力， τ为剪切应力，q 为热流率，p_∞ 为来流压力， ρ_∞ 为自由来流密度，且U_∞ 为来流速度。各算例的表面特性均绘制为沿楔形表面距离S的函数，并以侧面的长度L 进行归一化。因此，$S/L = 1$ 对应于楔形肩部，即尾迹区的起始位置。

表面压力系数、摩擦系数和加热系数如图10所示。TR-V 2T GKS模型预测的压力分布在定性上与直接模拟蒙特卡罗和LeMANS一致，但其数值低约20%。为分析这一低估的原因，本文考察了梯度长度局部努森数（$\mathrm{Kn_{GLL}}$）[69,70]。$\mathrm{Kn_{GLL}}$ 定义为

$$\mathrm{Kn_{GLL}} = \frac{\lambda}{Q}\frac{dQ}{dl},$$

其中 λ 为分子平均自由程，Q 表示代表性宏观量，例如密度、压力或温度。与全局努森数不同，$\mathrm{Kn_{GLL}}$ 表征非平衡的局部强度，并为评估基于连续介质的模型是否有效提供判据。经验准则表明，当 $\mathrm{Kn_{GLL}}$ <时，采用无滑移条件的连续介质假设是有效的

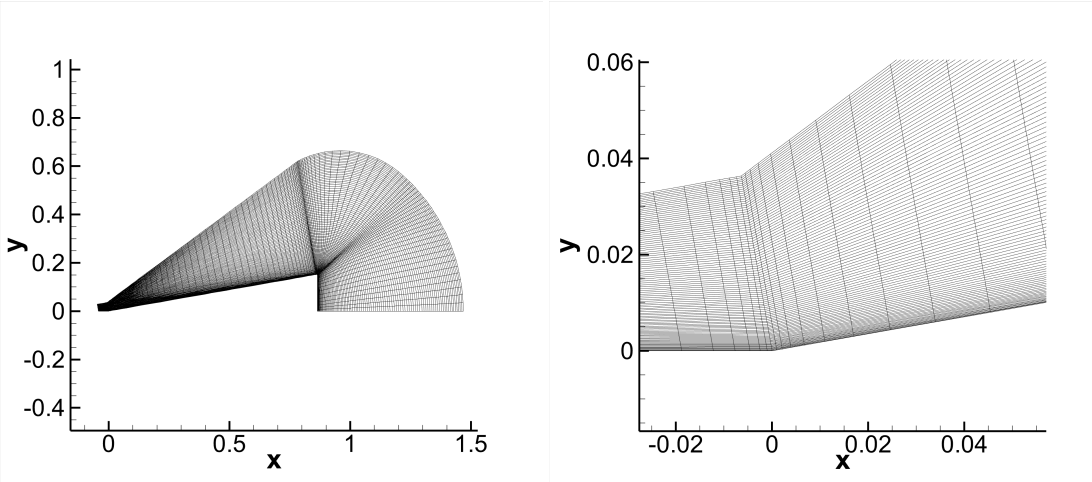


图4. 整个网格的全局视图（左）和前缘壁面附近的局部视图（右）。

表I. 楔形体算例网格无关性研究所用的网格配置。

切向单元	法向单元	第一层高度 [m]
部分*1*：切向网格加密		
78	100	1×10^{-4}
108	100	1×10^{-4}
138	100	1×10^{-4}
部分*2*：法向网格/第一层高度加密		
108	70	2×10^{-4}
108	100	1×10^{-4}
108	130	5×10^{-5}

0.01；当 $0.01 \leq \mathrm{Kn}_{\mathrm{GLL}} \leq 0.1$时，采用滑移条件的连续介质模型适用；而 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{GLL}} > 0.1$ 的区域则需要采用稀薄气体处理。图 11 展示了楔形体表面 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{GLL}}$ 的分布，其中取平动-转动温度作为代表量 Q。可以看出，前缘后方肩部区域的 $\mathrm{Kn}_{\mathrm{GLL}}$ 值超过 0.2，明显超出采用滑移边界条件的连续介质模型的适用范围。连续介质假设在此处局部失效，解释了表面压力被低估的原因。

TR-V 2T GKS 预测的剪切应力与直接模拟蒙特卡罗和 LeMANS 的结果均高度吻合。至于热传递率分布，从图7所示的温度等值线可以明显看出，直接模拟蒙特卡罗预测的前缘温度显著更高。因此，直接模拟蒙特卡罗预测的前缘热流也高得多。然而，TR-V 2T GKS 在该区域的预测结果与 LeMANS 高度吻合。

4. 振动碰撞数的敏感性分析 Z_v

振动碰撞数Z_v 在预测高温高超声速流动中的振动非平衡时起着重要作用。在本研究中，采用了 Liu等人[51]给出的 $(c_1, c2, \omega)$ 值，该值基于修正的 Millikan-White 公式，并考虑了能量在平动、转动和振动模式之间的分布。这确保了我们的 TR-V 2T GKS 所预测的振动弛豫在物理上与先前的直接模拟蒙特卡罗和理论结果一致。

为量化参数选择的影响，我们使用该楔形体流动算例开展了敏感性研究。测试了三组参数（$c_1, c2, \omega$），分别对应 Bird[55],Wang[56], 和本文所用参数。下图展示了所得的振动温度场，以及表面压力和热流系数。

结果表明，三组参数下的表面压力和热流几乎完全一致，而振动温度则存在明显差异，其峰值分别为 499 K、497 K 和 680 K。这说明，振动碰撞参数的合理变化对整体流动预测影响极小，主要影响振动温度分布。

C. 4000 K 下的二维圆柱流动（化学冻结）

除尖头体飞行器外，另一种典型的气动构型是钝头体飞行器。本小节讨论钝头体上的高超声速流。这里研究的二维圆柱直径为 12英寸，如图所示

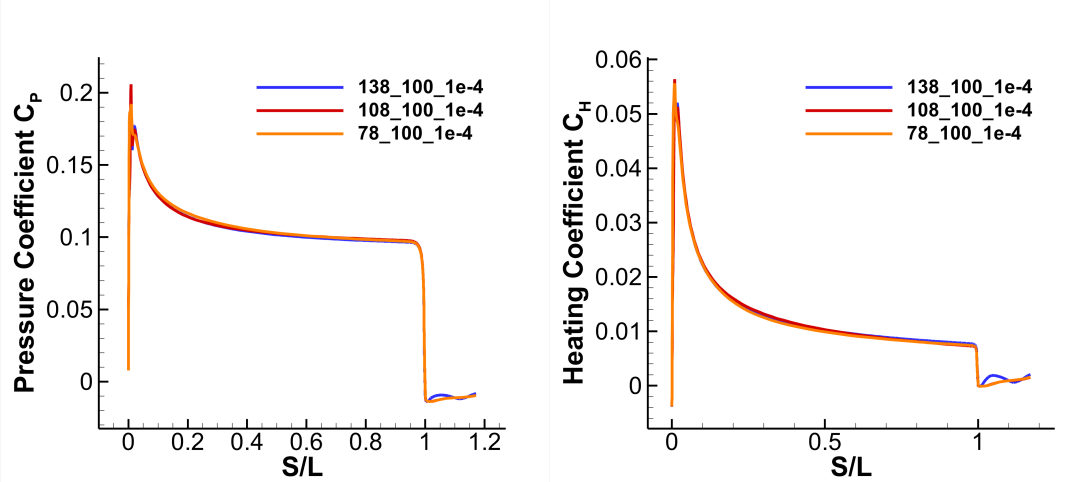


图5. 楔形体切向网格分辨率对表面压力（左）和热流（右）的影响。

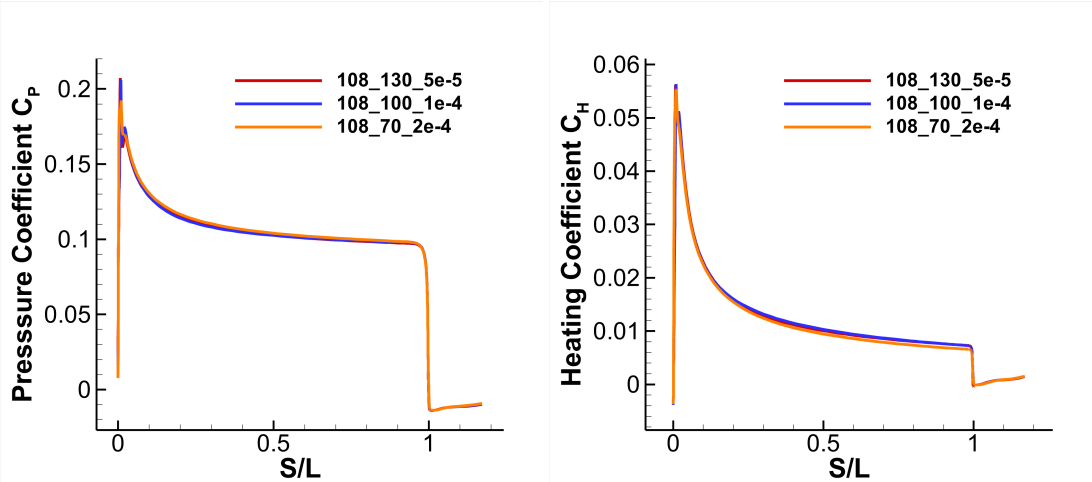


图6. 法向网格分辨率和第一层网格单元高度对楔形体表面压力（左）和热流（右）的影响。

图15。

参考数值模拟由 Lofthouse[68] 采用直接模拟蒙特卡罗方法完成。自由来流气体为氮气，初始条件如下：

$$M_\infty = 10, \quad T_\infty = 200\,\mathrm{K}, \\ \rho_\infty = 9.872 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad Re_\infty = 8000. \tag{75}$$

壁面采用滑移边界条件，壁面温度设为$T_{\mathrm{wall}} = 500\mathrm{K}$。由于高超声速流中信息单向传播，因此不考虑背风侧，仅计算迎风流场。此外，由于流场关于圆柱中心线轴对称，因此只模拟上半部分。该算例采用非结构求解器计算。

1. 网格无关性研究

与上一节类似，本文进行了网格无关性研究，确认壁面法向间距对表面特性的影响最为显著。此外，还对激波区域的网格进行了加密，以更好地捕捉激波结构。用于验证的网格汇总于表II中，相应结果见图16和图17。

最终的网格无关解如图18所示，法向包含150个网格单元，切向包含100个网格单元，第一层网格单元高度设为5×10^{-5}，对应的单元雷诺数为Re_{cell} =1.1359。

可以看出，对于包含 150×100 个网格单元且第一层高度为 5×10^{-5}，m的网格，在两个方向上进一步加密对表面压力没有明显影响，并且表面热流的变化小于1%，这表明该网格已得到充分解析，能够准确预测表面物理量。

与上一节类似，我们进行了网格无关性研究，确认壁面法向间距对表面特性的影响最为显著。我们还对激波区域进行了网格加密，以更好地捕捉激波结构。图 18 展示了最终的网格无关解，其中法向有 150 个网格单元，切向有 100 个网格单元，第一层网格单元

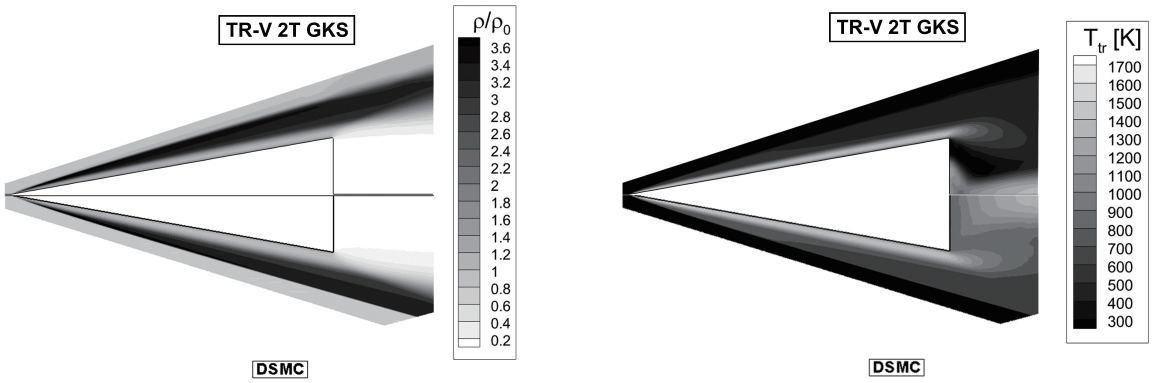


图7. 密度　　比场（左）和平动-转动温度场（右）。上：TR-V 2T GKS。下：直接模拟蒙特卡罗　　.

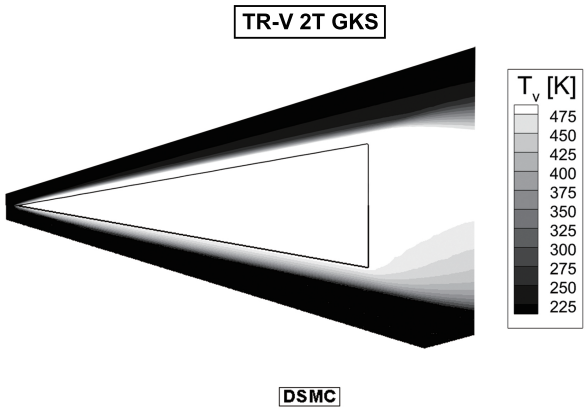


图8. 振动温度场。上：TR-V 2T GKS。下：直接模拟蒙特卡罗。

高度设为 5×10^{-5}，对应的单元雷诺数 $Re_{\text{cell}}=1.1359$。

2. 流场特性

图 19 展示了密度、平动-转动温度和振动温度场，其中密度以自由来流密度进行归一化。显然，在圆柱头部附近的激波后区域，峰值温度达到约 4000 K。在这一温度下，通常认为氮气会发生明显解离；因此，本算例适合作为基准，用于评估本文采用的化学冻结流动假设是否适用。预测得到的激波脱体距离与直接模拟蒙特卡罗结果高度吻合；密度和平动-转动温度分布也十分接近，而振动温度仅有轻微偏差。这表明，本文方法能够在此类热条件下准确预测主要流动特征。

3. 驻点线特性

在圆柱绕流中，驻点线定义为经过驻点的流线；由于来流直接冲击壁面，流速在该点降为零。这条线代表来流的对称轴，对于确定压力、温度和密度分布至关重要。本节将驻点线温度与 Lofthouse[68] 使用直接模拟蒙特卡罗方法得到的结果进行比较。

图20给出了TR-V 2T GKS与直接模拟蒙特卡罗方法之间驻点线温度的比较。与上述观察一致，平动-转动温度表现出良好的一致性，而振动温度则略有高估。

4. 表面特性

与前一个算例类似，我们计算了沿圆柱表面的表面特性。图 21 对比了沿圆柱的表面压力、剪切应力和热流的数值结果与实验数据，

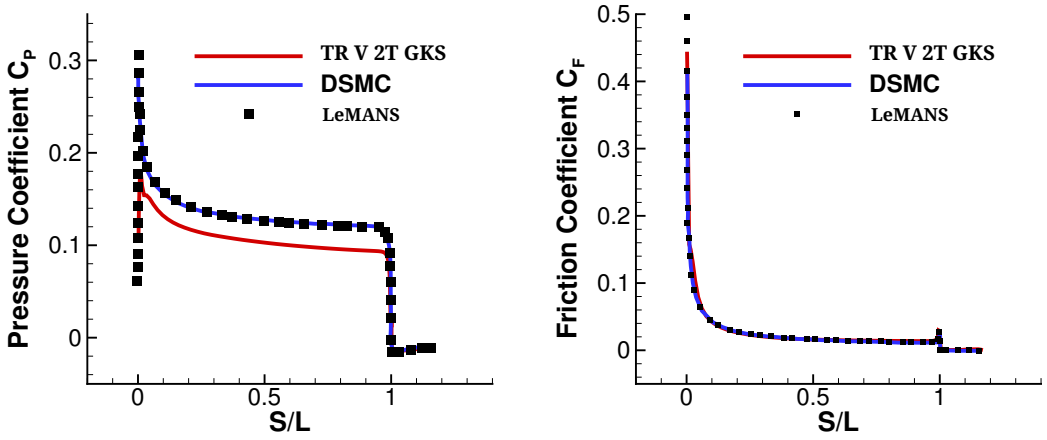


图9. 表面压力系数（左）、摩擦系数（右）。

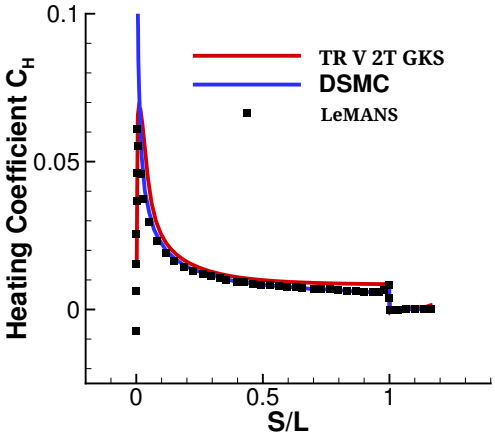


图10. 表面加热系数。

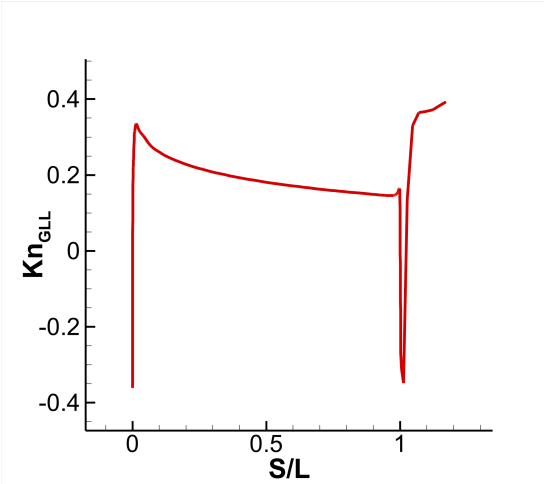


图11. Kn_{GLL} 在表面上的分布。

采用的无量纲参数与上一节公式（74）中定义的参数相同。x轴表示从驻点开始测量的转角，如图所示如图15所示。

预测的表面压力与实验数据吻合良好。可以看出，压力系数与测量结果高度一致，摩擦系数仅存在微小偏差，而加热系数在圆柱头部附近低估了约10%，此处热传递达到峰值。

总体而言，即使峰值温度约为4000 K，化学冻结流假设仍能够准确预测流场并给出可靠的表面特性，从而证实其在此类热条件下仍然适用。

D. 9500 K下的二维圆柱流动（限制工况）

为进一步评估本方法的适用范围，本节考虑一个温度更高的圆柱工况。实验在德国航空航天中心（DLR）的哥廷根高焓激波风洞（HEG）中进行，自由来流马赫数为

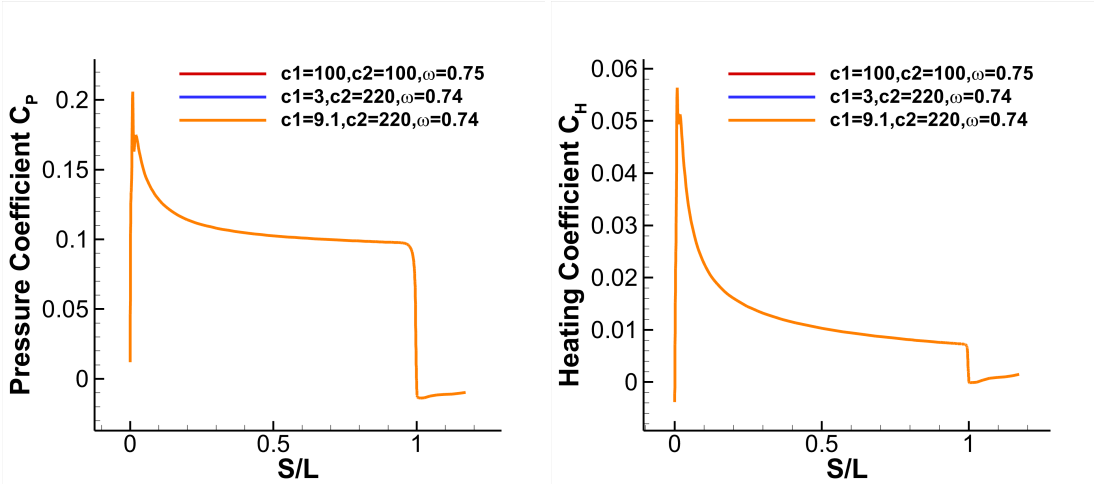


图 12. 对应三组参数的表面压力（左）和加热系数（右）曲线。

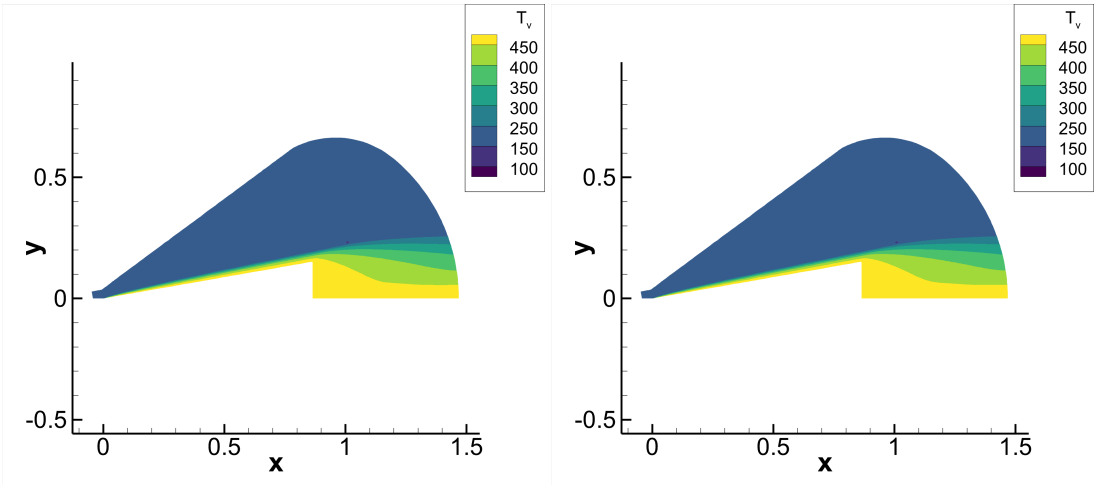


图 13. 振动温度等值线，对应于 Bird[55]（左侧）和 Wang[56]（右）参数 ers

$M_\infty = 8.78$。该 HEG 测试条件（DLR，HEG设施，$M = 8.78$）对应于参考文献[71]报告的数据集。研究测量了密度场以及表面压力和热流。Li 等人采用 AUSMPW+ 格式对该工况进行了数值模拟，并结合了双温度模型和化学反应模型[72]。AUSMPW+ 格式是 AUSM 类格式的一种改进版本。

如图 15 所示，圆柱的直径为 0.09m。自由来流气体为空气，初始条件如下：

$$M_\infty = 8.78, \quad T_\infty = 694\,\mathrm{K}, \\ \rho_\infty = 3.26 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3}, \quad Re_\infty = 42288. \tag{76}$$

壁面采用滑移边界条件。由于实验持续时间约为 2.5ms，因此假设壁面温度为 300K 的环境温度。空气的振动特征温度根据氮和氧的体积分数，对二者的振动特征温度进行加权计算。

本算例采用结构化网格和结构化求解器进行计算。与上一节类似，我们进行了网格无关性研究，结果确认壁面法向间距对表面特性的影响最为显著。此外，还对激波区域进行了网格加密，以便更好地捕捉激波结构。最终的网格无关解如图 22 所示，法向包含 150 个网格单元，切向包含 100 个网格单元，第一层网格单元高度设为 1.5×10^{-6}，对应的单元雷诺数为 $Re_{\mathrm{cell}} = 0.7048$。受篇幅限制，本文不展示该算例网格无关性验证的详细结果。

1. 流场特性

图 23 展示了计算得到的平动-转动温度场。从图 23 可以看出，圆柱前缘激波后的温度达到 9500 K，此时预计空气中的氧分子和氮分子均已高度解离，且已发生明显电离。图 24 对比了计算得到的密度场与实验结果，可以看出，采用当前方法预测的

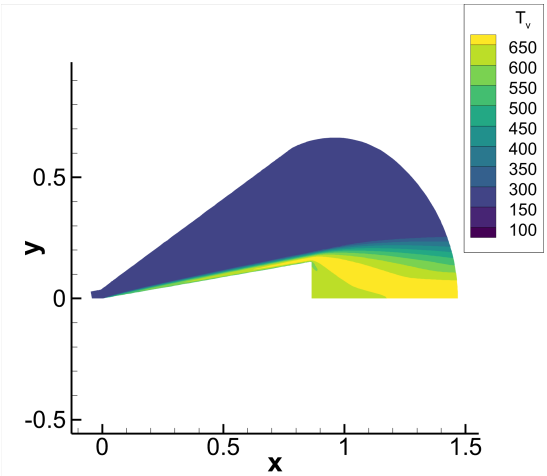


图 14. 本研究所用参数对应的振动温度等值线。

TA表 II. 中温圆柱算例网格无关性研究所用的网格配置

切向网格单元	法向网格单元	第一层高度 [m]
第 *1* 部分：切向网格加密		
150	70	5×10^{-5}
150	100	5×10^{-5}
150	130	5×10^{-5}
第 *2* 部分：法向网格/第一层高度加密		
120	100	1×10^{-4}
150	100	5×10^{-5}
180	100	2.5×10^{-5}

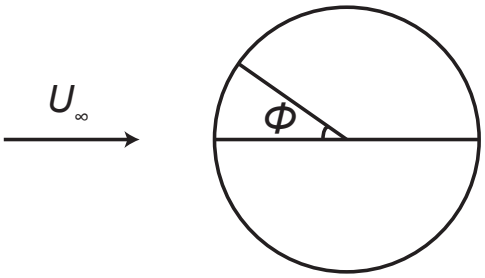


图 15. 二维圆柱几何定义。

激波脱体距离存在明显偏差。

2. 驻点线性质

本节将驻点线性质与 Li等人[72], 采用量热完全气体模型和双温度模型获得的结果进行比较。

图25展示了TR-V2T GKS与AUSMPW+之间驻点线压力和密度的比较

格式分别采用量热完全气体模型和双温度模型。图26比较了相应的温度剖面。y轴上的物理量按如下方式进行无量纲化：

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \frac{p^*}{\rho_\infty V_\infty^2},\\ \bar{\rho} &= \frac{\rho^*}{\rho_\infty},\\ \bar{T} &= \frac{T^*}{T_\infty},\end{aligned} \tag{77}$$

其中，上标“$*$”表示有量纲量，“∞”表示自由来流参考值，上横线“$\bar{\cdot}$”表示无量纲量。x轴以圆柱半径进行归一化，其中$x = 0$ 对应于驻点。在密度图和温度图中，理论值指根据量热完全气体正激波关系式预测的值。

如图 25 所示，与量热完全气体模型（该模型对脱体距离的预测偏差更大）相比，TR-V 2T GKS 通过考虑振动能激发，给出了更准确的预测。此外，TR-V 2T GKS 预测的激波脱体距离与耦合了化学反应的双温 AUSMPW+ 格式所得结果非常接近。与不考虑振动效应的理论解相比，这两种数值模型都预测了更高的激波后密度；这使激波脱体距离减小。

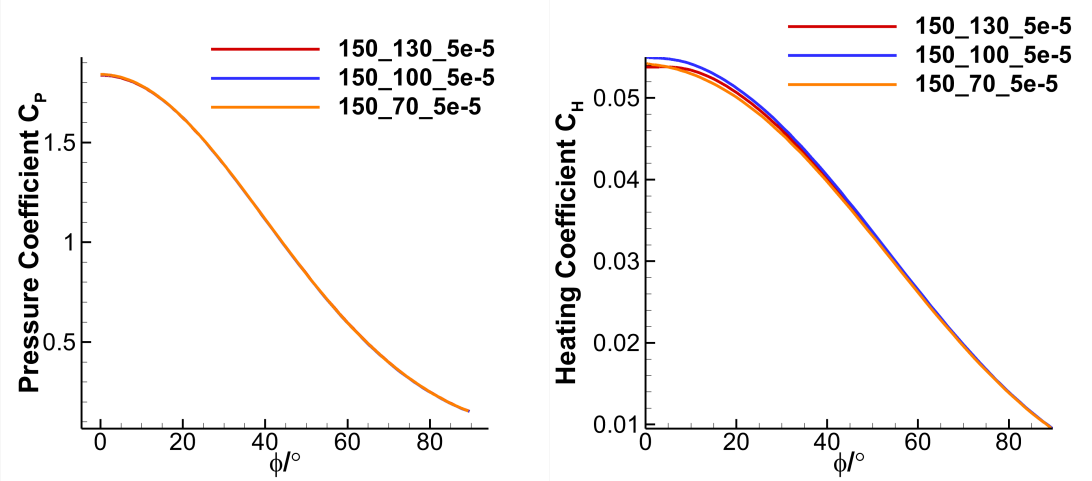


图 16. 切向网格分辨率对 4000 K 圆柱体表面压力（左）和热流（右）的影响。

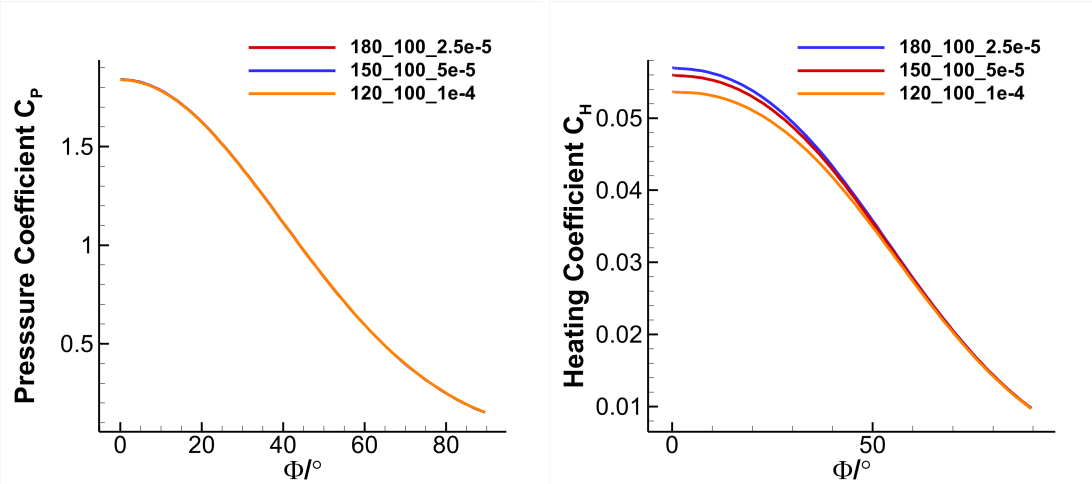


图 17. 法向网格分辨率和第一层网格单元高度对 4000 K 圆柱体表面压力（左）和热流（右）的影响。

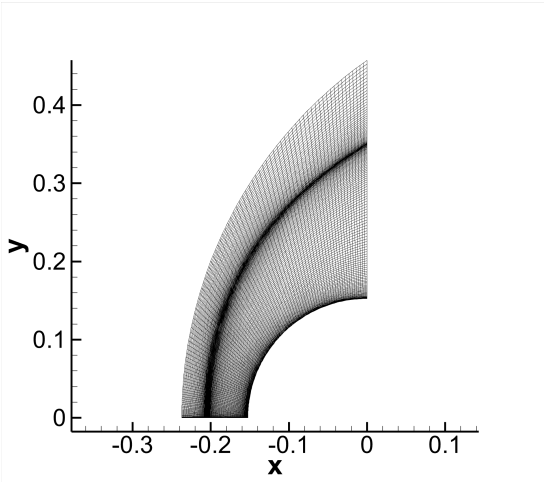


图 18. 4000 K 圆柱体计算网格的全局视图。

，因此激波脱体距离减小。

然而，也可以观察到激波后密度和采用含化学反应的双温 AUSMPW+格式得到的压力，从激波到壁面的变化更为平缓。这种现象是由强烈的化学非平衡效应导致的：反应达到平衡所需的弛豫时间较长，因此激波后的流动特性演变较慢。

在温度分布图（图 26）中，TR-V 2T GKS 和 AUSMPW+ 格式均预测出较低的激波后温度，这是由于振动能吸收所致。在这一温度范围内，振动弛豫发生的时间尺度很短。此外，AUSMPW+格式计算出的温度在激波后继续下降，这反映了氮气和氧的解离；解离吸收热能，导致温度进一步降低。

总之，与采用量热完全气体模型的 AUSMPW+ 格式相比，TR-V 2T GKS 显著改善了对激波厚度和激波后特性的预测。与采用双温度化学反应模型的 AUS MPW+ 格式相比，其预测的激波脱体距离几乎相同，但激波后温度和密度分布仍存在一些差异

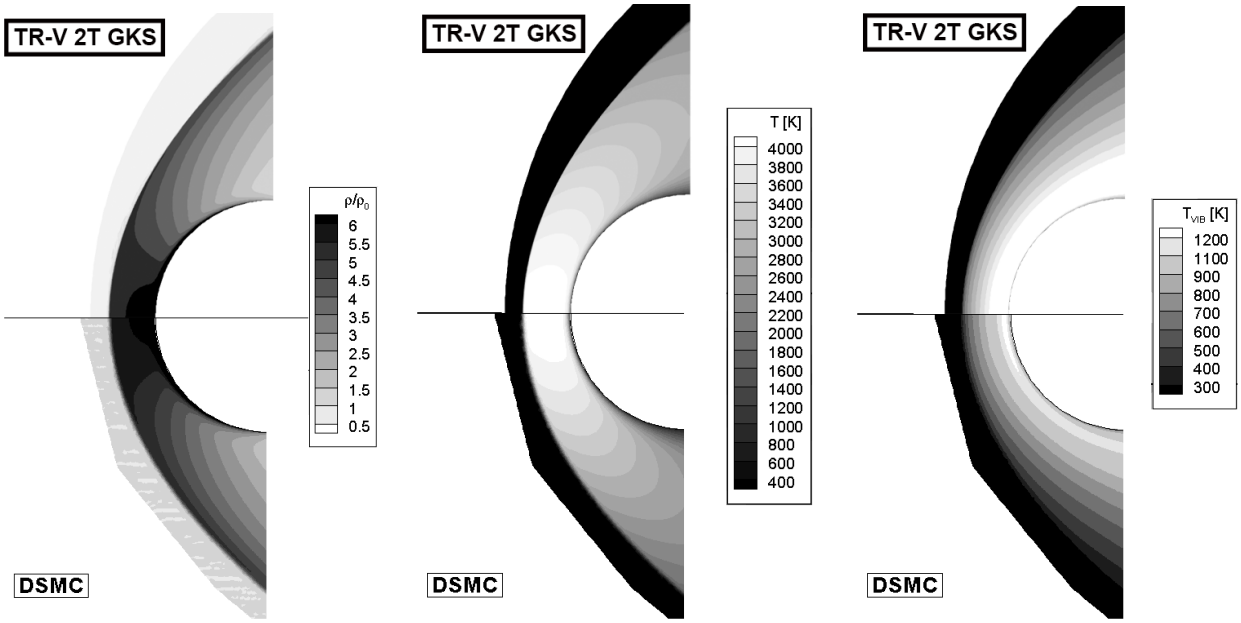


图19. 密度比场（左）、平动-转动温度场（中）和振动温度场（右）。上：TR-V 2T GKS。下：直接模拟蒙特卡罗。

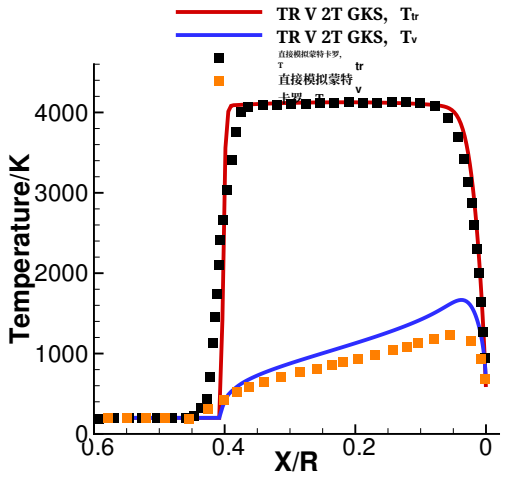


图20. TR-V 2T GKS与直接模拟蒙特卡罗方法的驻点线温度对比。

。

3. 表面特性

与前一种情况类似，我们计算了沿圆柱表面的压力和热流。图27比较了圆柱表面压力的数值结果与实验数据。x轴表示从驻点开始测量的转角，如图15所示。

预测的表面压力与实验数据吻合良好；然而，表面热流预测存在显著偏差，圆柱头部的峰值比实际值低约2.5倍。这一结果表明，在9500 K的峰值温度下，忽略化学反应会导致表面热流预测不可靠。

E. 2D Edney IV型激波/激波相互作用

Edney提出了一种用于激波-激波相互作用的简化典型模型，其中平面斜激波撞击钝头圆柱体前方形成的脱体弓形激波[73]。根据斜激波与弓形激波的相对位置，可识别出六种具有代表性的激波相互作用模式。其中，IV型相互作用尤为引人关注，因为相互作用区域内会形成直接冲击表面的超音速射流，从而产生极高的热载荷和机械载荷。

本研究聚焦于对此类特定相互作用进行数值模拟。实验由法国国家航空航天研究局（ONERA）[74,75]开展。实验在ONERA R5CH风洞中进行。此外，还将Liu 等人[51] 采用平动-转动（T-R）和振动（T-R-V）多温度GKS得到的数值模拟结果纳入比较。下文中，T-R 2T GKS指平动-转动多温度GKS方法。自由来流空气流动特性为

$$M_\infty = 9.95, \quad T_\infty = 52.5\,\mathrm{K}, \quad p_\infty = 5.9\,\mathrm{Pa}, \quad Re_\infty = 2773.12. \tag{78}$$

模型构型示意图如图 28 所示。采用等腰三角楔作为激波发生器，以产生一道与

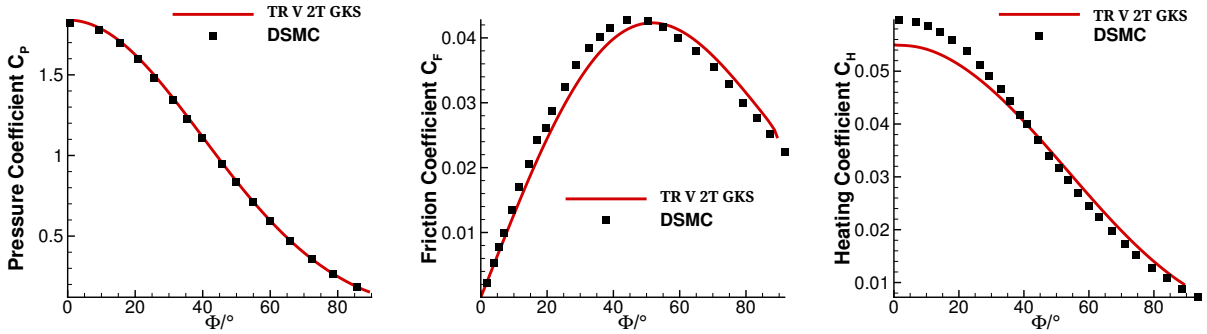


FIG. 21. 表面压力系数（左）、摩擦系数（中）和加热系数（右）。

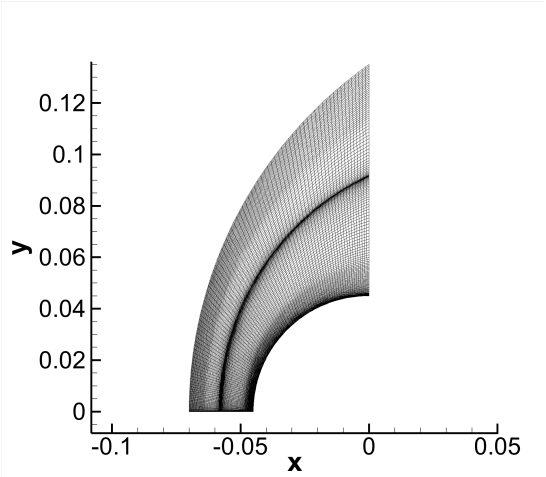


FIG. 22. 9500K圆柱计算网格的全局视图

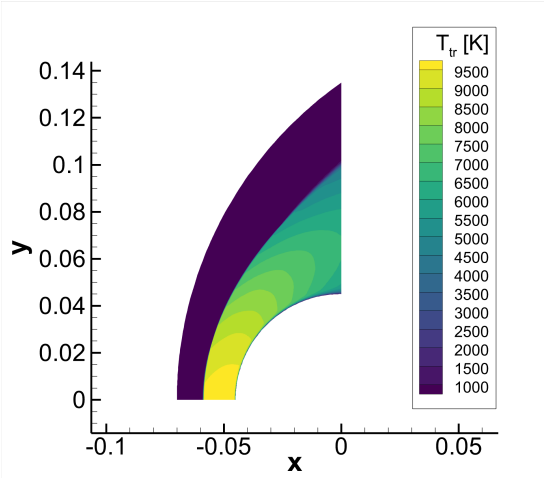


图 23. 计算得到的平动-转动温度场。

圆柱体前方形成的弓形激波相互作用的斜激波。试验设施的展向宽度足够大，因此该情况可视为二维问题。

本算例采用四边形非结构网格及相应的求解器。进行了网格无关性研究，最终的网格无关解如图所示

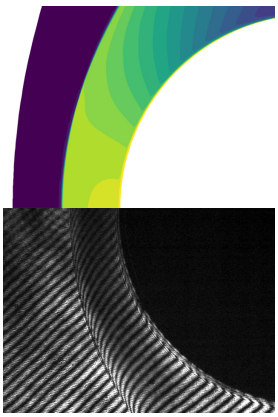


图24. 密度场对比。上：TR-V 2T GKS。下：HEG 高焓风洞实验。

29 所示。圆柱段在法向上包含 200 个单元，在切向上包含 300 个单元，整个流场共包含 116,176 个网格单元。第一层单元高度设为 5×10^{-6}m，对应的单元雷诺数为 $Re_{\text{cell}}=1.7332$。由于篇幅所限，本文不再给出该算例详细的网格无关性验证结果。

1. 流场特性

图30展示了 Edney IV型激波/激波相互作用的特征流动结构。入射激波与弓形激波近乎垂直的部分相交，产生局部超声速射流流动。射流的上下边界形成强剪切层，其中产生交替的压缩波和膨胀波。该超声速射流在壁面附近以一道附着激波终止，其下游的圆柱表面出现一个小型滞止区。在该区域内，压力、温度和热流均达到极高值。因此，要准确预测壁面压力和热流峰值的位置与大小，关键在于精确分辨超声速射流结构。

为进一步了解射流内部的波系，提取了两条

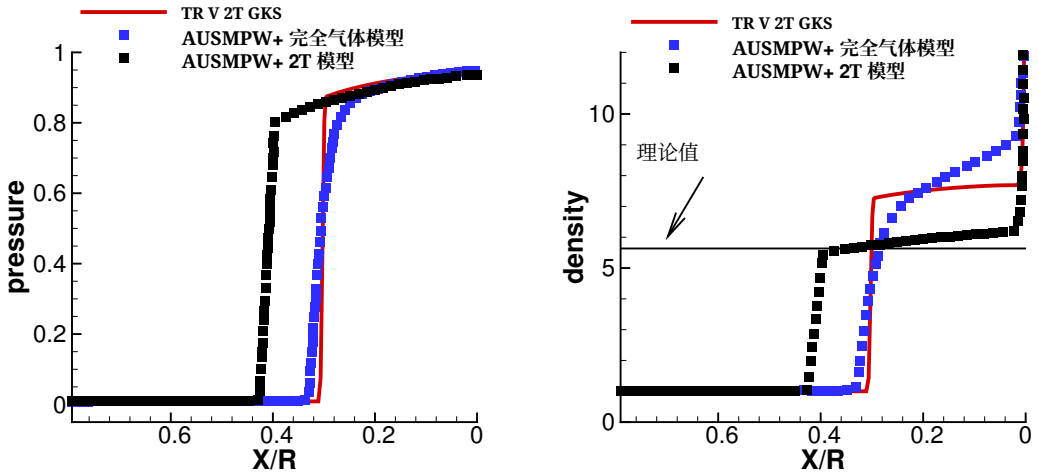


图 25. TR-V 2T GKS与AUSMPW+ 格式在驻点线特性方面的比较（采用量热完全气体模型和双温度模型）。左：压力；右：密度。

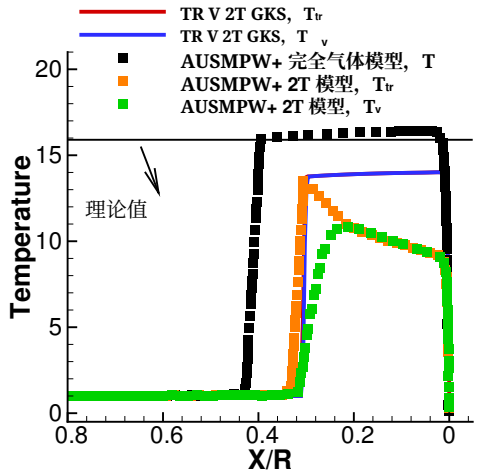


图 26. TR-V 2T GKS与AUSMPW+ 格式在驻点线温度方面的比较（采用量热完全气体模型和双温度模型）。

流线并叠加绘制于图30中。这些流线上的压力分布如图31所示。对于上部流线（图31a），首次压力升高对应于射流通道内的第二道透射激波。随后，膨胀波导致压力下降，最后，圆柱壁面附近的附着激波使压力再次升高。下部流线上的压力变化顺序类似，如图31b所示。

图32展示了流场的详细信息。图32c和图32d清晰地呈现了热力学非平衡效应。图33展示了间断反馈因子（DFF）的等值线分布。从图中可以看出，DFF能够清晰捕捉激波位置，并有效地将激波区域中的重构阶数降低至一阶。该可视化结果直观地展示了DFF在不同流动区域中的作用方式。

2. 水平线上的流动特性

图34展示了沿$y=-2$mm处水平线的流场性质分布，包括温度和密度。图中对比了TR-V 2T GKS、3T GKS和实验数据的结果。密度以自由来流密度进行无量纲化。该线对应于位于圆柱中心线下方2mm处的水平截面。

结果表明，在沿$y=-2$mm的密度变化方面，TR-V 2T GKS模型与实验数据及3T GKS结果均吻合良好。对于同一条线上的转动温度，与3T GKS相比，TR-V 2T GKS对激波位置的预测准确度略低。不过，它对激波后温度的估计较为合理。

3. 表面特性

图35展示了三种模型得到的沿圆柱表面的壁面压力和热流分布。x轴表示沿圆柱表面从$y=0$顺时针测量的旋转角。三种方法包括本文提出的 TR-V 2T GKS、3T GKS，以及 Liu等人[51], 提出的 T-R 2T GKS，其中 T-R 2T GKS 使用两个独立的温度表示平动和转动能量模式，而忽略振动能。从壁面压力分布来看，TR-V 2T GKS 预测的压力峰值更高；就峰值位置而言，其偏差小于 T-R 2T GKS。对于热流分布，TR-V 2T GKS 能够较为准确地捕捉峰值位置和整体趋势，但其预测的峰值略低于实验数据，因此整体表现略逊于 3T GKS。

这一差异更合理的解释不在于物理建模本身，而在于 Edney IV 型相互作用的数值敏感性。该案例涉及强烈的激波/激波相互作用，并且对数值耗散和边界条件极其敏感。

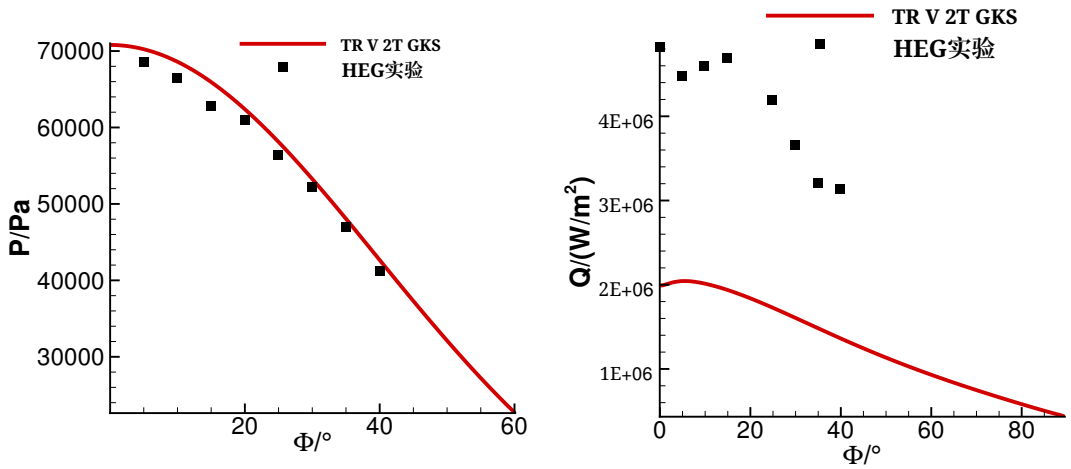


图27. TR-V 2T GKS与HEG实验之间的表面压力对比。

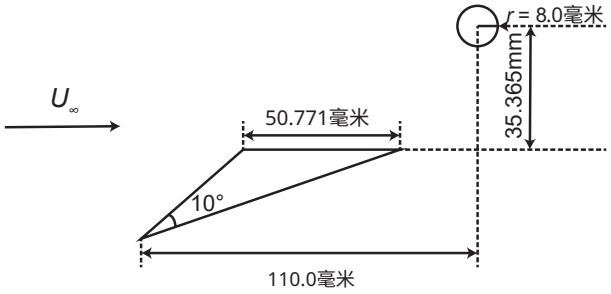


图28. ONERA试验设施中构型的示意图。

即使是极其微小的差异，也可能导致激波位置发生偏移并改变激波层厚度，最终造成表面压力和热流的明显差异。由于参考文献未提供其数值实现的充分细节（例如重构格式、限制器和边界条件），因此无法进行严格的一对一比较。

F. 计算成本比较

为了定量评估所提出的 TR-V 2T GKS 相较于传统单温度（1T）和三温度（3T）模型的计算效率，我们在同一台工作站上，采用 10,800 个网格单元运行 3,000 个时间步长，对第 IVB 节所述的楔形体流动算例进行了模拟。所有计算均在相同条件下使用 12 个 CPU核心并行执行。三种模型所需的实际运行总时间汇总于表 III。

如表III所示，所提出的平动-转动-振动 2T GKS 所需计算时间仅约为 3T GKS 的 64%，同时其热非平衡建模精度高于 1T 方法。这清楚地表明，

表 III. 楔形体流动算例的实际运行时间比较（10,800 个网格单元，3,000 个时间步长，12 核并行）。

模型	1T GKS	TR–V 2T GKS	3T GKS
实际运行时间（秒）	19	35	55

TR–V 双温度模型在计算成本与物理保真度之间实现了良好的平衡。

V. 结论

采用平动-转动-振动双温度 GKS，对一维激波结构、二维高超声速楔形体和圆柱绕流，以及 Edney IV 型激波/激波相互作用进行了数值研究。对于一维激波结构工况，预测的激波厚度（~3个平均自由程）处于以往 DSMC 模拟、理论估算和实验测量所报告的典型范围（3~10 个平均自由程）内。在 4000 K（化学冻结）条件下的楔形体和二维圆柱绕流工况中，与 DSMC 结果的比较表明，该方法能够准确预测激波位置，表面热流偏差控制在 DSMC 结果的 10% 以内。对于 9500 K 条件下的二维圆柱绕流工况（限制工况），尽管表面压力预测仍然准确，但激波脱体距离和表面热流存在明显偏差。对于 Edney IV 型激波/激波相互作用工况，表面热流误差在 20% 以内，表明该格式能够合理捕捉复杂的热非平衡效应。

尽管取得了这些令人鼓舞的结果，本研究仍存在若干局限。根据两个圆柱测试算例，该方法在约 4000 K 以下的流动条件下具有足够的精度，但在温度更高时偏差会增大，并且在约 9500 K 时不再适用。研究未考虑化学反应和解离，这进一步限制了该方法在极高焓流动或反应流动中的适用性。此外，研究仅考察了二维算例，三维构型和湍流超

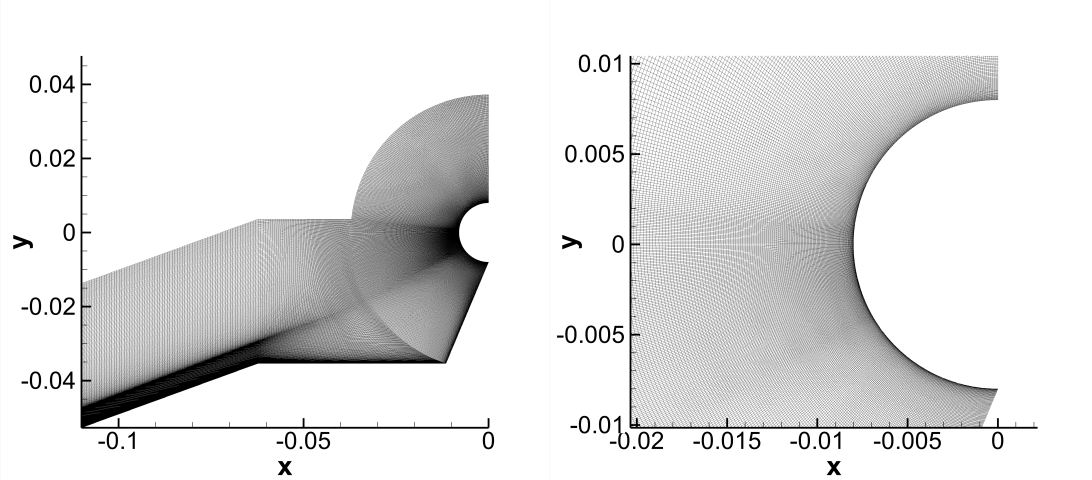


图29. 网格示意图：整个网格的全局视图（左）和圆柱附近的局部视图（右）。

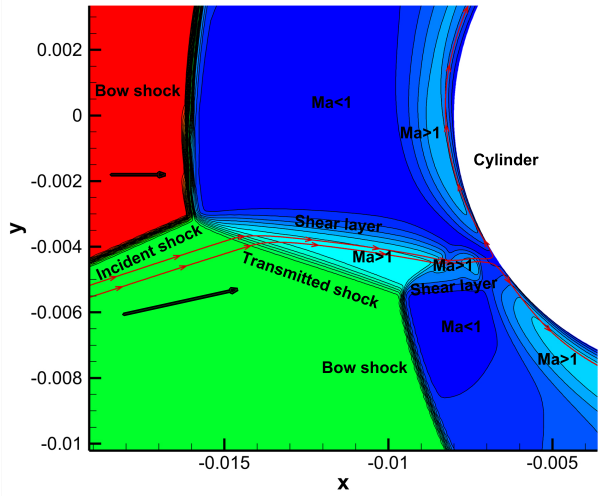


图30. 流场和流线示意图。

声速流动仍有待未来评估。

因此，未来的工作将着重于将当前框架扩展至三维模拟，纳入化学反应模型以捕捉热化学非平衡效应的耦合作用，并测试其他构型，例如用于激波/激波和激波与边界层相互作用问题的双锥和双椭球流动。此外，还将进一步优化数值实现，以提高计算效率。

致谢

本研究得到中国国家自然科学基金（项目编号：12302378和92371201）的资助，并得到国家计算物理重点实验室开放基金和陕西省自然科学基础研究计划（项目编号：2025SYS-SYSZD-070）的资助。

数据可用性声明

支持本研究结论的数据可在本文及其补充材料中获取。

附录 A：麦克斯韦分布函数的矩

单元界面处的二阶含时气体分布函数为

$$
\begin{aligned}
f\left(x_{i+1/2},y_j,t,u,v,\xi_r,\xi_v\right) &= \left(1-e^{-t/\tau}\right)g^c \\
&+\left(\left(t+\tau\right)e^{-t/\tau}-\tau\right)a^c(u+v)g^c+\left(t-\tau+\tau e^{-t/\tau}\right)A^c g^c \\
&+e^{-t/\tau}g^l\left[1-(\tau+t)\,a^l(u+v)-\tau A^l\right]\mathbb{H}(u_1) \\
&+e^{-t/\tau}g^r\left[1-(\tau+t)\,a^r(u+v)-\tau A^r\right]\left(1-\mathbb{H}(u_1)\right),
\end{aligned}
\tag{A79}
$$

在一个时间步长 Δt内对式 (A79) 积分，可得到单元界面$(x_{i+1/2},y_j)$处的通量

$$
\begin{pmatrix} F_\rho \\ F_{\rho U} \\ F_{\rho V} \\ F_{\rho E} \\ F_{\rho E_v} \end{pmatrix} = \int_0^{\Delta t}\int u\psi_\alpha f \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi_l\mathrm{d}\xi_r\mathrm{d}\xi_v\mathrm{d}t. \tag{A80}
$$

根据式 (A80)，我们需要对麦克斯韦分布函数g^c,g^l 和g^r的不同矩进行复杂组合求值。为进行求值，首先给出矩求值的一般公式。

对于二维平动-转动振动双温中间平衡麦克斯韦分布

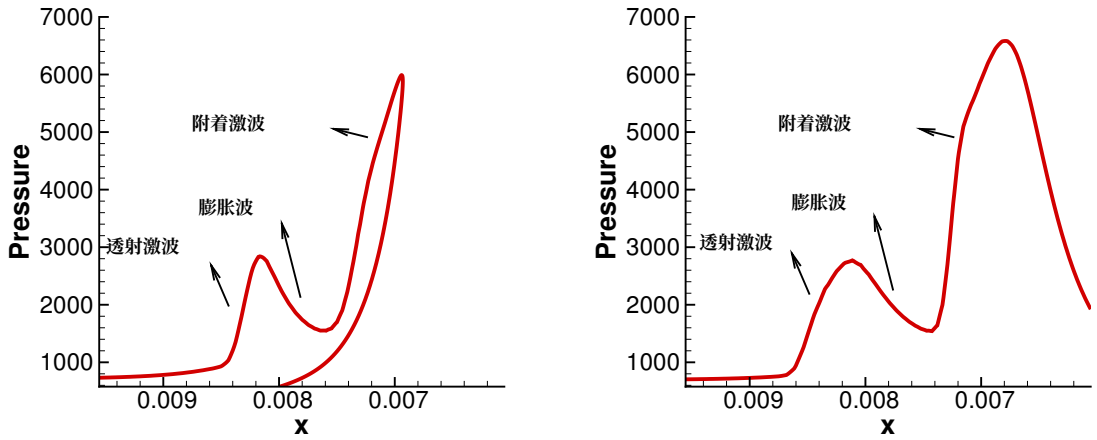


图31. 沿上部流线（a）和下部流线（b）的压力变化。

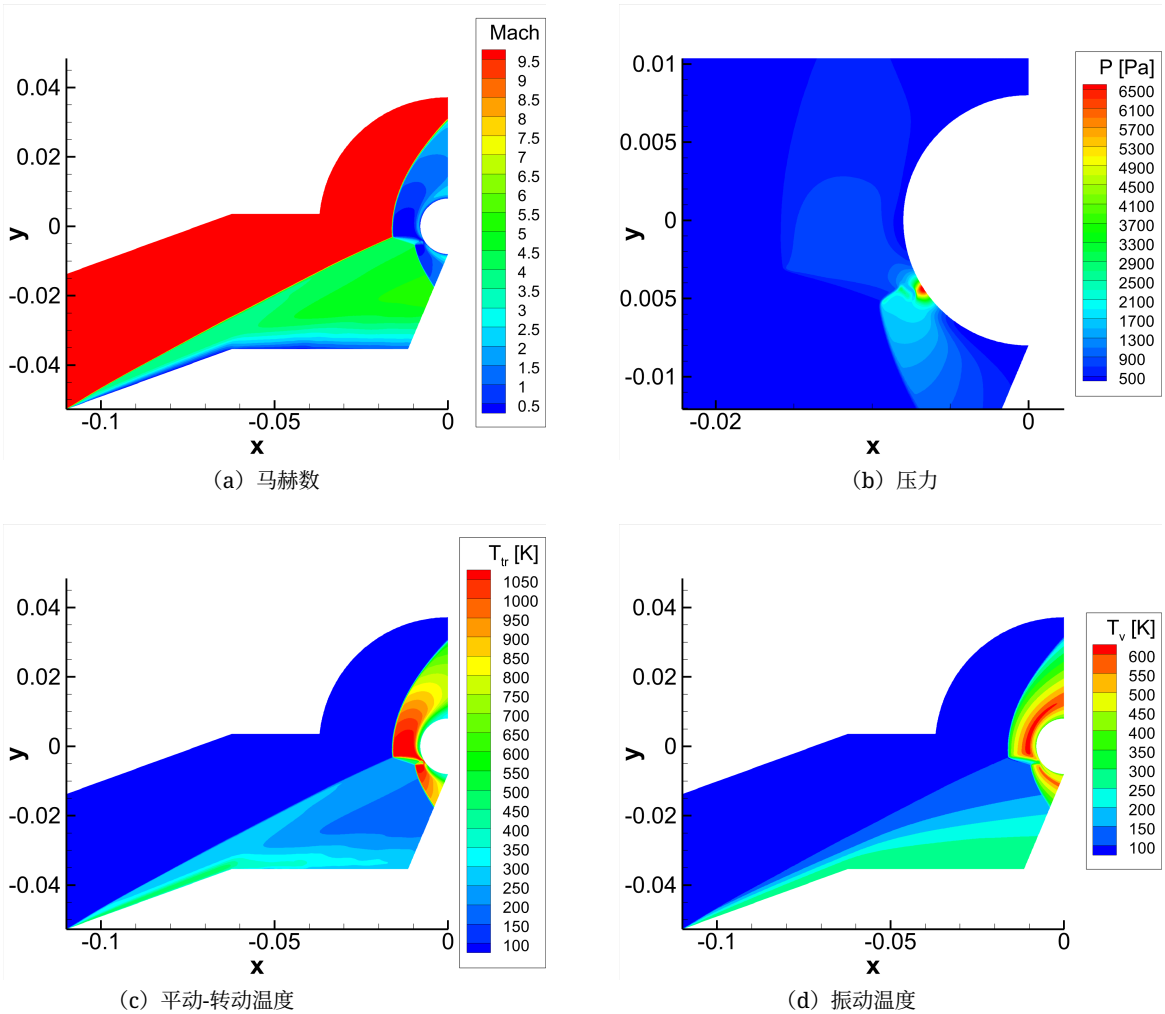


图32. （a）马赫数、（b）压力、（c）平动-转动温度和（d）振动温度的等值线。

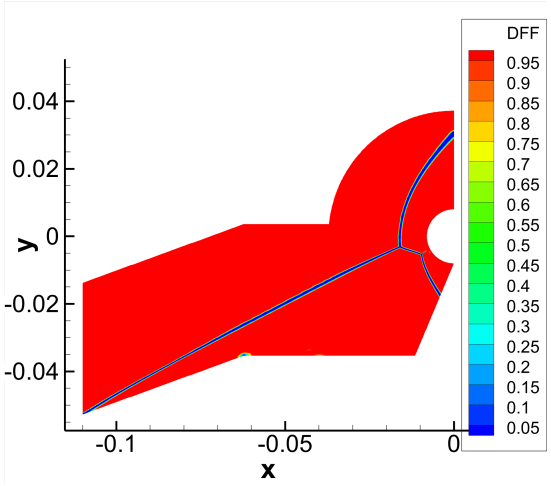
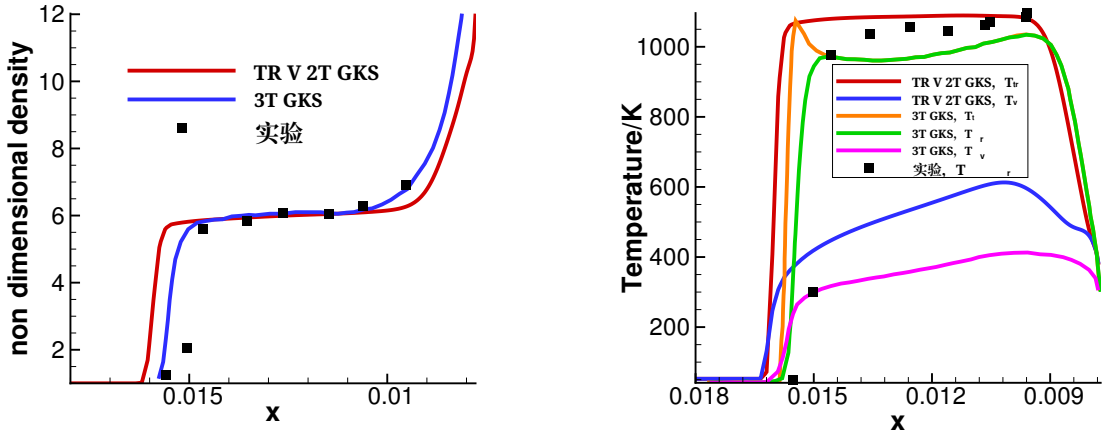


图33. 间断反馈因子 DFF 的等值线。



(a) (b)

沿 y=-2mm 的密度(a)和温度(b)分布曲线。

布

$$g=\rho\left(\frac{\lambda_{tr}}{\pi}\right)^{\frac{3+K_r}{2}}e^{-\lambda_{tr}\left[(u-U)^2+(v-V)^2+\xi_t^2+\xi_r^2\right]}\left(\frac{\lambda_v}{\pi}\right)^{\frac{K_v}{2}}e^{-\lambda_v\xi_v^2}, \tag{A81}$$

且g的矩定义为

$$\rho\langle|\ldots|\rangle=\int(\ldots)g\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi_t\mathrm{d}\xi_r\mathrm{d}\xi_v. \tag{A82}$$

所有矩求值情况均可表示为以下形式，

具体推导如下。

$$\begin{aligned}\rho\langle|u^iv^j\xi kt\,\xi lr\,\xi mv\ \ |\rangle=&\int(u^iv\,j\xi kt\,\xi lr\,\xi mv\,)\\ g\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi_t\mathrm{d}\xi_r\mathrm{d}\xi_v=&\ (u^iv^j\xi_{千吨}\,\xi_{左后}\,\xi_{毫伏}\,)\ \frac{3+K_r}{2}\ e-\lambda_{tr}\left[(u-U)^2+(v-V)^2+\xi^2t\ +\xi^2r\right]\times\\ \rho\left(\frac{\lambda_{tr}}{\pi}\right)&\\ \left(\frac{\lambda_v}{\pi}\right)^{\frac{K_v}{2}}&e^{-\lambda_v\xi^2{}_v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi_t\mathrm{d}\xi_r\mathrm{d}\xi_v.\end{aligned} \tag{A83}$$

由于各积分变量彼此独立，上式中的多重积分可转化为一系列单重积分。此外，宏观量 λ 和 ρ 与微观变

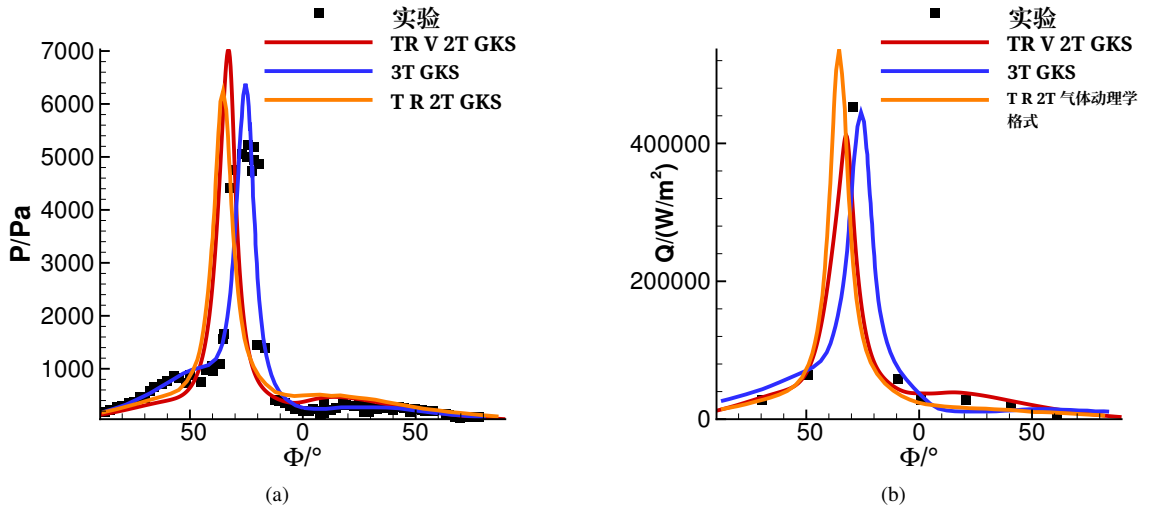


图35. 对比 TR-V 2T GKS、3T GKS 和 T-R 2T GKS 在圆柱上的表面压力（a）和表面热流（b） er.

量 u 和 ξ相互独立，因此可以将它们移出积分号。

$$\rho\langle|u^i v^j \xi_t^k \xi_r^l \xi_v^m|\rangle = \rho\left(\frac{\lambda_{tr}}{\pi}\right)^{\frac{3+K_r}{2}}\left(\frac{\lambda_v}{\pi}\right)^{\frac{K_v}{2}}\times \int_{-\infty}^{+\infty} u^i e^{-\lambda_{tr}(u-U)^2}\mathrm{d}u \int_{-\infty}^{+\infty} v^j e^{-\lambda_{tr}(v-V)^2}\mathrm{d}v\times \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_t^k e^{-\lambda_{tr}\xi_t^2}\mathrm{d}\xi_t \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_r^l e^{-\lambda_{tr}\xi_r^2}\mathrm{d}\xi_r \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_v^m e^{-\lambda_v\xi_v^2}\mathrm{d}\xi_v. \tag{A84}$$

上述方程中的每个积分项都是高斯型积分，通常具有以下形式：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-a(x+b)^2} dx, \quad a > 0. \tag{A85}$$

其解可通过高斯积分或伽马函数求得。

根据上述公式，涉及多个自由度的矩的计算可分解如下

$$\langle|u^i v^j \xi_t^{2k} \xi_r^{2l} \xi_v^{2m}|\rangle = \langle|u^i|\rangle\langle|v^j|\rangle\langle|\xi_t^{2k}|\rangle\langle|\xi_r^{2l}|\rangle\langle|\xi_v^{2m}|\rangle, \tag{A86}$$

其中i、j、k、l、m为整数（由于 ξ_r 和 ξ_v具有对称性，ξ_r 和 ξ_v 的矩始终为偶数阶）。对 $-\infty$到 $+\infty$积分，可得

$$\begin{aligned} &\langle|u^0|\rangle = 1, \\ &\langle|u^1|\rangle = U, \\ &\cdots \\ &\langle|u^{n+2}|\rangle = U\langle|u^{n+1}|\rangle + \frac{n+1}{2\lambda_{tr}}|\langle u^n|\rangle. \end{aligned} \tag{A87}$$

$\langle|\xi^2{}_{kt}\ \ |\rangle$、$\langle|\xi_r^{2l}|\rangle$和 $\langle|\xi^2{}_{mv}\ \ |\rangle$从 $-\infty$到 $+\infty$的矩 are

$$\begin{aligned} &\langle|\xi_t^0|\rangle = 1, \\ &\langle|\xi_t^2|\rangle = (\frac{K_t}{2\lambda_{tr}}), \\ &\langle|\xi_t^{2k}|\rangle = \frac{K_t+2(k-1)}{2\lambda_{tr}}\langle|\xi_t^{2(k-1)}|\rangle, \end{aligned} \tag{A88}$$

and

$$\begin{aligned} &\langle|\xi_r^0|\rangle = 1, \\ &\langle|\xi_r^2|\rangle = (\frac{K_r}{2\lambda_{tr}}), \\ &\langle|\xi_r^{2l}|\rangle = \frac{K_r+2(l-1)}{2\lambda_{tr}}\langle|\xi_r^{2(l-1)}|\rangle, \end{aligned} \tag{A89}$$

and

$$\begin{aligned} &\langle|\xi_v^0|\rangle = 1, \\ &\langle|\xi_v^2|\rangle = (\frac{K_v}{2\lambda_v}), \\ &\langle|\xi_v^{2m}|\rangle = \frac{K_v+2(m-1)}{2\lambda_v}\langle|\xi_v^{2(m-1)}|\rangle. \end{aligned} \tag{A90}$$

由于积分项中存在 Heaviside函数 $\mathbb{H}$，因此会出现从 0 到 $+\infty$ 以及从 $-\infty$ 到 0 的速度范围积分。使用误差函数进行表示。从 0 到 $+\infty$ 的积分记作

$\langle|\dots|\rangle_{>0}$，结果如下

$$\begin{aligned}
\langle|u^0|\rangle_{>0} &= \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(-\sqrt{\lambda_{tr}}\mathrm{U}),\\
\langle|u^1|\rangle_{>0} &= U\langle|u^0|\rangle_{>0} + \frac{1}{2}\frac{e^{-\lambda_{tr}U^2}}{\sqrt{\pi\lambda_{tr}}},\\
&\cdots\\
\langle|u^{n+2}|\rangle_{>0} &= U\langle|u^{n+1}|\rangle_{>0} + \frac{n+1}{2\lambda_{tr}}\langle|u^n|\rangle_{>0},
\end{aligned} \tag{A91}$$

并且当 $\langle|\dots|\rangle_{<0}$ 时从 $-\infty$ 趋于 0,

$$\begin{aligned}
\langle|u^0|\rangle_{<0} &= \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(\sqrt{\lambda_{tr}}\mathrm{U}),\\
\langle|u^1|\rangle_{<0} &= U\langle|u^0|\rangle_{<0} - \frac{1}{2}\frac{e^{-\lambda_{tr}U^2}}{\sqrt{\pi\lambda_{tr}}},\\
&\cdots\\
\langle|u^{n+2}|\rangle_{<0} &= U\langle|u^{n+1}|\rangle_{<0} + \frac{n+1}{2\lambda_{tr}}\langle|u^n|\rangle_{<0},
\end{aligned} \tag{A92}$$

其中 erfc 是标准互补误差函数，可表示如下

$$\begin{aligned}
\mathrm{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,\\
\mathrm{erfc}(x) &= 1-\mathrm{erf}(x).
\end{aligned} \tag{A93}$$

附录B：平动-转动-振动双温 BGK 模型与宏观控制方程之间的联系

为推导纳维–斯托克斯方程，令

$$\tau = \varepsilon\widehat{\tau}, \tag{B1}$$

其中 ε 是一个无量纲小量。分布函数可按 ε 的幂展开

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 \cdots. \tag{B2}$$

我们将物质导数定义为

$$D_{\mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{B3}$$

为便于说明，下面重新写出非平衡BGK方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f^{eq}-f}{\tau} + \frac{g-f^{eq}}{Z_v\tau} = \frac{f^{eq}-f}{\tau} + Q_s. \tag{B4}$$

假设冻结振动能量交换，即 $Z_v\to\infty$，右端的第二项消失，方程简化为

$$\varepsilon\widehat{\tau}D_{\mathbf{u}}f = g - f. \tag{B5}$$

将方程按 ε的幂展开，可得

$$f = g - \varepsilon\widehat{\tau}D_{\mathbf{u}}g + \varepsilon^2\widehat{\tau}D_{\mathbf{u}}\left(\widehat{\tau}D_{\mathbf{u}}g\right) + \cdots. \tag{B6}$$

这称为Chapman–Enskog展开。截断至一阶可得

$$f = g - \varepsilon\widehat{\tau}D_{\mathbf{u}}g. \tag{B7}$$

对BGK方程关于 ψ_α取矩，并应用式（8）中的相容性条件，可得

$$\int \psi_\alpha D_{\mathbf{u}}g\mathrm{d}\Xi = \varepsilon\int \psi_\alpha D_{\mathbf{u}}(\widehat{\tau}D_{\mathbf{u}}g)\mathrm{d}\Xi + S + \mathscr{O}(\varepsilon^2), \tag{B8}$$

其中源项为

$$S = (0,0,0,0,s)^T = \frac{(\rho E_v)^{eq} - \rho E_v}{Z_v\tau}. \tag{B9}$$

Define $\mathscr{L}_\alpha$ 和 $\mathscr{R}_\alpha$ 分别作为左侧和右侧的积分:

$$\mathscr{L}_\alpha = \varepsilon\mathscr{R}_\alpha + S + \mathscr{O}(\varepsilon^2). \tag{B10}$$

省略 $\mathscr{O}(\varepsilon)$ 项可得欧拉方程；保留 $\mathscr{O}(\varepsilon)$ 项则可得纳维–斯托克斯方程。为简化记号，将期望算子定义为

$$< \psi_\alpha(\dots) > \equiv \int \psi_\alpha(\dots)g d\Xi. \tag{B11}$$

此处的期望算子定义与附录 A（式 (A82)）中的定义不同。因此，我们采用另一种记号，在左侧使用不带 ρ 的尖括号。此定义与附录 A 中的定义通过以下恒等式相关:

$$< \psi_\alpha(\dots) > = \rho\langle\psi_\alpha(\dots)\rangle. \tag{B12}$$

由于微观速度 $\mathbf{u}$ 和内部自由度 $\boldsymbol{\xi}$ 独立于宏观坐标x_i 和时间t，对x_i 和t 的导数可以移至积分号外。例如,

$$< \psi_\alpha >_{,t} = \left(\int \psi_\alpha g\,\mathrm{d}\Xi\right)_{,t} = \int(\psi_\alpha g)_{,t}\,\mathrm{d}\Xi = \int \psi_\alpha g_{,t}\,\mathrm{d}\Xi. \tag{B13}$$

据此，我们定义

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_\alpha &\equiv \int \psi_\alpha D_{\mathbf{u}}g\,\mathrm{d}\Xi\\
&= \int \psi_\alpha(g_{,t} + u_l g_{,l})\,\mathrm{d}\Xi\\
&= < \psi_\alpha >_{,t} + < \psi_\alpha u_l >_{,l}.
\end{aligned} \tag{B14}$$

然后，根据式（B10），我们得到以下关系:

$$< \psi_\alpha >_{,t} + < \psi_\alpha u_l >_{,l} = S + \mathscr{O}(\varepsilon) \tag{B15}$$

对于所有 α。由于式（B10）右侧的 $\mathscr{R}_\alpha$ 已经是 $\mathscr{O}(\varepsilon)$，因此在计算时可以忽略 $\mathscr{O}(\varepsilon)$ 阶的项及其导数。

实际上，我们首先通过假设 $\mathscr{L}_\alpha = S$（对于$\alpha = 1, \ldots\ldots, 5$）来简化 $\mathscr{L}_\alpha$，从而得到欧拉方程。然后，利用 $\mathscr{L}_\alpha = S + \mathscr{O}(\varepsilon)$ 这一事实，我们进一步简化 $\mathscr{R}_\alpha$，以推导出纳维–斯托克斯方程。项 $\mathscr{R}_\alpha$ 定义为：

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_\alpha &= \int \psi_\alpha D_{\mathbf{u}}(\widehat{\tau} D_{\mathbf{u}} g)\,\mathrm{d}\Xi \\ &= \int \psi_\alpha D_{\mathbf{u}}\left[\widehat{\tau}(g_{,t} + u_l g_{,l})\right]\,\mathrm{d}\Xi \\ &= \int \psi_\alpha \left\{\widehat{\tau}\left[g_{,tt} + (u_l g_{,l})_{,t} + u_k g_{,tk} + u_k (u_l g_{,l})_{,k}\right]\right. \\ &\quad \left. + (\widehat{\tau}_{,t} + u_k \widehat{\tau}_{,k})(g_{,t} + u_l g_{,l})\right\}\,\mathrm{d}\Xi \\ &= \widehat{\tau}\left[< \psi_\alpha >_{,tt} + 2 < \psi_\alpha u_k >_{,tk} + < \psi_\alpha u_k u_l >_{,lk}\right] \\ &\quad + \widehat{\tau}_{,t}\left[< \psi_\alpha >_{,t} + < \psi_\alpha u_l >_{,l}\right] \\ &\quad + \widehat{\tau}_{,k}\left[< \psi_\alpha u_k >_{,t} + < \psi_\alpha u_k u_l >_{,l}\right].\end{aligned} \tag{B16}$$

为消去 $\mathscr{R}_\alpha$ 中的时间导数，注意到根据式（B15），乘以 $\widehat{\tau}_{,t}$ 的项为 $\mathscr{O}(\varepsilon)$，因此可以忽略。对于主导项，考虑：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[< \psi_\alpha >_{,t} + < \psi_\alpha u_k >_{,k}\right] &= < \psi_\alpha >_{,tt} + < \psi_\alpha u_k >_{,kt} \\ &= \mathscr{L}_{\alpha,t} = \mathscr{O}(\varepsilon).\end{aligned} \tag{B17}$$

于是，式（B16）中的第一项变为：

$$\widehat{\tau}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[< \psi_\alpha u_k >_{,t} + < \psi_\alpha u_k u_l >_{,l}\right] + \mathscr{O}(\varepsilon), \tag{B18}$$

将其与第三项结合后，得到简化形式：

$$\mathscr{R}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\widehat{\tau}\left[< \psi_\alpha u_k >_{,t} + < \psi_\alpha u_k u_l >_{,l}\right]\right\} + \mathscr{O}(\varepsilon). \tag{B19}$$

这消去了 $\mathscr{R}_\alpha$ 中的二阶时间导数。

令 $\mathscr{L}_\alpha = S$，即可得到欧拉方程。例如，对于 $\alpha = 1$，

$$\mathscr{L}_1 = < \psi_1 >_{,t} + < \psi_1 u_k >_{,k} = \rho_{,t} + (\rho U_k)_{,k}, \tag{B20}$$

其中使用了 $\psi_1 = 1$。忽略 $\mathscr{O}(\varepsilon)$，可得连续性方程。

对于 $\alpha = 2,3$，我们定义 $\mathscr{L}_i$ 和 $\mathscr{R}_i$，其中 $i = \alpha - 1$，并令$w_i = u_i - U_i$。于是，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_i &= < u_i >_{,t} + < u_i u_k >_{,k} \\ &= (\rho U_i)_{,t} + < (w_i + U_i)(w_k + U_k) >_{,k} \\ &= (\rho U_i)_{,t} + [\rho U_i U_k + < w_i U_k > + < w_k U_i > + < w_i w_k >]_{,k} \\ &= (\rho U_i)_{,t} + [\rho U_i U_k + < w_i w_k >]_{,k}.\end{aligned} \tag{B21}$$

由于w_l 表示由分子热运动引起的微观速度相对于宏观速度的偏差，而这种偏差在宏观意义上会相互抵消，因此所有奇数阶 g 关于w_l 的矩均为零。即，

$$< w_i^m >= 0, \quad m = 1,3,5,\cdots, \tag{B22}$$

压力张量定义为

$$p_{ik} = < w_i w_k > \equiv p_{tr}\delta_{ik}, \tag{B23}$$

其中 $p_{tr} = \rho R T_{tr}$。上述方程的有效性可证明如下：

$$\begin{aligned}< w^2 > &= < (u - U)^2 > \\ &= < u^2 - 2uU + U^2 > \\ &= \rho(U^2 + \frac{1}{2\lambda_{tr}}) - 2\rho U^2 + \rho U^2 \\ &= \frac{\rho}{2\lambda_{tr}}.\end{aligned} \tag{B24}$$

利用定义 $\lambda_{tr} = m/2kT_{tr}$、$R = k/m$和 $p_{tr} = \rho R T_{tr}$，可得

$$< w^2 >= p_{tr}. \tag{B25}$$

将上述结果代入 $\mathscr{L}_i$ 的表达式，可得

$$\mathscr{L}_i = (\rho U_i)_{,t} + (\rho U_i U_k + p_{tr}\delta_{ik})_{,k}. \tag{B26}$$

根据上述推导，我们总结出以下关系：

$$\begin{aligned}< w_i^m > &= 0, \quad m = 1,3,5,\cdots, \\ < u_i u_k > &= \rho U_i U_k + p_{tr}\delta_{ik},\end{aligned} \tag{B27}$$

而 $\mathscr{L}_i = 0$ 对应于欧拉方程中的动量守恒。

对于能量方程，我们定义

$$\mathscr{L}_4 = \frac{1}{2} < {u_n}^2 + \xi^2 >_{,t} + \frac{1}{2} < u_l({u_n}^2 + \xi^2) >_{,l}, \tag{B28}$$

其中 ${u_n}^2 = u^2 + v^2$ 以及 $\xi^2 = \xi_t^2 + {\xi^2}_r + {\xi^2}_v$。展开$x$方向上的对流项，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} < u({u_n}^2 + \xi^2) >_{,x} = \frac{1}{2} < u^3 + uv^2 + u\xi_t^2 + u\xi_r^2 + u\xi_v^2 >_{,x} \\ &= \frac{1}{2}\left\langle u^3 + uv^2 + u\xi_t^2 + u\xi_r^2 + u\xi_v^2 \right\rangle_{,x} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\rho\left[U^3 + \frac{3U}{2\lambda_{tr}} + U\left(V^2 + \frac{1}{2\lambda_{tr}} + \frac{K_t}{2\lambda_{tr}} + \frac{K_r}{2\lambda_{tr}} + \frac{K_v}{2\lambda_v}\right)\right]\right\}_{,x} \\ &= \frac{1}{2}\left[\rho U\left(U^2 + V^2 + \frac{4 + K_t + K_r}{2\lambda_{tr}} + \frac{K_v}{2\lambda_v}\right)\right]_{,x} \\ &= \left(\frac{1}{2}\rho U(U^2 + V^2) + \frac{K_r + 5}{2}p_{tr}U + \frac{K_v}{2}p_v U\right)_{,x}.\end{aligned} \tag{B29}$$

沿y方向采用相同的步骤，并将其组合

.....，我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_4 = &\left(\frac{1}{2}\rho U_n^2 + \frac{K_r+3}{2}p_{tr} + \frac{K_v}{2}p_v\right)_{,t} \\ &+ \left(\frac{1}{2}\rho U_k U_n^2 + \frac{K_r+5}{2}p_{tr}U_k + \frac{K_v}{2}p_v U_k\right)_{,k},\end{aligned} \tag{B30}$$

其中$U_n^2 = U^2 + V^2$,，且$p_v = \rho R T_v$。令 $\mathscr{L}_4 = 0$，即可得到无耗散的能量方程守恒形式。

对于振动能量方程，我们写作

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_5 &= \frac{1}{2} < {\xi_v}^2 >_{,t} + \frac{1}{2} < u_l {\xi_v}^2 >_{,l} \\ &= \left(\frac{K_v}{2}p_v\right)_{,t} + \left(\frac{K_v}{2}p_v U_l\right)_{,l}.\end{aligned} \tag{B31}$$

至此，欧拉方程的推导完成。现在我们转而推导纳维–斯托克斯方程。

为推导纳维–斯托克斯方程，我们进一步化简 $\mathscr{R}_\alpha$ ，消去时间导数。具体而言，注意到 $\mathscr{L}i = \mathscr{O}(\varepsilon)$，即可忽略 $\mathscr{R}1$ 中的时间导数。因此，由式（B19），对于 $\alpha = 1$，有

$$\mathscr{R}_1 = \left\{\hat{\tau}\left[< u_k >_{,t} + < u_k u_l >_{,l}\right]\right\}_{,k}. \tag{B32}$$

括号内的量与$\mathscr{L}_2$, 3具有相同的形式，这意味着 $\mathscr{R}_1 = \mathscr{O}(\varepsilon)$，因此 $\mathscr{L}_1 = \varepsilon\mathscr{R}_1 = \mathscr{O}(\varepsilon^2)$。所以，在所保留的阶数下，有 $\mathscr{R}_1 = 0$ 和 $\mathscr{L}_1 = 0$，由此得到连续性方程:

$$\rho_{,t} + (\rho U_k)_{,k} = 0. \tag{B33}$$

该连续性方程可用于简化动量方程、总能量方程和振动能量方程，方法是消去式 (B10) 右端 $\mathscr{R}_\alpha$ 中相应的时间导数项。将连续性方程乘以U_i ，再从 $\mathscr{L}_i$中减去所得结果，我们得到（由式 (B26)）：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_i &= (\rho U_i)_{,t} + (\rho U_i U_k + p_{tr}\delta_{ik})_{,k} \\ &= \rho_{,t}U_i + \rho U_{i,t} + \rho_{,k}U_i U_k + \rho U_{i,k}U_k + \rho U_i U_{k,k} + p_{tr,i} \\ &= U_i(\rho_{,t} + \rho_{,k}U_k + \rho U_{k,k}) + \rho U_{i,t} + \rho U_{i,k}U_k + p_{tr,i} \\ &= U_i\left[\rho_{,t} + (\rho U_k)_{,k}\right] + \rho U_{i,t} + \rho U_{i,k}U_k + p_{tr,i} \\ &= \rho U_{i,t} + \rho U_{i,k}U_k + p_{tr,i}.\end{aligned} \tag{B34}$$

对于 $\mathscr{L}_4$，我们将各项归并如下:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_4 = &\left(\frac{1}{2}\rho U_n^2 + \frac{K_r+3}{2}p_{tr} + \frac{K_v}{2}p_v\right)_{,t} \\ &+ \left(\frac{1}{2}\rho U_k U_n^2 + \frac{K_r+5}{2}p_{tr}U_k + \frac{K_v}{2}p_v U_k\right)_{,k} \\ = &\frac{1}{2}\rho_{,t}U_n^2 + \rho U_n U_{n,t} + \frac{K_r+3}{2}p_{tr,t} + \frac{K_v}{2}p_{v,t} \\ &+ \frac{1}{2}(\rho U_k)_{,k}U_n^2 + \rho U_k U_n U_{n,k} + \frac{K_r+5}{2}p_{tr,k}U_k \\ &+ \frac{K_r+5}{2}p_{tr}U_{k,k} + \frac{K_v}{2}p_{v,k}U_k + \frac{K_v}{2}p_v U_{k,k} \\ = &\frac{1}{2}U_n^2\mathscr{L}_1 + U_n\mathscr{L}_n + \rho U_k U_n U_{n,k} + U_k p_{tr,k} \\ &+ \frac{K_r+3}{2}(p_{tr,t} + U_k p_{tr,k}) + \frac{K_r+5}{2}p_{tr}U_{k,k} \\ &+ \frac{K_v}{2}(p_{v,t} + p_{v,k}U_k + p_v U_{k,k}).\end{aligned} \tag{B35}$$

这里，第一项为$12U_n^2\mathscr{L}_1 = \mathscr{O}(\varepsilon^2)$，第二项为$U_n\mathscr{L}_n = \mathscr{O}(\varepsilon^2)$。于是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_4 = &\frac{K_r+3}{2}[p_{tr,t} + U_k p_{tr,k}] + \frac{K_r+5}{2}p_{tr}U_{k,k} \\ &+ \frac{K_v}{2}(p_{v,t} + p_{v,k}U_k + p_v U_{k,k}) + U_n\mathscr{L}_n.\end{aligned} \tag{B36}$$

在化简 $\mathscr{R}_\alpha$时，我们可以省略最后一项；但是，在显式表示$\mathscr{L}_4 = \varepsilon\mathscr{R}_4$时，必须保留项$U_n\mathscr{L}_n$ 。

对于 $\mathscr{L}_5$，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_5 &= \left(\frac{K_v}{2}p_v\right)_{,t} + \left(\frac{K_v}{2}p_v U_l\right)_{,l} \\ &= \frac{K_v}{2}(p_{v,t} + p_{v,l}U_l + p_v U_{l,l}).\end{aligned} \tag{B37}$$

为简化右端项 $\mathscr{R}_\alpha$，考虑到振动能量方程的右端包含源项 S，我们将 $\mathscr{L}_5 - S$ 视为一个整体，即 $\mathscr{L}_5 - S = \varepsilon\mathscr{R}_5 = \mathscr{O}(\varepsilon)$。因此， $\mathscr{L}_5 - S$ 可表示如下，其中源项由公式（9）和公式（10）给出:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_5 - S &= \frac{K_v}{2}(p_{v,t} + p_{v,l}U_l + p_v U_{l,l}) - \frac{(\rho E_v)^{eq} - \rho E_v}{Z_v\tau} \\ &= \frac{K_v}{2}(p_{v,t} + p_{v,l}U_l + p_v U_{l,l}) \\ &\quad - \frac{1}{Z_v\tau}\left(\frac{K_v}{2}\rho R\frac{(3+K_r)T_{tr} + K_v T_v}{3+K_r+K_v} - \rho E_v\right) \\ &= \frac{K_v}{2}(p_{v,t} + p_{v,l}U_l + p_v U_{l,l}) \\ &\quad - \frac{1}{Z_v\tau}\left(\frac{K_v}{2}\frac{(3+K_r)p_{tr} + K_v p_v}{3+K_r+K_v} - \frac{K_v}{2}p_v\right) \\ &= \frac{K_v}{2}\left(p_{v,t} + p_{v,l}U_l + p_v U_{l,l} - \frac{1}{Z_v\tau}\frac{(3+K_r)(p_{tr} - p_v)}{3+K_r+K_v}\right).\end{aligned} \tag{B38}$$

对于动量方程的右端，考虑$\mathscr{R}_j=(\widehat{\tau}F_{jk})_{,k}$，其中

$$F_{jk}\equiv<u_ju_k>_{,t}+<u_ju_ku_l>_{,l}. \tag{B39}$$

利用公式（B27），并注意到所有关于w_k的奇数阶矩均为零，令$u_i=w_i+U_i$，可得

$$\begin{aligned}<u_ju_ku_l>_{,l}&=<(U_j+w_j)(U_k+w_k)(U_l+w_l)>_{,l}\\&=<(U_jU_k+U_jw_k+U_kw_j+w_jw_k)(U_l+w_l)>_{,l}\\&=<U_jU_kU_l+U_jp_{tr}\delta_{kl}+U_kp_{tr}\delta_{jl}+U_lp_{tr}\delta_{jk}>_{,l}\\&=U_j(\rho U_kU_l)_{,l}+U_{j,l}\rho U_kU_l\\&\quad+U_{j,k}p_{tr}+U_jp_{tr,l}\delta_{kl}\\&\quad+U_{k,j}p_{tr}+U_kp_{tr,j}+U_{l,l}p_{tr}\delta_{jk}+U_lp_{tr,l}\delta_{jk}.\end{aligned} \tag{B40}$$

代入F_{jk}，得到

$$\begin{aligned}F_{jk}&=(\rho U_jU_k+p_{tr}\delta_{jk})_{,t}+<u_ju_ku_l>_{,l}\\&=U_j\left[(\rho U_k)_{,t}+(\rho U_kU_l+p_{tr}\delta_{kl})_{,l}\right]\\&\quad+\rho U_kU_{j,t}+p_{tr,t}\delta_{jk}+U_{j,l}\rho U_kU_l+U_{j,k}p_{tr}\\&\quad+U_{k,j}p_{tr}+U_kp_{tr,j}+U_{l,l}p_{tr}\delta_{jk}+U_lp_{tr,l}\delta_{jk}.\end{aligned} \tag{B41}$$

乘以U_j的方括号内的项为$\mathscr{L}_k=\mathscr{O}(\varepsilon)$，可以忽略。合并各项后，得到

$$\begin{aligned}F_{jk}&=U_k\left[\rho U_{j,t}+\rho U_lU_{j,l}+p_{tr,j}\right]+p_{tr}\left[U_{k,j}+U_{j,k}+U_{l,l}\delta_{jk}\right]\\&\quad+\delta_{jk}\left[p_{tr,t}+U_lp_{tr,l}\right].\end{aligned} \tag{B42}$$

根据公式（B34），U_k的系数为$\mathscr{L}_j=\mathscr{O}(\varepsilon)$，可以忽略。为消去最后一项中的$p_{tr,t}$，将公式（B36）代入$\mathscr{L}_4$，得到

$$\begin{aligned}p_{tr,t}+U_kp_{tr,k}&=-\frac{K_r+5}{K_r+3}p_{tr}U_{k,k}\\&\quad-\frac{K_v}{K_r+3}\left(p_{v,t}+p_{v,k}U_k+p_vU_{k,k}\right)+\mathscr{O}(\varepsilon).\end{aligned} \tag{B43}$$

为消去上述表达式中的$p_{v,t}$，我们利用$_{,t}$的公式（B38），得到

$$p_{v,t}+p_{v,l}U_l+p_vU_{l,l}=\frac{1}{Z_v\tau}\frac{(3+K_r)(p_{tr}-p_v)}{3+K_r+K_v}+\mathscr{O}(\varepsilon). \tag{B44}$$

将公式（B44）代入公式（B43），$p_{tr,t}$的表达式变为

$$p_{tr,t}+U_kp_{tr,k}=-\frac{K_r+5}{K_r+3}p_{tr}U_{k,k}-\frac{K_v(p_{tr}-p_v)}{Z_v\tau(3+K_r+K_v)}+\mathscr{O}(\varepsilon). \tag{B45}$$

将上述表达式代入F_{jk}的计算中，并将速度梯度张量$U_{k,j}$分解为对称无迹（剪切）部分和膨胀部分，可得

$$\begin{aligned}F_{jk}&=p_{tr}\left[U_{k,j}+U_{j,k}-\frac{2}{3}U_{l,l}\right]\\&\quad+\delta_{jk}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{K_r}{K_r+3}\right)p_{tr}U_{l,l}-\frac{K_v(p_{tr}-p_v)}{Z_v\tau(3+K_r+K_v)}\right].\end{aligned} \tag{B46}$$

右侧第二项对应体积黏度，对于单原子气体，该项为零（$K_r=0$）。

对于 $\alpha=4$，我们写作

$$\mathscr{R}_4=(\widehat{\tau}N_k)_{,k}, \tag{B47}$$

其中

$$N_k\equiv<u_k\frac{(u_n^2+\xi^2)}{2}>_{,t}+<u_ku_l\frac{(u_n^2+\xi^2)}{2}>_{,l}, \tag{B48}$$

其中$\xi^2=\xi^2{}_t+\xi^2{}_r+\xi^2{}_v$。令$u_i=w_i+U_i$，则上式可写为$N_k=N^{(1)}{}_k+N^{(2)}{}_k$，其中

$$N_k^{(1)}=[U_k\frac{<u_n{}^2+\xi^2>}{2}]_{,t}+[U_k<u_l\frac{(u_n{}^2+\xi^2)}{2}>]_{,l}, \tag{B49}$$

and

$$N_k{}^{(2)}=<w_k\frac{u_n{}^2+\xi^2}{2}>_{,t}+<w_ku_l\frac{(u_n{}^2+\xi^2)}{2}>_{,l}. \tag{B50}$$

对于$N_k{}^{(1)}$，利用公式（B30）中的$\mathscr{L}_4$可将其简化，得到

$$\begin{aligned}N_k{}^{(1)}&=U_k[\frac{<u_n{}^2+\xi^2>_{,t}}{2}+\frac{<u_l(u_n{}^2+\xi^2)>_{,l}}{2}]\\&\quad+U_{k,t}[\frac{<u_n{}^2+\xi^2>}{2}]+U_{k,l}[\frac{<u_l(u_n{}^2+\xi^2)>}{2}]\\&=U_k[\frac{<u_n{}^2+\xi^2>_{,t}}{2}+\frac{<u_l(u_n{}^2+\xi^2)>_{,l}}{2}]\\&\quad+U_{k,t}\left(\frac{1}{2}\rho U_n{}^2+\frac{K_r+3}{2}p_{tr}+\frac{K_v}{2}p_v\right)\\&\quad+U_{k,l}\left(\frac{1}{2}\rho U_lU_n{}^2+\frac{K_r+5}{2}p_{tr}U_l+\frac{K_v}{2}p_vU_l\right).\end{aligned} \tag{B51}$$

上式中U_k的系数为公式（B30）中的$\mathscr{L}_4$，因此可以忽略，其余各项可改写为

$$(U_{k,t}+U_lU_{k,l})(\frac{1}{2}\rho U_n{}^2+\frac{K_r+3}{2}p_{tr}+\frac{K_v}{2}p_v)+p_{tr}U_lU_{k,l}. \tag{B52}$$

然后，利用 $\mathscr{L}_k=\mathscr{O}(\varepsilon)$ 这一事实以及公式（B34），我们得到

$$N_k{}^{(1)}=-p_{tr,k}(\frac{1}{2}U_n{}^2+\frac{K_r+3}{2}\frac{p_{tr}}{\rho}+\frac{K_v}{2}\frac{p_v}{\rho})+p_{tr}U_lU_{k,l}. \tag{B53}$$

对于$N^{(2)}{}_k$，利用公式（B27），并注意到关于w_k的奇数阶矩

消失后，我们得到

$$
\begin{aligned}
N_k^{(2)} =& < w_k \frac{{u_n}^2+\xi^2}{2} >_{,t} + < w_k u_l \frac{{u_n}^2+\xi^2}{2} >_{,l} \\
=& < w_k \frac{(U+w_x)^2+(V+w_y)^2+\xi^2}{2} >_{,t} \\
&+ < w_k (U_l+w_l) \frac{(U+w_x)^2+(V+w_y)^2+\xi^2}{2} >_{,l} \\
=& < w_k \frac{(U^2+2Uw_x+w_x^2)+(V^2+2Vw_y+w_y^2)+\xi^2}{2} >_{,t} \\
&+ < w_k (U_l+w_l) \frac{(U^2+2Uw_x+w_x^2)+(V^2+2Vw_y+w_y^2)+\xi^2}{2} >_{,l} \\
=& < w_k \frac{2Uw_x+2Vw_y}{2} >_{,t} + < w_k U_l \frac{2Uw_x+2Vw_y}{2} >_{,l} \\
&+ < w_k w_l \frac{U^2+w_x^2+V^2+w_y^2+\xi^2}{2} >_{,l} \\
=& < w_k^2 U_k >_{,t} + < w_k^2 U_k U_l >_{,l} \\
&+ < w_k^2 \frac{U^2+V^2}{2} >_{,k} + < w_k^2 \frac{w_x^2+w_y^2}{2} >_{,k} + < w_k^2 \frac{\xi^2}{2} >_{,k}.
\end{aligned}
\tag{B54}
$$

注意，右端倒数第二项包含w的四次幂。接下来，我们推导w的四阶矩：

$$
\begin{aligned}
< w^4 > =& < (u-U)^4 > \\
=& < u^4+U^4+4u^2U^2+2u^2U^2-4u^3U-4uU^3 > \\
=& \rho \big[U^4 + \frac{3U^2}{\lambda_{tr}} + \frac{3}{4\lambda_{tr}^2} + U^4 + 6U^2(U^2+\frac{1}{2\lambda_{tr}}) \\
& - 4U(U^3+\frac{3}{2\lambda_{tr}}-4U^4) \big] \\
=& \frac{3\rho}{4\lambda_{tr}^2} = \frac{3p_{tr}^2}{\rho}.
\end{aligned}
\tag{B55}
$$

将上述结果代入$N^{(2)}{}_k$的表达式中，得到：

$$
\begin{aligned}
N_k^{(2)} =& (p_{tr}U_k)_{,t} + (p_{tr}U_lU_k)_{,l} + \frac{1}{2}[p_{tr}(U^2+V^2)]_{,k} \\
&+ (\frac{3p_{tr}^2}{2\rho})_{,k} + (\frac{p_{tr}^2}{2\rho})_{,k} + [\frac{(K_t+K_r)p_{tr}^2}{2\rho}]_{,k} + (\frac{K_v p_{tr} p_v}{2\rho})_{,k} \\
=& p_{tr}U_{k,t} + p_{tr,t}U_k + p_{tr,l}U_lU_k + p_{tr}U_{l,l}U_k + p_{tr}U_lU_{k,l} \\
&+ \frac{1}{2}p_{tr,k}{U_n}^2 + p_{tr}U_lU_{l,k} + [\frac{(5+K_r)p_{tr}^2}{2\rho}]_{,k} + (\frac{K_v p_{tr} p_v}{2\rho})_{,k} \\
=& p_{tr}[U_{k,t} + U_lU_{k,l} + U_kU_{l,l} + U_lU_{l,k}] \\
&+ U_k(p_{tr,t} + U_l p_{tr,l}) + \frac{1}{2}p_{tr,k}{U_n}^2 \\
&+ \frac{5+K_r}{2}(\frac{p_{tr}^2}{\rho})_{,k} + (\frac{K_v p_{tr} p_v}{2\rho})_{,k}.
\end{aligned}
\tag{B56}
$$

利用 $\mathscr{L}_k = \mathscr{O}(\varepsilon)$ 和式 (B45)，我们消去时间导数（因为它们仅贡献 $\mathscr{O}(\varepsilon)$），得到：

$$
\begin{aligned}
N_k^{(2)} =& p_{tr}[-U_lU_{k,l} - \frac{p_{tr,k}}{\rho} + U_lU_{k,l} + U_kU_{l,l} + U_lU_{l,k}] \\
&+ U_k\big[-\frac{K_r+5}{K_r+3}p_{tr}U_{l,l} - \frac{K_v(p_{tr}-p_v)}{Z_v\tau(3+K_r+K_v)}\big] \\
&+ \frac{1}{2}p_{tr,k}{U_n}^2 + \frac{5+K_r}{2}(\frac{p_{tr}^2}{\rho})_{,k} + (\frac{K_v p_{tr} p_v}{2\rho})_{,k} \\
=& p_{tr}[-\frac{p_{tr,k}}{\rho} + U_kU_{l,l} + U_lU_{l,k}] \\
&+ U_k\big[-\frac{K_r+5}{K_r+3}p_{tr}U_{l,l} - \frac{K_v(p_{tr}-p_v)}{Z_v\tau(3+K_r+K_v)}\big] \\
&+ \frac{1}{2}p_{tr,k}{U_n}^2 + \frac{5+K_r}{2}(\frac{p_{tr}^2}{\rho})_{,k} + (\frac{K_v p_{tr} p_v}{2\rho})_{,k} \\
=& p_{tr}[-\frac{p_{tr,k}}{\rho} + U_kU_{l,l} + U_lU_{l,k}] \\
&+ U_k\big[-\frac{K_r+5}{K_r+3}p_{tr}U_{l,l} - \frac{K_v(p_{tr}-p_v)}{Z_v\tau(3+K_r+K_v)}\big] \\
&+ \frac{1}{2}p_{tr,k}{U_n}^2 + \frac{5+K_r}{2}(\frac{p_{tr}^2}{\rho})_{,k} + (\frac{K_v p_{tr} p_v}{2\rho})_{,k}.
\end{aligned}
\tag{B57}
$$

最后，结合$N^{(1)}{}_k$和$N^{(2)}{}_k$，得到：

$$
\begin{aligned}
N_k =& -p_{tr,k}(\frac{1}{2}{U_n}^2 + \frac{K_r+3}{2}\frac{p_{tr}}{\rho} + \frac{K_v}{2}\frac{p_v}{\rho}) + p_{tr}U_lU_{k,l} \\
&+ p_{tr}[-\frac{p_{tr,k}}{\rho} + U_kU_{l,l} + U_lU_{l,k}] \\
&+ U_k\big[-\frac{K_r+5}{K_r+3}p_{tr}U_{l,l} - \frac{K_v(p_{tr}-p_v)}{Z_v\tau(3+K_r+K_v)}\big] \\
&+ \frac{1}{2}p_{tr,k}{U_n}^2 + \frac{5+K_r}{2}(\frac{p_{tr}^2}{\rho})_{,k} + (\frac{K_v p_{tr} p_v}{2\rho})_{,k} \\
=& p_{tr}[U_l(U_{k,l}+U_{l,k}) - \frac{2}{K_r+3}U_kU_{l,l}] - U_k\frac{K_v(p_{tr}-p_v)}{Z_v\tau(3+K_r+K_v)} \\
&+ \frac{(5+K_r)}{2}p_{tr}(\frac{p_{tr}}{\rho})_{,k} + \frac{K_v p_{tr}}{2}(\frac{p_v}{\rho})_{,k}.
\end{aligned}
\tag{B58}
$$

对于 $\alpha = 5$，我们写作

$$
\mathscr{R}_5 = (\widehat{\tau}M_k)_{,k}, \tag{B59}
$$

其中

$$\begin{aligned}M_k \equiv & < u_k \frac{\xi_v^2}{2} >_{,t} + < u_k u_l \frac{\xi_v^2}{2} >_{,l} \\ = & (\frac{K_v}{2} p_v U_k)_{,t} + (\frac{K_v}{2} p_v U_k U_l)_{,l} + (\frac{K_v}{2} \frac{p_v}{\rho} p_{tr} \delta_{kl})_{,l} \\ = & \frac{K_v}{2} (p_{v,t} U_k + p_v U_{k,t} + p_{v,l} U_k U_l + p_v U_{k,l} U_l + p_v U_k U_{l,l} \\ & + p_{tr} \delta_{kl} (\frac{p_v}{\rho})_{,l} + \frac{p_v}{\rho} p_{tr,k}) \\ = & \frac{K_v}{2} \big[\frac{p_v}{\rho} (\rho U_{k,t} + \rho U_{k,l} U_l + p_{tr,k}) \\ & + U_k (p_{v,t} + p_{v,l} U_l + p_v U_{l,l}) + p_{tr} (\frac{p_v}{\rho})_{,k} \big].\end{aligned} \tag{B60}$$

p_v/ρ 的系数为 $\mathscr{L}_j$ （见公式（B34）），可以忽略。利用公式（B44）可简化U_k 的系数，得到：

$$M_k = \frac{K_v}{2} \big[\frac{U_k}{Z_v \tau} \frac{(3+K_r)(p_{tr} - p_v)}{3+K_r+K_v} + p_{tr} (\frac{p_v}{\rho})_{,k} \big]. \tag{B61}$$

现在，$\mathscr{R}_\alpha$对于所有α的时间导数均已消去。NS 方程推导的剩余步骤现可简要概括如下：

1). Drop the $\mathscr{O}(\varepsilon)$ terms in Eq. (B10).

2). 将 ε 和 $\hat{\tau}$ 相结合，以恢复 $\tau = \varepsilon \hat{\tau}$。

最后，由二维平动–转动振动双温 BGK 模型推导得到的 NS 方程为

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + S, \tag{B62}$$

with

$$\begin{aligned} W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho V \\ \rho E \\ \rho E_v \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U^2 + p \\ \rho U V \\ (\rho E + p) U \\ \rho E_v U \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho U V \\ \rho V^2 + p \\ (\rho E + p) V \\ \rho E_v V \end{pmatrix} \\ F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ U \tau_{xx} + V \tau_{xy} + q_x \\ U \tau_{tr-v} + q_{vx} \end{pmatrix} G_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ U \tau_{yx} + V \tau_{yy} + q_y \\ V \tau_{tr-v} + q_{vy}, \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B63}$$

其中，总能量定义为

$$\rho E = \frac{1}{2} \rho \left(U^2 + (3+K_r) R T_{tr} + K_v R T_v \right), \tag{B64}$$

振动能为

$$\rho E_v = \frac{K_v}{2} \rho R T_v. \tag{B65}$$

黏性法向应力项为

$$\begin{aligned} \tau_{xx} = & \tau p [2 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3+K_r} (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y})] \\ & - \frac{\rho K_v}{2(K_r+K_v+3) Z_v} (\frac{1}{\lambda_{tr}} - \frac{1}{\lambda_v}), \\ \tau_{yy} = & \tau p [2 \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2}{3+K_r} (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y})] \\ & - \frac{\rho K_v}{2(K_r+K_v+3) Z_v} (\frac{1}{\lambda_{tr}} - \frac{1}{\lambda_v}), \end{aligned} \tag{B66}$$

黏性剪切应力项为

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau p (\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}), \tag{B67}$$

而热传导项为

$$\begin{aligned} q_x = & \tau p [\frac{K_v}{4} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{\lambda_v}) + \frac{5+K_r}{4} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{\lambda_{tr}})], \\ q_y = & \tau p [\frac{K_v}{4} \frac{\partial}{\partial y} (\frac{1}{\lambda_v}) + \frac{5+K_r}{4} \frac{\partial}{\partial y} (\frac{1}{\lambda_{tr}})]. \end{aligned} \tag{B68}$$

以下各项与振动能量 ρE_v的控制方程有关：

$$\begin{aligned} \tau_{tr-v} = & \frac{(K_r+3) \rho K_v}{4(K_r+K_v+3) Z_v} (\frac{1}{\lambda_{tr}} - \frac{1}{\lambda_v}), \\ q_{vx} = & \tau p \frac{K_v}{4} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{\lambda_v}), \\ q_{vy} = & \tau p \frac{K_v}{4} \frac{\partial}{\partial y} (\frac{1}{\lambda_v}). \end{aligned} \tag{B69}$$

源项为

$$\mathbf{S} = (0, 0, 0, 0, s)^T, \tag{B70}$$

with

$$\begin{aligned} s = & \frac{(\rho E_v)^{eq} - \rho E_v}{Z_v \tau}, \\ \rho E_v^{eq} = & \frac{K_v}{2} \rho R T^{eq}, \\ T^{eq} = & \frac{(3+K_r) T_{tr} + K_v T_v}{3+K_r+K_v}. \end{aligned} \tag{B71}$$

附录 C：微观斜率的推导

宏观流动导数的重构完成后，式（39）中的微观导数a^l、$_r$、^{c} 和A^l、$_r$、^{c} 可按如下方式获得。根据麦克斯韦分布的泰勒展开，所有微观导数均取

form

$$\begin{aligned} a_x &= a_{x1} + a_{x2}u + a_{x3}v + a_{x4}(u^2+v^2+\xi_t^2+\xi_r^2) + a_{x5}\xi_v^2 \\ &= a_{x\beta}\omega_\beta, \\ a_y &= a_{y1} + a_{y2}u + a_{y3}v + a_{y4}(u^2+v^2+\xi_t^2+\xi_r^2) + a_{y5}\xi_v^2 \\ &= a_{y\beta}\omega_\beta. \end{aligned} \tag{C1}$$

基于式（5）所给出的宏观变量与微观气体分布函数之间的关系，对x 求导可得：

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha a_x g \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi_t\mathrm{d}\xi_r\mathrm{d}\xi_v, \tag{C2}$$

其中 $\psi_\alpha = (1,\ u,\ v,\ \frac{1}{2}(u^2+v^2+\xi_t^2+\xi_r^2+\xi_v^2),\ \frac{1}{2}\xi_v^2)^T$。由此得到方程

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho E_v)}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \langle|\psi_\alpha a_x|\rangle = \langle|\psi_\alpha\zeta_\beta\alpha_{x\beta}|\rangle = \langle|\psi_\alpha\zeta_\beta|\rangle \begin{pmatrix} a_{x1} \\ a_{x2} \\ a_{x3} \\ a_{x4} \\ a_{x5} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{C3}$$

令 $\mathbf{M} = \langle|\psi_\alpha\zeta_\beta|\rangle$，则可得到一个线性系统

$$\mathbf{Ma} = \mathbf{b}, \tag{C4}$$

其中，矩阵 $\mathbf{M}$ 为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \langle|1|\rangle & \langle|u^1|\rangle & \langle|v^1|\rangle & \langle|u^2+v^2+\xi_t^2+\xi_r^2|\rangle & \langle|\xi_v^2|\rangle \\ \langle|u^1|\rangle & \langle|u^2|\rangle & \langle|u^1v^1|\rangle & \langle|u^1(u^2+v^2+\xi_t^2+\xi_r^2)|\rangle & \langle|u^1\xi_v^2|\rangle \\ \langle|v^1|\rangle & \langle|u^1v^1|\rangle & \langle|v^2|\rangle & \langle|v^1(u^2+v^2+\xi_t^2+\xi_r^2)|\rangle & \langle|v^1\xi_v^2|\rangle \\ \langle|\psi_4|\rangle & \langle|\psi_4u^1|\rangle & \langle|\psi_4v^1|\rangle & \langle|\psi_4(u^2+v^2+\xi_t^2+\xi_r^2)|\rangle & \langle|\psi_4\xi_v^2|\rangle \\ \langle|\frac{1}{2}\xi_v^2|\rangle & \langle|\frac{1}{2}\xi_v^2u^1|\rangle & \langle|\frac{1}{2}\xi_v^2v^1|\rangle & \langle|\frac{1}{2}\xi_v^2(u^2+v^2+\xi_t^2+\xi_r^2)|\rangle & \langle|\frac{1}{2}\xi_v^4|\rangle \end{pmatrix}. \tag{C5}$$

现在定义以下量：

$$\begin{aligned} B &= 2\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E-\rho E_v)}{\partial x} - \frac{1}{\rho}(U^2+V^2+\frac{K_r+3}{2\lambda_{tr}})\frac{\partial\rho}{\partial x}, \\ A_1 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} - \frac{U}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}, \\ A_2 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V)}{\partial x} - \frac{V}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}. \end{aligned} \tag{C6}$$

则方程 (C4) 的解为

$$\begin{aligned} a_{x5} &= 2\frac{1}{\rho}\frac{\lambda_v^2}{K_v}(2\frac{\partial(\rho E_v)}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{K_v}{\lambda_v}\frac{\partial\rho}{\partial x}), \\ a_{x4} &= \frac{2\lambda_{tr}^2}{K_r+3}(B-2UA_1-2VA_2), \\ a_{x3} &= 2\lambda_{tr}A_2 - 2Va_{x4}, \\ a_{x2} &= 2\lambda_{tr}A_1 - 2Ua_{x4}, \\ a_{x1} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} - a_{x2}U - a_{x3}V \\ &\quad - a_{x4}(U^2+V^2+\frac{K_r+3}{2\lambda_{tr}}) - a_{x5}\frac{K_v}{2\lambda_v}. \end{aligned} \tag{C7}$$

因此，一旦重构出宏观变量及其导数，就可以计算微观的一阶空间导数。y方向的导数可以以类似方式获得。

随后，我们继续计算$A^{l,\ r,\ c}$。为清晰起见，现将非平衡BGK模型重述如下：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f^{eq}-f}{\tau} + \frac{g-f^{eq}}{Z_v\tau} = \frac{f^{eq}-f}{\tau} + Q_s. \tag{C8}$$

这里，右端的碰撞算子由弹性项和非弹性项组成。由于假定振动能在单次碰撞时间内保持冻结，因此忽略非弹性项。此外，弹性碰撞保持内能模态不变，因此振动能守恒。在此情形下，质量、动量和总能量守恒导出以下相容性条件：

$$\int \frac{f^{eq}-f}{\tau}\psi_\alpha \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi_t\mathrm{d}\xi_r\mathrm{d}\xi_v = 0. \tag{C9}$$

在零阶Chapman–Enskog展开下，分布函数近似为中间平衡态：

$$f = f^{eq}. \tag{C10}$$

对 BGK方程关于 ψ取矩，并应用式（C9）中的相容性条件，可得

$$\langle a_x u + a_y v + A\rangle = 0, \tag{C11}$$

由此可显式求出系数A:

$$\langle A\rangle = -\langle a_x u + a_y v\rangle. \tag{C12}$$

[1]J. D. Anderson，《高超声速与高温气体动力学》，AIAA，1989。[2]D. Bose、J. L. Brown、D. K. Prabhu、P. Gnoffo、C. O. Johnston、B. Hollis，高超声速气动热力学预测能力的不确定性评估，《航天器与火箭》50 (1) (2013) 12–18。[3]D. Olynick、Y.-K. Chen、M. E. Tauber，星尘样品返回舱的气动热力学，《航天器与火箭》36 (3) (1999) 442–462。doi:10.2514/2.3466。[4]H. Li、A. Shi、P. Ma等，高超声速非平衡流研究进展，载于：C. S. of Mechanics 、 B. I. of Technology（编），《2017年中国力学大会论文集：中国力学学会成立60周年纪念（B卷）》，中国空气动力研究与发展中心，中国北京，2017，第56–96页，中文。[5]A. A. Kane、R. K. Peetala，振动–解离耦合及反应数对高超声速非平衡流的影响，《流体工程学杂志》144 (8) (2022) 081207。doi:10.1115/1.4053650。[6]W. Dong，热化学非平衡效应对高超声速流影响的数值模拟与分析，硕士学位论文，北京航空航天大学，中文（1996）。[7]J. Wang，高速高温流中化学非平衡与热辐射耦合效应的数值研究，北京航空航天大学，中国北京，2017，中文。[8]J. Hao，高超声速流中热化学非平衡耦合效应的建模，北京航空航天大学，中国北京，2018，中文。[9]G. V. Candler，高超声速流中的速率效应，《流体力学年度评论》51 (1) (2019) 379–402。[10]J. Appleton、K. Bray，非平衡等离子体的守恒方程，《流体力学杂志》20 (4) (1964) 659–672。[11]C. Park，电离空气双温动力学模型的评估，《热物理与热传递》3 (3) (1989) 233–244。[12]C. Park、W. Griffith，非平衡高超声速气动热力学，《今日物理》44 (2) (1991) 98–98。doi:10.1063/1.2809999。[13]S. Li、Z. Sun、B. Zha、Y. Zhu、Y. Ding、Y. Xia，一类用于可压缩流的时空优化有限差分格式，具有自适应色散和临界自适应耗散，《计算物理学杂志》474 (2023) 111821。[14]S. Li、Y. Hu、Z. Sun、Y. Shi、K. Mao，一种基于全离散格式最优谱特性的高分辨率有限体积格式，具有最小色散和自适应耗散，《计算机与流体》233 (2022) 105226。[15]X. He、K. Wang、T. Liu、Y. Feng、B. Zhang、W. Yuan、X. Wang，HODG：用于求解可压缩Euler方程和纳维–斯托克斯方程的高阶不连续Galerkin方法——一个开源组件化开发框架，《计算机物理学通讯》286 (2023) 108660。[16]K. Xu，用于非定常可压缩流模拟的气体动理学格式，《计算流体动力学》年度讲座系列，第29届，比利时罗德-圣热内斯（1998）。[17]T. Xiao、K. Xu、Q. Cai，一种用于多尺度和多组分流输运的统一气体动理学格式，《应用数学和力学》40 (3) (2019) 355–372。[18]C. Liu、G. Zhou、W. Shyy、K. Xu，计算流体动力学的限制原理，《激波》29 (8) (2019) 1083–1102。[19]L. Pan、F. Zhao、K. Xu，采用WENO重构的高阶ALE气体动理学格式，《计算物理学杂志》417 (2020) 109558。[20]Q. Li，一种改进的多材料流气体动理学格式，《计算物理通讯》27 (1) (2020) 145–166。[21]L. Pan、J. Li、K. Xu，高阶Euler求解器的若干基准测试算例，《数值数学：理论、方法与应用》10 (4) (2017) 711–736。[22]K. Xu，《计算流体动力学直接建模：统一气体动理学格式的构建与应用》，第4卷，World Scientific，2014。[23]K. Xu、Z. Li，滑移流态下的微通道流：气体动理学BGK-Burnett解

’《流体力学杂志》513（2004）87–110。

[24]K. Xu, C. Liu，气体动力学建模与计算的一种新范式，《流体物理》29 (2) (2017). [25]S. Hou, Z. Li, X. Jiang, S. Zeng，采用气体动理学统一算法对二维微通道流动进行数值研究，《计算物理通讯》23 (5) (2018) 1393–1414. [26]J. Li, Q. Li, K. Xu，无黏可压缩流模拟中广义黎曼求解器与气体动理学格式的比较，《计算物理学杂志》230 (12) (2011) 5080–5099. [27]K. Xu，一种适用于含源项浅水方程的平衡保持气体动理学格式，《计算物理学杂志》178 (2) (2002) 533– 562.[28]K. Xu, L. Martinelli, A. Jameson，气体动理学有限体积方法、通量矢量分裂与人工扩散，《计算物理学杂志》120 (1) (1995) 48–65. [29]Z.-H. Li, H.-X. Zhang，航天器再入过程中三维复杂流动的气体动理学数值研究，《计算物理学杂志》228 (4) (2009) 1116–1138. [30]L. Tang, Y. Zheng, D. Liu，高超声速等离子体气动问题的气体动理学格式，载于：AIAA/CIRA第13届国际航天飞机与高超声速系统及技术会议，2005，第3220页。 [31]W. Liao, L. Luo, K. Xu，连续介质及近连续介质高超声速流的气体动理学格式，《航天器与火箭》44 (6) (2007) 1232–1240. [32]J. C. Ong, A. Omar, W. Asrar, Z. Zaludin，用于高超声速流模拟的气体动理学BGK格式，载于：第44届AIAA航空航天科学会议及展览，2006，第990页。 [33]Q. Li, S. Fu, K. Xu，气体动理学格式及其动理学边界条件在高超声速流中的应用，AIAA期刊43 (10) (2005) 2170– 2176. [34]Q. Li, K. Xu, 一种高阶气体动理学纳维–斯托克斯流动求解器，《计算物理学杂志》229 (19) (2010) 6715–6731. [35]G. Cao, H. Su, J. Xu, K. Xu，用于湍流模拟的隐式高阶气体动理学格式，《航空航天科学与技术》92 (2019) 958– 971.[36]G. Cao, L. Pan, K. Xu，用于超声速各向同性湍流的三维高阶气体动理学格式 I：直接数值模拟的判据，《计算机与流体》192 (2019) 104273. [37]G. Cao, L. Pan, K. Xu，用于超声速各向同性湍流的三维高阶气体动理学格式 II：可压缩Ksgs预算的粗粒化分析，《计算物理学杂志》439 (2021) 110402.[38]G. Kumar, S. S. Girimaji, J. Kerimo，用于可压缩转捩与湍流直接模拟的WENO增强气体动理学格式，《计算物理学杂志》234 (2013) 499–523. [39]M. Righi，一种改进的湍流气体动理学格式，《计算物理学通讯》16 (1) (2014) 239–263. [40] Q. Li, S. Tan, S. Fu, K. Xu，采用气体动理学BGK格式进行可压缩湍流数值模拟，载于：第13届亚洲流体力学大会，孟加拉国达卡，2010，第12–17页。 [41]Q. Li, S. Fu，高阶精度气体动理学格式与湍流模拟，《中国科学：物理学力学天文学》44 (3) (2014) 278. [42]S. Tan, Q. Li, S. Fu，用于多尺度湍流模拟的气体动理学格式，载于：《混合RANS-LES建模进展：第6届混合RANS-LES方法研讨会论文集》，2016年9月26–28日，法国斯特拉斯堡，第6卷，施普林格，2018，第135–142页。 [43]S. Tan, Q. Li, S. Fu, S. Zeng，采用气体动理学BGK格式进行湍流工程模拟，载于：《AIP会议论文集》，第1376卷，美国物理学会，2011，第78–80页。 [44]K. Xu, E. Josyula，多平动温度模型及其激波结构解，《物理评论E》71 (5) (2005). doi:10.1103/PhysRevE.71.056308. [45]K. Xu, H. Liu, J. Jiang，用于连续介质及近连续介质流动的多温度动力学模型，《流体物理》19 (1) (2007). [46]K. Xu, L. Tang，氮气激波结构的非平衡巴特纳加–格罗斯–克鲁克模型，《流体物理》16 (10) (2004) 3824–3827. doi: 10.1063/1.1783372.[47] K. Xu, E. Josyula，非平衡激波结构计算的连续介质表述，《计算物理学通讯》1 (3) (2006) 425–448.

[48]K. Xu, X. He, C. Cai，用于高超声速非平衡流计算的多温度动力学模型与气体动理学方法，《计算物理学杂志》227 (14) (2008) 6779–6794. doi:10.1016/j. jcp.2008.03.035. [49]G. Cao, H. Liu, K. Xu，三维非平衡多温度流动的物理建模与数值研究，《流体物理》30 (12) (2018). [50]C. Cai, D. D. Liu, K. Xu，用于激波计算的一维多温度气体动理学巴特纳加–格罗斯–克鲁克格式，AIAA期刊46 (5) (2008) 1054–1062. doi:10.2514/1.27432. [51]H. Liu, G. Cao, W. Chen，用于IV型激波/激波相互作用的多温度气体动理学格式，《计算物理通讯》(2021) 853. [52]G. Cao, Y. Shi, K. Xu, S. Chen，超声速三温度二氧化碳湍流槽道流的建模与模拟，《流体物理》34 (12) (2022). doi:10.1063/5.0129353. [53]G. Benettin, A. Carati, G. Gallavotti，绝热不变量的Jeans–Landau–Teller近似的严格实现，《非线性》10 (2) (1997) 479. doi:10.1088/0951-7715/10/2/011. [54]P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook，气体碰撞过程模型。I. 带电和中性单组分系统中的小振幅过程，《物理评论》94 (3) (1954) 511–525. doi:10. 1103/PhysRev.94.511. [55]G. A. Bird，《分子气体动力学与气体流动的直接模拟》，牛津大学出版社，1994. doi:10.1093/oso/ 9780198561958.001.0001.[56]Z. Wang, H. Yan, Q. Li, K. Xu，适用于具有平动、转动和振动模式的双原子分子流的统一气体动理学格式，《计算物理学杂志》350 (2017) 237–259. [57]S. Chapman, T. G. Cowling，《非均匀气体数学理论》第3版，剑桥大学出版社，剑桥，1970. [58] W. Sutherland，LII. 气体黏度与分子力，《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学杂志》36 (223) (1893) 507–531. [59]K. Xu，纳维–斯托克斯方程的气体动理学BGK格式及其与人工耗散和Godunov方法的联系，《计算物理学杂志》171 (1) (2001) 289–335. doi:10.1006/jcph. 2001.6790.[60]X. Ji, W. Shyy, K. Xu，一种适用于三维混合非结构网格的基于梯度压缩的紧致高阶气体动理学格式，《国际计算流体动力学杂志》35 (7) (2021) 485–509.

[61]D. A. Lockerby、J. M. Reese、D. R. Emerson、R. W. Barber，稀薄气体计算中固体壁面的速度边界条件，《物理评论E—统计、非线性与软物质物理》70 (1) (2004) 017303。[62]R. Maccormack，采用连续介质方法研究高超声速过渡流中的非平衡效应，载于：第27届航空航天科学会议，1989，页461。[63]R. Maccormack、D. Chapman，连续介质极限附近的计算流体力学，载于：第8届计算流体力学会议，1987，页1115。[64]M. A. Saad，《可压缩流动》，恩格尔伍德克利夫斯（1985）。[65]H. W. Liepmann、A. Roshko，《气体动力学基础》，Courier Corporation，2001。[66]W. G. Vincenti、C. H. Kruger Jr、T. Teichmann，《物理气体动力学导论》，美国物理学会，1966。[67] C. Guo，激波层厚度的计算，硕士学位论文，内蒙古大学，中文（2007）。doi:10.7666/d.y1156438。[68]A. J. Lofthouse，利用直接模拟蒙特卡罗和纳维–斯托克斯模型研究非平衡高超声速气动热力学，博士学位论文（2008）。URL https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027 58370 69 42。/ I. D. Boyd、G. Chen、G. V. Candler，预测过渡性高超声速流中连续介质流体方程的失效，《流体物理》7 (1) (1995) 210–219。[70]A. J. Lofthouse、I. D. Boyd、M. J. Wright，连续介质失效对高超声速气动热力学的影响，《流体物理》19 (2) (2007)。[71]J. Martinez Schramm、K. Hannemann、W. Beck、S. Karl，在HEG高焓流中测得的圆柱激波层密度剖面，载于：第22届AIAA空气动力学测量技术与地面测试会议，2002，页2913。[72]L. Hua，《采用并行计算的高超声速滑移流气动热力学数值模拟》，国防工业出版社，北京，2013，中文。[73]B. Edney，入射激波作用下高超声速钝体的异常传热与压力分布，报告，Flygtekniska Forsoksanstalten，斯德哥尔摩（瑞典）（1968）。[74]T. Hedde、D. Guffond，ONERA三维结冰模型，《AIAA期刊》33 (6) (1995) 1038–1045。[75]J. Thibert、D. Arnal，面向未来超声速运输机的ONERA空气动力学研究综述，《航空航天科学进展》36 (8) (2000) 581–627。