arXiv:2601.01128v1 [math.CO] 3 Jan 2026

关于晶体中多边形计数

GEOFFREY R. GRIMMETT

Abstract. 无限拟传递图 G中，包含给定顶点的 n步多边形有多少个？当 G 具有次指数增长且存在所谓的方形图高度函数时，此类多边形的指数增长率就是连接常数。后一条件相当于要求 G 具有某种 $\mathbb{Z}^2$ 自同构作用。主定理推广了 Hammersley（《剑桥哲学学会会刊》57（1961年）516–523）等人关于超立方格的结果，并回应了 Hammersley 的挑战，即证明这一结果也适用于更一般的“晶体”。

1. 引言

一个自避游走（SAW）在图上 G 是一条不会重复经过任何顶点的路径。对自避游走的研究始于聚合反应化学理论（参见 [27] 以及 [6]Flory 的著作）。在他们富有远见的论文 [15], 中，Hammersley 和 Morton 研究了尤其是格点上 n步自避行走的数量 G。他们利用次可加性证明了指数增长率存在，也就是说，极限

$$\mu(G) := \lim_{n\to\infty} c_n^{1/n}, \tag{1.1}$$

其中 c_n 表示从给定顶点出发的 n步自避免行走数，定义在 G上。Hammersley 后来于 [13]独自继续了这项研究。常数 $\mu(G)$ 被称为 连接常数，它对应于 G 上的 [3], ，其中（1.1）未附证明。

1961年，Hammersley [14] 将该理论从自避免行走计数推广到（自避）多边形计数。他证明，对于超立方格 $\mathbb{Z}^d$， n步自避免行走数与多边形数的指数增长率相等。本文旨在回应 Hammersley 提出的挑战：确定“晶体必须具备什么性质”，才能使这一结论成立。

在另一项研究中 [16], ，Hammersley和Welsh提出了一种在研究自避免行走和多边形时非常有用的技巧，即所谓“桥”的组合学。第2节将对其作详细说明。概括而言，桥是端点位于极端位置的自避免行走。桥的关键性质是，可以将另一条桥接到一条桥的 b

日期：2025年12月9日。2010 数学主题分类。 05C30, 05C38, 60K35, 82B20。关键词和短语。 自避多边形、自避游走、连接常数。

末端顶点上 b' 。 b文献 [16] 证明，对于超立方格 $\mathbb{Z}^d$， n步桥的数量的指数增长率等于连接常数 $\mu(\mathbb{Z}^d)$。

在本文中，我们研究满足特定条件的拟传递图中的多边形 G ，从而将 [14] 的结果推广到超立方格之外$\mathbb{Z}^d$。本文的主要结果是定理3.2，概述如下。

定理1.1 (增长率相等)。 设 $G \in \mathcal{G}$ 具有方形图高度函数和次指数增长，并令 p_n 为包含 G的根的 n步多边形数。那么 $\pi(G)$: $=$ 上极限$_{n\to\infty} p_n^{1/n}$满足 $\pi(G) = \mu(G)$。

集合 $\mathcal{G}$ 及术语“方形图高度函数”将在第2节中解释。本定理术语和结论的一些示例见第(3.2)–(3.5)节，其中给出了定理的任一条件不成立、且确实有 $\pi < \mu$的例子。关于缺失的下极限的讨论见定理3.2之后。

当前工作的挑战在于，无法采用 $\mathbb{Z}^d$ 早期关于多边形计数的工作所依赖的某些对称性。这可以看作是对 Grimmett 和 Li 工作的延续；他们致力于理解一般拟传递图的连接常数的性质（参见 [11] 相关综述）。

定理 1.1 为图 G 中的等式$\pi(G) = \mu(G)$ 成立提供了一个充分条件。人们相信，对于非可测图，严格不等式 $\pi(G) < \mu(G)$ 成立；第3.2–3.6节还对这一不等式及其与弹道性这一性质的联系作了一些评论。

关于自避免行走及其近亲的组合学的一般介绍，读者可参阅 [2, 7, 24] 和 [19, 第 7] 章；关于拟传递图上的自避免行走，可参阅 [11]。

本文结构如下。第 2 节介绍图及其高度函数的背景术语和性质。主要定理 3.2将在第3节给出，同时还将提供一些例子，并讨论随机自避免行走的弹道性。定理3.2 的证明见第 4节。

2. Preliminaries

在本文中， $G = (V, E)$ 表示一个无限、连通、局部有限的拟传递图，其根记为 $\mathbf{0}$。为简单起见，我们假设 G 既没有平行边，也没有自环，并将所有此类有根图的集合记为 $\mathcal{G}$。如果 u 和 v 是 G 中的邻点（记作 $u \sim v$），则连接它们的边记为 $\langle u, v\rangle$。 v 的邻点集记为 ∂v。图距离 $d(u, v)$ 定义为从 u 到 v 的最短路径中的边数。

$G = (V, E)$ 的自同构群记为 Aut(G)。若子群 $\Gamma \leq$Aut(G) 在 G（或其顶点集 V）上传递地 作用，则称其具有此性质：对于 v，$w \in V$，存在 $\gamma \in \Gamma$，使得 $\gamma(v) = w$。若存在一个有限顶点集 W，使得对于 $v \in V$，存在 $w \in W$ 和 $\gamma \in \Gamma$，满足 $\gamma(v) = w$，则称子群 Γ 拟传递地 作用。如果 Aut(G) 传递地（分别为拟传递地）作用，则称图 G 为传递的（分别为拟传递的）。顶点 v 在 Γ 下的轨道记为 Γv。V 在 Γ 下的轨道数记为 $M(\Gamma) = |V/\Gamma|$。

在 G 上的圈 是一个序列（v_0，v_1，……，v_m），满足 $m \geq 3$，且对于$0 \leq i < m$，$v_m = v_0$，有 $v_i \sim v_{i+1}$；v_0，v_1，……，v_{m-1} 是互不相同的顶点。圈的长度是所经过的边数。文献中对 cycle、circuit 和 polygon 这些术语的用法并不统一，我们将在下一段定义最后一个术语。

在 G 上的自避游走 （SAW）是一条从**0** 出发且每个顶点至多经过一次的路径。多边形 是一个包含根**0**的圈；也就是说，一个多边形定向后，由一条从**0**到**0** 的某个邻点 v 的自避游走，以及边 $\langle v, \mathbf{0}\rangle$ 组成。若一条自避游走（分别为多边形）恰好含有n 条边，则称其有 n 步。令 c_n 表示从**0**出发的 n 步自避游走的数量，令 p_n 表示包含**0**的 n 步多边形的数量。我们还将关注“桥”，其定义稍后给出。

根据多边形的上述定义，我们有

$$2p_n = c_{n-1}(\partial\mathbf{0}) \leq c_n, \qquad n \geq 3, \tag{2.1}$$

其中，$c_m(\partial\mathbf{0})$ 表示从 **0** 出发、以 **0** 的某个邻点为终点的 m 步自避免行走的数量。我们在此寻求关于 G 的条件，使得 c_n 和 p_n 的指数增长率相等；为此，我们引入图高度函数的概念。

定义 2.1。 [10, 定义 3。1] 设 $G = (V, E)$ 的根标记为 **0**。一个 图高度函数 （缩写为“*ghf*”）定义在 G 上，是一个有序对 $(h, \mathcal{H})$，满足

(a) h: $V \to \mathbb{Z}$，且 $h(\mathbf{0}) = 0$；(b) $\mathcal{H} \leq \mathrm{Aut}(G)$ 在 G 上拟传递地作用，使得 h 是 $\mathcal{H}$-差不变的，即

$$h(\alpha v) - h(\alpha u) = h(v) - h(u), \qquad \alpha \in \mathcal{H},\ u, v \in V,$$

(c) 对于 $v \in V$，存在 u、$w \in \partial v$，使得 $h(u) < h(v) < h(w)$。

请注意，如果 $(h, \mathcal{H})$ 是一个 ghf，那么 $(-h, \mathcal{H})$ 也是。 $\mathcal{G}$ 中存在 ghf 的图的示例见 [10], ，而不存在 ghf 的图的示例见 [9]。虽然拥有 ghf 有助于研究自避免行走及其所谓的连接常数局部性问题，但研究多边形还需要更多条件。

定义 2.2。 设 $(h, \mathcal{H})$ 是 $G \in \mathcal{G}$的图高度函数，并设 $\rho \in \mathcal{H}$。如果 $(h, \mathcal{H}, \rho)$ 满足以下条件，我们称其为方形图高度函数（简称“方形 *ghf*”）：

(a) ρ 是一个平移，即它不固定任何有限的 F 顶点集合；(b) ρ 是高度保持的，即对于 $v \in V$，有 $h(v) = h(\rho(v))$；(c) ρ 与每个 $\alpha \in \mathcal{H}$交换。

“方形 ghf”这一术语不应与 [9], 中的“强图高度函数”混淆，其动机如下。在定义的条件下，对于一个不保持高度的 $\alpha \in \mathcal{H}$，这对 V（ρ，α）在 $\mathbb{Z}^2$上的作用如同正方格点阵。为了简化起见，我们保留上述条件，尽管可以适当放宽。

这些定义的用途如下。首先，[10] 证明了，若G 具有 ghf，则可以在 G上定义“桥”的概念，而且桥增长率 β 等于连接常数 μ。本节后文将对此作进一步阐述。其次，我们的主要定理——定理3.2——断言，具有方形 ghf 的图满足上极限 $p_n^{1/n} = \beta$（它又等于 μ）。

接下来讨论桥。桥（虽未使用这一名称）最早是在 [16]关于超立方格 $\mathbb{Z}^d$的研究中引入的。设（h，$\mathcal{H}$）是 $G \in \mathcal{G}$的一个 ghf。一个h-桥 $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ 是 G 上的一条自避免行走，满足

$$h(v_0) < h(v_m) \le h(v_n), \qquad 0 < m \le n.$$

令 b_n 为从 $v_0 = 0$出发的 n步 h桥的数量。利用拟传递性和次可加性，可以证明极限

$$\beta(h) := \lim_{n\to\infty} b_n^{1/n} \tag{2.2}$$

存在，并将 $\beta(h)$ 称为 h-桥常数。

请注意，$\beta(h)$ 的定义（2.2）取决于图高度函数 h 的选择。上文指出，如果 $(h, \mathcal{H})$ 是一个 ghf，那么 $(-h, \mathcal{H})$ 也是。事实证明，若 $\mathcal{H}$ 是所谓的“幺模”图，则 $\beta(h) = \beta(-h)$；在这种情况下，桥常数 β 定义为它们的共同值。在非单模情形下，我们将 β 定义为 $\beta = \max\{\beta(h), \beta(-h)\}$。两种情形下均有 $\beta = \mu$，因此 $\beta = \beta(G)$ 与 ghf 的选择无关。上述内容总结如下定理。

定理 2.3。设 $G \in \mathcal{G}$ 具有一个 *ghf* $(h, \mathcal{H})$，并将 G 的连接常数记为 $\mu(G)$。

(a) [10] 若 $\mathcal{H}$ 是幺模的，则 $\beta(h) = \beta(-h)$，且它们的共同值 $\beta(G)$ 满足 $\beta(G) = \mu(G)$。*(b)* [22] 若 $\mathcal{H}$ 是非单模的，则 $\beta(G) := \max\{\beta(h), \beta(-h)\}$ 满足 $\beta(G) = \mu(G)$。

有关幺模性的讨论请参见 [23,第 8 节。2] 或 [10,第 3] 节。传递的图的增长函数定义为

$$\Gamma_n = |\{v \in V : d(0, v) \le n\}|,$$

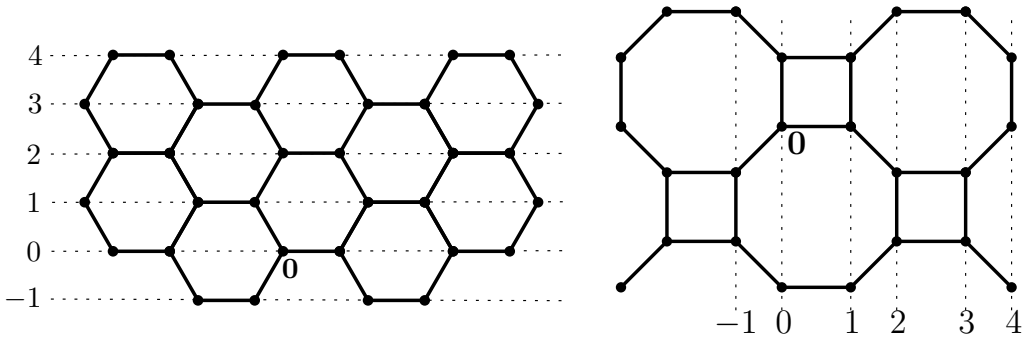


FIGURE 3.1. 六角晶格和正方形/八边形晶格。顶点的高度如图所示。自同构 ρ 分别是适用于前者向右平移、适用于后者向上平移的平移。

也就是说，这是半径为 n 的球中的顶点数。如果图满足次指数增长，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \Gamma_n = 0. \tag{2.3}$$

注 2.4。值得回顾的是，任何具有 G 次指数增长的拟传递图都是可均值化的，因此，任何以拟传递方式作用于此类图的 G 自同构群都是幺模的（参见 [29] 和 [23,练习 8。30]）。

3. MAIN THEOREM

3.1. 主要定理的陈述。对于有根图 G，令

$$\pi = \pi(G) := \limsup_{n\to\infty} p_n^{1/n}, \tag{3.1}$$

其中 p_n 是包含根**0**的 G 中的 n步多边形的数量。本文的三个主要对象是 μ**(**G**)**、 β **(**G**)**、 π**(**G**)**。

注 3.1。回顾一下，对于拟传递图 $G \in \mathcal{G}$， $\mu(G)$ 与根的选择无关（参见 [13]）。此外，对于还具有 ***ghf*** 的此类 G，$\beta(G)$ 存在且与根的选择无关（参见 [10, 22] 和定理 *2.3*）。在下述定理的条件下， $\pi(G)$ 也与根的选择无关。

定理 3.2. 设 $G \in \mathcal{G}$ 具有方形 ***ghf*** $(h, \mathcal{H}, \rho)$，且具有次指数增长。

(a) 我们有 $\pi(G) = \beta(G) = \mu(G)$。(b) 此外，对于 $\epsilon > 0$，存在一个整数等差数列$(m_N : N \geq 1)$，沿着该数列有 下极限$_{N\to\infty}\, p_{m_N}^{1/m_N} \geq \beta(G) - \epsilon$。

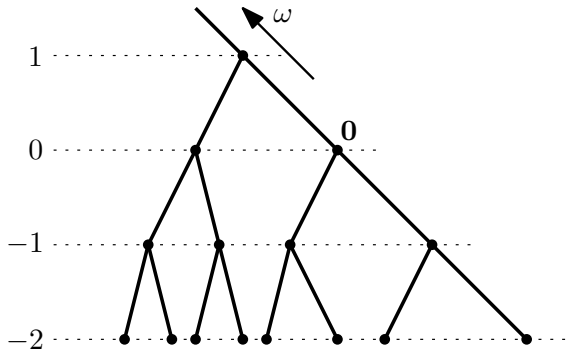


FIGURE 3.2. 具有“水平线”高度函数的3正则树。

的上极限在定理 $p_n^{1/n}$中得到了确定3.2，但其下极限的问题尚未解决。似乎缺少的是对 $p_n^{1/n}$收敛性的证明。关于 $\mathbb{Z}^d$ 的证明采用了相当简单的几何构造和次可加性；这是 Hammersley 所做的 [14]，，另请参见 [24, 定理 3.2。3]然而，在本文的普遍情形下，几何处理更具挑战性。不过，仍存在满足定理 3.2 条件的图，只要 ghf 满足某个额外条件，就可以对其采用次可加性论证。本文不对此作进一步探讨。

二部图显然不含奇数边多边形。因此，对于二部图（如超立方、六角晶格和正方形/八边形晶格），下极限只沿偶数取值。

根据定理 3.2，多边形计数与自避免行走计数的指数增长率相等（在所述条件下）。这远不及证明 p_n/c_n的具体多项式界；这类界可部分见于 $\mathbb{Z}^d$ 中的 [4, 定理11]。

定理中两个条件的重要性可通过一些例子加以说明。

3.2. **欧几里得晶格。** [10, 第 3] 许多嵌入于 $\mathbb{R}^d$ 的晶格满足定理 3.2的条件。我们提及两个平面例子，即六角晶格和正方形/八边形晶格，如图 3.1所示。

3.3. **树图。** [10, 第 3]3正则树 $\mathbb{T}_3$ 具有指数增长，并且有一个 ghf，但没有方形 ghf，如下所示。设 ω 是 $\mathbb{T}_3$的一条射线，并将 $\mathbb{T}_3$从 ω （如图 3.2所示）悬挂下来。ω 上的一个给定顶点标记为 $\mathbf{0}$，其高度为 $h(\mathbf{0}) = 0$，其他顶点的高度则为其相对于0的水平高度，也就是其世代数。

令 $\mathcal{H}$ 为 $\mathbb{T}_3$ 中固定由 $\mathbb{T}_3$ 确定的端的自同构集合ω，注意到 $\mathcal{H}$ 是非单模的（见 [10, 注 3。3]）。那么（h，$\mathcal{H}$）是一个 ghf。它

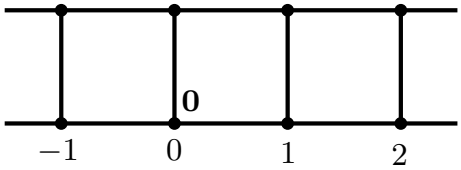


FIGURE 3.3. 带有根和高度标示的梯子图 $\mathbb{L}_2$。

由此可得（事实上显然） $\beta(\mathbb{T}_3) = \mu(\mathbb{T}_3) = 2$。另一方面， $\mathbb{T}_3$ 没有方形 ghf，而且由于它没有环，我们有 $\pi(\mathbb{T}_3) = 0$。

3.4. **梯子图**。 [8, 第 3] 梯子图 $\mathbb{L}_2 := \mathbb{Z} \times \{0, 1\}$ 图 3.3中的梯子图具有次指数增长，并且拥有一种 ghf（如图所示），但没有方形 ghf。此外， $\beta(\mathbb{L}_2) = \mu(\mathbb{L}_2) = \phi$ 以及 $\pi(\mathbb{L}_2) = 1$，其中 $\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1.618\ldots$ 是黄金均值。

现在考虑“三层梯子” $\mathbb{L}_3 := \mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}$。根据定理 2.3， $\beta(\mathbb{L}_3) = \mu(\mathbb{L}_3)$。为简单起见，假设一个多边形 p 从 0 向右延伸。它在反向之前形成一条 $\mathbb{L}_2$ 的桥（视为 $\mathbb{L}_3$ 的子图）。随后，它沿着 $\mathbb{L}_2$ 的一个副本上的一条向左的桥前进，然后再次转向原点（后续桥的形状受先前桥形状的限制）。这类 n 步多边形的数量不超过 $\mathbb{L}_2$ 的 n 步桥的数量（忽略较小项）。因此， $\pi(\mathbb{L}_3) \le \beta(\mathbb{L}_2)$。然而， $\beta(\mathbb{L}_2) < \beta(\mathbb{L}_3) = 1.914\ldots$，([1, 第 198] 页)。这一结果可推广到形如 $\mathbb{L}_m := \mathbb{Z} \times \{0, 1, \ldots, m\}$ 的更宽梯子图。

3.5. 树与直线的乘积。 [12, 18] 令 $G = \mathbb{T}_3 \times \mathbb{Z}$ 为 3正则树 $\mathbb{T}_3$ 与双向无限直线 $\mathbb{Z}$的（笛卡尔）乘积； G 的顶点表示为向量 (t, z)，且两个顶点 (t_1, z_1)、 (t_2, z_2) 相邻，当且仅当 $t_1 = t_2$ 且 $|z_1 - z_2| = 1$，或者 $t_1 \sim t_2$ 在 $\mathbb{T}_2$ 中且 $z_1 = z_2$。按照第3.3节中的 $(h, \mathcal{H})$，我们如下定义 G 上的 ghf $(h', \mathcal{H}')$。对于 $\alpha \in \mathcal{H}$，通过$\alpha'(t, z) := (\alpha(t), z)$ 定义 α'，并令 ρ 为由 $\rho(t, z) = (t, z+1)$ 给出的平移。所有这样的 α'与 ρ 一起，生成 Aut(G) 的一个传递作用的（非单模）子群 $\mathcal{H}'$。令 $h'(t, z) = h(t)$，从而得到G上所需的 ghf $(h', \mathcal{H}')$。可以验证 $(h', \mathcal{H}', \rho)$ 是一个方形 ghf。

该图 G 具有指数增长，并拥有一个方形 ghf，因此 $\beta(G) = \mu(G)$ 根据定理 2.3。由 [18, 定理 1。4] 以及即将给出的定理 3.3，我们有 $\pi(G) < \beta(G)$。对于图 $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}^d$（采用自然记号）且满足 $k \ge 3$ 和 $d \ge 1$，这些结论更普遍地成立。

可以尝试利用 $\pi < \beta$ Nachmias–Peres 判据 $(\Delta - 1)\rho < \mu$来证明，其中 Δ 表示顶点度， ρ 表示谱半径（见 [26, 第 6]页）。

对于 $k \geq 4$, $d = 1$，利用计算得到的 μ数值不等式可以成功做到这一点。Hutchcroft [18, 第 2804] 页证明了该判据对 $k = 3$, $d = 1$不成立。

3.6. **关于主定理的说明。** 我们对定理 3.2 的证明作几点说明。特殊情形 $\mathbb{Z}^d$ 的证明见 Hammersley [14], Kesten[20], Madras–Slade [24], 以及 Hughes [17]。相关的 $\mathbb{Z}^d$ 性质包括反射不变性和平移不变性，这些性质在四个证明中的运用程度各不相同。此外，[24] 的证明似乎用到了 $\mathbb{R}^d$的欧几里得几何。本文通过假设 ghf 存在，在一般情形下保留了平移不变性的某些特征。然而，在更一般的图中，反射不变性的运用则更为棘手。本文通过一种受 Hammersley 1961年的原始证明启发的论证避免了这一问题，同时也避开了该证明在 [14,第 520] 页的漏洞（见下文）。

本文关注的是 π 与 μ的相等；而 Madras– Wu [25] 和 Panagiotis [28] 先前的工作则致力于研究双曲平面的正则铺砌中的严格不等式（即 $\pi < \mu$）。这类铺砌具有指数增长。Panagiotis[28] 还证明，对于任意传递图 G（实际上更一般的情形见[28, 注 4.1]），这种严格不等式意味着图 G 上的随机自避免行走具有弹道性（有时也称为具有“正速度”），也就是说，存在 $c > 0$使得

$$\mathbb{P}_n\big(d(\mathbf{0}, L_n) \leq cn\big) \leq e^{-cn}, \qquad n \geq 1, \tag{3.2}$$

其中 $\mathbb{P}_n$ 是从 G的根$\mathbf{0}$ 出发的 n步自避免行走集合上的均匀概率测度，而 L_n 是随机选取的自避免行走的最终端点。Hutchcroft [18]证明了，对于具有传递的非单模自同构（子）群的任意图，弹道性均成立。人们相信，所有非可和传递图都满足严格不等式 $\pi < \mu$。

为便于理解和查阅，现明确陈述严格不等式与弹道性之间的关系（并非声称这是原创结果）。

定理 3.3. 设 $G \in \mathcal{G}$ 且设

$$\pi'(G) = \limsup_{n\to\infty} \Big(\sup_{v\in V} p_{n,v}\Big)^{1/n}, \tag{3.3}$$

其中 $p_{n,\,v}$ 表示包含 v 的 n 步多边形的数量。那么 $\pi'(G) < \mu(G)$ 当且仅当存在 $c > 0$ 和 $N \geq 1$，使得

$$\mathbb{P}_{n,v}\big(d(v, L_n) \leq cn\big) \leq e^{-cn}, \qquad n \geq N, \quad v \in V, \tag{3.4}$$

其中$\mathbb{P}_{n,\,v}$ 是以v为起点的 n步自避免行走集合上的均匀概率测度，而 L_n 是随机选取的自避免行走的最终端点。

由于 G被假设为拟传递的，式（3.3）中的内部上确界是在一个有限集合上取的。如果定理 3.2 的条件成立，则 $\pi'(G) = \pi(G)$。

证明。这 $\pi' < \mu$ 意味着（3.4）对适当的 c， N 是 [28, 定理 4、备注 41][1]的推论。反过来，由（2.1）和（3.4），

$$p_{n+1,v} = \tfrac{1}{2}c_{n,v}\mathbb{P}_{n,v}\big(d(v, L_n) = 1\big) \le \tfrac{1}{2}c_{n,v}e^{-cn}, \qquad n \ge N, \quad v \in V,$$

其中 $c_{n,\,v}$ 是从 n出发的 v 步自避免行走的数量。回顾备注 3.1，我们可推出 $\pi'(G) \le \mu(G)\, e^{-c}$，如所需。□

根据定理 3.2和3.3，定理 G 中图上的随机自避免行走 3.2 不是弹道性的。当然，这比证明它们按[5, 21].所述的意义是次弹道性的要弱。

4. Proof of Theorem 3.2

我们先引入一些补充记号。设 $(h, \mathcal{H}, \rho)$ 是 $G = (V, E) \in \mathcal{G}$ 上的一个方形 ghf。从 u 到 v 的自避免行走称为刚性的，若除端点以外，其所有顶点 x 都满足 $h(u) < h(x) < h(v)$。我们将按 [10]中的做法定义某个整数 $r = r(h, \mathcal{H})$。若 $\mathcal{H}$ 传递地作用，则令 $r = 0$。假设 $\mathcal{H}$ 不传递地作用，并令 $r = r(\mathcal{H})$ 为满足下述条件的所有 r 的下确界。设 $o_1, o_2, \ldots, o_M$ 是 $\mathcal{H}$ 的（有限多个）轨道代表。对于 $i \ne j$，存在一个顶点 $v_j \in \mathcal{H}o_j$，以及一条从 o_i 到 v_j、长度不超过 r 的刚性自避免行走 $\nu(o_i, v_j)$。我们选取这样一条自避免行走，并像上文一样将其记为 $\nu(o_i, v_j)$。令$\nu(o_i, o_i) = \{o_i\}$。

已在 [10, 命题 3.2] 中证明

$$0 \le r \le (M-1)(2d+1) + 2, \tag{4.1}$$

其中 $M = |V/\mathcal{H}|$ 和

$$d = \max\big\{|h(x) - h(y) : x, y \in V,\, x \sim y\big\}. \tag{4.2}$$

常数 r 将在本节后面使用。根据（4.2），

$$d(x, y) \ge \frac{1}{d}|h(x) - h(y)|, \qquad x, y \in V. \tag{4.3}$$

下面给出一个引理。

引理 4.1。设 $G \in \mathcal{G}$ 具有方形 *ghf* $(h, \mathcal{H}, \rho)$。

(a) 我们有，当 $k \to \infty$, $d(v, \rho^k(v)) \to \infty$ 在 $v \in V$ 上一致成立。

[1]Panagiotis 的证明与 Hammersley 在 [14, 第 520]页中的证明相似（但彼此独立）。此外，该证明纠正了后一个证明中的一个错误；后一个证明以该论文所使用的语言表述为，$\Phi(n)$ 是以下各个 $\Phi_\psi(n)$ 的并集。

(b) 存在一个整数 δ 使得

$$d(v, \rho^k(v)) \le k\delta, \qquad v \in V, \quad k \ge 1.$$

证明。(a) 假设存在 v，使得 $d(v, \rho^k(v)) \not\to \infty$。由于 G 是局部有限的，存在 $w \in V$ 和一个子序列 (k_i)，使得对所有 i，$\rho^{k_i}(v) = w$。因此，ρ 固定顶点集 $\{\rho^k(v) : j_1 \le k < j_2\}$，这与$\rho$ 是一个平移的假设相矛盾。

接下来我们证明发散的一致性。首先，我们声称，对于给定的 k，$d(v, \rho^k(v))$ 在 $\mathcal{H}$ 的轨道上为常数。为此，取 $u \in \mathcal{H}v$，并找出 $\alpha \in \mathcal{H}$，使得 $v = \alpha(u)$。由于 $\rho\alpha = \alpha\rho$,

$$d(v, \rho^k(v)) = d\big(\alpha(u), \rho^k(\alpha(u))\big) = d\big(\alpha(u), \alpha(\rho^k(u))\big) = d(u, \rho^k(u)). \tag{4.4}$$

其次，假设 $u \notin \mathcal{H}v$。根据（4.1），存在一条长度不超过r 的路径，从 u 到某个 $w \in \mathcal{H}v$。根据三角不等式,

$$\begin{aligned} d(u, \rho^k(u)) &\le d(u, w) + d(w, \rho^k(w)) + d(\rho^k(w), \rho^k(u)) \\ &\le 2r + d(w, \rho^k(w)) = 2r + d(v, \rho^k(v)) \qquad \text{by (4.4)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

所声称的一致性可由 (4.4)–(4.5) 得出。

(b) 由 (4.4)–(4.5)，对于 $k = 1$，$d(v, \rho(v))$，可知其上界为某个 $\delta > 0$，且该上界与 v 无关。由三角不等式,

$$d(v, \rho^k(v)) \le \sum_{l=0}^{k-1} d(\rho^l(v), \rho^{l+1}(v)),$$

于是一般的 k 的不等式也成立。 □

设 G 满足定理关于方形 ghf 的条件（h，$\mathcal{H}$，ρ）。记$\pi := \text{上极限}_{n\to\infty} p_n^{1/n}$，如 (3.1) 所示。由 (2.1) 和定理 2.3,

$$\pi \le \mu = \beta. \tag{4.6}$$

由于 G具有次指数增长，因此它是幺模的（见注 2.4）。由定理 2.3(a)，桥常数 $\beta = \beta(G)$ 满足 $\beta = \beta(h)$。

令 $n \ge 1$，并回忆 h-桥的数量 b_n（下文简称桥）。找一个顶点 P_n，使得 $h(P_n) \ge 1$，且从 0 到 P_n 的桥的数量至少为 $b_n/|\Gamma_n|$。我们不取点 P_n，而是取如下定义的点 P'_n。根据导出 (4.1) 的讨论，存在一个顶点 $P'_n \in \mathcal{H}0$，使得有一条从 P_n 到 P'_n 的刚性自避免行走 ν，其长度为某个不超过 r 的 ℓ。我们将 ν 接到任意一条从 0 到 P_n 的桥上，从而得到

从0 到 P'_n至少存在 $b_n/|\Gamma_n|$ 条长度为 $n + \ell$ 的桥。 (4.7)

此后我们假设 $n \ge \ell$。

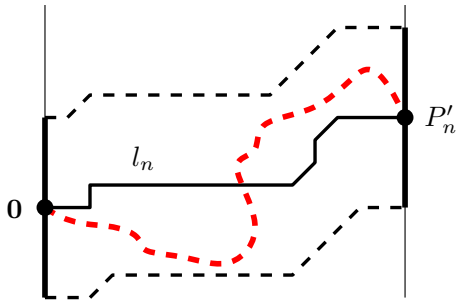


FIGURE 4.1. 区域 R_n。一条最短路径 l_n 连接**0** 与 P'_n，红色（虚线）路径是一座桥。两条垂直线分别表示满足 $h(v) = 0$ 的v 集合，以及满足 $h(v) = h(P'_n)$ 的 v 集合。

设 l_n 是从 **0** 到 P'_n 的最短桥，并设 R_n 是由顶点集诱导出的 G 的子图

$$D_n := \{\mathbf{0}\} \cup \big\{v \in V : d(v, l_n) \le n,\ 1 \le h(v) \le h(P'_n)\big\}.$$

请注意，（4.7）中的桥位于 R_n之内。

区域 R_n 是以下构造的基本要素。设 $\gamma \in \mathcal{H}$满足 $\gamma(\mathbf{0}) = P'_n$，从而 γ 将 R_n 映射到一个像 $\gamma(R_n$，其高度介于$h(P'_n)$ 与 $2h(P'_n)$ 之间。我们可以将 $\gamma^i(R_n)$、$i \in \mathbb{Z}$视为 R_n 的连续平移像，它们彼此拼接形成一条“管”，沿着这条管，它们的桥结合起来构成一座更长的桥。参见图4.1和4.2。

令 $N \ge 1$并令 $S_N = \bigcup_{0\le i\le N-1} \gamma^i(R_n)$ 和 $P_n^N = \gamma^{N-1}(P'_n)$。根据 (4.7)，

(4.8) 在 S_N中，从**0**到 P_n^N至少存在 $(b_n/|\Gamma_n|)^N(n + \ell)N$-步桥。

令 $l_{n,\infty}$ 为 $\bigcup_{-\infty<i<\infty} \gamma^i(l_n)$ 的并，将其视为一条双无限路径。现在，我们将 S_N 扩展为一条包含 $l_{n,\infty}$ 的双无限管，具体做法是将 S_∞ 定义为由 G的顶点集诱导的子图

$$D_{n,\infty} = \big\{v \in V : d(v, l_{n,\infty}) \le n\big\}.$$

图 S_∞ 是周期的，因为 $\gamma(S_\infty) = S_\infty$。此外，$S_N$ 是S_∞的子图。

引理 4.2。存在 $k = k_n < \infty$ 使得 $S_\infty \cap \rho^k(S_\infty) = \varnothing$。

证明。设 $k \ge 1$，并假设存在 $v \in S_\infty \cap \rho^k(S_\infty)$。由于 $v \in \rho^k(S_\infty)$，我们有 $\rho^{-k}(v) \in S_\infty$，因此 v，$\rho^{-k}(v) \in S_\infty$。于是存在两个形如 u，$\rho^k(u)$ 的顶点，它们位于 S_∞ 中。我们断言，根据引理 4.1(a)，当 k充分大时不可能出现这种情况。为此，只需证明

$$K := \sup\{d(v, w) : v, w \in S_\infty,\ h(v) = h(w)\}$$

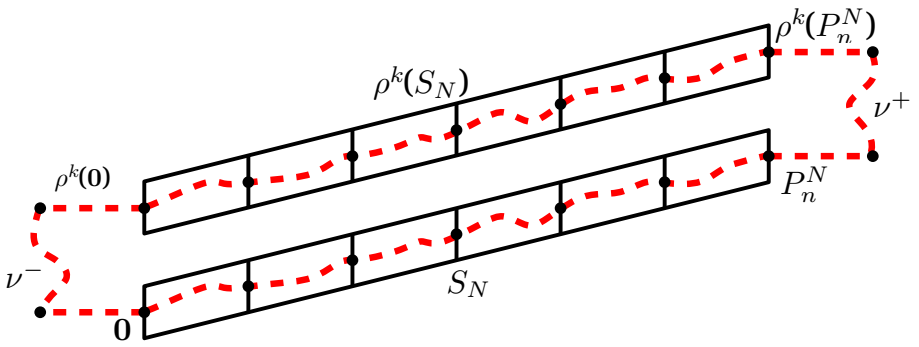


FIGURE 4.2. 管 S_N 及其像 $\rho^k(S_N)$。每个对象都由一条 $(n+\ell)N$ 步桥遍历，并将这两条桥与连接路径 $\nu^{\pm}$连接起来，形成一个红色（虚线）多边形。

满足

$$K < \infty. \tag{4.9}$$

我们可以将 $l_{n,\,\infty}$表示为路径 $(\dots, z_{-1},\ z_0 = \mathbf{0},\ z_1,\ \dots)$，其中 $z_{-1} \in \gamma^{-1}(R_n)$ 且 $z_1 \in R_n$。由于 $h(z_k) \to \pm\infty$ 如 $k \to \pm\infty$，根据 (4.3) 可得

$$\text{for } v \in V,\ d(v, z_k) \to \infty \text{ as } k \to \pm\infty. \tag{4.10}$$

由（4.10）以及 S_∞的周期性，存在$l_{n,\,\infty}$ 的一条有限子路径 l'，使得

$$K \le \sup\{d(v,w) : v, w \in V,\ d(v,l') \le n,\ d(w,l') \le n\}.$$

这是对有限集合取上确界，因此 $K < \infty$，由引理4.1(a)的结论可知，对充分大的 k，□

由引理4.2，我们可以选取 $k = k_n < \infty$ 使得 $S_\infty \cap \rho^k(S_\infty) = \varnothing$。由于$S_N \subseteq S_\infty$，

$$S_N \cap \rho^k(S_N) = \varnothing, \qquad N \ge 1. \tag{4.11}$$

由（4.8），至少存在 $(b_n/|\Gamma_n|)^N$ 条不同的桥穿过每个 S_N 和$\rho^k(S_N)$，我们拟通过在这些桥的端点之间添加连接，将它们组成多边形，如图4.2所示。

首先考虑一条连接$\mathbf{0}$ 与 $\rho^k(\mathbf{0})$的路径，该路径使用高度为负的顶点（端点除外）。我们按如下方式构造三条路径。

(i) 根据定义2.1(c)，我们可以找到一条路径 $(\mathbf{0}, c_1, c_2, \dots)$，使得对所有 i，$h(c_i) \le -i$。由 (4.3)，我们可以选取 $t = t_n$，使得 $d(H_0, c_t) > k\delta$，其中$H_0 = \{v \in V : h(v) = 0\}$，且 δ 由引理 4.1(b)给出。我们将路径 $(\mathbf{0}, c_1, c_2, \dots, c_t)$记作 ν_1。

(ii) 根据引理 4.1(b)，存在一条最短路径 ν_2，从 c_t 到 $\rho^k(c_t$，其长度不超过 $k\delta$。(iii) 如上所述，路径 $\nu_3 := \rho^k(\nu_1$反向后，将 $\rho^k(c_t)$ 与 $\rho^k(\mathbf{0})$连接起来。

ν_i 的并集包含一条路径 ν^-，从 $\mathbf{0}$ 到 $\rho^k(\mathbf{0})$，其顶点除两个端点外，高度均严格为负。ν^- 的长度不超过$2t_n + k\delta$。

通过类似构造，我们找到一条路径 ζ，从 P_n^1到 $\rho^k(P_n^1)$，除端点外仅经过高度严格大于 $h(P_n^1)$ 的顶点，并令 $\nu^+ = \gamma^{N-1}(\zeta)$。因此，$\nu^+$将 P_n^N与 $\gamma^{N-1}(\rho(P_n^1)) = \rho(P_n^N)$ 连接起来，且除端点外仅经过高度严格大于 $h(P_n^N)$ 的顶点。令 $l_n^\pm$ 为上述 $\nu^\pm$的长度，则

$$l_n^\pm \le 2t_n + k\delta. \tag{4.12}$$

上述路径和桥可以拼接起来构成多边形。首先，我们沿着一座桥，沿 S_N 从 $\mathbf{0}$ 到 P_n^N，接着沿 ν_n^+，再沿一座 $\rho^k(S_N)$ 的桥（反向）从 $\rho^k(\mathbf{0})$ 到 $\rho^k(P_n^N)$，最后沿路径 ν^-（反向）。由此可得

$$p_{2(n+\ell)N+l_n^-+l_n^+} \ge \left(\frac{b_n}{|\Gamma_n|}\right)^{2N}. \tag{4.13}$$

取 $(2Nn)$ 次根，得到

$$p^{1/(2Nn)}_{2(n+\ell)N+l_n^-+l_n^+} \ge \left(\frac{b_n}{|\Gamma_n|}\right)^{1/n}. \tag{4.14}$$

现在，由（4.12），

$$\begin{aligned} \frac{2(n+\ell)N + l_n^- + l_n^+}{2nN} &\to 1 + \frac{\ell}{n} \quad \text{as } N \to \infty \\ &\to 1 \qquad\quad \text{as } n \to \infty, \end{aligned} \tag{4.15}$$

由此 $\pi \ge \beta$ 根据（2.2）和（2.3）。将其与（4.6）结合，即可得到定理的 (a) 部分。

下面讨论更具体的 (b) 部分。令 $\epsilon > 0$ 并选取 ϵ'，$\eta > 0$ 使得 $(\beta - \epsilon')^{1-\eta} > \beta - \epsilon$。取足够大的 n，使得

$$\frac{\ell}{n} < \eta, \qquad \left(\frac{b_n}{|\Gamma_n|}\right)^{1/n} > \beta - \epsilon',$$

并考虑等差数列 $(m_N\colon \quad N = 1,\ 2,\ \ldots\ldots)$，其中 $m_N = 2(n+\ell)N + l_n^- + l_n^+$。根据 (4.14)–(4.15)，

$$\liminf_{N\to\infty} p_{m_N}^{1/m_N} \ge (\beta - \epsilon')^{1-\eta} > \beta - \epsilon,$$

如所需。

Acknowledgement

作者感谢 Tony Guttmann、Stuart Whittington 和 Barry Hughes 分享他们对 Hammersley 第二个证明的回忆，该证明表明 $\pi(\mathbb{Z}^d) = \mu(\mathbb{Z}^d)$，当 $d \geq 2$ 时。该证明发表于 Hughes [17, 第 442]页。Tom Hutchcroft 还友善地就以下不等式作了评论：$\pi < \mu$ 对于具有传递的非单模自同构子群的图。

References

[1] S. E. Alm 和 S. Janson，《一维格点上的随机自避行走》，《统计学与随机模型通讯》6 (1990)，第 2 期，169–212。MR 1047969[2] R. Bauerschmidt、H. Duminil-Copin、J. Goodman 和 G. Slade，《自避行走讲义》，《二维及更高维的概率与统计物理》，Clay 数学论文集，第 15 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2012 年，第 395–467 页。MR 3025395 [3] S. R. Broadbent 和 J. M. Hammersley，《渗流过程 I：晶体与迷宫》，《剑桥哲学学会会刊》53 (1957)，629–641。MR 91567[4] H. Duminil-Copin、A. Glazman、A. Hammond 和 I. Manolescu，《自避行走终止于给定点的概率》，《概率年刊》44 (2016)，第 2 期，955–983。MR 3474464[5] H. Duminil-Copin 和 A. Hammond，《自避行走是次弹道的》，《数学物理通讯》324 (2013)，第 2 期，401–423。MR 3117515[6] P. Flory，《高分子化学原理》，康奈尔大学出版社，1953 年。[7] G. R. Grimmett，《图上的概率》，第 2 版，数理统计学会教材，第 8 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2018 年。MR 3751350[8] G. R. Grimmett 和 Z. Li，《正则图连接常数的界》，《组合数学》35 (2015)，第 3 期，279–294。MR 3367126[9] ，《自避行走与 amenability》，《电子组合数学杂志》24 (2017)，第 4 期，论文编号 4.38，共 24 页。MR 3743~~101~~[10] ，《连接常数的局部性》，《离散数学》341 (2018)，3483–3497。MR 3862645[11] ，《自避行走与连接常数》，《概率论与统计物理之旅（三）》，Springer 数学与统计学论文集，第 300 卷，施普林格，新加坡，2019 年，第 215–241 页。MR 4044395 [12] G. R. Grimmett 和 C. M. Newman，《$\infty + 1$ 维中的渗流》，《物理系统中的无序》，牛津科学出版物，牛津大学出版社，纽约，1990 年，第 167–190 页。MR 1064560[13] J. M. Hammersley，《渗流过程 II：连接常数》，《剑桥哲学学会会刊》53 (1957)，642–645。MR 91568[14] ，《格点上的多边形数》，《剑桥哲学学会会刊》57 (1961)，516–523。MR 123489[15] J. M. Hammersley 和 K. W. Morton，《穷人的蒙特卡罗法》，《皇家统计学会杂志》B 辑 ~~16 (1954)~~，23–38；讨论部分 61–75。MR 64475[16] J. M. Hammersley 和 D. J. A. Welsh，《关于超立方格点连接常数收敛速率的进一步结果》，《牛津数学季刊》（第 2 辑）13 (1962)，108–110。MR 139535

[17] B. D. Hughes, 《随机游走与随机环境》, 第 1 卷, 牛津科学出版物, 克拉伦登出版社, 牛津大学出版社, 纽约, 1995 年。MR 1341369[18] T. Hutchcroft, 《非单模传递图上的自避行走》, 《概率年刊》47 (2019), 第 5 期, 2801–2829。MR 4021237[19] E. J. Janse van Rensburg, 《相互作用行走、多边形、动物和囊泡的统计力学》, 第 2 版, 牛津数学及其应用讲座系列, 第 39 卷, 牛津大学出版社, 牛津, 2015 年。MR 3526233[20] H. Kesten, 《自避行走数目论 II》, 《数学物理杂志》5 (1964), 1128–1137。MR 166845[21] D. Krachun 和 C. Panagiotis, 《六角格点上自避行走的定量次弹道性》, (2023), https://arxiv.org/abs/2310.17299。[22] C. Lindorfer, 《自避行走的一般桥定理》, 《离散数学》343 (2020), 第 12 期, 112092, 共 11 页。MR 4137630[23] R. Lyons 和 Y. Peres, 《树与网络上的概率》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2016 年, http://pages.iu.edu/~rdlyons/。MR 3616205[24]N. Madras 和 G. Slade, 《自避行走》, 现代 Birkh¨äuser 经典著作, Birkh¨äuser/施普林格, 纽约, 2013 年。MR 2986656[25] N. Madras 和 C. C. Wu, 《双曲图上的自避行走》, 《组合学、概率与计算》14 (2005), 第 4 期, 523–548。MR 2160417[26] A. Nachmias 和 Y. Peres, 《高围长的非 amenable 凯莱图具有 $p_c < p_u$ 及平均场指数》, 《电子概率通讯》17 (2012), 第 57 号, 8 页。MR 3005730[27] W. J. C. Orr, 《无限稀释条件下聚合物溶液的统计处理》, 《法拉第学会会刊》43 (1947), 12–27。[28] C. Panagiotis, 《双曲图上的自避行走与多边形》, 《图论杂志》106 (2024), 第 3 期, 435–473。MR 4750971[29] P. M. Soardi 和 W. Woess, 《无限图上随机游走的 amenability、单模性与谱半径》, 《数学杂志》205 (1990), 第 3 期, 471–486。MR 1082868

Centre for Mathematical Sciences, Cambridge University, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WB, UK电子邮箱地址: g.r.grimmett@statslab.cam.ac.uk网址: http://www.statslab.cam.ac.uk/~grg/