arXiv:2601.01120v1 [math.AC] 3 Jan 2026

图的广义二项式边理想的卡斯特尔诺沃-芒福德正则度

DARIUSH KIANI、SARA SAEEDI MADANI 和 GUANGJUN ZHU

Abstract. 本文主要研究图的广义二项式边理想的卡斯特尔诺沃-芒福德正则度。我们证明，该数可以取从 2 到 $n-1$ 的任意整数，其中 n 是底层图的顶点数。在给出图的联结积的广义二项式边理想正则度的一些紧确下界和上界之后，我们得以证明这一点。特别地，我们刻画了所有正则度等于 2 的广义二项式边理想，以及极值 Gorenstein 理想。为此，我们为 P_4-自由图这一类图给出了新的组合刻画。

2020年数学主题分类. 05E40, 13D02.
关键词：广义二项式边理想、卡斯特尔诺沃–芒福德正则度、图的连接积。

1. 引言

二项式边理想由不同的研究者独立定义，后来成为组合交换代数中的热门研究课题。设 G 是顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 上的有限非空简单图。在本文中，所有图均为有限非空简单图；若一个图有 n 个顶点，我们可以用 $[n] = \{1, \dots, n\}$ 表示其顶点集。设 $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ 是一个含有 $2n$ 个变量、系数域为 $\mathbb{K}$ 的多项式环。则 G 的二项式边理想（记作 J_G）定义如下:

$$J_G = (f_{ij} : 1 \le i < j \le n, \{i, j\} \in E(G))$$

其中 $f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$。若 G 是一个具有 n 个顶点的完全图，则 J_G 确实是一个行列式理想。许多作者对二项式边理想进行了广泛研究，例如参见
[1, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 15, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29]。

后来，[7]中定义了一种二项式边理想的推广，称为图对的二项式边理想。设 G_1 和 G_2 分别是顶点集为 $[m]$ 和 $[n]$的两个图，其中 $m,\ n \ge 2$。设 $X = (x_{ij})$为一个变量矩阵，并设 $S = \mathbb{K}[x_{ij} : (i,\ j) \in [m] \times [n]]$ 为变量为 x_{ij} 的多项式环，其中 K 是一个域。接下来，令

$$p_{e,f} = x_{it}x_{j\ell} - x_{i\ell}x_{jt}$$

第二作者的研究部分得到了 IPM（编号：1404130019）资助，第三作者的研究得到了江苏省自然科学基金（编号：BK20221353）和国家自然科学基金（编号：12471246）资助。

是 S 中的一个二项式，其中 $i<j$、 $t<\ell$、 $e=\{i,j\}\in E(G_1)$和 $f=\{t,\ell\}\in E(G_2)$。那么，图对$(G_1,\ G_2)$的二项式边理想记为$J_{G_1,\ G_2}$，定义如下：

$$J_{G_1,G_2}=(p_{e,f}:e\in E(G_1),f\in E(G_2)).$$

如果 G_1 只是由两个顶点组成的完全图 K_2，那么$J_{G_1,\ G_2}$ 就只是 G_2的经典二项式边理想。这些非常一般的理想类型也曾被一些作者研究过，例如参见 [7] 和 [27]。

对于 G_1 是完全图 K_m 的情形， $m\geq 3$也一直是该领域若干研究论文关注的重点，因为它与经典二项式边理想更为接近。因此，它也有一个特定名称：广义二项式边理想。特别地，图 G 在 $[n]$上的广义二项式边理想记作 $J_{K_m,\ G}$ ，它定义在多项式环 S 中；这一对象也曾被多位作者研究过，例如参见 [12, 16, 20, 30, 31, 32]。

本文同样关注图的广义二项式边理想，重点研究这类理想的卡斯特尔诺沃-芒福德正则度（简称正则度）。下面我们将更详细地说明本文的主要目标。

寻找图的广义二项式边理想的正则度的显式公式一直受到许多作者的关注，并且已有针对某些图类的若干结果，参见例如 [12], [16]和 [30]。另一方面，由 [16, 定理 3.6]我们知道

$$1\leq \operatorname{reg} S/J_{K_m,G}\leq n-1,$$

对于任意具有 n个顶点且 $m\geq 3$的连通图 G。一个自然的问题是，上述范围内的所有整数是否都能由某个广义二项式边理想取得。在 [28] 中，对于 $m=2$考虑并回答了一个类似的问题。更确切地说，对于广义二项式边理想，我们可以提出以下问题。

问题 1.1。给定满足 $1\leq r\leq n-1$的整数 n 和 r ，是否存在一个具有 n 个顶点的连通图 G ，使得对于某个 $m\geq 3$，正则性$S/J_{K_m,\ G}=r$？

如果 $r=1$，那么答案是肯定的。更进一步，在 [27, 定理 10], 中刻画了所有图对 G_1 和 G_2 ，使得 $\operatorname{reg}(S/J_{G_1,\ G_2})=1$。基于该刻画，当且仅当 $G=K_2$时，我们有 $\operatorname{reg}(S/J_{K_m,\ G})=1$ 。对于 $r=n-1$， [16], 中给出了若干情形，但迄今尚无完整的刻画。在本文中，我们回答问题 1.1 的其余情形，即 $2\leq r\leq n-2$。

受上述关于最小可能值的明确组合刻画启发，我们可以针对正则度的每个可能取值寻求一种刻画。更准确地说，我们提出以下一般性问题。

问题 1.2. 设 $n\geq 4$。假设对于某个满足 $2\leq r\leq n-1$ 的整数 r ，问题 *1.1* 的答案为肯定。那么，对于满足 正则性$S/J_{K_m,\ G}=r$ 的图 G ，是否存在一种明确的组合刻画？

继情形 $r=1$ 之后，接下来考虑情形 $r=2$ 是合理的，这也是本文的主要目标之一。对于情形 $m=2$， [28] 已给出了这样的刻画。

本文结构如下。第 2 节中，我们针对 $3 \leq r \leq n-2$ 回答问题 1.1。事实上，我们还进一步研究了图论中的一种巧妙构造，称为图的连接积。我们证明了两个图的连接积的广义二项式边理想的正则度所满足的一些紧确上下界，并讨论了若干可以计算正则度精确值的情形。随后，作为本节结果的应用，我们针对 $3 \leq r \leq n-2$ 解决问题 1.1。第 3 节中，我们聚焦于有趣的 P_4-自由图类，这类图也称为余图，即不含与路径 P_4 同构的诱导子图的图。该节采用完全组合的研究方法，并给出了 P_4-自由图的一种新的组合刻画。从图论角度看，这种刻画本身也很有趣，随后将成为证明第 4 节结果的关键。第 4 节中，我们针对 $r=2$ 对问题 1.2 给出肯定回答；特别是，结合第 2 节的结果，这也解决了问题 1.1。第 5 节中，我们研究正则度为 2 的广义二项式边理想，并刻画具有 Cohen-Macaulay 性质的此类理想，由此得到所有图的极值 Gorenstein 广义二项式边理想的刻画。第 6 节中，我们以若干相关问题和对未来工作的展望作为全文的结尾。

2. Regularity of the generalized binomial edge ideal of the joinproduct

本节中，我们首先考虑两个图 G_1 and G_2 的联结积，并给出该联结积的广义二项式边理想正则度的紧致下界和上界。我们在若干情形下讨论等号成立的条件。随后，作为我们结果的一项应用，我们对$3 \leq r \leq n-2$的 问题 1.1 给出肯定回答。首先，我们回顾本节后文将用到的一些记号和事实。

设 G 是一个简单图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。对于$W \subseteq V(G)$，我们用 $G[W]$ 表示 G 在顶点集 W 上的诱导子图，即，对于 $u,v \in W$, $\{u,v\} \in E(G[W])$，当且仅当 $\{u,v\} \in E(G)$ 时成立；我们也用$G \setminus W$表示 G 在 $V(G) \setminus W$ 上的诱导子图。对于 $v \in V(G)$， $G \setminus v$ 表示 G 在顶点集 $V(G) \setminus \{v\}$ 上的诱导子图。令 $c(G)$ 表示 G 的连通分量数。若顶点 v 满足 $c(G) < c(G \setminus v)$，则称其为 G 的割点。对于 $T \subset V(G)$，令 $T = V(G) \setminus T$。若对于任意 $v \in T$， v 都是图 $G[T \cup \{v\}]$ 的割点，则称 T 具有割点性质。令

$$\mathcal{C}(G) = \{\emptyset\} \cup \{T : T \text{ has the cut vertex property}\}$$

and

$$\overline{\mathcal{C}}(G) = \mathcal{C}(G) \setminus \{\emptyset\}.$$

~令 G 表示 $V(G)$ 上的完全图，并令 $c(T)$ 表示 $G[T]$ 的连通分支数。

设 G 是一个简单图，其顶点集为 $[n]$。对于每个 $T \subseteq V$（G），我们可以在 $S = \mathbb{K}[x_{ij}$ 中引入以下理想： $1 \leq i \leq m$， $1 \leq j \leq n]$

$$P_T(K_m, G) = (x_{ij} : (i,j) \in [m] \times T) + J_{K_m, \widetilde{G}_1} + \cdots + J_{K_m, \widetilde{G}_{c(T)}},$$

其中 G_1，……，$G_{c(T)}$ 是 $G[T]$ 的连通分量。文献 [20, 定理 7] 证明了，当且仅当 P_T（K_m，G）是 $J_{K_m,\ G}$ 的极小素理想时，$T \in \mathcal{C}$（G），因此

$$J_{K_m,G} = \bigcap_{T\in\mathcal{C}(G)} P_T(K_m, G).$$

定义 2.1。设 $r \geq 2$ 是一个整数，G_1、...、G_r 是图，其顶点集 V_1、...、V_r 两两不相交。G_1、...、G_r 的联结积记为 $G_1 * G_2 * \cdots * G_r$，它是一个顶点集为 $V_1 \cup \cdots \cup V_r$ 的图，其边集为

$$E(G_1) \cup \cdots \cup E(G_r) \cup \{\{x, y\} : x \in V_i, y \in V_j \ with\ i \neq j\}.$$

设 V 是一个集合，$\mathcal{A}_1$、...、$\mathcal{A}_t$ 是 t 个由 V 的子集构成的集合族。$\mathcal{A}_1$、...、$\mathcal{A}_t$ 的联结记为 $\bigcirc_{i=1}^{t}\mathcal{A}_i$，其定义见 [14]：

$$\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t : A_i \in \mathcal{A}_i \text{ for } i = 1, \ldots, t\}.$$

按照约定，$\bigcirc_{i=1}^{t}\mathcal{A}_i = \emptyset$，如果存在某个 i 使得 $\mathcal{A}_i = \emptyset$。

下一个命题刻画两个图的联结积的广义二项式边理想的极小素理想。若 G 是一个具有连通分量 G_1、...、G_r 的图，则将 G 记作 $G = \bigsqcup_{i=1}^{r} G_i$。

命题 2.2. [14, 命题 4.14] 设 $G_1 = \bigsqcup_{i=1}^{r} G_{1i}$ 和 $G_2 = \bigsqcup_{i=1}^{s} G_{2i}$ 是两个图，其顶点集 $V_1 = \bigcup_{i=1}^{r} V_{1i}$ 和 $V_2 = \bigcup_{i=1}^{s} V_{2i}$ 互不相交，其中 r，$s \geq 2$。那么

$$\mathcal{C}(G_1 * G_2) = \{\emptyset\} \cup \big((\bigcirc_{i=1}^{r}\mathcal{C}(G_{1i})) \circ V_2\big) \cup \big((\bigcirc_{i=1}^{s}\mathcal{C}(G_{2i})) \circ V_1\big).$$

对于每个诱导子图，下面的命题给出了一个有用的公式。

命题 2.3. [27, 命题 8] 设 G 是一个图，H 是它的诱导子图。那么 正则性$(S/J_{K_m,\ H})$ $\leq$ 正则性$(S/J_{K_m,\ G})$。

下面两个命题也对我们有所帮助，其中一个给出了完全图的广义二项式边理想正则度的精确值。它们部分回答了问题 1.1。

命题 2.4. [16, 命题 3.3] 设 K_n 是一个有 n 个顶点的完全图。那么 正则性$(S/J_{K_m,\ K_n})$ $=$ 最小 $\{m-1, n-1\}$。

定理 2.5. [16, 定理 3.7] 设 G 是一个具有 n 个顶点的连通图。若$m \geq n$，则

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = n - 1.$$

我们想指出，更一般地，若 G 是一个具有 n个顶点的图，且$m \geq n$ 由 r 个连通分量组成，则

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = n - r \leq n - 1.$$

引理 2.6. [19, 推论 18.7] 设 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ 是一个有限生成分次 S-模的短正合列。那么我们有

$$\operatorname{reg}(M) \leq \max\{\operatorname{reg}(N), \operatorname{reg}(P) + 1\}.$$

现在我们可以证明本节的主定理了。

定理 2.7. 设 G_1 和 G_2 是顶点集互不相交的两个图，分别有 n_1个和 n_2 个顶点，并设 $G = G_1 * G_2$。若 $m < n_1 + n_2$，则

$$\max\{m-1,\text{正则性}(S/J_{K_m,\ G_i})|i \in [2]\} \leq \text{正则性}(S/J_{K_m,\ G}) \leq \max\{m,\text{正则性}(S/J_{K_m,\ G_i})|i \in [2]\}.$$

换言之，

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) \in \{\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_1}), \operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_2}), m-1, m\}.$$

证明. 若 G 是完全图，则 G_1 和 G_2 也都是完全图。在这种情况下，下界和上界都由命题 2.4 得出。因此，我们可以假设 G 不是完全图，即 G_1 和 G_2 中至少有一个不是完全图。

我们可以假设 $n_1 \leq n_2$ 和 $n = n_1 + n_2$。由于 G_1 和 G_2 都是 G的诱导子图，根据命题 2.3，对于每个 $i \in [2]$，都有 $\text{reg}(S/J_{K_m,G}) \geq \text{reg}(S/J_{K_m,G_i})$。因此

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) \geq \max\{\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_1}), \operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_2}), m-1\} \tag{1}$$

由 [16,推论 3.8]。

为检验另一个不等式，我们首先考虑 G_1 和 G_2均为非连通图的情形。设 $G_1 = \bigsqcup_{i=1}^{r} G_{1i}$ 和 $G_2 = \bigsqcup_{i=1}^{s} G_{2i}$ 的顶点集 $V_1 = \bigcup_{i=1}^{r} V_{1i}$和 $V_2 = \bigcup_{i=1}^{s} V_{2i}$分别互不相交，其中 $r,\ s \geq 2$。由命题 2.2，我们可以将 $\mathcal{J}_{K_m,\ G}$ 分解为 $\mathcal{J}_{K_m,\ G} = Q \cap Q'$，其中

$$Q = \bigcap_{\substack{T \in \mathcal{C}(G) \\ V_1 \subseteq T}} P_T(K_m, G)\ ,\ Q' = \bigcap_{\substack{T \in \mathcal{C}(G) \\ V_1 \nsubseteq T}} P_T(K_m, G).$$

此外，由命题 2.2 可知

$$\begin{aligned} Q &= (x_{ij} : (i,j) \in [m] \times V_1) + \bigcap_{\substack{T \in \mathcal{C}(G) \\ V_1 \subseteq T}} P_{T \setminus V_1}(K_m, G_2) \\ &= (x_{ij} : (i,j) \in [m] \times V_1) + J_{K_m,G_2}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} Q' &= P_\emptyset(K_m, G) \cap \Big(\bigcap_{\substack{\emptyset \neq T \in \mathcal{C}(G) \\ V_1 \nsubseteq T}} P_T(K_m, G) \Big) \\ &= P_\emptyset(K_m, G) \cap \Big((x_{ij} : (i,j) \in [m] \times V_2) + \bigcap_{\substack{T \in \mathcal{C}(G) \\ V_2 \subseteq T}} P_{T \setminus V_2}(K_m, G_1) \Big) \\ &= J_{K_m,K_n} \cap \big((x_{ij} : (i,j) \in [m] \times V_2) + J_{K_m,G_1} \big). \end{aligned} \tag{2}$$

因此

$$Q + Q' = (x_{ij} : (i,j) \in [m] \times V_1) + J_{K_m,K_{n_2}}.$$

事实上，显然有 $(x_{ij} : (i,j) \in [m] \times V_1) + J_{K_m,K_{n_2}} \subseteq Q + Q'$；另一侧的包含关系则由下述事实推出： Q and J_{K_m,K_n} are contained in $(x_{ij} : i \in [m], j \in$

$V_1) + J_{K_{m,K_{n_2}}}$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/Q) &= \operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_2}),\\ \operatorname{reg}(S/(Q+Q')) &= \operatorname{reg}(S/J_{K_m,K_{n_2}}) = \min\{m-1, n_2-1\}\end{aligned}$$

by P命题 2.4。将引理 2.6 应用于下面的短正合列

$$0 \to S/J_{K_m,G} \to S/Q \oplus S/Q' \to S/(Q+Q') \to 0,$$

我们得到

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) \le \max\{\operatorname{reg}(S/Q), \operatorname{reg}(S/Q'), \operatorname{reg}(S/(Q+Q'))+1\}.$$

因此

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) \le \max\{\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_2}), \operatorname{reg}(S/Q'), \min\{m, n_2\}\}. \tag{3}$$

为了计算 reg(S/Q')，我们考虑正合列

$$0 \to S/Q' \to S/J_{K_m,K_n} \oplus S/(I + J_{K_m,G_1}) \to S/(I + J_{K_m,K_{n_1}}) \to 0,$$

其中 $I = (x_{ij} : (i,\ \ j) \in [m] \times V_2)$。再次应用引理 2.6，得到

$$\operatorname{reg}(S/Q') \le \max\{\operatorname{reg}(S/J_{K_m,K_n}), \operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_1}), \operatorname{reg}(S/J_{K_m,K_{n_1}})+1\}.$$

注意到 $m < n$，由命题 2.4 可得

$$\operatorname{reg}(S/Q') \le \max\{m-1, \operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_1}), \min\{m, n_1\}\}.$$

我们区分以下几种情形:

(I) 若 $m \le n_1$，则

$$\operatorname{reg}(S/Q') \le \max\{\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_1}), m\}.$$

(II) 若 $m > n_1$，则

$$\operatorname{reg}(S/Q') \le \max\{\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_1}), m-1\}. \tag{4}$$

由上述两种情形和 (3)，我们得到

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) \le \max\{\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_1}), \operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_2}), m\}.$$

以下，我们可以假设 G_1 或 G_2 是连通的。通过分别向 G_1 和 G_2 添加孤立顶点 v 和 w，可得到两个非连通图 G_1' 和 G_2'。令 $G' = G_1' * G_2'$，并令 S' 为在多项式环 S 中添加 $2m$ 个变量后得到的域 K 上的多项式环，这些变量分别对应顶点 v 和 w。则 G 是 G' 的诱导子图，并且显然，对于每个 $i = 1,2$, J_{K_m,G_i} 和 $J_{K_m,G_i'}$ 的齐次二项式生成集相同。

注意到 $m < n_1+n_2+2$，由命题 2.3 和上述讨论可得

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) &\le \operatorname{reg}(S'/J_{K_m,G'}) \le \max\{\operatorname{reg}(S'/J_{K_m,G_1'}), \operatorname{reg}(S'/J_{K_m,G_2'}), m\}\\ &= \max\{\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_1}), \operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_2}), m\}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

接下来我们讨论达到定理 2.7 中给出的某个界的一些条件。下一个推论涉及下界。

推论 2.8. 设 G_1 和 G_2 是顶点集互不相交的两个图，其顶点数分别为 n_1和 n_2，其中 $n_1 \leq n_2$。设 $G = G_1 * G_2$ 和 $3 \leq m < n_1 + n_2$。若满足以下条件之一：

(1) G_1 和 G_2 是不连通的，且 $n_2 < m$；(2) $n_2 + 1 < m$。

Then

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = m - 1.$$

证明。 我们沿用定理 2.7 中的记号。若 G_1 和 G_2 是不连通的，且$n_2 < m$，则由定理 2.7 证明中的公式 (3) 和 (4)，可得

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) \leq \max\{\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_1}), \operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_2}), m-1\}.$$

另一方面，由定理 2.5 可知，对每个 $i = 1, 2$，都有 $\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_i}) \leq n_i - 1$。因此

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) \leq m - 1.$$

由定理 2.7 给出的下界可得

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = m - 1.$$

若 $n_2 + 1 < m$，则可通过与上述类似的论证得到所需结果。在这种情形下，若 G_1 或 G_2 连通，则只需分别将 G_1 或 G_2替换为 G_1' 或 G_2'，并将 n_1 或 n_2 替换为 $n_1 + 1$ 或 $n_2 + 1$。□

注 2.9. (1) **(下界)** 注意，推论 2.8 为许多非平凡且尚未研究的情形下广义二项式边理想的正则度给出了精确公式。更明确地，设 G_1 和 G_2 是任意图，分别具有 t 和 $t + j$ 个顶点，其中 $t \geq 1$、 $j \geq 0$和 $2t + j \geq 3$。那么对于每个 $m = t + j + 2,\ t + j + 3,\ \ldots,\ 2t + j - 1$，都有 $\operatorname{reg}(S/J_{K_m,\ G_1 * G_2}) = m - 1$；而由定理 2.5 可知，$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,\ G_1}) \leq t - 1$ 且 $\operatorname{reg}(S/J_{K_m,\ G_2}) \leq t + j - 1$，因此最大值为 $m - 1$。

(2) （**上界**）如果 $G = K_{1,\ m}$ 是一个具有 $m + 1$ 个顶点的星图，其中$m \geq 2$，那么根据 [32, 引理 3.8]，$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,\ G}) = m$。另一方面，$K_{1,\ m}$ 是 $G_1 = K_1$ 和 $G_2 = \bigsqcup_{i=1}^{m} K_1$的联结积，因此对于每个 $i = 1$，2，都有$J_{K_m,\ G_i} = 0$，从而显然，对于任意 $i = 1$，2，$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,\ G_i}) = 0$。这表明，定理 2.7 中的上界在某些情形下可以达到，特别地，最大值由 m给出。

下面的推论表明，定理 2.6 中的下界和上界也可以相等，并且这为某些图的广义二项式边理想的正则度给出了一个精确公式。

推论 2.10. 设 G_1 和 G_2 是两个顶点集互不相交的图，其顶点数分别为 n_1和 n_2。设 $G = G_1 * G_2$ 和 $m < n_1 + n_2$。若正则性$(S/J_{K_m,\ G_i}) \geq m$对某个 $i = 1,2$成立，则

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = \max\{\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_1}), \operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_2})\}.$$

根据假设和定理 2.5，图 G_i的广义二项式边理想的正则度至少为 m，因此该图至少由 $m+1$ 个顶点组成；但联结积中涉及的另一幅图不受任何限制。作为推论 2.10 的一个例子，我们可以选择 $G_1 = K_{1,\ m}$，其中 $m \geq 2$，而 G_2 是任意图。关于 G_1的另一个候选图（替代 $K_{1,\ m}$），将在下一个例子中给出，其中 $m = 3$；这也将有助于我们在下一节进行刻画。

例 2.11。令 $G_1 = K_1$、$G_2 = K_1 \sqcup K_2$ 和 $G = G_1 * G_2$。则正则性$(S/J_{K_3,\ G})$ =3，另见 [16,第 364]页。由于稍后还将使用该图，我们将其记为 B。

本节最后，利用本节关于图的联结积的构造及正则度结果，我们对 $3 \leq r \leq n-2$ 的问题 1.1 给出肯定回答。

推论 2.12。设 n 和 r 是满足 $3 \leq r \leq n-2$ 的两个整数。则存在一个具有 n 个顶点的连通图 G，并且对于某个 $m \geq 3$，有正则性$(S/J_{K_m,\ G}) = r$。

证明。设 $3 \leq m \leq r$，并令 G_1 和 G_2 为分别具有 n_1 和 n_2 个顶点的两个图，使得正则性$(S/J_{K_m,\ G_1}) = r$ 且正则性$(S/J_{K_m,\ G_2}) \leq r$。此外，设 $G = G_1 * G_2$。由定理 2.7 可得正则性$(S/J_{K_m,\ G}) = r$。特别地，我们可以取 $G_1 = P_{r+1}$ 和 $G_2 = K^c_{n-r-1}$，其中 K^c_{n-r-1} 是完全图 K_{n-r-1} 的补图。然后根据 [12,推论 3.6]，正则性$(S/J_{K_m,\ K^c_{n-r-1}}) = 0$ 且正则性$(S/J_{K_m,\ P_{r+1}}) = r$。□

3. P_4-FREE GRAPHS

通常，我们用 P_k 表示具有 k 个顶点的路径图。本节将给出 P_4-自由图的图论刻画，这将有助于在下一节回答关于 $r = 2$ 的问题 1.1 和 1.2。这类图在图论中一直受到广泛关注，文献中也有关于此类图的若干有趣刻画。因此，它们还以其他一些名称为人所知，例如余图，或串并联偏序的可比图。然而，据我们所知，本节给出的刻画在文献中尚属首次。

首先，我们将回顾一些本节所需的图论概念。设 G 和 H 为两个图。如果一个图没有与 H 同构的诱导子图，则称其为 G H-自由图。也就是说，P_4-自由图不含有与 P_4 同构的诱导子图。

设 v 是 G 的一个顶点。v 在 G 中的所有邻居组成的集合记作 $N_G(v)$。此外，我们令 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$。更一般地，若 $T \subseteq V(G)$，则令 $N_G(T) = \cup_{v \in T} N_G(v)$，且 $N_G[T] = N_G(T) \cup T$。

T 是 $V(G)$ 的一个子集，若对于任意 $v \in V(G) \setminus T$，都有 $v \in N_G(T)$，则称其为 G 的 支配集。若子集 T 是 $V(G)$ 的一个子集，且它是 G 的支配集，并且诱导子图 $G[T]$ 是连通的，则称其为 G 的 连通支配集。$V(G)$ 中关于此性质极小的子集称为 G 的 极小连通支配集。而 G 的 最小连通支配集则是 G 中大小最小的连通支配集。

下面的定理来自 [4]，为 $k \geq 4$ 的 P_k-自由图给出了一个很好的描述。

定理 3.1。 [4, 定理 4] 设 G 是一个连通的 P_k-自由图，其中 $k \geq 4$。如果 $T \subseteq V(G)$ 是 G 的最小连通支配集，那么 $G[T]$ 是一个 P_{k-2}-自由图，或与 P_{k-2} 同构。

现在我们可以给出本节的主定理了。我们想指出，以下定理的证明主要基于[28,定理 3.2]的证明。

定理 3.2. 一个图是 P_4-自由的，当且仅当它的每个至少含有两个顶点的连通分量都是两个 P_4-自由图的联结积。

证明。 首先注意，联结积 $G_1 * G_2$ 是 P_4-自由的，当且仅当 G_1 和G_2 都是 P_4-自由的。另一方面，显然，一个图 G 的每个连通分量都是 P_4-自由图，当且仅当 G 是 P_4-自由的。因此，剩下要证明的是：若 G 是一个至少含有两个顶点的连通 P_4-自由图，则存在两个图 G_1 和 G_2，使得 $G = G_1 * G_2$。

由于 G 是连通的，因此它有一个最小连通支配集。设 T 是 G的一个最小连通支配集。由定理 3.1可知，$G[T]$ 是 P_2-自由的，或与 P_2同构。若 $G[T]$ 是 P_2-自由的，则它只包含一个顶点，记为 u。因此， $G = G[V（G）\setminus \{u\}] * K_1$。若 $G[T]$ 与 P_2同构，则它只包含一条边 $e = \{v, w\}$。令

$$A = N_G(v) \setminus N_G[w],$$
$$B = N_G(w) \setminus N_G[v],$$
$$C = N_G(w) \cap N_G(v).$$

如果 $A = \emptyset$，那么我们有 $G = G[V(G) \setminus \{w\}] * K_1$。如果 $B = \emptyset$，那么我们有 $G = G[V(G) \setminus \{v\}] * K_1$。现在，假设 $A \neq \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$。

注意， A 中的任意顶点与 B 中的任意顶点在 G中都相邻。事实上，如果存在一个顶点 $v' \in A$ 和一个顶点 $w' \in B$ 在 G 中不相邻，那么由顶点集 $\{v', v, w, w'\}$ 诱导的子图与 P_4同构，这与矛盾。

令 $x \in C$。那么，我们有 $A \subseteq N_G(x)$ 或 $B \subseteq N_G(x)$。否则，存在 $v' \in A$和 $w' \in B$，它们都不与 x相邻。于是， G 在顶点集 $\{x, v, v', w'\}$ 上诱导的子图与 P_4同构，这与矛盾。我们设

$$C_1 = \{x \in C : A \subseteq N_G(x), B \nsubseteq N_G(x)\},$$
$$C_2 = \{x \in C : A \nsubseteq N_G(x), B \subseteq N_G(x)\},$$
$$C_3 = \{x \in C : A \subseteq N_G(x), B \subseteq N_G(x)\}.$$

由此可知， C 被 C_1、 C_2 和 C_3划分。

现在注意到， G中 C_1 的任一顶点与 C_3 的任一顶点都相邻。为此，假设存在 $x \in C_1$ 和 $z \in C_3$，它们在 G中不相邻。由于$B \nsubseteq N_G（x）$，存在一个顶点 $w' \in B$，它与 x不相邻。于是，由顶点集 $\{w', z, v, x\}$ 诱导的子图与 P_4同构，这就产生了矛盾。类似地，可得G中 C_2 的每个顶点与 C_3 的每个顶点都相邻。

接下来注意到， G中 C_1 的任一顶点与 C_2 的任一顶点都相邻。为此，假设存在 $x \in C_1$ 和 $y \in C_2$ ，它们在 G中不相邻。根据 C_1 和 C_2的定义，可得 $B \nsubseteq N_G(x)$ 且 $A \nsubseteq N_G(y)$ 。因此，存在顶点 $w' \in B$ 和 $v' \in A$，它们分别与顶点 x和 y不相邻。因此，由顶点集 $\{x, v', w', y\}$诱导的子图与 P_4同构，这就产生了矛盾。

最后，设 $G_1 = G[\{v\} \cup B \cup C_1 \cup C_3]$和 $G_2 = G[\{w\} \cup A \cup C_2]$。于是可得 $G = G_1 * G_2$, 如所要求。□

4. Generalized binomial edge ideals of regularity 2

本节通过考虑 $r = 2$ 情形来结束对问题 1.1 的讨论。此外，本节还对 $r = 2$ 的问题 1.2 给出了肯定回答。为此，我们将刻画的讨论分为两大部分，即引理 4.1 和引理 4.2。

引理 4.1。设 G 是一个具有 n 个顶点且没有孤立顶点的图，并设$m \geq n \geq 2$ 为一个整数。则以下陈述等价:

(1) $\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = 2$.
(2) $G = P_3$ *or* K_3 *or* $K_2 \sqcup K_2$.

证明。 首先假设 G是一个连通图。由定理 2.5 可知，$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = 2$当且仅当 $n = 3$。具有 3 个顶点的唯一连通图是 P_3 和 K_3。因此， $G = P_3$ 或 K_3 ，并且在这两种情形下，根据推论 3.6] 和命题 2.4，我们都有 $\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = 2$ 。接下来，假设 G是不连通图，其连通分量为 G_1，.....， G_c，其中 $c \geq 2$，且对于每个 i，G_i 是一个具有 n_i 个顶点的图。于是

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = \sum_{i=1}^{c} \operatorname{reg}(S/J_{K_m,G_i})$$

并且对每个 i 都有 $m > n_i$ 。再次利用定理 2.5，可得

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = \sum_{i=1}^{c} (n_i - 1) = n - c.$$

因此，当且仅当 $n = c + 2$ 当且仅当 $G = K_2 \sqcup K_2$ 时，$\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = 2$ ，因为 G 没有孤立顶点。证明完毕。□

接下来，在本节的第二部分中，我们需要为完全多部图建立一些记号。设 $r \geq 2$ 为一个整数，设 $K_{t_1,\ldots,t_r}$ 为一个完全r部图，其顶点集划分为 $V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_r$和 $|V_i| = t_i \geq 1$（对每个 $i = 1,\ldots,r$），使得 V_i中的每个顶点都与 V_j中的每个顶点相邻（当 $1 \leq i \neq j \leq r$ 时），并且在 $K_{t_1,\ldots,t_r}$中，每个 V_i 内任意两个顶点都不相邻。我们可以假设，对每个 $i = 1, \ldots, r-1$，都有 $t_i \leq t_{i+1}$。根据定义可知，任意完全 r 部图都可以看作一个联结积，即 $K_{t_1}^c * \cdots * K_{t_r}^c$，其中每个 $K_{t_i}^c$ 都是完全图 K_{t_i}的补图。

引理 4.2. 设 G 是一个有 n 个顶点且没有孤立顶点的图，并设$n > m \geq 3$ 为一个整数。那么 $\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = 2$ 当且仅当 $m = 3$ 且 G 为以下之一

(1) $K_{t_1,\ldots,t_r}$，其中每个 $i \in [r]$ 都满足
$t_i \leq 2$；或者(2) $K_2 \sqcup K_2$。

证明。 </style>若 ,...,t_r 中的每个 $t_i \leq 2$ 都满足 S/J_{K_3}，则由 [32, 定理 3.9]，有正则性($S/J_{K_3,G}$) $= 2$。若 $G = K_2 \sqcup K_2$，则由命题 2.4，我们有

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_3,G}) = 2\operatorname{reg}(S/J_{K_3,K_2}) = 2.$$

为证明逆命题，我们首先假设 G 是连通的。由 [16, 推论 3.8]，正则性(S/J_{K_m},$_G$) $\geq m-1$。由于正则性(S/J_{K_m},$_G$) $= 2$，可得 $m \leq 3$，这意味着根据假设有 $m = 3$。由 [12, 推论 3.6], ，正则性(S/J_{K_3},$_{P_4}$) $= 3$，这迫使 G 根据命题 2.3 为 P_4-自由。因此，由定理 3.2， $G = G_1 * G_2$，其中 G_1 和 G_2 是 P_4-自由图。注意，由于 G_1 和 G_2 都是 G 的诱导子图，我们有正则性(S/J_{K_3},$_{G_i}$) ≤ 2。由例 2.11 和命题 2.3 可知， G 是一个 B-自由图。特别地， G_1 和 G_2 都是 ($K_1 \sqcup K_2$)-自由的，因为它们至少各有一个顶点。另一方面，由 [32,引理 3.8], ，正则性(S/J_{K_3},$_{K_1}$,3) $= 3$，因此 G 也是 K_1,3-自由的，而 G_1 和 G_2 是K_3^c-自由的。

我们通过对图中不相邻顶点对的数量进行归纳法来证明。对于图 H，我们用 b (H) 表示这个数量。若 b(G) $= 0$，则 G 是完全图，且同构于 K_{t_1},...,$_{t_n}$，其中 $t_1 = \cdots = t_n = 1$。现在假设 b(G) > 0，则或者 b(G_1) > 0，或者 b(G_2) > 0。不妨假设 b(G_2) > 0。那么，在 V(G_2) 中存在两个不相邻顶点 v 和 w。令 H 为 G_2 在顶点集 V(G_2) $\setminus \{v, w\}$ 上的诱导子图。于是，顶点 v 和 w 与 H 的所有顶点都相邻，因为 G_2 既不含 K_3^c，也不含 ($K_1 \sqcup K_2$)。这意味着 $G_2 = H * K_2^c$，其中 K_2^c 实际上同构于 G_2 在 $\{v, w\}$ 上的诱导子图。因此，我们有 $G = G_1 * K_2^c$，其中 G_1 是 G 在顶点集 V(G_1) $\cup V$(H) 上诱导出的子图。由于 G_1 是 G 的诱导子图，由命题 2.3 可得 reg(S/J_{K_3}, ˆ$_{G_1}$) ≤ 2。现在，我们区分以下情形:

(i) 如果 reg($S/J_{K_3,G_1}$) $= 0$，那么 G_1 没有边。因此，$V(H) = \hat{\emptyset}$，且 G_1至多由两个孤立顶点组成，因为它是 K_3^c-自由的。因此， $G_1 = K_1$ 或 K_2^c，从而 $G = K_{1,\ 2}$ 或 $K_{2,\ 2}$。

ˆ (ii) 如果 reg($S/J_{K_3,\ \hat{}G_1}$) $= 1$，那么根据 [27, 定理 10] 可得 $G_1 = K_2$，这意味着 $G = K_{1,\ 1,\ 2}$。

ˆˆ (iii) 若正则性 reg($S/J_{K_3,\hat{}G_1}$) $= 2$，则 G_1 是连通的。事实上，若 G_1 是非连通的，则 V(H) $= \emptyset$ 且 G_1 是非连通的。由于 G_1 是 K_3^c-自由且是 ($K_1 \sqcup K_2$)-自由，ˆ 因此可得 $G_1 = G_1 = K_2^c$，从而正则性 reg($S/J_{K_3,\hat{}G_1}$) $= 0$，这与假设矛盾。显然， b(G_1) $< b$(G)。因此，根据归纳假设，$G_1 = K_{t_1,\ldots,t_s}$，其中某个 s 满足每个 $i \in [s]$ 对应 $t_i \leq 2$。于是，我们有 $G = K_{t_1,\ldots,t_s,2}$。

最后，假设 G 是一个非连通图，其连通分量为 $H_1, \ldots, H_c$，其中 $c \geq 2$，并且对于每个 i， H_i 是一个具有 n_i 个顶点的图。因此

$$\operatorname{reg}(S/J_{K_3,G}) = \sum_{i=1}^{c} \operatorname{reg}(S/J_{K_3,H_i}).$$

这意味着，对于每个 $i = 1,2$，由于 G 没有孤立顶点，因此 $c = 2$ and reg($S/J_{K_3,H_i}$) $= 1$ 。所以 $H_1 = K_2$ and $H_2 = K_2$，证明得证。□

最后，我们以本节的主定理作结，该定理通过应用引理4.1和4.2，证明当 $r = 2$ 时，问题 1.2 有肯定答案。此外，该定理也完整回答了问题 1.1。

定理4.3。设 $m \geq 3$ 和 G 是一个具有 $n \geq 3$ 个顶点且没有孤立顶点的图。那么 $\operatorname{reg}(S/J_{K_m,G}) = 2$ 当且仅当以下条件之一成立：

(1) G 是 P_3、 K_3 或 $K_2 \sqcup K_2$；(2) $m = 3$ 和 $G = K_{t_1,\ldots,t_r}$，且对于每个 $i \in [r]$，均有 $t_i \leq 2$ 。

5. Extremal Gorenstein generalized binomial edge ideals

在已知所有正则度为2的广义二项式边理想之后，本节将探讨极值 Gorenstein 广义二项式边理想。首先回顾其定义。众所周知，若 I 是域 R 上的多项式环中的分次理想，且 R/I 是 Gorenstein 的，那么除非 I 是主理想，否则它不可能具有线性分解。粗略地说，若 I 的最小分次自由分解尽可能线性，则称 I 为极值戈伦斯坦。更精确地说，对于由次数2的元素生成的图 G 的广义二项式边理想 $J_{K_m,\ G}$ ，若 reg($S/J_{K_m,\ G}$) $= 2$ 且 $S/J_{K_m,\ G}$ 是 Gorenstein 的，则称其为极值 Gorenstein。在 $m = 2$ 的情形下，所需的刻画已在 [28] 中讨论，并在 [21] 中得到改进。

首先，我们刻画所有满足以下条件的图 G ： $S/J_{K_m,G}$ 是 Cohen-Macaulay 且正则度为 2。

定理5.1. 设 $m \geq 3$ 和 G 是一个具有 $n \geq 3$ 个顶点且没有孤立顶点的图。那么以下命题等价：

(1) $S/J_{K_m,G}$ 是 ***Cohen-Macaulay***，且 正则度($S/J_{K_m,G}$) $= 2$；(2) $G = K_3$ 或 $G = K_2 \sqcup K_2$。

证明。我们只需确定定理4.3中列出的哪些情形会给出 Cohen-Macaulay 广义二项式边理想。我们分三种情形讨论：

(i) 由 [12, 推论 3.5] 可知，若 G 是连通块图，则$S/J_{K_m,G}$ 是 Cohen-Macaulay 当且仅当 G 是完全图。因此， G 不可能是 P_3，但 $S/J_{K_m,K_3}$ 是 Cohen–Macaulay。

(ii) 如果 $G = K_2 \sqcup K_2$，那么 $S/J_{K_m,\ K_2\sqcup K_2} \cong (S_1/J_{K_m,\ K_2}) \otimes_{\mathbb{K}} (S_2/J_{K_m,\ K_2})$，其中$S_1$ 和 S_2 是对应的多项式环。因此$S/J_{K_m,\ K_2\sqcup K_2}$ 是 Cohen-Macaulay 的，因为 $J_{K_m,\ K_2}$ 恰好是二项式边理想 J_{K_m}，故 $S/J_{K_m,\ K_2}$ 是 Cohen-Macaulay 的。所以 G 也可以是 $K_2 \sqcup K_2$。

(iii) 假设 $G = K_{t_1,\ldots,t_r}$ 是一个完全 r-部图，其中每个 $t_i \leq 2$。如果每个$t_i = 1$，那么 G 是一个完全图 K_r，且有 $r \geq 3$。因此，根据 [32, 注 3.2], $S/J_{K_m,\ G}$ 是 Cohen-Macaulay 的。现在我们假设 $t_r = 2$。根据 [32, 命题 3.5], ，我们有

$$\dim(S/J_{K_m,G}) = \max\{m + n - 1, mt_r\},$$

$_r$其中 $n = \sum t_i$。特别地，我们有$_{i=1}$

$$\dim(S/J_{K_3,G}) = \max\{n + 2, 6\}. \tag{5}$$

若 $n = 3$，则 $t_1 = 1$ 且 $t_2 = 2$。在这种情况下， $G = P_3$，正如前文所述，$S/J_{K_m,\ G}$ 不是 Cohen-Macaulay。下文中，我们假设 $n \geq 4$。由式 (5)，我们有

$$\dim(S/J_{K_3,G}) = n + 2.$$

另一方面，已在 [32, 定理 3.6] 中证明

$$\operatorname{depth}(S/J_{K_m,G}) = m + \min\{t_i : t_i > 1, i \in [r]\}.$$

由此可得 depth($S/J_{K_3,\ G}$) $= 5$，即 dim($S/J_{K_3,\ G}$) $\neq$ depth($S/J_{K_3,\ G}$)，因为$n \geq 4$。因此 $S/J_{K_3,\ G}$ 不是 Cohen-Macaulay。□

现在，我们确定极值 Gorenstein 广义二项式边理想，而这类理想确实十分罕见。

推论 5.2。设 $m \geq 3$ 和 G 是没有孤立顶点的图。那么 $J_{K_m,\ G}$是极值 *Gorenstein*，当且仅当 $m = 3$ 和 $G = K_3$。

证明。由 [3, 推论 8.9] 可知，$S/J_{K_m,\ K_2}$ 不是 Gorenstein 环。现在，我们假设 $n \geq 3$。我们只需考察定理5.1陈述中出现的 Gorenstein 性质的情形，即$S/J_{K_m,\ K_3}$ 以及 $S/J_{K_m,\ K_2 \sqcup K_2}$，其中 $m \geq 3$。

同样由 [3, 推论 8.9], 可知，$S/J_{K_m,\ K_3}$ 是 Gorenstein 环当且仅当$m = 3$。注意到$S/J_{K_m,\ K_2}$ 是一个行列式环，因而是 Cohen-Macaulay 环，所以其最后一个 Betti 数不为 1。另一方面，$S/J_{K_m,\ K_2 \sqcup K_2}$ 的最小分次自由分解可以通过$S_1/J_{K_m,\ K_2}$ 和$S_2/J_{K_m,\ K_2}$的最小分次自由分解的张量积得到，其中 S_1 和 S_2 是变量集合互不相交的相应多项式环。因此，$S/J_{K_m,\ K_2 \sqcup K_2}$ 的最后一个 Betti 数也不为 1，从而$S/J_{K_m,\ K_2 \sqcup K_2}$ 不是 Gorenstein 环。证明完毕。□

6. Further remarks and questions

除了仍未得到广泛解决的 Question1.2 外，本节还想提出一些更具体的问题，并作出一些值得进一步探讨的评论。

我们给出了一些图的例子： G 有 $n \geq 4$ 个顶点，且 reg($S/J_{K_3,G}$) =3。因此，进一步考虑以下问题是合理的。

问题 6.1. 是否存在对所有满足正则性$S/J_{K_3,G} = 3$的图 G的显式组合刻画？

另一方面，特别是在定理4.3中，我们刻画了所有具有 $n \geq 3$ 个顶点且满足正则性($S/J_{K_3,G}$) $= 2$的图 G。这促使我们提出以下问题。

问题 6.2。 对于所有满足正则性($S/J_{K_4,\ G}$) $= 3$的图 G，是否存在明确的组合刻画？更一般地，对于任意 $m \geq 4$，情形 正则性($S/J_{K_m,\ G}$) $= m - 1$又如何？

在第 2 节中，我们讨论了定理 2.7 中给出的不等式取等号的若干情形。特别地，我们重点讨论了正则性($S/J_{K_m,\ G_1 * G_2}$) $= m - 1$ 和正则性($S/J_{K_m,\ G_1 * G_2}$) $= m$的情形。若能完整刻画这类图 G_1 和 G_2，将会很有意义。具体而言，我们提出以下两个问题。第一个问题的答案也能部分回答问题 6.2 的一般情形。

问题 6.3。 对于所有分别具有 n_1 个和 n_2 个顶点的图G_1 和 G_2，且满足 $2 \leq m < n_1 + n_2$，使得正则性($S/J_{K_m,\ G_1 * G_2}$) $= m - 1$，是否存在明确的组合刻画？

问题 6.4. 是否存在一种显式的组合刻画，适用于所有具有 n_1 和 n_2 个顶点的图G_1 和 G_2，且满足 $2 \leq m < n_1 + n_2$，使得正则性($S/J_{K_m,\ G_1 * G_2}$) $= m$。

References

[1] A. Banerjee, L. Nunez-Betancourt, 图连通性与二项式边理想, 美国数学会会刊, 第 145 卷（2），2017年，487-499。[2] D. Bolognini, A. Macchia, F. Strazzanti, 二部图的二项式边理想, 欧洲组合学杂志, 70（2018年），1-25。[3] W. Bruns, U. Vetter,行列式环, 施普林格，（1988年）。[4] E. Camby, O. Schaudt, 一种对 P_k无图的新刻画, Algorithmica, 75(1)，（2016年），205-217。[5] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, *Cohen–Macaulay* 二项式边理想, 名古屋数学杂志 204（2011年），57-68。[6] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, *Koszul* 二项式边理想, 连接代数、几何与拓扑，Springer 数学与统计学会议录系列第 96 卷，（2014年），125-136。[7] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, A. A. Qureshi, 一对图的二项式边理想, 名古屋数学杂志，213（2014年），105–125。[8] V. Ene, A. Zarojanu, 关于二项式边理想的正则度, 数学通讯 288，第1期（2015年），19-24。[9] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsd´ottir, T. Kahle, J. Rauh, 二项式边理想与条件独立陈述,《 Advances in Applied Mathematics 》，45 （ 2010 年），317-333。[10] M. Hochster a nd J. A. Eagon，一类完美行列式理想，美国数学会通报 76（1970年），1026-1029。[11] J. Herzog, D. Kiani and S. Saeedi Madani, 行列式面理想的线性串, 密歇根数学杂志，66（2017年），107-123。[12] F. Chaudhry, R. Irfan, 广义块图的广义二项式边理想, 数学报告，22(72) 3-4（2020年），381-394。[13] D. Kiani, S. Saeedi Madani, 具有纯分解的二项式边理想,《 Collectanea Mathematica》，65（2014年），331-340。

[14] D. Kiani, S. Saeedi Madani，若干 Cohen-Macaulay 无混合二项式边理想，《Communications in Algebra》，43（2015年），5434-5453。[15] D. Kiani, S. Saeedi Madani，二项式边理想的卡斯特尔诺沃-芒福德正则度，《Journal of Combinatorial Theory, Series A》，139（2016年），80-86。[16] A. Kumar，图的广义二项式边理想的正则度界，《Journal of Algebra》，546（2020年），357–369。[17] K. Matsuda, S. Murai，二项式边理想的正则度界，《Journal of Commutative Algebra》，5(1)（2013年），141-149。[18] M. Ohtani，由某些二阶子式生成的图与理想，《Communications in Algebra》，39（2011年），905- 917。[19] I. Peeva，分次协同，施普林格，（2010年）。[20] J. Rauh，广义二项式边理想，《Advances in Applied Mathematics》，50(3)（2013年）409–414。[21] G. Rinaldo, R. Sarkar，Level 与伪 Gorenstein 二项式边理想，《Journal of Algebra》，632（2023年），363–383。[22] M. Rouzbahani Malayeri, S. Saeedi Madani, D. Kiani，弦图的二项式边理想的正则度，《Collectanea Mathematica》，72（2021年），411–422。[23] M. Rouzbahani Malayeri, S. Saeedi Madani, D. Kiani，关于二项式边理想正则度猜想的一个证明，《Journal of Combinatorial Theory, Series A》，180 (3)（2021年），105432。[24] M. Rouzbahani Malayeri, S. Saeedi Madani, D. Kiani，小深度的二项式边理想，《Journal of Algebra》，572（2021年），231–244。[25] M. Rouzbahani Malayeri, S. Saeedi Madani, D. Kiani，关于图的二项式边理想的深度，《Journal of Algebraic Combinatorics》，55 (3)（2022年），827–846。[26] S. Saeedi Madani, D. Kiani，图的二项式边理想，《Electronic Journal of Combinatorics》，19(2)（2012年），♯ P44。[27] S. Saeedi Madani, D. Kiani，关于一对图的二项式边理想，《Electronic Journal of Combinatorics》，20(1)（2013年），♯ P48。[28] S. Saeedi Madani, D. Kiani，正则度 3 的二项式边理想，《Journal of Algebra》，515（2018年），157–172。[29] P. Schenzel, S. Zafar，完全二部图的二项式边理想的代数性质，《Annals of Ovidius University of Constanta》，Ser. Mat. 22(2)（2014年），217-237。[30] Y. Shen, G. Zhu，路径图的广义二项式边理想的幂，《International Journal of Algebra and Computation》，34(5)（2024年）779-806。[31] Y. Shen, G. Zhu，二部图的广义二项式边理想，《Journal of Algebra》，662（2025年）167-213。[32]Y. Shen, G. Zhu，完全 r部图的广义二项式边理想，arXiv:2312.11807。

Dariush Kiani, Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), Tehran, Iran
电子邮箱地址：dkiani@aut.ac.ir

Sara Saeedi Madani, Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), Tehran, Iran and School ofMathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences, Tehran, Iran电子邮箱地址：sarasaeedi@aut.ac.ir

Guangjun Zhu, School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou, Jiangsu, 215006, P.R. China
电子邮箱地址：zhuguangjun@suda.edu.cn