双变量自行车码中的稳定子冗余：单轮与少轮解码

Mohammad Rowshan 新南威尔士大学电气工程与电信学院，澳大利亚悉尼 电子邮箱：mrowshan@ieee.org

arXiv:2601.01137v1 [cs.IT] 3 Jan 2026

摘要——双变量自行车（BB）码是由群代数构造的一类重要量子 LDPC 码。互素 BB 码的逻辑维数和量子距离已知由最大公因式多项式 $g(z)$ 决定，但其在含噪测量下实现容错的性质仍未明确。本研究证明，同一多项式 $g(z)$ 决定了码的稳定子冗余，以及单次解码所需经典综合征码的结构。我们推导出量子码率与稳定子冗余密度之间的严格等式，并给出可实现的单次测量误差容限的类 BCH 界。在此框架的指导下，我们构造了综合征距离（d_S）显著提高的小型互素 BB 码，并使用置信传播+OSD 对其进行评估。分析揭示了一个结构性瓶颈：在互素 BB 构造中，较高的量子码率会对综合征距离施加上界，从而限制单次性能。这些结果为测量受限架构中的下一代双块群代数码提供了具体的代数设计规则。

索引词——量子 LDPC 码、双变量自行车码、单次解码、稳定子冗余、综合征解码。

I. 引言

量子纠错（QEC）对于容错量子计算至关重要，它能够以增加空间和时间开销为代价，抑制逻辑错误率 [1]，[2]。量子 LDPC（qLDPC）码尤其具有吸引力，因为它们兼具有界的校验权重和度，并具有渐近良好的参数 [3]，[4]，；近期研究表明，采用置信传播加有序统计解码（BP+OSD）时，这类码能够实现出色的有限长度性能 [5]。

Bravyi 等人 [6], 提出的双变量自行车（BB）码是一个具体的 qLDPC 码族，具有权重为 6 的校验和双层 Tanner 图。Postema 及其合作者 [7]，[8] 近期给出了 BB 码和双块群代数（2BGA）码的严格群代数描述。他们证明，对于互素子类，其逻辑维数和量子距离性质由一个最大公因式多项式 $g(z)$决定。尽管交换 BB 子类的渐近距离表现不佳，但它在中等码长下仍具有竞争力，并且非常适合中性原子和囚禁离子架构 [8], [9]。

稳定子冗余可用于减少含噪综合征测量轮数。Bombín 在三维拓扑码中引入了单轮容错 [10]；Lin 和 Pryadko 将这一思想扩展到双块群代数码 [11], , Lin 等人 [12]则利用滑动窗口置信传播+OSD 展示了 GB/2BGA 码的单轮和两次解码。尽管这些工作通过广泛的数值搜索确立了稳定子冗余的实用性，但 BB 码的构造参数与其单轮或少轮测量鲁棒性之间的直接代数联系仍然缺失。

本文为互素 BB 码建立了这样的代数框架。我们将 Postema [8]的结果扩展到经典域，证明控制逻辑维数的同一多项式 $g(z)$也决定了经典综合征码的结构，即无噪声稳定子综合征模式的集合。我们推导出相应条件，在这些条件下，经过一轮或少数几轮含噪稳定子测量，并采用理想的有界距离译码，便可证明足以同时纠正数据错误和测量错误。根据这些条件，我们找出了综合征距离显著增大的小型互素 BB 码，并在简单的唯象噪声模型下，使用置信传播+OSD 解码器研究其单轮和少轮性能。数值增益虽不显著，但结合我们的代数界，结果揭示了一个结构性瓶颈：在互素 BB 子类中，对于现实的码长，由 $g(z)$ 施加的约束使得在固定校验权重下难以实现较大的伴随式距离，因而也难以获得较强的单轮测量鲁棒性。

II. 预备知识

A. CSS 码与伴随式码

一个定义在 n 个量子比特上的二元 CSS 码由两个校验矩阵 $H_X \in \mathbb{F}_2^{m_X \times n}$ 和 $H_Z \in \mathbb{F}_2^{m_Z \times n}$ 指定，且满足 $H_X H_Z^{\mathsf{T}} = 0$。该码编码

$$k = n - \operatorname{rank}(H_X) - \operatorname{rank}(H_Z) \tag{1}$$

个逻辑量子比特。我们用以下符号表示独立冗余 X 稳定子和 Z 稳定子的数量

$$r_X = m_X - \operatorname{rank}(H_X), \qquad r_Z = m_Z - \operatorname{rank}(H_Z). \tag{2}$$

设 S_i^X 为与 H_X 的各行关联的 X型稳定子。Z 错误模式是一个向量 $e_Z \in \mathbb{F}_2^n$，其理想 X 症状为

$$s_X := H_X e_Z^{\mathsf{T}} \in \mathbb{F}_2^{m_X}. \tag{3}$$

所有此类 s_X 构成 m_X维综合征空间中的一个线性码（参见示意图 1）。

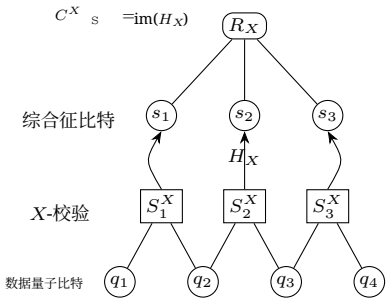

图 1. CSS码及其 X综合征码的示意图。H_X 的各行定义了作用于数据量子比特的 X型稳定子 S^X_i。无噪声综合征模式 s 属于码 $C^X_{\mathrm{S}} = \mathrm{im}(H_X)$，并满足由稳定子冗余$R_X s = 0$ 产生的附加关系。

定义 1（综合征码）。设 $H_X \in \mathbb{F}_2^{m_X \times n}$。选取一个满行秩矩阵 $R_X \in \mathbb{F}_2^{r_X \times m_X}$，其行构成 H_X左零空间的一组基，即 $R_X H_X = 0$。X综合征码为

$$C^X_{\mathrm{S}} := \{\, s \in \mathbb{F}_2^{m_X} : R_X s = 0 \,\}. \tag{4}$$

它正是所有无噪声 X 综合征的集合 $s_X = H_X e_Z^{\mathsf{T}}$。Z综合征码 C^Z_{S} 以类似方式由H_Z定义。我们将它们的最小距离分别记为 d^X_{S}、d^Z_{S}。

引理 1（基本性质）。对于任意 CSS码：

1) $C^X_{\mathrm{S}} = \mathrm{im}(H_X)$ 且维数为 $C^X_{\mathrm{S}} = \mathrm{rank}(H_X)$；同样地，$C^Z_{\mathrm{S}} = \mathrm{im}(H_Z)$ 且维数为 $C^Z_{\mathrm{S}} = \mathrm{rank}(H_Z)$。2) 独立X稳定子关系的数量为 $r_X = m_X - \mathrm{rank}(H_X)$；等价地，$r_X$ 是 R_X的行数。

证明。根据构造，R_X 的各行张成了 H_X的左零空间，因此 $\mathrm{row}(R_X) = \{u \in \mathbb{F}_2^{m_X} : uH_X = 0\}$且 $\dim \mathrm{row}(R_X) = r_X = m_X - \mathrm{rank}(H_X)$。对于任意$e_Z$，$s_X = H_X e_Z^{\mathsf{T}}$满足 $R_X s_X = R_X H_X e_Z^{\mathsf{T}} = 0$，因此 $\mathrm{im}(H_X) \subseteq C^X_{\mathrm{S}}$。反过来，$C^X_{\mathrm{S}}$的维数为

$$\dim C^X_{\mathrm{S}} = m_X - \mathrm{rank}(R_X) = m_X - r_X = \mathrm{rank}(H_X),$$

这等于 $\dim \mathrm{im}(H_X)$；因此 $C^X_{\mathrm{S}} = \mathrm{im}(H_X)$。关于$C^Z_{\mathrm{S}}$的陈述与此类似。□

B. 噪声模型与单轮/少轮解码

对于一个错误校正周期，我们采用现象学噪声模型：每个数据量子比特以概率 $p/2$ 分别独立地发生 X 或 Z 错误（或以概率p发生退极化错误），各量子比特之间相互独立；每个经过测量的稳定子测量结果（综合征比特）也以概率 q独立发生翻转。传统的多轮方案在每个周期内重复进行 $R \geq 1$ 次综合征测量，并利用时间冗余来抑制测量错误。单轮方案使用 $R = 1$ 轮，并完全依赖稳定子集合的冗余。少轮方案使用较小的 $R > 1$。

在本研究中，我们分析分两个阶段运行的解码器：首先，它们使用经典码C^X_{S}和 C^Z_{S}清理含噪症状（例如，通过有界距离译码或置信传播），然后将清理后的症状馈送给底层CSS码的数据解码器；见图2。

注 1（噪声模型与电路级噪声）。我们的模拟和界限基于相互独立的数据错误以及综合征比特上的相互独立的比特翻转。对于包含故障门和测量的电路级噪声，会出现额外的时空相关性（例如钩形错误），并可能进一步降低具有较小 d_{S} 的码的性能，例如 $d_{\mathrm{S}} = 2$情形。完整的电路级分析留待未来工作。

III. 互素 BB 码中的冗余与综合征码

现在我们将讨论专门限定于互素 BB 码。设ℓ、m 为互素整数，$N = \ell m$，并且

$$R = \mathbb{F}_2[z]/(z^N - 1).$$

根据二元群代数与 R 之间的标准同构（例如参见 [8]），BB 码由两个三项式 $a(z)$ $b(z) \in R$ 以及校验矩阵指定

$$H_X = [A\ B], \qquad H_Z = [B^{\mathsf{T}}\ A^{\mathsf{T}}], \tag{5}$$

其中 A、B 是与$a(z)$ $b(z)$对应的 $N \times N$ 循环矩阵。转置对应于 R中的对合 $z \mapsto z^{-1}$，该对合会反转指数，但我们考虑的循环码作为集合保持不变；因此，我们在记法中省略倒数多项式，并在码的层面进行处理。

定义

$$g(z) := \gcd(a(z), b(z), z^N - 1)$$

以及相应的校验多项式

$$h(z) := \frac{z^N - 1}{g(z)}.$$

Postema [8] 表明，$g(z)$决定逻辑维数：

$$k = 2 \deg g(z), \qquad \mathrm{rank}(H_X) = \mathrm{rank}(H_Z) = N - \deg g(z). \tag{6}$$

A. 冗余与综合征码

我们总结 BB 码中关于冗余和综合征码的特有推论。

定理 1（冗余与综合征码）。对于长度为 $n = 2N$、如上所述满足 $g(z)$ 的互素 BB 码：

1) 独立冗余 X 和 Z 稳定子的数量为

$$r_X = r_Z = N - \mathrm{rank}(H_X) = \deg g(z) = \frac{k}{2}.$$

2) X 和 Z 综合征码 C^X_{S}和 C^Z_{S}是由 $g(z)$生成的二元循环 $[N, N - 次\ g(z)]$ 码：

$$C^X_{\mathrm{S}} = C^Z_{\mathrm{S}} = \{\, \lambda(z) g(z) : \lambda(z) \in R \,\}.$$

3) 稳定子关系空间（冗余校验的组合）是一个循环 $[N, \deg\ g(z)]$ 码，由校验多项式 $h(z) = (z^N - 1)/g(z)$生成（差一个倒数多项式）。

证明。公式（6）意味着 $r_X = N - \text{秩}(H_X) = \deg\ g(z)$ 且 $r_Z = \deg g(z)$，由此得到条目 1。

由于 A 和 B 是循环矩阵，H_X 的各行是 R^2中 $(a(z)\ b(z))$ 的循环移位，因此 $C_{\mathrm{S}}^X = \mathrm{im}(H_X)$ 在循环移位下保持不变，故为长度为 N的循环码。它在 R中生成的理想为 $\langle g(z)\rangle$，因此 $C^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}$是生成多项式为 $g(z)$ 的循环 $[N, N-\deg\ g(z)]$码，从而证明了结论 2（另见引理 1）。

稳定子之间的关系对应于满足 $uH_X = 0$的向量 $u \in \mathbb{F}_2^N$，也就是说，对应于引理 1 中 R_X 的行空间元素。它们在 R 中的像构成 $C^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}$ 的正交补。对于二元循环码，由 $g(z)$ 生成的码的对偶码仍为循环码，其生成多项式（相差一个倒数多项式）为校验多项式 $h(z) = (z^N - 1)/g(z)$，其维数为 $\deg g(z)$；参见例如 [13, 第 7]章。由此得到结论 3。 □

一个直接推论是码率—冗余度等式：

$$\frac{r_X}{N} = \frac{r_Z}{N} = \frac{k}{n}, \tag{7}$$

也就是说，在互素 BB 码中，每种类型的冗余稳定子所占比例等于量子码率。

B. 伴随式码的距离界

设 d_{S}^X 和 d_{S}^Z 分别表示由 $g(z)$生成的伴随式码 C_{S}^X和 C_{S}^Z 的最小距离。BCH 界为这些距离提供了代数上的刻画。

定理 2（ C_{S}^X的 BCH 界）。设 α 是扩域 $\mathbb{F}_2$中的一个本原 N次单位根。假设存在整数 $b \geq 0$ 和 $\delta \geq 2$，使得

$$g(\alpha^b) = g(\alpha^{b+1}) = \cdots = g(\alpha^{b+\delta-2}) = 0.$$

那么伴随式码 C_{S}^X 的距离为 $d_{\mathrm{S}}^X \geq \delta$。对 C_{S}^Z也有类似的结论。

证明。 C_{S}^X是一个长度为 N、以 $g(z)$ 为生成多项式的二元循环码。所述根条件恰好就是 BCH 设计距离条件，由此可得该码满足 $d_{\mathrm{S}}^X \geq \delta$；例如参见 [13, 第 7] 章。 □

维数与距离通过 Singleton 界相联系。

定理 3（ d_{S}的 Singleton 界）。对于参数为 $[[n, k, d]]$ 和 $n = 2N$的互素 BB 码，其伴随式距离满足

$$d_{\mathrm{S}}^X \leq \deg g(z) + 1 = \frac{k}{2} + 1, \qquad d_{\mathrm{S}}^Z \leq \deg g(z) + 1 = \frac{k}{2} + 1.$$

等价地，单轮测量半径 $t^{X/Z}{}_{\mathrm{S}} = \lfloor d^{X/Z}{}_{\mathrm{S}} - 1)/2 \rfloor$ 满足

$$t_{\mathrm{S}}^{X/Z} \leq \left\lfloor \frac{\deg g(z)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor.$$

证明。 $C^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}$是二元 $[N, N -$度数为 $g(z)$ $d^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}\rfloor$码，由定理 1 可知，因此 Singleton 界给出 $d^{X/Z}{}_{\mathrm{S}} \leq N - (N -$度数为 $g(z))) + 1 =$度数为 $g(z)) + 1$。 $t^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}$的界由 $t^{X/Z}{}_{\mathrm{S}} = \lfloor (d^{X/Z}{}_{\mathrm{S}} - 1)/2 \rfloor$ 以及 $\deg g(z) = k/2$ 得出。 □

因此，在互素 BB 子类中，较高的量子码率意味着较大的 $\deg g(z)$，进而限制了在分组长度固定时 $d^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}$和 $t^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}$ 所能达到的大小。这种结构性权衡是小型互素 BB 示例尽管具有非平凡的稳定子冗余，却仍受测量噪声主导的原因之一。

IV. 单次与少次解码的界

上一节的结果表明，对于互素 BB 码，综合征码 $C^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}$ 是由 $g(z)$ 生成的经典循环码，并且可以使用标准循环码技术来界定其距离。现在，在假设综合征码和数据码都采用理想有界距离经典解码器的前提下，我们将这种结构转化为关于单轮和少轮解码的抽象界。在第五节中，我们通过查表/最大似然解码器（用于非常小的码）或置信传播+OSD 和置信传播解码器来近似这些理想解码器。

A. 单轮解码器与正确性条件

设 d_X 和 d_Z 为 CSS 码通常所说的 X 距离和 Z 距离，并设

$$t_X = \left\lfloor \frac{d_X - 1}{2} \right\rfloor, \qquad t_Z = \left\lfloor \frac{d_Z - 1}{2} \right\rfloor$$

为理想有界距离数据解码器所保证的纠错半径。同样，设

$$t_{\mathrm{S}}^X = \left\lfloor \frac{d_{\mathrm{S}}^X - 1}{2} \right\rfloor, \qquad t_{\mathrm{S}}^Z = \left\lfloor \frac{d_{\mathrm{S}}^Z - 1}{2} \right\rfloor$$

为作用于C_{S}^X和 C_{S}^Z的理想有界距离解码器的纠错半径。

我们考虑单次纠错周期的对抗性错误模型：一个 X 错误模式 $e_X \in \mathbb{F}_2^n$，其 $\mathrm{wt}(e_X) \leq w_X$；一个 X 症状错误模式 $\nu_X \in \mathbb{F}_2^{m_X}$，其 $\mathrm{wt}(\nu_X) \leq u_X$；以及类似的 Z 错误模式和 Z 症状模式（$e_Z$、$\nu_Z$），其权重分别为 w_Z、u_Z。理想 X 症状为 $s_X = H_Z e_X^{\mathsf{T}} \in C_{\mathrm{S}}^X$，测得的症状为 $s'_X = s_X + \nu_X$；对于 s_Z、s'_Z，情况也类似。

我们称码 $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$上的经典解码器是半径为 t 的有界距离解码器，如果对于任意码字 $c \in C$ 以及任意满足 $\mathrm{wt}(e) \leq t$ 的错误模式 e，当输入 $c + e$ 时，它都会输出 c。

定理 4（单轮正确性条件）。假设在 $C^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}$ 上有理想的有界距离解码器，其半径为 $t^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}$，并且有一个理想的有界距离数据解码器，其半径为 $t_{X/Z}$，如上所述。考虑一个单轮解码器，它

1）测量所有稳定子一次，获得含噪症状s'_X, s'_Z；2）应用症状解码器，得到净化后的症状 $\hat{s}_X, \hat{s}_Z$；3）对$(\hat{s}_X, \hat{s}_Z)$应用数据解码器。如果

$$w_X \leq t_X, \quad u_X \leq t_{\mathrm{S}}^X, \qquad w_Z \leq t_Z, \quad u_Z \leq t_{\mathrm{S}}^Z,$$

那么解码器就能恢复正确的数据错误（相差一个稳定子）。

证明。我们针对X扇区进行论证；Z扇区的情况完全相同。设e_X为重量为 $\le t_X$的X 错误模式，其中 wt(e_X) $\le t_X$，其理想综合征为 $s_X = H_Z e_X^{\mathsf{T}}$。根据定义，$s_X \in C_{\mathrm{S}}^X$。测量到的综合征为 $s'_X = s_X + \nu_X$，其中 wt(ν_X) $\le u_X \le t_{\mathrm{S}}^X$。由于 s_X 是 C_{S}^X的一个码字，且与s'_X的汉明距离为t_{S}^X，理想有界距离解码器对C_{S}^X必定会唯一地输出 s_X。因此，输入数据解码器的清理后的X症状恰好就是理想综合征。

根据假设，给定相应的理想综合征时，数据解码器的X部分能够纠正重量至多为 t_X 的任意X错误。由于 wt(e_X) $\le t_X$，且输入综合征为 s_X，解码器输出某个 $\tilde{e}_X$，它与 e_X 在相差稳定子的意义下等价。对 e_Z、s_Z、ν_Z和C_{S}^Z 作同样的推理可知，数据解码器的Z部分输出 $\tilde{e}_Z$，它与 e_Z 在相差稳定子的意义下等价。因此，组合泡利错误($\tilde{e}_X, \tilde{e}_Z$)与(e_X, e_Z)相差一个稳定子，故整体纠正能够恢复逻辑态。 □

我们再次强调，定理 4 为理想解码器在单轮情况下提供有限半径保证；它并不声称存在具有完整容错方案意义上的渐近单轮阈值。

B. 与重复轮次解码的比较

现在，我们将这种理想单轮方案与一种传统的重复轮次基线进行比较：在该方案中，每个稳定子在每个周期内测量 R 次，并对每项校验进行多数表决解码（参见示意图 2）。对于独立测量翻转，这等价于时间方向上长度为 R 的重复码，其每项校验的纠错半径为

$$t_{\mathrm{time}} = \left\lfloor \frac{R-1}{2} \right\rfloor. \tag{8}$$

定理 5（单轮与重复轮次测量半径的比较）。设 $t_{\mathrm{time}} = \lfloor (R-1)/2 \rfloor$ 为采用多数表决的 R轮重复基线的每项校验测量半径。任何伴随式解码器半径为 $t^{X/Z}{}_{\mathrm{S}} \ge t_{\mathrm{time}}$ 的单轮方案，在应对独立测量错误方面，至少与该基线具有相同的逐项校验鲁棒性：基线能够纠正的每种类时间翻转模式，单轮方案也都能纠正。对于互素 BB 码，定理 3 表明这要求

$$\left\lfloor \frac{R-1}{2} \right\rfloor \le t_{\mathrm{S}}^{X/Z} \le \left\lfloor \frac{\deg g(z)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor. \tag{9}$$

证明。对于每个稳定子，R 次重复测量通过多数表决实现一个长度为R 、距离为 R的经典重复码，因此可以纠正该稳定子上的任意至多 $t_{\mathrm{time}} = \lfloor (R-1)/2 \rfloor$ 次翻转。在单轮方案中，所有校验上的测量错误由伴随式解码器联合解码。如果其保证的解码半径为 $t^{X/Z}{}_{\mathrm{S}} \ge t_{\mathrm{time}}$，那么每个校验上的错误模式至多包含 t_{time} 次翻转，均处于解码器保证的解码半径内，因此能够得到纠正。因此，重复基线能够纠正的任何测量模式

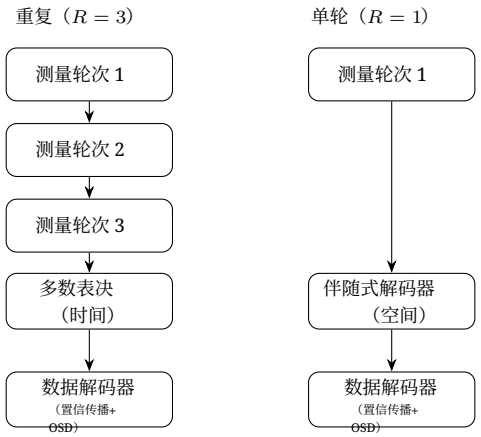

图 2. 解码调度比较。左：标准重复（$R=3$）依赖时间多数表决。右：单轮（$R=1$）利用空间冗余立即清除错误，无需等待。

也能由单轮方案纠正。对于互素 BB 码，定理 3 将 $t^{X/Z}{}_{\mathrm{S}}$ 界定为 $\lfloor \deg g(z)/2 \rfloor = \lfloor k/4 \rfloor$，由此得到 (9)。 □

在下面的模拟中，我们将主要设置 $R=3$。对于具有 $d_{\mathrm{S}}^X = 4$ 和 10 的改进 BB 码，$t_{\mathrm{S}}^X = 1$ 和 4 满足每次校验与三轮基线匹配的条件，且余量充足；对于较小的 BB 码（$d_{\mathrm{S}}^X = 2$），我们有 $t_{\mathrm{S}}^X = 0$，因此从原理上说，单轮解码甚至无法匹配 $R=3$，这与该范围内的数值结果一致。

V. 数值结果

我们使用第 II-B 节所述的现象学噪声模型评估所提出的单轮设计规则。我们重点研究两种互素 BB 码，它们经过构造，相较于 [8] 中的基线 $d_{\mathrm{S}} = 2$ 情形，具有更大的伴随式距离 d_{S}。

代码 1（$N = 21$）：由 $a(z) = b(z) = 1 + z^3 + z^9$ 生成。参数：$[[42, 18, d]]$，伴随式距离 $d_{\mathrm{S}}^X = 4$（$t_{\mathrm{S}}^X = 1$）。

代码 2（$N = 63$）：由 $a(z) = 1 + z^{33} + z^{57}$、$b(z) = 1 + z^6 + z^{39}$ 生成。参数：$[[126, 30, d]]$，伴随式距离 $d_{\mathrm{S}}^X = 10$（$t_{\mathrm{S}}^X = 4$）。

解码器的实现如下：

- 伴随式解码器：在由关系多项式 $h(z) = (z^N - 1)/g(z)$ 定义的校验矩阵 H_{syn} 上执行置信传播（BP）。
- 数据解码器：在数据校验矩阵 H_X 上执行 BP+OSD-2，并以清理后的伴随式作为输入。

A. 伴随式解码性能

为独立于数据解码器验证定理 2，图3将伴随式清理阶段的帧错误率（FER）与理想有界距离解码器的理论极限进行了比较。对于长度为 N 且最小距离为 d_{S} 的伴随式码，保证的纠错半径为 $t_{\mathrm{S}} = \lfloor (d_{\mathrm{S}} - 1)/2 \rfloor$。理论失败概率

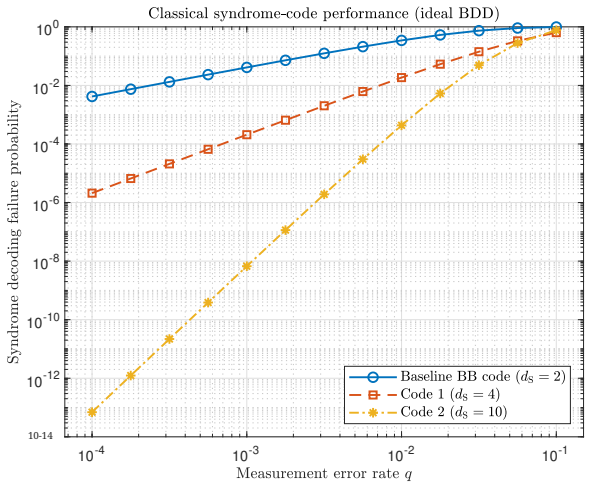

图3. 经典综合征码 C_S^X 的性能。

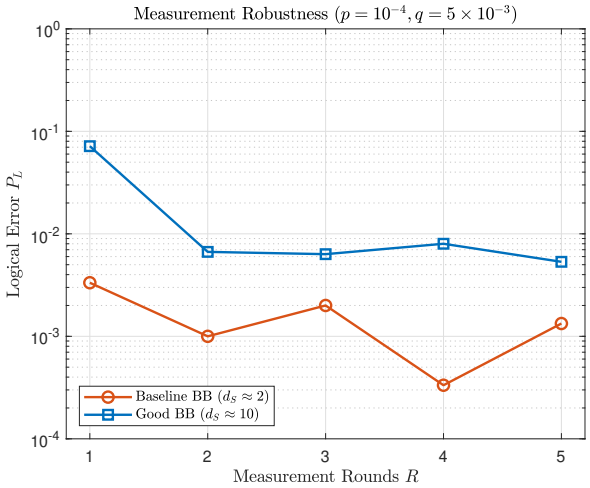

图 5. 逻辑错误率随测量轮次 R的变化。

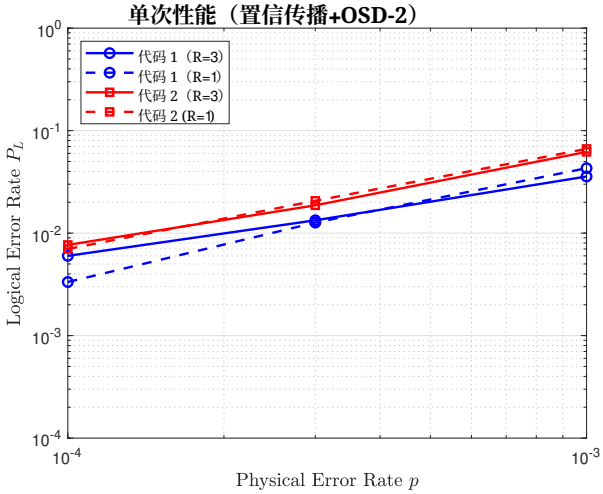

图 4. 逻辑错误率 P_L 与物理错误率 p 的关系（ $q = p$）。

P_{fail} 在测量错误率为 q 时，取决于错误权重超过 t_S 的概率：

$$P_{\text{fail}}(q) = 1 - \sum_{i=0}^{t_S} \binom{N}{i} q^i (1-q)^{N-i}. \qquad (10)$$

结果验证了，基准码（$d_S = 2 \Rightarrow t_S = 0$）的失效率随 q($P_{\text{fail}} \approx Nq$)线性增长，无法抑制错误。相比之下，代码 1（ $d_S = 4$）和代码 2（$d_S = 10$）展现出更高阶的抑制效果，其标度关系为 $O(q^{t_S+1})$。这证实， $g(z)$的代数构造成功赋予了其循环码界所预测的距离性质，且与所采用的解码算法无关。

B. 单轮解码与重复解码

图 4 比较了在 BP+OSD-2 下的单轮（$R = 1$）和重复（$R = 3$）解码。对于这两种码，单次性能都与基线十分接近。随着 p 增大，当测量噪声使伴随式码逼近其极限时，两条曲线仅在 q 较高时才会分化，此时测量错误的权重超过有界距离半径 $t_S^X = 4$。总体而言，结果证实，稳定子冗余能够有效取代时间重复，在逻辑保真度相近的情况下，将周期时间缩短至三分之一。

C. 周期缩减的鲁棒性

图 5 展示了测量轮次 R at$p = 10^{-4}$ 和 $q = 5 \times 10^{-3}$ 的影响。“良好”码（$d_S = 10$）表现出快速收敛：逻辑错误率在从 $R = 1$ 降至 $R = 2$ 后，趋于平稳（$P_L \approx 6 \times 10^{-3}$）。这一行为验证了定理 5，表明空间稳定子冗余能够有效替代进一步的时间重复。相比之下，“较差”码（$d_S = 2$）并未表现出这种收敛，其 P_L 因多数表决的奇偶约束而波动。“良好”码较高的绝对 P_L 源于其更大的分组长度（$n = 126$ 对比 $n = 36$）；尽管其测量鲁棒性更强，但每个周期的帧错误概率也因此增加。

VI. 结论

本研究为互素双变量自行车码中的单轮解码建立了代数框架，并证明多项式 $g(z)$同时决定量子逻辑维数，并生成用于测量纠错的经典综合征码。这揭示了一项基本权衡：高码率量子码的稳定子冗余本质上有限（由 Singleton 界所限），因此其单轮能力受到制约。然而，我们证明，最大化 $g(z)$的 BCH 距离，能够使短码（$N = 63$）实现与多轮方案相当的保真度，同时显著降低延迟。未来的工作应研究电路级噪声，并探索广义构造，以放宽码率-冗余耦合。

参考文献

[1] P. W. Shor, 《降低量子计算机存储器退相干的方案》, Physical Review A, 第 52 卷, 第 4 期, 第 R2493–R2496 页, 1995 年。[2] A. M. Steane, 《量子理论中的纠错码》, Physical Review Letters, 第 77 卷, 第 5 期, 第 793–797 页, 1996 年。[3] P. Panteleev 和 G. Kalachev, 《渐近良好的量子码与局部可检验经典 LDPC 码》, 第 54 届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集（STOC）, 第 375–388 页, 2022 年。[4] ——, 《具有近线性最小距离的量子 LDPC 码》, IEEE 信息论汇刊, 第 68 卷, 第 1 期, 第 213–229 页, 2022 年。[5] ——, 《有限长度性能良好的退化量子 LDPC 码》, Quantum, 第 5 卷, 第 585 页, 2021 年。[6] S. Bravyi、A. W. Cross、J. M. Gambetta、D. Maslov、P. Rall 和 T. J. Yoder, 《高阈值、低开销的容错量子存储器》, Nature, 第 628 卷, 第 78–83 页, 2024 年。[7] J. J. Postema 和 S. J. J. M. F. Kokkelmans, 《双变量自行车码的存在性与表征》, 2025 年。[8] J. J. Postema, 《量子纠错码的代数结构：迈向实用且稳健的量子计算》, 博士论文, 埃因霍温理工大学, 荷兰埃因霍温, 2025 年。[9] C. Poole、T. M. Graham、M. A. Perlin、M. Otten 和 M. Saffman, 《采用优化里德堡门快速实现量子 LDPC 码的架构》, Physical Review A, 第 111 卷, 第 022433 页, 2025 年。[10] H. Bomb´ın, 《单轮容错量子纠错》, Physical Review X, 第 5 卷, 第 3 期, 第 031043 页, 2015 年。[11] H.-K. Lin 和 L. P. Pryadko, 《量子双块群代数码》, Physical Review A, 第 109 卷, 第 022407 页, 2024 年。[12] H.-K. Lin、X. Liu、P. K. Lim 和 L. P. Pryadko, 《广义自行车码的单轮与双轮解码》, 2025 年。[13] F. J. MacWilliams 和 N. J. A. Sloane, 《纠错码理论》, 北荷兰数学丛书。阿姆斯特丹：北荷兰, 1977 年, 第 16 卷。