arXiv:2601.01133v1 [math.GR] 3 Jan 2026

幂零群差图的直径和支配集

Xuanlong Ma[1],Samir Zahirovi´c[2], 和 Katarina ˇZigerovi´c[3]

[1]理学院，西安石油大学，中国西安 710065[2]诺维萨德大学理学院数学与信息学系，塞尔维亚[3]塞尔维亚科学院与艺术学院数学研究所，塞尔维亚

摘要

给定一个有限群 G，其差图 G记作 $\mathcal{D}(G$，是 G 的增强幂图与 G的幂图之差，并去除所有孤立顶点。本文主要研究有限群差图的支配集。特别地，我们证明幂零群差图的直径上界为 4。此外，我们通过对每个 [3, 定理 5。3] ，分类所有差图直径为 k的幂零群，推广并细化了 Biswas 等人 $k \leq 4$的结果。

关键词： 差图；幂图；增强幂图；直径；支配集；有限群

*2020*年数学主题分类：
05C25

1 引言

对于一种代数结构（群或环），可以在其上定义一个图并研究该代数结构的图表示，这是一个很有趣的研究课题

电子邮件地址：xuanlma@xsyu.edu.cn(X. Ma),samir@dmi.uns.ac.rs(S. Zahirovi´c),katarina.zigerovic@mi.sanu.ac.rs(K. ˇZigerovi´c)

它属于代数图论，并具有重要的应用。例如，群的凯莱图可用作数据挖掘的分类器 [12]。

群上众所周知的一种图表示是幂图。给定一个群 G， G的幂图记作 $\mathcal{P}(G)$，它是一个简单图，其顶点集为 G，并且当两个顶点中一个是另一个的幂时，这两个顶点相邻。Kelarev 和 Quinn [11]最早引入了群的有向幂图。2009年，Chakrabarty等人 [6] 引入了群的无向幂图，它也称为群的幂图。在过去二十年里，对群幂图的研究不断发展（参见两篇综述论文 [2, 14]）。群 G的增强幂图记作 $\mathcal{P}_E(G)$，它是一个顶点集为 G的简单图，其中当两个不同顶点生成一个循环子群时，它们相邻。Aalipour等人 [1]最早提出了增强幂图这一术语。在 [1], 中，作者研究增强幂图，旨在衡量无向幂图与交换图有多接近。关于群的增强幂图的研究成果和开放问题的详细列表见 [10]。

2022年，Biswas、Cameron等人 [3]首次引入了有限群的差图。事实上，Cameron 早在 [5] 就观察到，与群相关的幂图、增强幂图、交换图以及其他若干图构成一个层级关系，即其中每一个图都是下一个图的子图。他建议研究这些图之间的差，而增强幂图与幂图之差是研究得最为广泛的一种。给定一个有限群 G，G的差图记为 $\mathcal{D}(G)$，定义为 G 的增强幂图与 G的幂图之差，其中所有孤立顶点均被移除。也就是说， $\mathcal{D}(G)$ 是从 $\mathcal{P}_E(G)-\mathcal{P}(G)$中移除所有孤立顶点后得到的图。最近，Kumar等人 [13] 刻画了差图分别为弦图、星图、可支配图、阈值图和分裂图的有限群。Bo˘snjak、Madar´asz 和 Zahirovi´c [4] 证明了：如果两个阶仅被两个素数整除的阿贝尔群具有同构差图，那么它们同构。

在第3节中，我们描述了支配数为 1 的有限群。在第4节中，我们将关注点转向循环群；我们完整描述了循环群的差图中最小大小的支配集。因此，我们确定了若干类有限循环群 $\mathbb{Z}_n$ ，使得 $\gamma(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = 1$ 和$\gamma(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = 2$成立；此外，还确定了若干类有限循环群，使得 $\mathrm{diam}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = 2$和 $\mathrm{diam}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = 3$成立。在第5节中，我们证明有限幂零群的差图的直径至多为 4。我们构造了有限非循环幂零群的差图的一些支配集。本节后续部分将利用这些结果，描述差图直径为 2、3 和 4 的幂零群。

2 预备知识

本节介绍群论和图论中的一些基本定义，这些定义将在全文中使用。

本文所考虑的所有群均假设为有限群。我们用大写字母（通常为 G）表示群，并用 e 表示其单位元。对于元素 $g \in G$，其阶记为 $o(g)$。特别地，如果 $o(g) = 2$，则称 g 为对合。G 的指数记为 $\exp(G)$，它是 G 中所有元素的阶的最小公倍数。等价地，它是满足对每个 $g \in G$ 都有 $g^t = e$ 的最小正整数 t。

G 的极大循环子群是指不为 G 的其他循环子群的真子群的循环子群。G 的所有极大循环子群组成的集合记为 $\mathcal{M}(G)$。显然，G 是循环群，当且仅当 $\mathcal{M}(G) = \{G\}$；等价地，当且仅当 $|\mathcal{M}(G)| = 1$。

阶为 n 的循环群记为 $\mathbb{Z}_n$。给定一个素数 p，阶为 p^n 的初等阿贝尔 p-群是 n 个 $\mathbb{Z}_p$ 的直积，记为 $\mathbb{Z}_p^n$。众所周知，有限群 G 是幂零群，当且仅当 G 的每个 Sylow$p$ 子群都是正规的；这也等价于 G 是其 Sylow 子群的直积。特别地，如果 G 是幂零群且 $g,\ h \in G$，并且 $\gcd(o(g),\ o(h)) = 1$，则 $gh = hg$。

本文所讨论的所有图均假设为简单图，即不含环或重边的无向图。对于图 Γ，我们用$V(\Gamma)$表示其顶点集，用 $E(\Gamma)$表示其边集。如果 Γ 中的两个不同顶点 x 和 y 相邻，则记为 $x \sim y$。Γ 中 x 与 y 之间的距离 是从 x 到 y的最短路径长度，记为 $d(x,\ y)$。Γ的直径 记为 $\mathrm{diam}(\Gamma)$，即 Γ中任意两个顶点之间距离的最大值。图 Γ 的子集 $D \subseteq V(\Gamma)$称为支配集，如果每个顶点 $v \in V(\Gamma)$要么属于 D，要么与 D中的至少一个顶点相邻。Γ的支配集的最小大小记为$\gamma(\Gamma)$，称为 Γ的支配数。

3 支配数为 1 的差图

给定有限群 G，G的差图记为 $\mathcal{D}(G)$，定义为 G的增强幂图与 G的幂图之差，并移除所有孤立顶点。也就是说，$\mathcal{D}(G)$是从 $\mathcal{P}_E(G) - \mathcal{P}(G)$中移除所有孤立顶点后得到的图。

引理 3.1 ([3, 命题 4.2]) 设 $a, b \in G$ 是两个不同的非平凡元素。若 a 和 b 交换，且 最大公因数$(o(a)\ o(b)) = 1$，则 $a \sim b$ 在 $\mathcal{D}(G)$中。

显然，单位元 $e \in G$ 始终是 $\mathcal{P}_E(G) - \mathcal{P}(G)$ 的孤立顶点，因此 $e \notin V(\mathcal{D}(G))$。下面的引理刻画了 $\mathcal{P}_E(G) - \mathcal{P}(G)$ 的所有非平凡孤立顶点。

引理 3.2 ([3, 命题 2.1]) 设 G 是一个阶至少为 2 的群。非平凡元素 $g \in G$ 在 $\mathcal{P}_E(G) - \mathcal{P}(G)$ 中是孤立的，当且仅当 $\langle g \rangle$ 是 G的极大循环子群，或者 G中每个包含 g 的循环子群的阶都是素数幂。

现在我们引入一类特殊的群，它们在支配数为一的差图结构中起着关键作用。

令 Φ 表示满足以下条件的有限群类 G：

(a) G 中存在唯一一个与至少一个奇素数阶元素交换的对合。我们将此对合记为 u；(b) 对每个奇数阶的非平凡元素 $g \in G$，以下条件之一成立：$\langle g \rangle$是 G的极大循环子群；G 中每个包含 g的循环子群的阶都是素数幂；g 的阶为素数，且与 u交换；(c) 对每个偶数阶元素 $g \in G \setminus \{u\}$，要么 $\langle g \rangle$ 是 G的极大循环子群，要么 G 中每个包含 g 的循环子群的阶都是素数幂。

若一个群 G 满足 Φ-群 $G \in \Phi$，则称其为 Φ-群。注意到 Φ 并非空集；例如，对于任意奇素数 q 和任意正整数 n，都有$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q^n \in \Phi$ 。

定理 3。3 $\gamma(\mathcal{D}(G)) = 1$ 当且仅当 G是一个 Φ-群。此外，如果 $\gamma(\mathcal{D}(G)) = 1$，那么 $\{u\}$ 是 $\mathcal{D}(G)$中唯一的大小为一的支配集，其中 u 是 G 中的唯一对合，并且存在至少一个与 u交换的奇素数阶元素。

证明。首先假设 $\gamma(\mathcal{D}(G)) = 1$，并令 $\{u\}$ 为 $\mathcal{D}(G)$的一个支配集。若u 不是对合，则 $u^{-1} \neq u$ 和 $u^{-1} \in V(\mathcal{D}(G))$，因此在 $\mathcal{D}(G)$中，u^{-1} 不与u 相邻，这不可能。于是，我们得到 u是一个对合。由于$u \in V(\mathcal{D}(G))$，由引理 3.2可知，G存在一个包含 u 且其阶不是素数幂的循环子群。这意味着 u 与一个奇素数阶元素交换。

设 $g \in G \setminus \{u\}$ 的阶为偶数。若 $g \sim u \in \mathcal{P}_E(G)$，则 $g \sim u$ 也属于 $\mathcal{P}(G)$。由此可知，g 与 u 在 $\mathcal{P}_E(G) - \mathcal{P}(G)$ 中不相邻，因此 g 是 $\mathcal{P}_E(G) - \mathcal{P}(G)$ 的孤立顶点。根据引理 3.2，条件 (c) 成立。这也意味着 Φ-群定义中的 (a) 成立。

现在，设 $h \in G$ 是一个非平凡的奇数阶元素。若 h 是 $\mathcal{P}_E(G) - \mathcal{P}(G)$ 的孤立顶点，则根据引理 3.2，要么 $\langle h \rangle$ 是 G 的极大循环子群，要么每个包含 h 的 G 的循环子群都具有素数幂阶。因此，在下文中我们可以假设 $h \in V(\mathcal{D}(G))$。于是有 $h \sim u \in \mathcal{D}(G)$，所以 $\langle h, u \rangle$ 是循环的，且 h 与 u 交换。反设 $o(h)$ 不是素数。则存在一个素数阶元素 $c \in \langle h \rangle$，故 $c \sim u$，且 cu 的阶为偶数。因此，引理 3.2 蕴含 $cu \in V(\mathcal{D}(G))$，从而 $cu \sim u \in \mathcal{D}(G)$。然而，这是不可能的，因为 $cu \sim u \in \mathcal{P}(G)$。因此，$o(h)$ 必为素数，且 (b) 成立。所以，$G \in \Phi$。

反之，假设 $G \in \Phi$。令 u 为 G中的唯一对合，使得存在一个与 u交换的奇素数阶元素。于是，由引理 3.1，$u \in V(\mathcal{D}(G))$。任取 $v \in V(\mathcal{D}(G)) \setminus \{u\}$。根据 Φ-群定义中的 (c) 以及引理 3.2，$o(v)$ 必为奇数。注意到 $v \neq e$。于是，根据 (b)，我们得出 v 具有素数阶且与 u交换，因此 $v \sim u$ 属于 $\mathcal{D}(G)$。因此，$\{u\}$ 是 $\mathcal{D}(G)$ 的一个支配集，并且 $\gamma(\mathcal{D}(G)) = 1$，证毕。□

接下来的结果对所有差图的支配数为一的有限幂零群进行了分类。

推论 3.4 设 G 为一个幂零群。当且仅当 $\gamma(\mathcal{D}(G)) = 1$

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times Q,$$

其中 Q 是一个指数为 q 的群，其中 q 是某个奇素数。

证明。显然，对于奇素数 q，若 Q 是一个 $\exp(Q) = q$群，则 $\mathbb{Z}_2 \times Q$ 是一个幂零 Φ-群，因此 $\gamma(\mathcal{D}(G)) = 1$ 由定理 3.3可得。

现在，设 G 是一个具有唯一对合 u 的幂零 Φ-群。那么，$|G|$ 必须能被 2 整除。假设 $|G|$ 至少有三个不同素因子。那么存在一个阶为 pq 的元素 $x \in G$，其中 p 和 q 是$|G|$的不同奇素因子。但是，ux 的阶为 $2pq$，且 $x \in \langle ux \rangle$，这与 Φ-群定义中的 (b) 矛盾。

我们得出，$|G|$ 至多有两个素因子。因此，$G \cong P \times Q$，其中P 是一个 2-群，而 Q 是某个奇素数 q对应的 q-群。此外，再由 Φ-群定义中的 (a)，可知 P 有唯一对合，记作 u。我们断言 P 没有 4 阶元素。事实上，若 P 有一个 4 阶元素 a，则 G有一个阶为 $4q$ 且包含 a的循环子群，这与 (c) 矛盾。因此，$P \cong \mathbb{Z}_2$。为完成证明，注意若 Q 包含一个阶为 q^2的元素 x，则 $\langle ux \rangle$ 的阶为 $2q^2$ 且包含 x，这再次与 (b) 矛盾。因此，$\exp(Q) = q$，证毕。□

推论 3.5 设 G 是一个阿贝尔群。那么 $\gamma(\mathcal{D}(G)) = 1$ 当且仅当

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_q^n,$$

其中 q 是一个奇素数， n是一个正整数。

4 循环群差图的直径与支配集

在 [1], , Aalipour 等人证明，有限群 G的增强幂图与幂图相等，当且仅当 G的每个循环子群的阶都是素数幂。因此，如果 G 是一个 p群，那么差图 $\mathcal{D}(G)$ 无定义。基于此，我们将注意力限制在循环群 $\mathbb{Z}_n$上，其中 n 不是素数幂。注意，在这种情况下，我们有 $V(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = \{g \in \mathbb{Z}_n \setminus \{e\} : o(g) \neq n\}$；不同顶点 a、 $b \in V(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n))$ 相邻，当且仅当 $\gcd(o(a)\ o(b)) \notin \{o(a)\ o(b)\}$。

引理 4.1 设 n 是一个不是素数幂的正整数。*Th* *en*

$$\gamma(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 2q \text{ for some odd prime } q; \\ 2, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

此外，若 $n = 2q$ 对于某个奇素数 q成立，则大小为1 的唯一支配集为$\{u\}$，其中 u 表示 $\mathbb{Z}_n$的唯一对合。否则， $\{a, b\}$ 是大小为2 的支配集，当且仅当$\gcd(o(a)\ o(b)) = 1$ 且 $o(a)o(b) = n$， a 与 b 相邻，并且 $\{a, b\}$ 是 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$中的一个支配集。

证明。 若对某个奇素数 q， $n = 2q$ 成立，则易知 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n) \cong K_{1,q-1}$，其中 $\mathbb{Z}$ 的唯一对合是 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$中度为 $n - 1$ 的唯一顶点。

现在，假设 n 不是 2 与某个奇素数的乘积。设 $a, b \in \mathbb{Z}_n$ 满足 $\gcd(o(a)\ o(b)) = 1$ 且 $o(a)o(b) = n$。那么推论 3.5 还表明 $\gamma(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) \geq 2$。注意

$$N(a) = \{a' \in \mathbb{Z}_n \setminus \langle a \rangle : a' \neq e, o(a) \nmid o(a')\},$$

$$N(b) = \{b' \in \mathbb{Z}_n \setminus \langle b \rangle : b' \neq e, o(b) \nmid o(b')\}.$$

考虑任意一个 $x \in V(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) \setminus \{a, b\}$。容易看出，若不失一般性地设 $x \in \langle a \rangle$，则 $x \sim b$。现在假设 $x \in \mathbb{Z}_n \setminus (\langle a \rangle \cup \langle b \rangle)$。由于$o(x) \neq n = o(a)o(b)$，要么 $o(a) \nmid o(x)$，要么 $o(b) \nmid o(x)$。若不失一般性地设，

$o(a) \nmid o(x)$，则 $a \sim x$。因此，$\{a, b\}$ 是 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$ 的支配集，从而$\gamma(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = 2$，如所求。

接下来要证明：只要 $\{a, b\}$ 是 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$ 的支配集，那么$o(a)o(b) = n$，并且 a 与 b 的阶互素。令 $k =$ 为 $\gcd(o(a)\ o(b))$。若$k > 1$，则 a 和 b 均不与 $\mathbb{Z}_n$中任何阶为 k 的元素相邻。因此，$o(a)$ 与 $o(b)$ 互素。最后，若 $o(a)o(b) < n$，则 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$ 含有阶为 $o(a)o(b)$ 的 $\mathbb{Z}_n$元素，并且 a 和 b 均不与阶为 $o(a)o(b)$ 的元素相邻。由此，引理得证。□

定理 4.2 设 n 是一个非素数幂的正整数。则

$$\operatorname{diam}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = \begin{cases} 2, & \textit{if } n \textit{ is a square-free number;} \\ 3, & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

特别地，$\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$是连通的。

证明。注意到 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$ 不是完全图，引理 4.1推出$2 \leq$ 直径$(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) \leq 3$。

假设 n 是无平方因子数，并令 x、$y \in V(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n))$，其中 $x \neq y$。若 $o(x) \nmid o(y)$ 且 $o(y) \nmid o(x)$，则有 $x \sim y$。因此，不失一般性，可以假设 $o(x) \mid o(y)$。由于 $o(y) \neq n$，且 n 不是素数幂，故存在至少一个素因子 p 属于 n，使得 $p \nmid o(y)$。令 $z \in \mathbb{Z}_n$ 为一个阶为 p 的元素。则 $z \in V(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n))$，且 $x \sim z \sim y$。因此，$d(x, y) = 2$，由此可得，在此情形下，$\operatorname{diam}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = 2$，证毕。

现在假设存在一个素数 p，使得 $p^2 \mid n$。那么，我们可以写成 $n = p^m k$，其中 $m \geq 2$、$p^{m+1} \nmid n$，且 k 是一个正整数。令 $a,\ b \in \mathbb{Z}_n$ 满足

$$o(a) = p, \quad o(b) = p^{m-1}k.$$

由于 $o(a) \mid o(b)$，我们有 $a, b \in V(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n))$ 和 $a \nsim b$。接下来，我们断言 $d(a, b) \geq 3$。反设存在一个元素$c \in V(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n))$，使得 $a \sim c \sim b$ 属于 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$。由于 $o(c) \nmid o(b)$ 且 $o(b) \nmid o(c)$，可得 $p^m \mid o(c)$。因此，$o(a) \mid o(c)$，这意味着 a 和 c 在 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$ 中不相邻，这就产生了矛盾。因此，该断言成立，即 $d(a, b) \geq 3$，这意味着 $\operatorname{diam}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) \geq 3$。回顾 $\operatorname{diam}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) \leq 3$，我们得出结论：在这种情况下，$\operatorname{diam}(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)) = 3$。□

我们用 D_{2n} 表示阶为 $2n$ 的二面体群，其中 $n \geq 3$。一般而言，D_{2n} 有如下表示：

$$D_{2n} = \langle a, b : b^2 = a^n = (ab)^2 = e \rangle. \tag{3}$$

注意， D_{2n} 是非阿贝尔群。注意， $\{\langle a\rangle, \{ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b, b\}\}$ 是 D_{2n} 的一个划分，并且对每个 $0 \le i \le n-1$， a^ib 都是一个对合。因此，对每个 $0 \le i \le n-1$, $\langle a^ib\rangle \in \mathcal{M}$（$D_{2n}$）。

现在注意到，在 $\mathcal{D}(D_{2n})$中，形如 a^ib的元素是孤立顶点，其余顶点则是由 a生成的循环群中的元素，该循环群的阶为 n。因此，对任意 $n \ge 3$， $\mathcal{D}(D_{2n}) \cong \mathcal{D}(\mathbb{Z}_n)$。

现在，作为定理 4.2的推论，我们得到以下结果，它推广了[3,定理 5。5]。

推论 4.3 假设 D_{2n} 是由(3)中给出的$n \ge 3$所表示的二面体群。如果 n 是素数幂，则 $\mathcal{D}(D_{2n})$ 未定义。否则，

$$\operatorname{diam}(\mathcal{D}(D_{2n})) = \begin{cases} 2, & \textit{if } n \textit{ is a square-free number;} \\ 3, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

对于正整数 $m \ge 2$，阶为 $4m$的广义四元数群记作 Q_{4m}，其定义见 Johnson（参见 [9, 第 44–45]页），其表示如下:

$$Q_{4m} = \langle x, y : x^m = y^2, x^{2m} = y^4 = e, y^{-1}xy = x^{-1}\rangle. \tag{4}$$

回忆一下， Q_8 是通常所说的阶为 8 的四元数群，即，

$$Q_8 \cong \langle i, j, k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\rangle.$$

容易验证， Q_{4m} 具有唯一对合 $x^m = y^2$。注意到

$$Q_{4m} = \langle x\rangle \cup \{x^iy : 1 \le i \le 2m\}, \quad o(x^iy) = 4 \text{ for any } 1 \le i \le 2m, \tag{5}$$

and

$$\mathcal{M}(Q_{4m}) = \{\langle x\rangle, \langle xy\rangle, \langle x^2y\rangle, \ldots, \langle x^my\rangle\}, \quad x^m \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}(Q_{4m})} M. \tag{6}$$

T因此，由（5）和（6），可得 $\mathcal{D}$（Q_{4m}） $\cong \mathcal{D}$（$\mathbb{Z}_{2m}$），对任意 $m \ge 2$。

再次作为定理4.2的推论，我们有如下结论。

推论 4.4 假设 Q_{4m} 是按(4)中所述方式给出的广义四元数群，其中 $m \ge 2$。若 m 是 2的幂，则 $\mathcal{D}(Q_{4m})$ 无定义。否则，

$$\operatorname{diam}(\mathcal{D}(Q_{4m})) = \begin{cases} 2, & \textit{if } 2m \textit{ is a square-free number;} \\ 3, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

5 非循环幂零群的差图直径

在上一节中，我们描述了循环群的支配集，并利用这些信息确定了循环群的差图的直径和支配数。本节继续研究其余的有限幂零群。为此，本节始终考虑非循环幂零群。

设 G 是一个非循环幂零群，且不是 p-群。由于有限幂零群是其 Sylow 子群的直积，我们可以假设

$$G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t \times \mathbb{Z}_n, \tag{7}$$

其中每个 P_i 都是 p_i 的非循环 Sylow G，$p_1, \ldots, p_t$ 是两两不同的素数，并且 $p_i \nmid n$ 对于任意 $1 \leq i \leq t$。注意，在（7）中，n 可以等于 1，此时 $t \geq 2$。

为了更好地理解非循环幂零群的差图支配集，我们先重点研究非循环 p-群。这将有助于我们确定非循环幂零群的差图直径。设 P 是一个非循环 p-群，其中 p 是素数。在 P 的所有极大循环子群集合上，我们定义如下支配关系：若存在 M，$N \in \mathcal{M}(P)$，使得 $p^2 \leq |M| \leq |N|$ 且 $|M \cap N| = |M|/p$，则称 M 被 N 支配，并记作 $M \ll N$。

引理 5.1 设 P 是一个非循环 p-群，其中 p 是素数。若 M_1、M_2 和 M_3 是 P 的三个不同极大循环子群，且 $M_1 \ll M_2$ 和 $M_2 \ll M_3$，则 $M_1 \ll M_3$。

证明。注意 $|M_1| \leq |M_2| \leq |M_3|$、$|M_1 \cap M_2| = |M_1|/p$ 和 $|M_2 \cap M_3| = |M_2|/p$。显然，$|M_2|/p \geq |M_1|/p$。注意到 $M_1 \cap M_2$ 和 $M_2 \cap M_3$ 分别是 M_1 和 M_2 的极大真子群。因此，由于 $M_1 \cap M_2$ 和 $M_2 \cap M_3$ 都是循环群 M_2 的子群，所以 $M_1 \cap M_2 \subseteq M_2 \cap M_3$。于是，$M_1 \cap M_2 \subseteq M_1 \cap M_3$，并且由于 $M_1 \cap M_2$ 和 $M_1 \cap M_3$ 都是极大循环子群 M_1 的极大真子群，可得 $M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_3$，这意味着 $|M_1 \cap M_3| = |M_1|/p$。因此，$M_1 \ll M_3$。□

回顾一下，P 是一个非循环的 p 群，其中 p 是素数。假设 $\exp(P) > p$。首先，我们将群 P 的所有极大循环子群构成的集合的一个子集 $\mathcal{S}'(P)$ 定义如下：

> $C \in \mathcal{S}'(P)$ 当且仅当 $C \in \mathcal{M}(P)$ $|C| > p$，并且不存在阶大于 $|C|$ 的 $C' \in \mathcal{M}(P)$，使得 $C \ll C'$.

注意，对于 C，$C' \in \mathcal{S}'(P)$，若 $C \ll C'$，则必有 $|C| = |C'|$。因此，关系 $\ll$ 在 $\mathcal{S}'(P$上是对称的。将 $\equiv$ 定义为集合 $\mathcal{S}'(P)$ 上支配关系的自反闭包，我们便得到一个等价关系（由引理5.1可知，显然 $\equiv$ 具有传递性）。

接着，我们将由 P 诱导的集合 $\mathcal{S}(P)$ 定义如下:

$$\mathcal{S}(P) = \begin{cases} \{\langle x\rangle\}, \text{where } x \text{ is any element of order } p \text{ in } P, & \text{if } \exp(P) = p; \\ \text{any system of representatives for the } \equiv\text{-classes}, & \text{if } \exp(P) > p. \end{cases}$$

我们将 $\mathcal{F}(P)$ 定义为 P 的任意一个满足下列条件的子集

$$\mathcal{F}(P) = \begin{cases} \{x\}, & \text{if } \exp(P) = p; \\ \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, & \text{if } \exp(P) > p, \end{cases} \tag{8}$$

其中，x 是 P 中阶为 p 的元素，且 $\{\langle x_1\rangle, \langle x_2\rangle, \ldots, \langle x_k\rangle\} = \mathcal{S}(P)$。注意，$\mathcal{S}(P)$ 和 $\mathcal{F}(P)$ 实际上是集合族；不过，我们始终只考虑这些集合族中的特定代表元。

我们用下面的例子来说明所引入的集合。

例 5.2 考虑 Q_{2^k}，其中 $k \geq 3$，且 Q_{2^k} 是广义四元数群，满足 $m = 2^{k-2}$，如(4)所示。由 (5) 和 (6)，可得

$$\mathcal{S}'(Q_{2^k}) = \begin{cases} \{\langle x\rangle, \langle xy\rangle, \langle x^2y\rangle\}, & \textit{if } k = 3; \\ \{\langle x\rangle\}, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

因此，对于任意 $k \geq 3$，有 $\mathcal{S}(Q_{2^k}) = \{\langle x\rangle\}$。于是，我们可以选取 $\mathcal{F}(Q_{2^k}) = \{x\}$。

现在，再次考虑如下非循环幂零群 G，它不是一个 p-群，如（7）所示，并令 $\mathbb{Z}_n = \langle x\rangle$。我们自然地定义

$$\mathcal{F}(G) = \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{F}(P_i), & \text{if } n = 1; \\ \{x\} \cup (\bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{F}(P_i)), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{9}$$

引理 5.3 设 G 是一个非循环幂零群，且不是 p-群。则$\mathcal{F}(G)$ 是 (G)的支配集。

证明。 设 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G)$ 和 $g \in V(\mathcal{D}(G))$。设 G 如（7）所示。于是，我们可以假设

$$g = g_1 g_2 \cdots g_t x^k,$$

其中，对每个 $1 \leq i \leq t$，x 是 $\mathbb{Z}_n$ 的一个生成元，且 $k \in \mathbb{N}$。注意，对于任意 $1 \leq i \leq t$，$P_i \cap \mathcal{F}$ 中至少存在一个元素。令 $x_i \in P_i \cap \mathcal{F}$ 对每个

$1 \le i \le t$。注意 g 和 x_i 均非平凡，其中 $1 \le i \le t$。若存在一个指标 $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ 使得 $g_j = e$，则引理 3.1 推出 x_j 与 g 在 $\mathcal{D}(G)$ 中相邻。

在下文中，我们可以假设 $g_i \neq e$ 对每个 $1 \le i \le t$成立。由引理3.2可知，$\langle g \rangle$ 不是极大循环子群。现在，假设$\langle g_i \rangle \in \mathcal{M}(P_i)$，对所有 $1 \le i \le t$成立。在这种情况下，$\langle x^k \rangle \neq \langle x \rangle$，并且容易看出 g和 x 在 $\mathcal{D}(G)$中相邻。

还需考虑这样的情形：某些 g_i 不能生成 P_i的极大循环子群，并且 g_i中没有任何一个是单位元。令 $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$ 满足 $\langle g_l \rangle \notin \mathcal{M}(P_l)$。那么，存在元素 y_l 使得 $\langle g_l \rangle < \langle y_l \rangle \in \mathcal{M}(P_l)$。此外，存在 P_l $\langle z_l \rangle \in \mathcal{S}$的某个极大循环子群$P_l$，使得 $\langle y_l \rangle \ll \langle z_l \rangle$。由于 $\langle z_l \rangle$ 包含 $\langle y_l \rangle$的所有真子群，因此可得 $\langle g_l \rangle < \langle z_l \rangle$。最后，$g \sim z_l$。不失一般性，我们可以假设 $z_l \in \mathcal{F}(P_l)$。因此，$\mathcal{F}$是 $\mathcal{D}(G)$的一个支配集。□

定理 5.4 设 G 是一个非 p-群的有限幂零群。那么 $\mathcal{D}(G)$是连通的，且$\mathrm{diam}(\mathcal{D}(G)) \le 4$。

证明。注意，若 G 还如（7）所示为非循环群，则对于任意两个元素 $a, b \in \mathcal{F}(G)$，有 $d(a, b) \le 2$。此外，$d(a, b) = 2$当且仅当$a, b \in P_i$，对某个 $1 \le i \le t$成立。因此，在此情形下，我们有 $\mathrm{diam}(\mathcal{F}(G)) \le 2$。

现在，根据定理 4.2、引理 5.3 以及上述结论，命题得证；该结论也见于 [3] (参见 [3, 定理 5.3])。□

例 5.5 考察 $Q_{2^k} \times \mathbb{Z}_n$，其中 $n \ge 3$ 是一个奇数，$k \ge 3$，且 Q_{2^k} 是满足 $m = 2^{k-2}$的广义四元数群。由定理 3.3、例 5.2 和引理 5.3，可得 $\gamma(\mathcal{D}(Q_{2^k} \times \mathbb{Z}_n)) = 2$。

引理 5.6 设 G 是一个非循环幂零群，且不是 p-群。则$\mathrm{diam}(\mathcal{D}(G)) = 4$ 当且仅当 G 具有两个不同的循环子群 $\langle u \rangle$、$\langle v \rangle \le P$，它们在 P 中不是极大循环子群，其中 P 是 G 的 Sylow p-子群，并且 $o(u) = o(v)$。此外，对于 a、$b \in V(\mathcal{D}(G))$，我们有 $d(a$、$b) = 4$ 当且仅当 a 和 b 具有以下类型：

$$a = uh, \quad b = vh',$$

其中 $\langle h \rangle$、$\langle h' \rangle \in \mathcal{M}(H)$，以及 $G = P \times H$.

证明。我们先证明充分性。设 G 按（7）所示表示。则不失一般性，我们可以假设 $\langle u \rangle, \langle v \rangle \le P_1$，并且 $o(u) = o(v)$. 设 H

为 G 的所有其他 Sylow 子群的乘积，并设 $h, h' \in H$ 使得$\langle h\rangle, \langle h'\rangle \in \mathcal{M}(H)$。考虑这些元素

$$a = uh, \quad b = vh'.$$

注意到 $a \neq u$ 和 $b \neq v$。由于 $\langle u\rangle$ 和 $\langle v\rangle$ 都不是 G中的极大循环子群，我们可以假设 $\langle u\rangle \lneq \langle u'\rangle \in \mathcal{M}(P_1)$ 且 $\langle v\rangle \lneq \langle v'\rangle \in \mathcal{M}(P_1)$。显然， a 和b不相邻。此外，在 $\mathcal{D}(G)$中，我们有

$$N(a) = \{u_0\hat{h} | \langle u\rangle \lneq \langle u_0\rangle, o(u_0) = p_1^k, \langle \hat{h}\rangle \lneq \langle h\rangle, k \in \mathbb{N}\}$$

and

$$N(b) = \{v_0h'' | \langle v\rangle \lneq \langle v_0\rangle, o(v_0) = p_1^l, \langle h''\rangle \lneq \langle h'\rangle, l \in \mathbb{N}\}.$$

由此可得

$$a \sim u' \sim h \sim v' \sim b.$$

这意味着

$$d(a, b) \leq 4. \tag{10}$$

由于 $\langle u\rangle$ 和 $\langle v\rangle$ 是阶相同的循环子群，且 $\langle u\rangle \neq \langle v\rangle$，它们不可能同时包含于群 P_1 的同一个循环子群中。因此， $\langle u_0,\ v_0\rangle$ 不是循环群，且 $N(a) \cap N(b) = \emptyset$。由此可得 $d(a, b) > 3$。

现在，(10) 意味着 $d(a, b) = 4$，根据定理 5.4 可得 $\mathrm{diam}(\mathcal{D}(G)) = 4$，证毕。

接下来证明必要性。假设 $\mathrm{diam}(\mathcal{D}(G)) = 4$。设 a 和 b 是 $\mathcal{D}(G)$ 中两个不同的顶点，且 $d(a, b) = 4$。由于我们知道 $\mathrm{diam}(\mathcal{F}(G)) \leq 2$，元素 a 和 b 不可能同时属于 $\mathcal{F}(G)$。因此，不失一般性，可假设 $a \in \mathcal{F}(G)$ 且 $b \notin \mathcal{F}(G)$。在这种情况下，我们知道存在一个元素 $y \in \mathcal{F}(G)$，使得 y 与 b 相邻。但此时有 $d(a, b) \leq 3$，这就导致矛盾。

因此， $a,\ b \notin \mathcal{F}(G)$。结合 $d(a,\ b) = 4$和引理 5.3，可得存在互不相同的 $z,\ w \in \mathcal{F}(G)$，使得 $a \sim z,\ b \sim w$。此外，对于某个 $1 \leq i \leq t$，有 $z,\ w \in P_i$。不失一般性，可假设 $i = 1$。

对于任意 $g \in V(\mathcal{D}(G))$，其中 $g \in P_j,\ 1 < j \leq t$，我们有

$$g \notin N(a) \cup N(b). \tag{11}$$

例如，假设 $g \in N(a)$。那么 $a \sim g \sim w \sim b$，这意味着 $d(a,\ b) \leq 3$，这就产生了矛盾。若 $g \in N(b)$。，也可得出类似结论。

此外， $p_1 \mid o(a)$ 和 $p_1 \mid o(b)$。若情况并非如此，设 $p_1 \nmid o(a)$，则有 $a \sim w \sim b$，这又会导致矛盾。令

$$\langle a\rangle = \langle u\rangle \times Q_1, \quad \langle b\rangle = \langle v\rangle \times Q_2,$$

其中，$\langle u\rangle$ 和 $\langle v\rangle$ 分别是 $\langle a\rangle$ 和 $\langle b\rangle$的 Sylow p_1-子群。由于 $a \sim z$和 $b \sim w$，可得 $\langle u\rangle \lneq \langle z\rangle$ 和 $\langle v\rangle \lneq \langle w\rangle$。若 $\langle u\rangle \leq \langle v\rangle$，则 $a \sim w$，因此 $d(a,b) \leq 2$，这与矛盾相悖。因此，$\langle u\rangle \nleq \langle v\rangle$。类似地，我们还有$\langle v\rangle \nleq \langle u\rangle$。若 $o(u) = o(v)$，则所需结论成立。不失一般性，假设 $o(u) < o(v)$。接着取 $\langle v'\rangle \leq \langle v\rangle$，使得 $o(u) = o(v')$，则$\langle u\rangle, \langle v'\rangle$ 是 P_1的两个所需的不同的非极大循环子群。

此外，由 (11)，可知 a 和 b 必定恰好具有引理表述中所描述的形式。□

引理 5.7 设 G 是一个非循环幂零群，且不是 p-群。当且仅当 $\mathrm{diam}(\mathcal{D}(G)) = 2$ 时，$\exp(G)$ 是一个无平方因子正整数。

证明。我们先证明充分性。记 $m = \exp(G)$，并假设 m 是一个无平方因子正整数。那么，G 中阶不等于 m 的每个非平凡元素都属于 $V(\mathcal{D}(G))$。

设 a 和 b 是 $\mathcal{D}(G)$ 中两个不同且不相邻的顶点。此类元素的存在性由以下事实保证：G 是一个指数为无平方因子的非循环群。例如，在 $\mathcal{D}(G)$ 中，至少存在两个阶相同且彼此不相邻的元素。如果 $\gcd(o(a)\ o(b)) = 1$，那么 a 和 b 交换，因此它们相邻，这与这些顶点的选取方式矛盾。因此，$\gcd(o(a)\ o(b)) = d$，其中 $1 < d < m$。记

$$o(a) = a_1 \cdot d, \quad o(b) = b_1 \cdot d,$$

其中，a_1 和 b_1 是两个正整数。由于 $\gcd(a_1,\ b_1) = 1$，我们可以写成 $m = a_1 \cdot b_1 \cdot d \cdot c_1$，其中 c_1 是一个正整数。我们注意到，a_1，b_1 和 c_1 不可能全都等于 1。因此，我们可以选取一个非平凡元素 $c \in G$，使得

$$o(c) = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1, \quad |\langle c\rangle \cap \langle a\rangle| = a_1, \quad |\langle c\rangle \cap \langle b\rangle| = b_1.$$

$\langle a、\ c\rangle$ 和 $\langle b、\ c\rangle$ 均为循环群，且 $|\langle a、\ c\rangle| = |\langle b、\ c\rangle| = m$。注意，$o(a) \neq m$ 且$o(b) \neq m$。因此，存在 $o(c)$的两个素因子 p、q，使得 $p \nmid o(a)$且 $q \nmid o(b)$。此外，注意到 $d \nmid o(c)$。由此可得，在 $\mathcal{D}(G)$中，a和 b 均与 c 相邻。因此，在这种情况下，我们有 $d(a,b) = 2$。由此可得，$\mathrm{diam}(\mathcal{D}(G)) = 2$，证毕。

接下来证明必要性。假设 $\mathrm{diam}(\mathcal{D}(G)) = 2$。反设存在一个素数 p，使得 $p^2 \mid \exp(G)$。令 g 为 G的一个极大循环 Sylow p 子群的生成元，并用 H 表示 G 的所有其他 Sylow 子群的乘积。现在令 $h \in H$ 满足 $\langle h\rangle \in \mathcal{M}(H)$。

考虑元素 g^p 和 $g^p h$。容易看出

$$N(g^p h) = \{gh' : \langle h' \rangle \lneq \langle h \rangle\}.$$

对于每个满足 $\langle h' \rangle \lneq \langle h \rangle$ 的 h'，我们有 $\langle g^p \rangle \lneq \langle gh' \rangle$，因此 g^p 和 gh' 不相邻。然而，这意味着 $d(g^p, g^p h) > 2$，这与结论矛盾。

□

设 G 是一个非循环幂零群，且不是 p-群。若 G 有两个不同的循环子群 $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle \leq P$，它们在 P 中都不是极大循环子群，其中 P 是 G 的一个 Sylow p-子群，且 $o(u) = o(v)$，则称 G 为 Ψ-群 。

现在，结合引理 5.6和 5.7以及推论5.4，我们得到以下定理。

定理 5.8 设 G 是一个有限非循环幂零群，且不是 p-群。那么 $\mathcal{D}(G)$ 是连通的。特别地，

$$\operatorname{diam}(\mathcal{D}(G)) = \begin{cases} 2, & \textit{if } \exp(G) \textit{ is a square-free number;} \\ 4, & \textit{if } G \textit{ is a } \Psi\textit{-group;} \\ 3, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

应用定理 5.8 于阿贝尔群，可得到差图直径为 4 的非循环阿贝尔群。例如，根据以下结果，很容易看出，在 [3, 注 5.4], 直径$(\mathcal{D}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)) = 4$。

推论 5.9 设 G 是一个有限非循环阿贝尔群，且不是 p-群。那么

$$\operatorname{diam}(\mathcal{D}(G)) = \begin{cases} 2, & \textit{if } \exp(G) \textit{ is a square-free number;} \\ 4, & \textit{if } G \textit{ has a subgroup isomorphic to } \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{p^2}\textit{;} \\ 3, & \textit{otherwise,} \end{cases}$$

其中 p是素数。

现在我们来讨论非循环幂零群的支配数可以得出什么结论。为此，我们回顾以下基本结果。

引理 5.10 ([7, 定理 5.4.10(ii)]) 给定一个素数 p，一个 p-群若有一个阶为 p 的唯一子群，则它要么是循环 p-群，要么是 2-群广义四元数群，如 (4)所示。

设 P 是一个 p-群。注意，若 P 是广义四元数群，则 P 至少有三个阶为 4 的循环子群，且每个子群都包含P的唯一对合。若 P 不是广义四元数群，则它至少包含三个极小子群。因此，令 $\mathcal{N}(P)$ 表示 P中所有阶为 k的循环子群组成的集合，其中 k 是满足 P 拥有多个阶为 k的循环子群的最小正整数。

引理 5.11 设 $G = P_1 \times P_2 \times \mathbb{Z}_n$，其中 P_i 是一个非平凡的非循环 p_i-群，且 $i = 1, 2$，p_1 和 p_2 是不同的素数，$n \geq 2$ 和 $p_i \nmid n$。那么 $\gamma(\mathcal{D}(G)) \geq 3$。

证明。由推论 3.4，可得 $\gamma(\mathcal{D}(G)) \geq 2$。令 $\mathbb{Z}_n = \langle g \rangle$。只需证明 $\gamma(\mathcal{D}(G)) \neq 2$。反设 $\{a, b\}$ 是 $\mathcal{D}(G)$ 的支配集。

首先，假设 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$ 都有属于 $\mathcal{N}(P_1)$ 的子群。则存在一个元素 u，使得 $\langle u \rangle \in \mathcal{N}(P_1)$ 且 $\langle u \rangle \not\leq \langle a \rangle$，$\langle b \rangle$。然而，在这种情况下，$u$ 与 a 和 b 均不相邻，这与 $\{a, b\}$ 是支配集的假设矛盾。

现在不妨设 $\langle a \rangle$ 在 $\mathcal{N}(P_1)$ 中包含一个子群，而 $\langle b \rangle$ 不包含，即 $\mathrm{Sub}(\langle a \rangle) \cap \mathcal{N}(P_1) \neq \emptyset$ 且 $\mathrm{Sub}(\langle b \rangle) \cap \mathcal{N}(P_1) = \emptyset$。若$\langle b \rangle$ 不是 $P_2 \times \mathbb{Z}_n$的极大循环子群，则可选取 u 使得$\langle u \rangle \in \mathcal{N}(P_1)$且 $\langle u \rangle \not\leq \langle a \rangle$。此时，元素 ub 既不与 a相邻，也不与 b相邻，从而导致矛盾。因此，$\langle b \rangle \in \mathcal{M}(P_2 \times \mathbb{Z}_n)$，且 $\langle b \rangle$ 包含来自 $\mathcal{N}(P_2)$ 的一个子群。现在取 $u \in P_1$ 使得 $\langle u \rangle \in \mathcal{N}(P_1)$且 $u \notin \langle a \rangle$，并取$v \in P_2$ 使得 $\langle v \rangle \in \mathcal{N}(P_2)$ 且 $v \notin \langle b \rangle$。于是 uv 既不与 a 相邻，也不与 b相邻，这再次与我们的假设矛盾。

由此可得 $\mathrm{Sub}(\langle a \rangle) \cap \mathcal{N}(P_1) = \emptyset$ 以及 $\mathrm{Sub}(\langle b \rangle) \cap \mathcal{N}(P_1) = \emptyset$。类似地，$\mathrm{Sub}(\langle a \rangle) \cap \mathcal{N}(P_2) = \emptyset$ 以及 $\mathrm{Sub}(\langle b \rangle) \cap \mathcal{N}(P_2) = \emptyset$。因此，如果 P_1 和 P_2 都不是广义四元数群，则 a，$b \in \langle g \rangle$。不妨设 P_1 是具有唯一对合 h的广义四元数群，则 a，$b \in \langle g$，$h \rangle$。设 $w \in P_1$满足 $\langle w \rangle \in \mathcal{N}(P_1)$。在这两种情况下，元素 wg 均不与 a或 b相邻，这再次与我们的假设矛盾。因此，$\{a, b\}$ 不可能是 $\mathcal{D}(G)$ 的支配集。□

致谢

第一作者得到国家自然科学基金委员会（项目编号：11801441 和 12326333）以及陕西省数学与物理基础科学研究项目（项目编号：22JSQ024）的资助。第二作者

感谢塞尔维亚共和国科学、技术发展与创新部的资金支持（项目编号：451-03-137/2025-03/200125 和 451-03-136/2025-03/200125）。第三作者得到塞尔维亚科学、技术发展与创新部通过塞尔维亚科学与艺术学院数学研究所提供的资助。

参考文献

[1] G. Aalipour、S. Akbari、P. J. Cameron、R. Nikandish、F. Shaveisi，论群的幂图和增强幂图的结构，《电子组合学杂志》24（2017），#P3.16。[2] J. Abawajy、A. Kelarev、M. Chowdhury，幂图：综述，《电子图论及其应用杂志》1（2013），125–147。[3] S. Biswas、P. J. Cameron、A. Das、H. K. Dey，有限群的增强幂图与幂图之差，《组合理论杂志》A辑，208（2024），105932。[4] I. Bo˘snjak、R. Madar´asz、S. Zahirovi´c，具有两个 Sylow 子群的有限阿贝尔群的差图，2024，arXiv:2404.18167。[5] P. J. Cameron，定义于群上的图，《国际群论杂志》11（2022），53–107。[6] I. Chakrabarty、S. Ghosh、M. K. Sen，半群的无向幂图，《半群论坛》78（2009年），410–426。[7] D. Gorenstein，《有限群》，Chelsea Publishing Co.，纽约，1980。[8] G. Higman，每个元素都具有素数幂阶的有限群，《伦敦数学学会杂志》32（1957），335–342。[9] D. L. Johnson，《群表示理论专题》，《伦敦数学学会讲义丛书》第42卷，剑桥大学出版社，1980。[10] X. Ma、A. Kelarev、Y. Lin、K. Wang，有限群增强幂图综述，《电子图论及其应用杂志》10（2022年），89–111。[11] A. V. Kelarev、S. J. Quinn，群的一个组合性质与幂图，《一般代数贡献》12（2000），229–235。

[12] A.V. Kelarev、J. Ryan、J. Yearwood，作为数据挖掘分类器的凯莱图：不对称性的影响，《离散数学》**309**（2009年），5360–5369。[13] J. Kumar、R. P. Panda、Parveen，有限群幂图的差图，《数学问题》**47**（2024年），997–1018。[14] A. Kumar、L. Selvaganesh、P. J. Cameron、T. T. Chelvam，有限群幂图的最新发展——综述，《AKCE国际图与组合学杂志》**18**（2021年），65–94。