arXiv:2601.01111v1 [math.FA] 3 Jan 2026

子空间相位与范数恢复

TIN T. TRAN 和 PHUNG T.HUYNH（谨
以此文纪念 PETER G. CASAZZA）

Abstract. 本文研究子空间的相位与范数恢复。我们首先考察超平面的范数恢复。我们证明，如果 N超平面 $\{\varphi_i^{\perp}\}_{i=1}^{N} \subset \mathbb{R}^N$ 能够实现范数恢复，且向量 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$线性无关，那么这些向量必定构成 $\mathbb{R}^N$的一组标准正交基。接着，我们介绍若干具有相位与范数恢复性质的子空间新性质。特别地，我们完整分类了能够实现范数恢复的两个真子空间。已知，当 $M < 2N-1$时， $\mathbb{R}^N$ 中范数可恢复框架 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ 的集合在所有 M元框架构成的集合中并不稠密。我们将这一结果推广到子空间。此外，我们还给出了相位与范数恢复领域若干基本结果的其他证明。

Keywords: phase retrieval, norm retrieval, full spark, finite frames

1. 引言与预备知识

希尔伯特空间框架由 Duffin 和 Schaeffer 于 1952 年提出， [15] 旨在解决非调和傅里叶级数中的基本问题。然而，此后数十年间，他们的思想在这一领域之外并未引起广泛关注。1986 年，Daubechies 等人发表了具有里程碑意义的论文， [13] 这一局面由此发生了巨大改变，框架理论也随之受到广泛关注。从那时起，框架理论逐渐发展成为一种强大的工具，在纯数学和应用数学的诸多领域都有广泛应用。

定义 1.1. 设 $\mathcal{H}^N$ 为一个维数为N的实或复希尔伯特空间。若存在常数 $0 < A \le B < \infty$ 使得 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ 中的向量序列是 $\mathcal{H}^N$ 的一个框架，则称其为 $\mathcal{H}^N$ 的框架。

$$A\|x\|^2 \le \sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \le B\|x\|^2, \quad \textit{for all } x \in \mathcal{H}^N.$$

常数 A 和 B 分别称为下框架界和上框架界。如果 $A = B$ ，则称其为 A-紧框架；如果 $A = B = 1$，则称其为帕塞瓦尔框架。请注意，在有限维希尔伯特空间中，框架就是该空间的一个张成集。关于框架理论的入门介绍，请参阅 [11, 12]。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 42C15.

信号重建是工程领域中的一项基本问题，应用范围广泛。主要挑战之一在于，信息部分丢失时仍须恢复信号。具体而言，相位信息的丢失会出现在语音识别 [5, 20, 21] 以及X射线晶体学和电子显微镜等光学应用中 [4, 17, 18], ，因此高效的相位恢复至关重要。希尔伯特空间框架语境下的相位恢复概念最早由Balan、Casazza和Edidin于2006年提出 [2], ，此后已发展成为一个活跃的研究领域；例如，参见 [1, 3, 6, 7, 16, 19], 等文献。

相位恢复已针对向量和投影进行了研究，通常是指通过冗余线性系统获得强度测量，并据此恢复信号的相位。另一个密切相关的研究领域是范数恢复，该概念最早由 Bahmanpour等人 [3],提出，关注如何根据强度测量的绝对值确定向量的范数。这一概念自然地出现在相位恢复的背景下，尤其是在考虑子空间集合及其正交补时。

定义 1.2. $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ 中的一族向量称为具有相位恢复（分别称为具有范数恢复）性质，若对于任意 x、$y \in \mathcal{H}^N$，条件

$$|\langle x, \varphi_i\rangle| = |\langle y, \varphi_i\rangle| \quad for\ all\ i \in [M]$$

意味着 $x = cy$ 存在某个标量 c，使得 $|c| = 1$ （分别为 $\|x\| = \|y\|$）。

在此定义及本文全文中，对于任意 $M \in \mathbb{N}$，我们用 $[M]$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, M\}$。

显然，相位恢复蕴含范数恢复。每个标准正交基都能实现范数恢复，但无法实现相位恢复。更一般地，任何包含紧框架的向量集都能保证范数恢复。

在实数情形下，补性质提供了相位恢复的一个基本刻画，正如 [2]中所确立的那样。

定义1.3。 若向量族 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M \subset \mathbb{R}^N$ 满足：对于每个指标集 $I \subset [M]$，以下两者之一成立，则称其具有补性质：

$$\mathrm{span}\{\varphi_i : i \in I\} = \mathbb{R}^N \quad or \quad \mathrm{span}\{\varphi_i : i \in I^c\} = \mathbb{R}^N.$$

定理1.4 ([2])。 向量族 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中实现相位恢复，当且仅当它具有补性质。

由此可知，如果向量集 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ 在 $\mathbb{R}^N$中实现相位恢复，那么$M \geq 2N - 1$。注意，在复数情形下，补性质是相位恢复的必要条件（但不是充分条件），参见 [2]。

满 spark 是框架理论中向量的另一个重要概念。

定义 1.5。 给定 $\mathcal{H}^N$ 中的向量族 $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$，$\Phi$ 的 ***spark*** 定义为其最小线性相关子集的基数

Φ。当 $spark(\Phi) = N+1$ 时，每个大小为 N 的子集都是线性无关的，在这种情况下，Φ 被称为满 *spark*。

根据定义可知，含有 $M \geq 2N-1$个向量的满 spark 框架具有补性质，因此能够实现相位恢复。此外，如果 $M = 2N-1$，那么补性质显然意味着满 spark。

在某些情况下，例如X射线晶体学中的晶体孪晶，必须根据高维分量的范数重建 [14],信号。这促使了投影相位恢复的发展。

定义 1.6。设 $\{W_i\}_{i=1}^M$ 是 $\mathcal{H}^N$ 的一个子空间族，其对应的正交投影为 $\{P_i\}_{i=1}^M$。如果对于任意满足下列条件的 $x, y \in \mathcal{H}^N$，我们称 $\{W_i\}_{i=1}^M$（或 $\{P_i\}_{i=1}^M$）能够实现相位恢复（分别为范数恢复）：

$$\|P_i x\| = \|P_i y\| \quad for\ all\ i \in [M],$$

那么存在某个标量 c，使得 $x = cy$ 成立，其中 $|c| = 1$（分别为 $\|x\| = \|y\|$）。

以下是投影相位恢复中的一个基本结果。

定理 1.7（Edidin, [16]）。一族正交投影 $\{P_i\}_{i=1}^M$在 $\mathbb{R}^N$ 中实现相位恢复，当且仅当对于每个非零向量 $x \in \mathbb{R}^N$，张成空间$\{P_i x\}_{i=1}^M = \mathbb{R}^N$。

给定 $\mathcal{H}^N$ 的子空间 $\{W_i\}_{i=1}^M$，它们能够实现相位恢复，但其正交补族 $\{W_i^\perp\}_{i=1}^M$不一定也能实现相位恢复。以下结果表明，范数恢复恰好是使相位恢复能够传递到正交补所需的条件。

定理 1.8（[3]）。设 $\{W_i\}_{i=1}^M$ 是 $\mathcal{H}^N$ 中能够实现相位恢复的子空间。那么，$\{W_i^\perp\}_{i=1}^M$ 能够实现相位恢复，当且仅当它能够实现范数恢复。

本文继续研究通过子空间实现相位与范数恢复。本文其余部分安排如下。第 2 节研究通过超平面实现范数恢复。第 3 节介绍实现相位与范数恢复的子空间的若干新性质。已知，当 $M < 2N-1$时，$\mathbb{R}^N$ 中的范数可恢复框架 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ 在所有 M元框架的集合中并不稠密。我们将这一结果推广到子空间的情形。本节还给出了相位与范数恢复中若干基本结果的其他证明。

2. Properties of hyperplanes doing norm retrieval

本节关注其正交补能够进行范数恢复的向量集。显然，若一个集合包含一组标准正交基，则该集合及其正交补都能进行范数恢复。以下定理见于 [10]。

定理 2.1 ([10])。 如果向量集 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ 线性无关，那么其正交补 $\{\varphi_i^\perp\}_{i=1}^{N-1}$无法进行范数恢复。

以下是定理 2.1 的直接推论。

推论 2.2。 设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M \subset \mathbb{R}^N$ 是一组非零向量。如果超平面集合 $\{\varphi_i^\perp\}_{i=1}^M$ 具有范数恢复性质，那么它要么张成 $\mathbb{R}^N$，要么是线性相关的。

现在我们考虑独立集恰好包含 N 个向量的情形。首先需要以下引理。

引理 2.3。 设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 是一组线性无关的单位向量，且超平面 $\{\varphi_i^\perp\}_{i=1}^N$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中具有范数恢复性质。若 x 和 y 是 $\mathbb{R}^N$ 中满足以下条件的向量

$$\langle x, \varphi_i\rangle = \pm 1 \text{ and } \langle y, \varphi_i\rangle = \pm 1 \text{ for all } i \in [N],$$

则 $\|x\| = \|y\|$。

证明。 令 P_i 为到 $\varphi_i^\perp, i \in [N]$ 上的正交投影。那么我们有

$$x = P_1 x \pm \varphi_1 = P_2 x \pm \varphi_2 = \cdots = P_N x \pm \varphi_N,$$

and

$$y = P_1 y \pm \varphi_1 = P_2 y \pm \varphi_2 = \cdots = P_N y \pm \varphi_N.$$

此外,

$$\alpha^2 := \|P_1 x\|^2 = \|P_2 x\|^2 = \cdots = \|P_N x\|^2 = \|x\|^2 - 1,$$
$$\beta^2 := \|P_1 y\|^2 = \|P_2 y\|^2 = \cdots = \|P_N y\|^2 = \|y\|^2 - 1,$$

其中 $\alpha, \beta > 0$。

注意

$$\|P_i(x/\alpha)\|^2 = \|P_i(y/\beta)\|^2 = 1 \text{ for all } i \in [N].$$

根据我们的范数恢复假设， $\|x/\alpha\|^2 = \|y/\beta\|^2$. 还要注意

$$\|x/\alpha\|^2 - 1/\alpha^2 = 1 = \|y/\beta\|^2 - 1/\beta^2.$$

因此， $\alpha = \beta$ 于是 $\|x\| = \|y\|$。 □

定理 2.4。 如果超平面 $\{\varphi_i^\perp\}_{i=1}^N$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中实现范数恢复，且 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 是线性无关的单位向量集，那么 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 必须是 $\mathbb{R}^N$ 的标准正交基。

证明。 定义

$$L = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) : \lambda_i = \pm 1, i = 1, 2, \ldots, N-1, \lambda_N = 1\}.$$

对于每个 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_N) \in L$，令 $x(\lambda)$ 为以下线性方程组的（唯一）解:

$$\langle x, \varphi_i\rangle = \lambda_i, \quad i \in [N].$$

由引理 2.3 可知，对于所有 $\lambda, \lambda' \in L$， $\|x(\lambda)\| = \|x(\lambda')\|$ 。

设 $\underline{x} = \sum_{\lambda \in L} x(\lambda)$。我们将证明

$$\overline{x} \perp \varphi_i \text{ and } \overline{x} \in \operatorname{span}\{\varphi_j : j \in [N], j \neq i\}$$

对所有 $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

事实上，不失一般性，我们可以假设 $i = 1$。令

$$K = \{(\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_N) : \mu_j = \pm 1, j = 2, \ldots, N-1, \mu_N = 1\}.$$

注意，$L = \{(1, \mu), (-1, \mu) : \mu = (\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_N) \in K\}$。对于每个 $\mu \in K$，我们有

$$\langle x(1, \mu), \varphi_1 \rangle = 1 \text{ and } \langle x(-1, \mu), \varphi_1 \rangle = -1.$$

因此，$x(1, \mu) + x(-1, \mu) \perp \varphi_1$ 因此，

$$\overline{x} = \sum_{\mu \in K} (x(1, \mu) + x(-1, \mu)) \perp \varphi_1.$$

此外，对于每个 $\mu \in K$，我们有

$$\langle x(1, \mu), \varphi_j \rangle = \langle x(-1, \mu), \varphi_j \rangle = \mu_j, \text{ for all } j = 2, \ldots, N.$$

这意味着

$$x(1, \mu) - x(-1, \mu) \perp \varphi_j, \text{ for all } j = 2, \ldots, N.$$

由于 $\|x(1, \mu)\| = \|x(-1, \mu)\|$，因此对于所有 $\mu \in K$，$x(1, \mu) + x(-1, \mu)$ 都与 $x(1, \mu) - x(-1, \mu)$ 正交。因此，对于所有 $\mu \in K$，$x(1, \mu) + x(-1, \mu) \in$张成空间$\{\varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$，所以

$$\overline{x} = \sum_{\mu \in K} (x(1, \mu) + x(-1, \mu)) \in \operatorname{span}\{\varphi_2, \ldots, \varphi_N\}.$$

这就完成了该断言的证明。

由于 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 线性无关，x可以唯一表示为向量 φ_i 的线性组合。结合 $\underline{x} \in$张成空间$\{\varphi_j$这一事实：$j \in [N], j \neq i\}$ 对于所有 $i = 1, 2, \ldots N-1,$ ，我们必有$x = \alpha \varphi_N$，其中 α 为某个标量。

注意

$$\alpha = \langle \overline{x}, \varphi_N \rangle = \sum_{\lambda \in L} \langle x(\lambda), \varphi_N \rangle = \sum_{\lambda \in L} 1 = 2^{N-1} \neq 0,$$

并且对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots, N-1$，$x \perp \varphi_i$。因此，$\varphi_N$与所有其他 φ_i正交。显然，重复此论证可得，对于所有 $i \neq j$，$\varphi_i \perp \varphi_j$。□

值得一提的是，在 $\mathbb{R}^N$中可以用三个超平面实现范数恢复。此前的文献[10]中已陈述这一结果；然而，其中给出的证明并不清楚，因为它没有说明如何从投影范数重构 $\|x\|$。特别是，他们线性组合中的系数未知。我们将为这一结果给出一个正确且完整的证明。

定理 2.5. 在 $\mathbb{R}^N$ 中，三个余维一的真子空间可以实现范数恢复。

证明. 设 $\{e_i\}_{i=1}^N$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的标准正交基，并定义

$$\varphi_1 = e_1, \quad \varphi_2 = e_2, \quad \varphi_3 = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}.$$

令 P_i 表示到 $\varphi_i^\perp$, $i = 1,2,3$ 的正交投影。我们将证明族 $\{\varphi_i^\perp\}_{i=1}^3$ 能够实现范数恢复。

令 $x = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ 并设

$$S := \sum_{i=3}^{N} a_i^2.$$

于是我们有

$$\|P_1 x\|^2 = a_2^2 + S, \tag{1}$$

$$\|P_2 x\|^2 = a_1^2 + S, \tag{2}$$

$$\|P_3 x\|^2 = \frac{(a_1 + a_2)^2}{2} + S. \tag{3}$$

用 (2) 减去 (1) 得到

$$\|P_2 x\|^2 - \|P_1 x\|^2 = a_1^2 - a_2^2. \tag{4}$$

此外，由 (1)、(2) 和 (3) 可得

$$\begin{aligned} \|P_1 x\|^2 + \|P_2 x\|^2 - 2\|P_3 x\|^2 &= a_1^2 + a_2^2 - (a_1 + a_2)^2 \\ &= -2a_1 a_2. \end{aligned}$$

因此

$$a_1 a_2 = \|P_3 x\|^2 - \frac{1}{2}(\|P_1 x\|^2 + \|P_2 x\|^2). \tag{5}$$

由 (4) 和 (5) 可知，$a_1^2 - a_2^2$ 和 $a_1 a_2$ 都由投影范数确定。因此，

$$(a_1^2 + a_2^2)^2 = (a_1^2 - a_2^2)^2 + 4a_1^2 a_2^2$$

是确定的；又由于 $a_1^2 + a_2^2 \geq 0$，量 $a_1^2 + a_2^2$ 唯一确定。

由此可得

$$\|x\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + S = \frac{1}{2}\left(\|P_1 x\|^2 + \|P_2 x\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right),$$

它只取决于投影范数。因此，超平面 $\{\varphi_i^\perp\}_{i=1}^3$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中实现范数恢复。□

注 2.6. 三个超平面：$e_1^\perp, e_2^\perp$ 和 $\left((e_1 + e_2)/\sqrt{2}\right)^\perp$ 也能实现范数恢复。

以下内容给出了一种构造，其中这些向量及其正交补都能实现相位恢复。

定理 2.7。设 $\{e_i\}_{i=1}^N$ 和 $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的标准正交基，且二者合在一起构成一个全火花族。定义 $\varphi_i = e_i$，其中 $i = 1$取值为2、. . . 、 N；定义 $\varphi_{N+i} = \psi_i$，其中 $i = 1$取值为2、. . . 、 $N-1$. 。那么，$\{\varphi_i\}_{i=1}^{2N-1}$和$\{\varphi_i^{\perp}\}_{i=1}^{2N-1}$都能实现相位恢复。

证明。如果我们将族 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{2N-1}$ 划分为两个集合，那么其中一个集合必定至少包含 N 个元素。根据全火花性质，这个子集张成 $\mathbb{R}^N$。换句话说，这个族满足补性质，因此能够实现相位恢复。

令 P_i 为到 $\varphi_i^{\perp}$ 的正交投影，其中 $i \in [N]$。注意，对于所有 $x \in \mathbb{R}^N$，我们有

$$\|P_i x\|^2 = \sum_{j \neq i} |\langle x, e_j \rangle|^2,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{N} \|P_i x\|^2 = (N-1)\|x\|^2.$$

由此可得，$\{\varphi_i^{\perp}\}_{i=1}^{2N-1}$ 能够实现范数恢复，进而根据定理 1.8 实现相位恢复。□

3. Phase and Norm retrieval by subspaces

本节将介绍关于通过子空间进行相位与范数恢复的新结果。我们首先为一类执行相位恢复的子空间分类结果提供一种替代证明。下面的引理是该证明的关键组成部分，适用于实数与复数情形。

引理 3.1。设 W 是 $\mathcal{H}^N$ 的 p 维子空间。若 x、$y \in W$ 满足 $\|x\| = \|y\|$，则存在 W 的一个标准正交基 $\{\varphi_i\}_{i=1}^p$，使得对于所有 $i \in [p]$，都有 $|\langle x$、$\varphi_i\rangle| = |\langle y$、$\varphi_i\rangle|$。

证明。若 $x = y$ 或 $p = 1$，则该陈述是显然的。因此，我们假设 $x \neq y$ 且 $p \geq 2$。

由于 $p \geq 2$，我们可以选择一个单位向量 $\varphi_1 \in W \cap (x-y)^{\perp}$。于是

$$\langle x, \varphi_1 \rangle = \langle y, \varphi_1 \rangle.$$

若 $p > 2$，我们选取一个单位向量 $\varphi_2 \in W \cap \{\varphi_1, x-y\}^{\perp}$。于是

$$\varphi_2 \perp \varphi_1 \text{ and } \langle x, \varphi_2 \rangle = \langle y, \varphi_2 \rangle.$$

继续这一过程，我们得到一个正交归一集 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{p-1} \subset W$，满足 $\langle x, \varphi_i \rangle = \langle y, \varphi_i \rangle$ 对所有 $i = 1, 2, \ldots, p-1$ 均成立。

最后，选取一个单位向量 φ_p，使其属于 W，且与所有向量$\{\varphi_i\}_{i=1}^{p-1}$正交。则 $\{\varphi_i\}_{i=1}^p$是 W的标准正交基。此外，

$$\sum_{i=1}^{p} |\langle x, \varphi_i \rangle|^2 = \|x\|^2 = \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{p} |\langle y, \varphi_i \rangle|^2.$$

由此可得 $|\langle x,\ \varphi_p\rangle| = |\langle y,\ \varphi_p\rangle|$。证明完毕。 □

定理 3.2 ([7], [8])。设 $\{W_i\}_{i=1}^M$ 是 $\mathcal{H}^N$ 的子空间，其对应的正交投影为 $\{P_i\}_{i=1}^M$。以下命题等价：

(1) $\{W_i\}_{i=1}^M$ 具有相位恢复性质。(2) </style}若 是 的标准正交基，则集合，$_{i=1}^{\overline{N}_i}{}_{,\ j=1}$ 具有相位恢复性质。

证明。(1) ⇒ (2)：假设 $x,\ y \in \mathcal{H}^N$ 满足对所有 $i,\ j$ 均有 $|\langle x,\ \varphi_{ij}\rangle| = |\langle y,\ \varphi_{ij}\rangle$。那么对每个 $i \in [M]$，有

$$\|P_i x\|^2 = \sum_{j=1}^{N_i} |\langle x, \varphi_{ij}\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{N_i} |\langle y, \varphi_{ij}\rangle|^2 = \|P_i y\|^2.$$

由 (1) 可知，对于某个标量 c，有 $x = cy$，且 $|c| = 1$。

(2) ⇒ (1)：设 $x,\ y \in \mathcal{H}^N$ 对所有 $i \in [M]$ 满足 $\|P_i x\| = \|P_i y\|$。由引理 3.1，存在 W_i 的标准正交基 $\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{N_i}$，使得对所有 $i,\ j$ 均有 $|\langle x,\ \varphi_{ij}\rangle| = |\langle y,\ \varphi_{ij}\rangle|$。由于 (2) 假设集合 $\{\varphi_{ij}\}^{M,\ i=1}{}^{N_i}_{,\ j=1}$具有相位恢复性质，因此得出 $x = cy$，且 $|c| = 1$。□

注记 3.3. 在 [7], 中，作者给出了实数情形下定理 3.2 的证明，而复数情形下的证明见 [8]。然而，这些证明相当技术性，尤其是在复数情形下。

以下定理见 [9], ，但为完整起见，我们将在此给出证明。

定理 3.4. 给定 $\mathbb{R}^N$上的正交投影 $\{P_i\}_{i=1}^M$，以下命题等价。

(1) $\{P_i\}_{i=1}^M$ 具有范数恢复性质。(2) 对于每个 $x \in \mathbb{R}^N$，都有 [张成空间$\{P_i x\}_{i=1}^M]^\perp \subset x^\perp$。(3) 对于每个 $x \in \mathbb{R}^N$，都有 $x \in$ 张成空间$\{P_i x\}_{i=1}^M$。

证明. (1) ⇒ (2)：令 $y \in$ [张成$\{P_i x\}_{i=1}^M]^\perp$。于是

$$\langle P_i y, P_i x\rangle = \langle y, P_i x\rangle = 0, \quad \text{for all } i \in [M].$$

令 $u = x + y, v = x - y$，则

$$\|P_i u\|^2 = \langle P_i x + P_i y, P_i x + P_i y\rangle = \|P_i x\|^2 + \|P_i y\|^2,$$
$$\|P_i v\|^2 = \langle P_i x - P_i y, P_i x - P_i y\rangle = \|P_i x\|^2 + \|P_i y\|^2,$$

对所有 i 均成立。因此，$\|u\| = \|v\|$，所以 $y \perp x$。

(2) ⇒ (1)：假设 $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ 对所有 i 均满足 $\|P_i x\| = \|P_i y\|$。令 $u = x + y,\ v = x - y$，则

$$\langle u, P_i v\rangle = \langle P_i u, P_i v\rangle = \langle P_i x + P_i y, P_i x - P_i y\rangle = 0, \quad \text{for all } i \in [M].$$

因此，$u \perp$ 张成空间$\{P_i v\}_{i=1}^M$。由于 [张成空间$\{P_i v\}_{i=1}^M]^\perp \subset v^\perp$，可得 $u \perp v$，进而 $\|x\| = \|y\|$。

(2) ⇔ (3)：这立即可得。 □

在 [19], 中，作者利用框架元素的张成空间性质，对 $\mathbb{R}^n$ 中范数可恢复框架进行了重要分类。作为定理 3.4 的推论，我们给出该结果的另一种证明。

定理 3.5. 框架 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ 对于 $\mathbb{R}^N$ 具有范数恢复性质，当且仅当对于 $[M]$的任意划分 $\{I_1, I_2\}$， [张成空间$\{\varphi_i\}_{i\in I_1}]^\perp \perp$ [张成空间$\{\varphi_i\}_{i\in I_2}]^\perp$。

证明。令 P_i 为 $i \in [M]$的正交投影到 span$\{\varphi_i\}$。假设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$在 $\mathbb{R}^N$中具有范数恢复性质。令 $\{I_1, I_2\}$为 $[M]$的任意划分。对于任意 $x \in [\text{span}\{\varphi_i\}_{i\in I_1}]^\perp$，由定理 3.4 可得

$$x \in \text{span}\{P_i x\}_{i=1}^M = \text{span}\{P_i x\}_{i\in I_2} \subset \text{span}\{\varphi_i\}_{i\in I_2}.$$

因此，我们得出 $[\text{span}\{\varphi_i\}_{i\in I_1}]^\perp \subset \text{span}\{\varphi_i\}_{i\in I_2}$，从而完成了一个方向的证明。

反过来，假设对于 $[M]$ 的任意划分 $\{I_1, I_2\}$， $[\text{span}\{\varphi_i\}_{i\in I_1}]^\perp \perp [\text{span}\{\varphi_i\}_{i\in I_2}]^\perp$。令 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $y \in [\text{span}\{P_i x\}_{i=1}^M]^\perp$。定义指标集

$$I := \{i \in [M] : P_i x = 0\}.$$

于是，对于所有 $i \in I$ 和 $y \in [\text{span}\{P_i x\}_{i\in I^c}]^\perp = [\text{span}\{\varphi_i\}_{i\in I^c}]^\perp.$ ，都有 $x \perp \varphi_i$。根据假设，

$$[\text{span}\{\varphi_i\}_{i\in I}]^\perp \perp [\text{span}\{\varphi_i\}_{i\in I^c}]^\perp,$$

这意味着 $y \perp x$。根据定理 3.4， $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ 具有范数恢复性质。 □

命题 3.6。 假设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中具有范数恢复性质。那么对于每个 $j \in [M]$，若 $\varphi_j \notin$ 张成空间$_{i\neq j}\{\varphi_i\}$，则 φ_j 与所有其他 φ_i 正交。因此，一个基在 $\mathbb{R}^N$ 中具有范数恢复性质，当且仅当它是正交基。

证明。 由于 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ 具有范数恢复性质，它张成 $\mathbb{R}^N$。因此，若 $\varphi_j \notin$张成$_{i\neq j}\{\varphi_i\}$，则 span$_{i\neq j}\{\varphi_i\}$ 是 $\mathbb{R}^N$中的一个超平面。根据定理 3.5，该超平面是 $\varphi_j^\perp$。结论得证。 □

众所周知，对向量应用正交投影时，相位恢复和范数恢复性质都会保留。然而，如果这些向量仅对某个子空间具有范数恢复性质，这一性质可能不再成立。

例 3.7。 在 $\mathbb{R}^3$中，考虑

$$W = \text{span}\left\{u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), u_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

设 $\{e_i\}_{i=1}^3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基，令 P 为到 span$\{e_1, e_2\}$上的正交投影。则

$$Pu_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \quad Pu_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right).$$

由于 u_1 和 u_2 正交，因此它们对 W进行范数恢复。然而， Pu_1和 Pu_2不正交，因此它们不能对 $P(W)$ =张成空间$\{e_1, e_2\}$进行范数恢复。

注意， $P: W \to P(W)$ 是可逆的。因此，这个例子也表明，范数恢复在可逆算子作用下并不保持。

以下重要的分类来自 [10]。

定理 3.8 （[10]）。 设 $\{P_i\}_{i=1}^M$ 是$\mathbb{R}^N$的子空间$\{W_i\}_{i=1}^M$ 上的投影。以下各项等价:

（1）$\{P_i\}_{i=1}^M$ 实现范数恢复。（2）给定 W_i 的任意标准正交基 $\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{N_i}$ 以及任意子集$S \subset \{（i、 j）: 1 \le i \le M、 1 \le j \le N_i\}$ 则，

$$\operatorname{span}\{\varphi_{ij}\}_{(i,j)\in S}^{\perp} \perp \operatorname{span}\{\varphi_{ij}\}_{(i,j)\in S^c}^{\perp}.$$

（3）对于 W_i的任意标准正交基 $\{\varphi_{ij}\}_{i=1}^{N_i}$ ， 向量 $\{\varphi_{ij}\}^{M、 i=1^{N_i}、 j=1}$实现范数恢复。

定理 3.8 的（3）要求对 W_i的每个标准正交基都成立。

例 3.9. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，令 $\{e_i\}_{i=1}^3$ 为标准正交基，并令$W_1 =$张成空间$\{e_1, e_3\}$ 以及 $W_2 =$张成空间$\{e_2, e_3\}$。令 $x =$(0，0，1) 和 $y =$(1，1，0)。那么

$$\|P_1 x\| = \|P_1 y\| = \|P_2 x\| = \|P_2 y\| = 1.$$

但是 $\|x\| = 1$ 和 $\|y\| = \sqrt{2}^{-} \neq \|x\|$。然而，向量集$\{e_1, e_3, e_2, e_3\}$ 显然具有范数恢复性质。

在 [10], 中，作者证明了如果 $\{W_i\}_{i=1}^M$ 对 $\mathbb{R}^N$具有范数恢复性质，那么 $\sum_{i=1}^M \dim(W_i) \ge N$。现在我们证明，如果等号成立，那么这些子空间必定两两正交。

定理 3.10. 设 $\{W_i\}_{i=1}^M$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的子空间，且满足 $\sum_{i=1}^M \dim(W_i) = N$。那么，$\{W_i\}_{i=1}^M$ 具有范数恢复性质，当且仅当这些子空间两两正交。

证明。 令 $\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{N_i}$为 $W_i, i \in [M]$的任意标准正交基。若子空间 $\{W_i\}_{i=1}^M$ 两两正交，则所有向量$\{\varphi_{ij}\}^{M,i=1^{N_i},j=1}$ 构成 $\mathbb{R}^N$ 的标准正交基，因此具有范数恢复性质。根据定理 3.8， $\{W_i\}_{i=1}^M$ 具有范数恢复性质。

反过来，若 $\{W_i\}_{i=1}^M$ 具有范数恢复性质，则向量$\{\varphi_{ij}\}^{M,i=1^{N_i},j=1}$ 具有范数恢复性质，因而张成 $\mathbb{R}^N$。由于 $\sum_{i=1}^M \dim(W_i) = N$，可知这些向量构成 $\mathbb{R}^N$的一组基。根据命题 3.6，这组基必定是标准正交基。因此，子空间 $\{W_i\}_{i=1}^M$ 两两正交。□

关于相位恢复，我们有以下定理。

定理 3.11. 设 $\{W_i\}_{i=1}^M$ 是能够实现相位恢复的 $\mathbb{R}^N$ 的子空间，并假设

$$\sum_{i=1}^{M} \dim(W_i) = 2N - 1.$$

那么 $W_i \cap W_j = \{0\}$，对所有 $i \neq j$ 均成立。

证明。 如果 $x \in W_i \cap W_j$ 是单位向量，那么我们可以分别为 W_i 和 W_j选取标准正交基$\{\varphi_{ik}\}_{k=1}^{N_i}$ 和 $\{\varphi_{jk}\}_{k=1}^{N_j}$，使得$\varphi_{i1} = \varphi_{j1} = x$。令 $\{\varphi_{\ell k}\}_{k=1}^{N_\ell}$ 为 W_ℓ 的任意一个标准正交基，对所有 $\ell \neq i,\ j$均成立。根据定理 3.2，所有向量 $\{\varphi_{\ell k}\}_{\ell=1,\ k=1}^{M,\ N_\ell}$ 组成的集合能够实现相位恢复。然而，该集合至多包含 $2N-2$ 个向量，这与在 $\mathbb{R}^N$中进行相位恢复至少需要 $2N-1$ 个向量这一事实相矛盾。□

定理 3.12。 设 $\{W_i\}_{i=1}^M$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中能够实现相位恢复（分别地，范数恢复）的子空间。若对所有 $i \in [M]$都有 $W_i = U_i \oplus V_i$，则子空间族 $\{U_i\}_{i=1}^M \cup \{V_i\}_{i=1}^M$ 在 $\mathbb{R}^N$中能够实现相位恢复（分别地，范数恢复）。

证明。 设 P_i, Q_i 和 R_i 分别为到 W_i, U_i 和 V_i 的正交投影，其中 $i \in [M]$。根据假设，对于所有 $i \in [M]$，有 $Q_i x \perp R_i x$。因此，如果

$$\|Q_i x\| = \|Q_i y\| \text{ and } \|R_i x\| = \|R_i y\| \text{ for all } i \in [M],$$

then

$$\|P_i x\|^2 = \|Q_i x + R_i x\|^2 = \|Q_i x\|^2 + \|R_i x\|^2 = \|Q_i y\|^2 + \|R_i y\|^2 = \|P_i y\|^2.$$

结论立即得出。 □

注 3.13。 上述定理的逆命题不成立。例如，设

$$W_1 = \text{span}\{e_1\}, W_2 = \text{span}\{e_2\}, W_3 = \text{span}\{e_3\}, W_4 = \text{span}\{e_3\},$$

其中 $\{e_i\}_{i=1}^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基。那么 $\{W_i\}_{i=1}^4$ 可以进行范数恢复，但 $\{W_1 \oplus W_3, W_2 \oplus W_4\}$ 无法进行范数恢复。

下面的定理完整地刻画了两个真子空间何时能够进行范数恢复。

定理 3.14。 $\mathbb{R}^N$ 的两个真子空间能够进行范数恢复，当且仅当它们互为正交补。

证明。 假设 W_1，W_2 是 $\mathbb{R}^N$ 的真子空间，其对应的正交投影为 P_1，P_2。如果它们互为正交补，那么显然它们可以进行范数恢复。

现在我们假设 $\{W_1, W_2\}$ 具有范数恢复性质。那么必有 $\dim(W_1) + \dim(W_2) \geq N$。反设 $\dim(W_1) + \dim(W_2) = p + q > N$。于是 $k := \dim(W_1 \cap W_2) > 0$。令 $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$为 $W_1 \cap W_2$的一组标准正交基，并将其扩充为 W_1的标准正交基 $\{e_1, \ldots, e_k, u_{k+1}, \ldots, u_p\}$ 以及 W_2的标准正交基 $\{e_1, \ldots, e_k, v_{k+1}, \ldots, v_q\}$。

由于 $\{W_1, W_2\}$ 具有范数恢复性质，因此向量集 $\{e_1, \ldots, e_k, u_{k+1}, \ldots, u_p, v_{k+1}, \ldots, v_q\}$ 在 $\mathbb{R}^N$中具有范数恢复性质。因此，根据命题 3.6，该向量集必为 $\mathbb{R}^N$的一组标准正交基。

Let

$$x = 2e_1 + u_{k+1} + v_{k+1} \text{ and } y = e_1 + 2u_{k+1} + 2v_{k+1}.$$

那么我们有

$$\|P_1 x\| = \|2e_1 + u_{k+1}\| = \sqrt{5} = \|e_1 + 2u_{k+1}\| = \|P_1 y\|,$$

and

$$\|P_2 x\| = \|2e_1 + v_{k+1}\| = \sqrt{5} = \|e_1 + 2v_{k+1}\| = \|P_2 y\|.$$

But

$$\|x\| = \sqrt{6} \neq \|y\| = 3.$$

这与 $\{W_1, W_2\}$ 进行范数恢复这一事实矛盾。

因此，我们证明了 $\dim(W_1) + \dim(W_2) = N$。由定理 3.10 即得结论。□

在 [1], 中，作者证明了 $\mathbb{R}^N$ 中的范数可恢复框架集合在所有 M 元框架构成的集合中不稠密，其中 $M < 2N - 1$。

定理 3.15 ([1])。设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个框架，满足 $M < 2N - 1$，但无法进行范数恢复。那么存在一个 $\epsilon > 0$，使得每当$\{\psi_i\}_{i=1}^M$ 是满足下列条件的向量时

$$\sum_{i=1}^{M} \|\psi_i - \varphi_i\| < \epsilon,$$

那么 $\{\psi_i\}_{i=1}^M$ 也无法进行范数恢复。

注 3.16。由于全火花框架在所有框架的集合中稠密，并且具有 $M \geq 2N-1$个元素的每个全火花框架都能进行相位恢复，因而也能进行范数恢复，所以该定理对 $M \geq 2N - 1$ 不成立。

现在我们将该定理推广到子空间。为此，我们需要一些引理。

引理 3.17。如果 $\|x\| = 1$ 且 $\|y - x\| < \epsilon$，则

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - x \right\| < 2\epsilon.$$

证明。我们计算：

$$1 - \epsilon < \|x\| - \|y - x\| \leq \|y\| \leq \|x\| + \|y - x\| < 1 + \epsilon.$$

Now

$$\begin{aligned} \left\| \frac{y}{\|y\|} - x \right\| &\leq \left\| \frac{y}{\|y\|} - y \right\| + \|y - x\| \\ &< \frac{1}{\|y\|} \|y - (\|y\|)y\| + \epsilon = |1 - \|y\|| + \epsilon < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon, \end{aligned}$$

这就是所要证明的结论。 □

引理 3.18。 假设 $\{x_i\}_{i=1}^p$ 是子空间 W 的标准正交基，且 W 是$\mathbb{R}^N$的子空间。给定 $\epsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得如果 $\{y_i\}_{i=1}^p$ 是满足对所有 $i \in [p]$ 都有 $\|y_i - x_i\| < \delta$ 的向量集，那么存在一个标准正交基$\{z_i\}_{i=1}^p$，它是张成空间$\{y_i\}_{i=1}^p$ 的标准正交基，并且

$$\|z_i - x_i\| < \epsilon, \ for \ all \ i \in [p].$$

证明。 我们可以将 $\delta > 0$ 选得足够小，使得 $\{y_i\}_{i=1}^p$ 线性无关。令 $\{u_i\}_{i=1}^p$ 为对 $\{y_i\}_{i=1}^p$ 应用 Gram–Schmidt正交化过程得到的正交向量集，并令 $z_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$，$i \in [p]$。于是，

$$u_1 = y_1 \text{ and } u_k = y_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle y_k, z_i \rangle z_i, \text{ for } k = 2, \ldots, p.$$

由此可知，对所有 $k \geq 2$，均有

$$\begin{aligned} \|u_k - y_k\| &= \|\sum_{i=1}^{k-1} \langle y_k, z_i \rangle z_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} |\langle y_k, z_i \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} |\langle y_k - x_k, z_i \rangle + \langle z_i - x_i, x_k \rangle + \langle x_i, x_k \rangle| \\ &\leq (k-1)\|y_k - x_k\| + \sum_{i=1}^{k-1} \|z_i - x_i\|. \end{aligned}$$

因此，对所有 $k \geq 2$，均有

$$\|u_k - x_k\| \leq \|u_k - y_k\| + \|y_k - x_k\| \leq k\|y_k - x_k\| + \sum_{i=1}^{k-1} \|z_i - x_i\|.$$

此外，由引理 3.17，若 $\|y_1 - x_1\| < \delta$，则 $\|z_1 - x_1\| < 2\delta$。由此可知，存在常数 $C > 0$，使得

$$\|z_i - x_i\| < C\delta, \text{ for all } i \in [p].$$

结论随即得出。 □

引理 3.19. 设 P和 Q 是 $\mathbb{R}^N$上的正交投影。若 $\|P - Q\| < 1$，则 $\dim(P(\mathbb{R}^N)) = \dim(Q(\mathbb{R}^N))$。

证明。 设 $\{u_i\}_{i=1}^p$ 是 $P(\mathbb{R}^N)$ 的标准正交基。我们断言，$\{Qu_i\}_{i=1}^p$ 线性无关。否则，存在不全为零的标量 $\{a_i\}_{i=1}^p$，使得

全为零，因此 $\sum_{i=1}^{p} a_i Q u_i = 0$. 然后

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^{p} a_i u_i\| &\le \|\sum_{i=1}^{p} a_i Q u_i\| + \|\sum_{i=1}^{p} a_i P u_i - \sum_{i=1}^{p} a_i Q u_i\| \\ &\le \|P-Q\|\|\sum_{i=1}^{p} a_i u_i\| < \|\sum_{i=1}^{p} a_i u_i\|,\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。

由此可得 $\dim(Q(\mathbb{R}^N)) \ge \dim(P(\mathbb{R}^N))$。交换 P和Q的角色，可得 $\dim(P(\mathbb{R}^N)) = \dim(Q(\mathbb{R}^N))$。□

定理 3.20。 设$\{W_i\}_{i=1}^{M}$ 为 $\mathbb{R}^N$ 的子空间，其对应的正交投影为 $\{P_i\}_{i=1}^{M}$，并假设 $\sum_{i=1}^{M}\dim(W_i) < 2N-1$. 如果$\{P_i\}_{i=1}^{M}$ 不具备范数恢复性质，那么存在 $\delta > 0$，使得对于任意满足以下条件的正交投影集合 $\{Q_i\}_{i=1}^{M}$：对所有 $i \in [M]$，均有 $\|Q_i - P_i\| < \delta$，集合 $\{Q_i\}_{i=1}^{M}$ 也不具备范数恢复性质。

证明。 根据定理 3.8，对于每个 $i \in [M]$，都存在 W_i 的一个标准正交基 $\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{N_i}$，使得合并后的集合 $\{\varphi_{ij}\}_{,i=1,j=1}^{M,N_i}$ 不具备范数恢复性质。设 $\epsilon > 0$ 满足：只要 $\{\psi_{ij}\}_{,i=1,j=1}^{M,N_i}$ 是满足$\|\psi_{ij} - \varphi_{ij}\| < \epsilon$的向量，则 $\{\psi_{ij}\}_{,i=1,j=1}^{M,N_i}$ 不具备范数恢复性质。令 $\delta > 0$ 如引理 3.18 所述，并假设 $\{Q_i\}_{i=1}^{M}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的一族正交投影，且对所有 $i \in [M]$，均有 $\|Q_i - P_i\| < \delta$。注意，根据引理 3.19，对于所有 $i \in [M]$，$\dim(Q_i(\mathbb{R}^N)) = \dim(P_i(\mathbb{R}^N))$。此外，

$$\|Q_i\varphi_{ij} - \varphi_{ij}\| = \|Q_i\varphi_{ij} - P_i\varphi_{ij}\| < \delta, \text{ for all } i,j.$$

根据引理 3.18，对每个 $i \in [M]$，都存在一个关于 $Q_i(\mathbb{R}^N)$ 的标准正交基 $\{\psi_{ij}\}_{j=1}^{N_i}$，使得 $\|\psi_{ij} - \varphi_{ij}\| < \epsilon$。因此，$\{\psi_{ij}\}_{,\ i=1,\ j=1}^{M,\ N_i}$ 不满足范数恢复，因此 $\{Q_i\}_{i=1}^{M}$ 也不满足范数恢复。□

致谢

第一作者获得顺化大学资助，项目编号为 DHH2025-03-205。

References

[1] A. Akrami, P. G. Casazza, M. A. Hasankhani Fard, A. Rahimi, 《实希尔伯特空间框架范数可恢复性札记》，《数学分析与应用杂志》517（2023）。[2] R. Balan、P. G. Casazza 和 D. Edidin, 《无噪声相位条件下的信号重建》，《应用计算调和分析》20（2006），345–356。[3] S. Bahmanpour、J. Cahill、P. G. Casazza、J. Jasper 和 L. M. Woodland, 《相位恢复与范数恢复》，载于《调和分析及其应用趋势》，3–14, 《当代数学》650，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015。[4] R. H. Bates 和 D. Mnyama, 《实用傅里叶相位恢复的现状》，《电子与电子物理进展》67（1986），1–64。

[5] C. Becchetti 和 L. P. Ricotti, 《语音识别理论与 C++ 实现》, Wiley（1999）。[6] S. Botelho-Andrade、P. G. Casazza、D. Cheng、J. Haas、T. T. Tran、J. C. Tremain 和 Zhiqiang Xu, 《超平面相位恢复》, 《当代数学》706（2018）, 21–31。[7] J. Cahill、P. G. Casazza、J. Peterson 和 L. Woodland, 《投影相位恢复》, 《休斯敦数学杂志》42（2016）, 第2期, 537–558。[8] J. Cahill、P. G. Casazza、J. Jasper、L. M. Woodland, 《相位恢复》, 载于 SPIE 光学工程+ 应用会议论文集。International Society for Optics and Photonics, 美国加利福尼亚州圣迭戈, 2015年8月9日。[9] P. G. Casazza、D. Cheng, 《将 $\mathbb{C}^n$ 中的向量与 $\mathbb{R}^{2n}$中的秩2投影相关联: 及其应用》, 2017, arXiv:1703.02657。[10] P. G. Casazza、D. Goreshi、S. Jose 和 J. C. Tremain, 《投影范数恢复与相位恢复》, Axioms, 2017, 6（1）。[11] P. G. Casazza 和 G. Kutyniok, 《有限框架: 理论与应用》, 应用与数值调和分析。Birkh¨auser/Springer, 纽约, 2013。[12] O. Christensen, 《框架与 Riesz基导论》, Birkh¨auser, 波士顿, 2003。[13] I. Daubechies、A. Grossman 和 Y. Meyer, 《简洁的非正交展开》, 《数学物理杂志》27（1986）, 1271–1283。[14] J. Drenth, 《蛋白质X射线晶体学原理》, Springer, 2010。[15] R. J. Duffin 和 A. C. Schaeffer, 《一类非调和傅里叶级数》, 《美国数学会汇刊》**72**（1952）, 341–366。[16] D. Edidin, 《投影与相位恢复》, 《应用计算调和分析》42（2）（2017）, 350–359。[17] J. R. Fienup, 《从物体傅里叶变换的模重建物体》, 《光学快报》3（1978）, 27–29。[18] J. R. Fienup, 《相位恢复算法: 比较》, Applied Optics, 21（15）（1982）, 2758–2768。[19] M. A. Hasankhani Fard, 《 $\mathbb{R}^n$中的范数可恢复框架》, 《电子线性代数杂志》2016, 31, 425–432。[20] J. G. Proakis、J. R. Deller 和 J. H. L. Hansen, 《语音信号的离散时间处理》, Wiley-IEEE Press, 纽约, 2000。[21] L. Rabiner 和 B. H. Juang, 《语音识别基础》, Prentice Hall信号处理系列（1993）。

Tran: Department of Mathematics University of Education Hue Univer- , , , , sity Hue Vietnam.

Huynh: Department of Mathematics University of Sciences Hue Univer- , , sity Hue Vietnam.
, , *Email address*: tranthientin@hueuni.edu.vn*Email address*: htphung@hueuni.edu.vn