arXiv:2601.01154v1 [quant-ph] 3 Jan 2026

恒定深度数字-模拟反绝热量子计算

Balaganchi A. Bhargava[1], * Shubham Kumar, [1] Anne-Maria Visuri, [1]Paolo A. Erdman, [1] Enrique Solano, [1] 和 Narendra N. Hegade[1]1 *Kipu Quantum GmbH, Greifswalderstrasse 212, 10405 Berlin, Germany*（日期：2026年1月6日）

我们提出了一种数字-模拟量子计算框架，可在恒定电路深度下实现反绝热协议，从而能够在当前量子硬件上快速且高效地制备量子态。反绝热协议能够抑制有限时间绝热演化中的非绝热激发，但其实际应用受到所需哈密顿量的非局域结构以及完全数字实现所需资源开销的限制。反绝热项可以表示为绝热哈密顿量及其参数导数的嵌套对易子截断展开。本文展示了如何利用对易子乘积公式，在数字-模拟设置中高效实现这一代数结构。该方法采用原生多量子比特模拟相互作用，并辅以局部单量子比特旋转，可实现高阶反绝热协议；对于任意固定的截断阶数，其实现所需的模拟模块数量恒定，且与系统尺寸无关。我们以二维自旋模型为例展示了该方法，并分析了相关近似误差。这些结果表明，数字-模拟量子计算为反绝热协议及相关量子控制基元带来了定性全新的资源缩放方式，并对当前量子设备上的量子模拟、优化和算法态制备具有直接意义。

I. 引言

量子计算已成为过去十年最具变革性的技术之一，这得益于硬件开发 [1–9] 和算法设计 [10–16]方面的快速进展。如今，含噪中等规模量子（NISQ）设备已能够模拟非平凡的多体物理和化学问题、执行变分算法、探索优化问题，并初步展示量子优势 [4, 6, 8, 9]。然而，一个核心挑战依然存在：如何在当今量子平台严格受限的相干时间和电路深度内，实现精确的量子态制备。

反绝热（CD）驱动是绝热捷径这一更广泛框架中的一种重要方法，它通过引入辅助控制项来抑制含时量子演化过程中瞬时本征态之间的非绝热跃迁，从而应对这一挑战 [17–21]。这些 CD 项经过专门设计，加入原始哈密顿量后，即使系统在有限且可能很短的时间内演化，也能使系统精确地沿着参考绝热哈密顿量的瞬时本征态演化。从这个意义上说，CD 驱动无需缓慢的绝热动力学，便可重现绝热状态演化。尽管这一方法在概念上颇具吸引力，但 CD 哈密顿量高度非局域的结构，严重限制了 CD 驱动的实际应用。一种构造 CD 哈密顿量的方法，是对绝热哈密顿量及其参数导数进行嵌套对易子（NC）展开 [22], , 但这类展开的复杂度会不断增长并随系统尺寸和截断阶数迅速增加。由此得到的算符包含多个非局域相互作用项，无法在当前量子硬件上原生实现。因此，CD 协议在实践中的适用性受到限制，通常仅采用一阶近似，得到与目标哈密顿量局域性程度相同的项 [23–32]。

另一种方法是采用多量子比特模拟相互作用结合数字门来实现 CD 驱动，这一范式称为数字-模拟量子计算（DAQC） [29]。DAQC 利用了这样一个事实：许多硬件平台，例如超导量子比特和囚禁离子，能够原生地产生长程相互作用 [33–36]。采用 DAQC 可以降低整体电路深度。数字层提供灵活性，而模拟模块则负责在算法实现过程中维持较低的错误率。

由 NC 展开推导出的 CD 驱动，其数字和数字-模拟实现通常都仅限于展开的一阶，这一阶可提供适用于硬件的哈密顿量。完整 NC 展开中的高阶项需要超出当前平台能力的多体相互作用，尚未得到探索，这限制了该方法在复杂绝热调度中的可扩展性。

在这项工作中，我们提出了一种用于 CD 量子计算的数字-模拟方法，可实现任意阶的 NC 试探形式 [22]。我们利用当前量子硬件 [8, 37–40] 上可用的原生模拟相互作用，并辅以单量子比特数字门。我们证明，基于 NC 展开推导出的 CD 哈密顿量可以使用针对对易子的 Trotter-Lie 乘积公式（PF） [41, 42]进行模拟，且电路深度保持恒定：对于固定的 NC 阶数，所需电路深度与系统尺寸无关。此外，我们还提出了新颖的

* b.a.bhargava@gmail.com

CD 项分解方法；将其与这种数字-模拟策略相结合后，与纯数字方法相比，可大幅减少计算资源。

为了说明我们方法的实用性和通用性，我们讨论两个具有代表性的案例研究：二维晶格上的伊辛自旋玻璃模型和二维 XXZ 自旋模型。这些模型与多个研究领域广泛相关。自旋玻璃哈密顿量为自旋系统与组合优化问题之间提供了典型映射，可直接应用于蛋白质折叠 [26, 43, 44], 投资组合优化 [25], 和供应链物流 [28]。XXZ模型是研究量子材料中由相互作用自旋所描述的关联和集体现象的基础系统 [45]。这些示例采用不同的原生相互作用实现，这些相互作用可在当前处理器上轻易获得，例如超导和离子阱量子平台 [8, 29, 38, 46, 47]。除这些具体演示外，我们的框架还提供了一种通用且可扩展的策略，可在恒定深度下模拟高阶 NC 哈密顿量，从而为在近期量子设备上实现反绝热量子计算铺平道路。

II. 反绝热量子计算

绝热量子计算 [13, 48] (AQC) 是一种以量子绝热定理为基础的计算模型，其中计算问题的解编码在某个哈密顿量的基态中。计算从初始哈密顿量 H_0开始，其基态易于制备；随后通过平滑插值逐步过渡到问题哈密顿量 H_1，其基态编码了问题的解。实现这种插值的一种通用方法是定义绝热哈密顿量

$$H(t) = (1-\lambda(t))H_0 + \lambda(t)H_1, \tag{1}$$

其中， $\lambda(t)$ 是一个调度函数，在总演化时间 T 内平滑地从 0 变化到 1。如果演化速度相对于最小谱隙平方的倒数足够慢，量子绝热定理便保证系统保持在其瞬时基态，从而在测量时得到正确的解。

然而，在含噪中等规模量子设备上，由于相干时间短，较长的运行时间并不实际。反绝热驱动是一种绝热捷径技术 [17, 20–24,27, 49–51], ，它通过引入一个额外的控制项 $H_{\mathrm{CD}}(t)$，来抑制非绝热跃迁。由此得到的修正哈密顿量，

$$\mathcal{H}(t) = H(t) + H_{\mathrm{CD}}(t), \tag{2}$$

其构造方式可抵消有限时间驱动所引起的激发。这使得状态制备能够在显著缩短的演化时间内完成 [50]，同时保持高精度 [24]。

构造 $H_{\mathrm{CD}}(t)$ 的系统性策略由非对易级数展开 [22] 给出。它通过对绝热哈密顿量H 及其导数 $\partial_\lambda H$的非对易子求和来定义。我们引入递归记号

$$\mathcal{C}^{(0)} = \partial_\lambda H, \qquad \mathcal{C}^{(n)} = [H, \mathcal{C}^{(n-1)}], \quad n \geq 1, \tag{3}$$

使得 $\mathcal{C}^{(n)}$ 是 H 与 $\partial_\lambda H$ 的 n 重非对易子。使用这一记号，反绝热哈密顿量的 l 阶非对易近似为

$$H_{\mathrm{CD}}^{(l)}(t) = \dot{\lambda}(t)\,\mathcal{A}^{(l)}(\lambda(t)) = i\,\dot{\lambda}(t)\sum_{k=1}^{l}\alpha_k(t)\,\mathcal{C}^{(2k-1)}, \tag{4}$$

其中 $\mathcal{A}$ 称为绝热规范势（AGP）。系数 α_k 通过最小化作用量 $\mathcal{S}$ =Tr$\{G^\dagger G\}$ 得到，其中

$$G = \partial_\lambda H - i[H, \mathcal{A}^{(l)}]. \tag{5}$$

为简洁起见，我们省略显式的时间参数。在极限 $l \to \infty$下，式（4）收敛至精确的反绝热哈密顿量，从而实现完全无跃迁驱动。反绝热方案可通过数字 [24] （基于门的）或模拟式 [52] （哈密顿量工程化）量子硬件实现，各自具有不同的优势和局限。

在基于门的量子设备上，由哈密顿量 $\mathcal{H}(t)$生成的连续时间演化无法直接实现，而必须用有限个离散幺正操作组成的序列来近似。这种近似的基本构件是设备原生相互作用$h_{\mathrm{ntv},\,j}$ ，它们作用于一个或多个量子比特 j，每种相互作用都会生成短时酉演化$U_{\mathrm{ntv},\,j} = e^{-i\delta t\, h_{\mathrm{ntv},\,j}}$。通过在较小的时间步长内串接此类原生酉算符，并将其与任意单量子比特旋转相结合，可以近似实现所需的多体演化。这些操作共同构成了量子计算的通用门集 [10]。

数字时间演化的一种标准方法是对时间序列演化算符进行离散化，

$$\mathcal{U}_{\mathcal{H}} = \mathcal{T}\exp\left(-i\int_0^T \mathcal{H}(t)\,dt\right) \approx \prod_{m=1}^{M}\mathcal{U}_m, \tag{6}$$

其中 $\mathcal{U}_m = e^{-i\delta t\mathcal{H}_m}$和 $\delta t = T/M$。这里， $\mathcal{T}$表示时间排序，我们设定 $\hbar = 1$。在数字分解中，每个短时传播子都可以实现为 $\mathcal{U}_m = \prod_j \widetilde{\Lambda}^\dagger_{m,\,j}\,U_{\mathrm{ntv},\,j}\,\widetilde{\Lambda}_{m,\,j}$，其中 j 是量子比特索引~，而 $\Lambda_{m,\,j}$ 是单量子比特或多量子比特旋转，用于在第 m 步重构所需的有效哈密顿量。此类 CD 算法的数字实现称为数字化反绝热量子计算（DCQC） [24]。

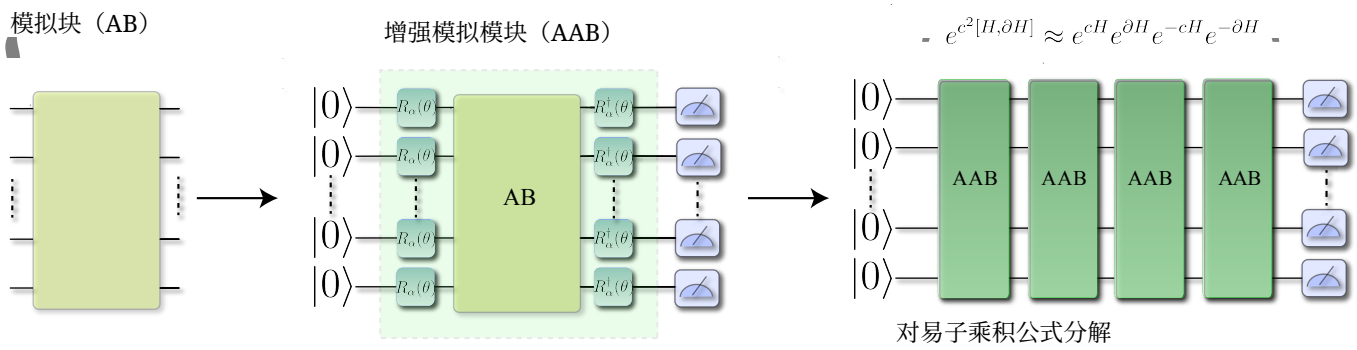


图 1. 数字-模拟反绝热量子计算（DACQC）电路构造。利用实现硬件连接图 S的原生多量子比特相互作用来定义模拟模块（AB），对应于原生哈密顿量下的连续时间演化。在相互作用前后施加适当的单量子比特旋转 $R_\alpha(\theta)$（其中 $\alpha \in \{x, y, z\}$），即可得到增强模拟模块（AAB），以实现绝热哈密顿量 H 及其参数导数 ∂H。随后，按照乘积公式构造将这些 AAB 序列组合起来，从而生成反绝热哈密顿量中出现的对易子。递归应用乘积公式分解即可实现高阶嵌套对易子。作为示例，图中展示了单个时间步长 m的一阶（$l = 1$）乘积公式。对 M 个时间步重复这一构造，即可实现完整的时间演化。

相比之下，模拟量子平台通过在原生相互作用 H_{ntv} 下进行连续时间演化来实现动力学，无需特罗特化门分解。虽然可用的控制通常不如通用数字门集灵活，但关键的哈密顿量参数可以随时间连续调节。在囚禁离子、超冷原子和超导电路等平台中，外部控制手段（包括激光振幅、磁场梯度或微波驱动）经过调控，可直接构造目标哈密顿量。因此，演化 $H(t)$ 在哈密顿量层面通过连续控制过程实现，而非通过一系列离散的电路操作实现。此类方法尤其适用于量子模拟，其中对哈密顿量参数进行随时间变化的控制，可忠实实现相互作用多体动力学，这已在光学晶格和囚禁离子平台的实验中得到验证 [52–55]。

对于 CD协议，辅助哈密顿量 H_{CD} 在某些有利情况下可以在模拟式平台上实现为随时间变化的连续控制场。在这种模拟式实现可行时，它能够避免基于门的合成，并允许以高时间分辨率施加 CD 项。然而，这种方法的适用性从根本上受到给定平台上可直接构造的受限相互作用集合的限制。一般而言，精确反绝热哈密顿量包含非局域算符和高体算符，这些算符超出了原生相互作用集合，因此必须采用截断或近似构造，而这些方法高度依赖于具体模型和硬件。因此，纯模拟式 CD协议缺乏推广到任意哈密顿量的系统性途径。在光学晶格和囚禁离子平台上的实验演示表明，定制的反绝热场能够有效抑制非绝热激发 [52, 55, 56]，但这些实现依赖于经过精心设计的平台特定控制，并且难以直接扩展到通用多体系统。

III. 数字-模拟反绝热量子计算

数字-模拟反绝热量子计算（DACQC）通过将设备的原生多量子比特模拟相互作用与浅层数字控制相结合来实现反绝热协议。其核心思想是利用局域幺正共轭，将硬件原生的演化修饰为由目标哈密顿量 $\mathcal{H}(t)$生成的有效演化。对于一个较短的时间步长 δt，我们设定

$$U_{\mathcal{H}}(t_m) \equiv e^{-i\delta t\, \mathcal{H}_m} \approx \Lambda_m^\dagger\, U_{\text{ntv}}(\boldsymbol{\theta}_m)\, \Lambda_m, \tag{7}$$

其中，$U_{\text{ntv}}(\boldsymbol{\theta}_m) = e^{-i\delta t\, H^S{}_{\text{ntv}}(\boldsymbol{\theta}_m)}$ 是在第 m步硬件上可用的原生模拟式演化，而 Λ_m 通常是单量子比特旋转的张量积。由于 U_{ntv} 以集体方式作用于多个量子比特，DACQC能够在原生相互作用族的约束下，以显著低于纯数字门综合的深度实现有效多量子比特生成元。

考虑一个由量子比特连接图 S 和原生相互作用哈密顿量 $H^S_{\text{ntv}}(\boldsymbol{\theta})$表征的硬件平台。我们将第 m步的模拟模块（AB）定义为

$$U_{\text{AB},m} \equiv e^{-i\delta t\, H^S_{\text{ntv}}(\boldsymbol{\theta}_m)}, \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{\theta}_m$ 表示平台上可用的可编程控制参数（例如耦合强度、失谐或驱动振幅）。根据架构的不同，这些参数可能只能在硬件约束范围内调节，也可能无法在 S的每条边上独立寻址。

为纳入单量子比特控制，我们将增强型模拟模块（AAB）定义为

$$U_{\mathrm{AAB},m} \equiv \Lambda_m^{\dagger}\, U_{\mathrm{AB},m}\, \Lambda_m, \tag{9}$$

其中 $\Lambda_m = \bigotimes_j R_j(\phi_{j,\,m})$ 是局域旋转的乘积。在 DACQC 中，旋转 Λ_m（以及在可用时的模拟参数 $\boldsymbol{\theta}_m$）经过选择，使得 $U_{\mathrm{AAB},\,m}$ 在步骤 m 复现所需的反绝热生成元。

在接下来的章节中，我们首先展示如何使用对易子乘积公式合成非对易反绝热项，使其达到所需的展开阶数。然后，我们针对两种与当前量子架构相关的典型原生哈密顿量，构造仅使用单量子比特旋转的显式 Λ_m。先前的研究已表明，相关的数字-模拟模块构造能够提高态制备保真度 [29, 30]。

A. 使用对易子乘积公式的 DACQC ulas

图 1 示意说明了如何将原生相互作用与用于反绝热量子计算的特罗特乘积公式结合起来。为理解 DACQC 如何复现反绝热动力学，请回想非对易定义（4）仅依赖于 H 和 $\partial_\lambda H$，并通过集合 $\{\mathcal{C}^{(k)}\}$给出。

使用一阶特罗特-铃木分解 [1,57–59], 第 m 步的短时演化算符为

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_m &= e^{-i\delta t\left(H_m + H^{(l)}_{\mathrm{CD},m}\right)} \\ &= e^{-i\delta t\, H_m}\, e^{-i\delta t\, H^{(l)}_{\mathrm{CD},m}} + \mathcal{O}(\delta t^2),\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $H^{(l)}_{\mathrm{CD}\ m} = \dot\lambda_m \mathcal{A}^{(l)}_m = i\dot\lambda_m \sum_{k=1}^{l} \alpha_{k,\ m} \mathcal{C}^{(2k-1)}_m$。该表达式包含阶数递增的非对易子。我们可以近似每一项

$$\exp\left[-i\delta t\, \dot\lambda_m\, i\alpha_{k,m}\, \mathcal{C}^{(2k-1)}_m\right]$$

通过递归使用群对易子恒等式 [41]

$$e^{Ax}e^{Bx}e^{-Ax}e^{-Bx} = e^{[A,B]x^2+\mathcal{O}(x^3)}. \tag{11}$$

这是对单个对易子指数函数的近似，其小参数为 x^2，误差标度为 $\mathcal{O}(x^3)$。通过简单的幂次计数即可得到非对易子的主导阶误差标度。

对于 $l=1$，我们定义短时酉算符

$$U^{(1)}(\delta t, \alpha_1) = e^{-i\delta t\, H^{(1)}_{\mathrm{CD}}} = e^{-i\delta t\, \dot\lambda\, i\alpha_1 \mathcal{C}^{(1)}}, \tag{12}$$

其中 $\mathcal{C}^{(1)} = [H, \partial_\lambda H]$。利用式（11），并为明确起见令 $\alpha_1 > 0$，我们将其分解为

$$U^{(1)} = e^{-ixH}\, e^{ix\,\partial_\lambda H}\, e^{ixH}\, e^{-ix\,\partial_\lambda H} + \mathcal{O}(x^3), \tag{13}$$

其中 $x = \sqrt{|\delta t\, \dot\lambda\, \alpha_1|}$。通过交换 $H \leftrightarrow \partial_\lambda H$ 即可得到 $\alpha_1 < 0$ 的情形。由于小参数为 $x^2 \propto \delta t$，误差按 $\mathcal{O}(\delta t^{3/2})$ 的量级缩放。

对于 $l=2$ 的情形，短时间非对易演化算符包含两个对易子项。一阶特罗特展开给出的算符乘积形式为

$$e^{-i\delta t\, H^{(2)}_{\mathrm{CD}}} = U^{(1)}(\delta t, \alpha_1)\, U^{(3)}(\delta t, \alpha_2) + \mathcal{O}(\delta t^2), \tag{14}$$

其中 $U^{(3)} = e^{-i\delta t\, \dot\lambda i\alpha_2 \mathcal{C}^{(3)}}$。为分解 $U_{(3)}$，我们定义 $x_2 = \sqrt{|\delta t\, \dot\lambda\, \alpha_2|}$。递归地使用式（11），可得

$$\begin{aligned}&U^{(3)}(\delta t, \alpha_2) \\ &= e^{-ix_2 H} e^{ix_2 \mathcal{C}^{(2)}} e^{ix_2 H} e^{-ix_2 \mathcal{C}^{(2)}} + \mathcal{O}(x_2^3) \qquad (15)\\ &= e^{-ix_2 H}\left(e^{i\sqrt{x_2}H} e^{\sqrt{x_2}\mathcal{C}^{(1)}} e^{-i\sqrt{x_2}H} e^{-\sqrt{x_2}\mathcal{C}^{(1)}}\right) \\ &\quad \times e^{ix_2 H}\left(e^{\sqrt{x_2}\mathcal{C}^{(1)}} e^{i\sqrt{x_2}H} e^{-\sqrt{x_2}\mathcal{C}^{(1)}} e^{-i\sqrt{x_2}H}\right) + \mathcal{O}(x_2^{3/2}). \qquad (16)\end{aligned}$$

此表达式适用于 $\alpha_2 > 0$。情况 $\alpha_2 < 0$ 在附录A中讨论。在此近似层级下，误差标度为 $\mathcal{O}(\delta t^{3/4})$。进一步分解 $e^{\pm\sqrt{x_2}\mathcal{C}^{(1)}}$ 项会得到诸如 $e^{-ix_2^{1/4}H}$ 这样的因子，误差标度为 $\mathcal{O}(\delta t^{3/8})$。

对于阶数 $l > 2$，同样适用这一策略。我们通过插入相同的 PF 模块，并逐步缩小有效时间尺度，来分解 $(2l-1)$ 重的 NC 幺正算符。每下降一个对易子层级，相应的小参数就开平方。经过 $(2l-1)$ 次这样的重新参数化后，使用基本模块的最小尺度为 $\sim (\delta t)^{1/2^{2l-1}}$。因此，该层级的误差为

$$\mathrm{Er}\{U^{(2l-1)}(\delta t, \alpha_l)\} = \mathcal{O}(\delta t^{\nu_l}), \qquad \nu_l = \frac{3}{2^{2l-1}}, \tag{17}$$

它主导着 l 阶 NC PF 的总误差。这种标度关系是一个上界：更高阶项带来的额外贡献只会增大 δt 的幂次。

因此，NC 近似所需的所有 NC 项都可以仅通过以下方式生成：(i) H 和 $\partial_\lambda H$ 的指数算符；(ii) 对原生 AB 进行适当的 DACQC 修饰。一阶 NC 项仅需要 H 和 $\partial_\lambda H$ 的指数算符，两者都可以用 AAB 实现。下文将针对具体示例讨论如何为这些算符构造 AAB。对于这些示例模型，我们还通过数值计算提取了算符范数误差随 δt 的标度关系。

最后，给定阶数 l 时出现的指数算符数量为

$$\gamma_H = 2(2^l - 1), \qquad \gamma_{\mathcal{C}^{(l-1)}} = 2^l. \tag{18}$$

这里，γ_H 表示 e^{xH} 项的数量，$\gamma_{\mathcal{C}^{(l)}}$表示 $e^{x\,\mathcal{C}^{(l)}}$ 项的数量。这些量有助于进行资源估算，并确定构造给定阶数 l 的非对易项所需的 AAB 数量。

IV. 二维自旋玻璃

为展示使用乘积公式的 DACQC 技术的强大之处，我们首先考虑在二维方格晶格上制备伊辛自旋玻璃模型的基态。为便于说明，我们聚焦于这种几何结构；同样的方法也适用于任意空间维度下具有最近邻耦合的任意二分晶格。该模型定义为

$$H_{\mathrm{SG}} = \sum_{\langle a,b\rangle} J_{a,b} Z_a Z_b + \sum_{a=1}^{N} h_a Z_a, \tag{19}$$

其中，N 是量子比特的数量。我们将作用于量子比特 a 上的泡利算符记为 X_a, Y_a 和 Z_a，符号 $\langle a,b\rangle$ 表示最近邻对。耦合$J_{a,b}$ 和场 h_a 分别取自均匀分布 $[-J,J)$和 $[-h,h)$。

从 $H_X = -\sum_a X_a$ 出发，我们通过参数化哈密顿量插值到目标哈密顿量

$$H(t) = (1-\lambda)H_X + \lambda H_{\mathrm{SG}}. \tag{20}$$

初始哈密顿量 H_X 的基态为 $|\psi_i\rangle = |+\rangle^{\otimes N}$，其中 $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$。为了量化算法的性能，我们计算目标态保真度

$$\mathcal{F}(t) = |\langle \Psi_f | \psi(t)\rangle|^2, \tag{21}$$

其中参考态 $|\Psi_f\rangle$ 是最终哈密顿量的基态，此处见公式（19）。

绝热规范势的一阶 NC 近似为

$$\mathcal{A}^{(1)} = -2\alpha_1 \sum_{a,b} J_{a,b}(Y_a Z_b + Z_a Y_b) - 2\alpha_1 \sum_a h_a Y_a, \tag{22}$$

其中 α_1 通过第二节所述的方法进行数值求得。公式（22）仅包含二体相互作用，因此只要能够构造相应的 AAB，就可以使用 DACQC 直接实现。

A. 乘积公式分解：误差标度与性能

为验证 PF 展开的误差标度，我们计算了具有随机系数的二维最近邻伊辛模型中幺正时间演化算符的误差。图2所示的误差定义为算子范数$\|U_{\mathrm{exact}} - U_{PF}\|/\sqrt{2^N}$，即精确指数算符 $U^{(l)}{}_{\mathrm{exact}}(\delta t) = e^{-\delta t C^{(l)}}$与其 PF 展开 U_{PF}之间的差。NC $C^{(1)}$ 和 $C^{(3)}$ 分别出现在绝热规范势（AGP）的一阶和二阶近似中。算符 $U^{(1)}{}_{\mathrm{exact}}$ 通过应用式（13）进行分解；而对于 $U^{(3)}{}_{\mathrm{exact}}$，我们同时应用式（15）以及式（16）中的嵌套分解。为提取关于 δt 的标度，我们将含时

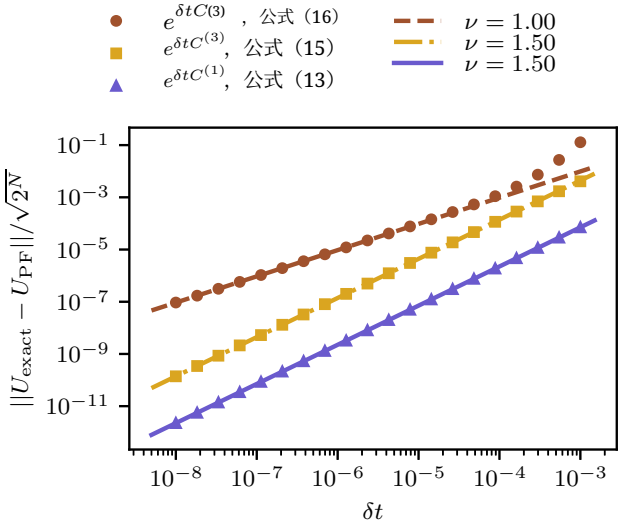


图 2. 乘积公式分解 U_{GC} 得到的酉算符 $U^{(l)}$ exact(δt) $= e^{\delta t C^{(l)}}$ 的误差随时间步长 δt的变化。误差用二范数 $\|.\|$定义。我们将函数 $f(\delta t) = b\,\delta t^{\nu}$ 拟合误差，拟合结果以实线和虚线表示，并提取拟合指数 ν。这里，我们考虑具有随机系数、尺寸为 3×3 的二维伊辛模型，并在公式（20）中设定 $\lambda = 0.5$。指数 ν 与第 III A 节给出的上界标度（关于 ν的下界）一致：对于公式（13）和（15），$\nu_1 = 3/2$；对于公式（16），$\nu_2 = 3/4$。

因子 $\lambda = \alpha_l = 1$ 在式（13）和（15）中取常数值。因此，图中仅展示标度，而实际情况下误差的大小与 λ 和 α_l不同。使用式 $\nu \approx 3/2$ （13）和式（15）时，我们得到预期的指数。对于应用于 $U^{(3)}{}_{\mathrm{exact}}$的式（16）嵌套 PF 展开，我们得到指数 $\nu \approx 1.03$，大于预测的下界 $\nu = 3/4$。因此，在这种情况下，近似比一般情况下更准确。这是因为式（15）中的前两个指数因子彼此对易，不会对误差产生贡献。

我们进一步通过计算二维伊辛自旋玻璃模型的时间依赖的目标态保真度，研究乘积公式的性能。我们使用不同的乘积公式分解来近似酉时间演化 $l = 1$ 算符，比较阶数为 $l = 2$和 $l = 1$的 NC 展开。对于 13的情况，我们应用公式（ $l = 213$），而对于，我们应用嵌套分解公式（16）。

图 3 显示，随着特罗特步数增加（对应于步长减小），保真度会趋近于参考解。参考解是通过使用足够小的时间步长，根据式（6）演化状态得到的；在该时间步长下，保真度已收敛于步长。采用二阶非对易近似得到的目标状态保真度高于一阶近似。

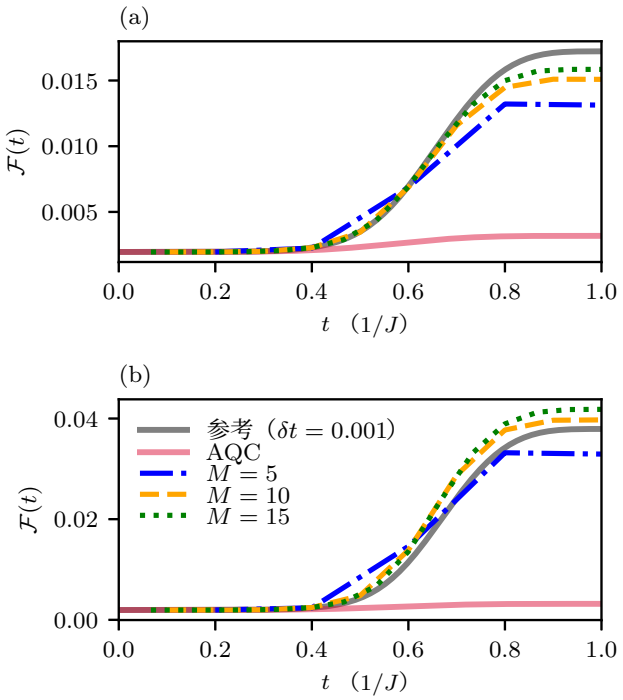


图 3. 式（21）中的目标态保真度随瞬时时间的变化，针对的是定义在 3×3 正方晶格上的式（19）伊辛自旋玻璃。(a) 对一阶非对易幺正算符 ($l = 1$) 使用式（13），(b) 对二阶非对易幺正算符 ($l = 2$) 使用式（16）。不同颜色表示不同的特罗特步数 M。黑色参考线通过使用较小时间步长直接对哈密顿量进行指数化得到，该步长足够小，使曲线收敛。耦合为随机值，$J_{a,b} \in (-J,\ J]$ 和 $h_a \in (-h,\ h]$，其中 $J = h = 1$。

将其实现为量子电路时，保真度的提升是以增加电路深度为代价的，且电路深度随阶数 l而增加。在此，为了单独考察乘积公式引入的误差，我们在每个时间步长直接对哈密顿量矩阵求指数，以实现时间演化。第IVB节讨论了用于 CD 演化的数字-模拟量子电路的构造。

请注意，根据量子硬件的原生哈密顿量，可能存在更简单的 $U^{(1)}$ 分解方式，从而无需使用式（13）。这些以模拟模块表示的、更高效的分解方式将在第 IVB节讨论。因此，在图 3(b) 中，我们使用式（16），不再进一步分解算符 $e^{\pm\sqrt{x_2}\,\mathcal{C}^{(1)}}$。我们已验证，显式分解这些项会得到相似结果。

B. DACQC：使用增强模拟模块实现乘积公式

为了实现 DACQC 电路，我们描述如何为由哈密顿量 $\mathcal{H}^{(1)} = H + H^{(1)}_{\mathrm{CD}}$ 生成的演化构造 AAB。我们假设硬件支持原生模拟模块

$$U^{S}_{\mathrm{ntv}} = \exp\left(-i \sum_{\langle a,b\rangle} J_{a,b} Z_a Z_b\right). \tag{23}$$

这类模拟模块常见于离子阱量子硬件中 [40]，也见于采用磁通可调耦合器的超导量子比特中 [37]。其中的二体相互作用$H(t)$可通过每个时间步长使用一个 AB 来实现 m，方法是利用原生相互作用。哈密顿量中的单体项则通过单量子比特旋转实现。

CD酉算符 $U^{(1)}$ 可通过两个 AAB 实现，分别记为 V^{YZ}和 V^{ZY}。为得到这些 AAB，我们在正方晶格上定义以下两个子晶格选择性旋转：

$$\Lambda^{YZ} = \prod_{a\in A} R^{x}_{a}(-\pi/2) \qquad \Lambda^{ZY} = \prod_{b\in B} R^{x}_{b}(-\pi/2), \tag{24}$$

其中 A和 B 表示两个子晶格。相应的电路综合过程如算法1所示。

如算法所示，算符 $e^{-i\delta t\ \mathcal{C}^{(1)}} \propto V_{ZY|YZ}(\delta t)$ 可通过两个 AAB 实现，且与系统尺寸无关。因此，每个时间步长只需一个 AB 来实现ZZ 中的二体相互作用，以及两个 AAB 来实现 $H(t)$ 中的二体 CD项。哈密顿量（19）也可以通过其他原生 AB（例如$XX + YY$型相互作用）构造，这类相互作用已在近期实验中得到展示 [8]。这种替代构造的详细信息见附录 B。此外，附录 C比较了全数字电路与相应 DACQC 电路所获得的保真度。

与二阶 NC 哈密顿量相对应的演化算符 $\mathcal{H}^{(2)} = H + H^{(2)}_{\mathrm{CD}}$ 现在可以使用公式（16）中的乘积公式构造。所得电路深度为 17，通过结合公式（18）中给出的乘积公式、AAB 分解和指数计数规则即可直接确定。

C. 电路深度分析

如第 IVB 节所述，DACQC 分解相较于纯数字实现具有显著的电路深度优势。为了进行有意义且稳健的深度比较，我们推导出在具有相同量子比特连接的数字平台上所需电路深度的下界$P_{\min}$。完全数字实现中的实际电路深度预计会超过此下界，因为我们的估算仅考虑了数字硬件上可并行执行的部分项。为简化起见，我们将分析限制在二维正方晶格连接的情形。

算法 1： 双层综合
使用 ZZ 实现一阶非对易 CD $ZY \mid YZ$ 演化
模拟模块

输入： 耦合 $\{J_{a,b}\}$，其中 $a \in A$、$b \in B$；时间步长 δt

输出： 输出酉算符 $V_{ZY|YZ}(\delta t)$

1

$$V_{ZY|YZ}(\delta t) = \exp\Big[-i\tfrac{\delta t}{2}\sum_{a,b} J_{a,b}Y_aZ_b\Big] \times \exp\Big[-i\tfrac{\delta t}{2}\sum_{a,b} J_{a,b}Z_aY_b\Big]$$

2 定义原生模拟模块：

$$U_{ZZ}(t) \leftarrow \exp\Big[-i\,t\sum_{a\in A,b\in B} J_{a,b}Z_aZ_b\Big]$$

3 定义集体旋转：

$$\Lambda^{YZ} \leftarrow \prod_{a\in A} R_x^{(a)}(-\pi/2), \qquad \Lambda^{ZY} \leftarrow \prod_{b\in B} R_x^{(b)}(-\pi/2)$$

4 第 1 层：生成 Z_aY_b 项

$$V^{(1)} \leftarrow \Lambda^{ZY}\,U_{ZZ}(\delta t/2)\,(\Lambda^{ZY})^\dagger$$

5 第 2 层：生成 Y_aZ_b 项

$$V^{(2)} \leftarrow \Lambda^{YZ}\,U_{ZZ}(\delta t/2)\,(\Lambda^{YZ})^\dagger$$

6 总酉算符：

$$V_{ZY|YZ}(\delta t) \leftarrow V^{(2)}V^{(1)}$$

7 返回 $V_{ZY|YZ}(\delta t)$

尽管连接性更高的硬件平台原则上可以降低数字电路的深度，但高阶 NC 项的实现不可避免地会导致作用范围不断增大的相互作用，而将这些相互作用分解为双量子比特纠缠门又需要大量的双量子比特纠缠门。更准确地说，单个 k体项需要 $2(k-1)$ 个 CNOT 门。相比之下，基于乘积公式的 DACQC 方法通过原生模拟式演化，自然地产生这些高阶相互作用。近期已有工作提出了高阶哈密顿量的数字-模拟量子模拟 [60]。

表 I 列出了哈密顿量中出现的项数（19）随 NC 阶数 l 和系统线性尺寸 L的变化。为估算数字实现所需电路深度的下界，我们仅考虑每个阶数中增长最快的项。这些贡献在表中以粗体突出显示。

作为一个说明性示例，考虑给定时间步长 m 中 $l=2$ 阶的三体项。在二维正方晶格上，有 $\mathcal{O}(L^2/3)$ 个三体项可以并行实现。即使乐观地假设每个这样的项都能用单个纠缠门实现，实现 $18L^2-12L+12$ 个三体项所需的总层数也至少为 54 层，即使系统尺寸 3×3 并不大。我们强调，作出这一假设纯粹是为了估算最大并行度，从而得到电路深度的下界。

阶数项		项数	$P_{\min}$	AAB 数量
$l=0$	1体	$2L^2$	-	1
	二体	$2L\,(L-1)$	4	
$l=1$	1体	$3L^2$	-	3
	二体	$\mathbf{6L\,(L-1)}$	12	
$l=2$	1体	$3L^2$	-	17
	二体	$10L\,(L-1)$	20	
	三体	$\mathbf{6(3L(L-2)+2)}$	54	
	四体	$4(L-1)(L-2)$	16	
$l=3$	1-体	$3L^2$	-	79
	二体	$10L(L-1)$	20	
	三体	$20(2+3L(L-2))$	120	
	四体	$\mathbf{4(L-2)(31L-27)}$	496	
	五体	$124+L(41L-148)$	205	

表 I. 二维伊辛自旋玻璃的标度信息。该表展示了在大小为 $N=L\times L$ 的二维网格上，哈密顿量（19）中的项数。$P_{\min}$ 是实现增长最快的项所需层数的下界。AAB 的数量统计了实现相应哈密顿量 $\mathcal{H}^{(l)}=H+H^{(l)}$ CD所需的 ZZ 类型增广模拟模块。

相比之下，实现完整二阶 NC 哈密顿量所需的 AAB 数量仅为$14+1+2=17$。在每个时间步长实现完整的演化算符还需要单量子比特门；不过，它们对总体电路深度的贡献可以忽略不计。因此，在估算深度时，我们只统计 AAB 的数量。

显然，这比数字实现有了显著改进。其他项所需的 AAB 数量及其近似下界也列于表 I 中。

D. 基态制备保真度的提升

如上一节所述，DACQC 相较于完全数字实现可大幅缩减电路深度。为展示这一优势如何转化为实际硬件性能，我们分析了式（19）中哈密顿量的基态制备保真度。具体而言，我们使用一阶 NC CD 哈密顿量计算最终时间 $t=T$ 处的目标态保真度。如表 I 所示，$l=1$ 实现所需的电路层数约为纯数字方案的四分之一。在硬件相干时间固定的情况下，这种深度

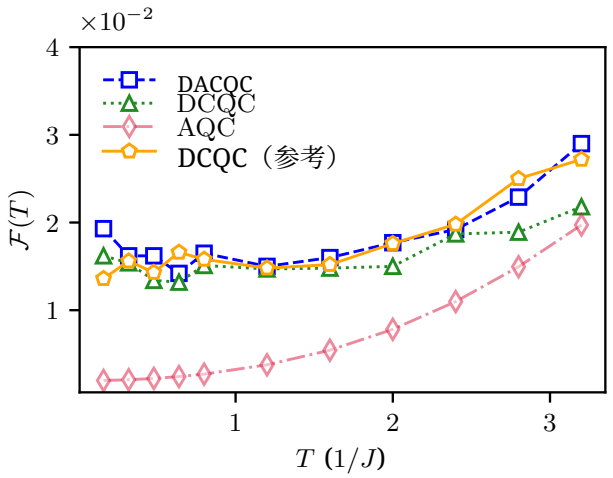


图 4. 自旋玻璃哈密顿量方程（21）在 3×3 晶格上的目标态保真度。作为基准，我们纳入了在绝热量子计算（AQC）中使用精确指数化演化初态所获得的保真度。我们还展示了使用与 DACQC 模拟相同时间步长 δt 得到的相应 DCQC-DCQC（参考）结果。DACQC 的时间步长设为 $\delta t = 0.02/J$，DCQC 的时间步长设为 $\delta t = 0.08/J$。这三项结果均使用量子电路采样器进行采样，采样次数为 20,000 次。

缩减使 DACQC 能够执行的电路层数约增加至四倍，从而实现更长的有效演化时间或更精细的特罗特离散化。

图 4 显示，当 DACQC 电路采用的时间步长是相应数字（DCQC）电路所用步长的四分之一时，基态保真度得到了提升。观察到的保真度提高表明，在电路深度受限的情况下，可以利用 DACQC 改善状态制备性能。

V. XXZ模型

本节进一步以 XXZ 自旋哈密顿量的基态制备为例进行讨论。

$$H_{XXZ} = J \sum_{\langle a,b \rangle} \left(X_a X_b + Y_a Y_b + \Delta Z_a Z_b \right), \tag{25}$$

其中 J 为最近邻耦合，Δ为无量纲各向异性参数。该模型常用于描述强关联电子系统的低能有效行为 [61, 62]。在自旋轨道耦合或晶场效应导致各向异性交换相互作用的化合物中，该模型常被用作量子磁性的基准模型 [63]。

在本节中，我们始终采用 $XX+YY$形式的模拟模块，这种模块在超导量子比特架构中十分常见 [4, 64]。模拟演化为哈密顿量 $J\sum_{\langle a,\ b\rangle}(X_aX_b + Y_aY_b)$与数字态制备相结合，近期已在经典方法难以处理的临界区域中得到演示 [8]。

作为初始哈密顿量，我们考虑

$$H_Z = -\sum_{a\in A} Z_a + \sum_{b\in B} Z_b, \tag{26}$$

其基态具有反铁磁自旋构型。我们考虑一个二分晶格，其子晶格为A 和 B，相应的子晶格指标分别为 a和b。因此，本文讨论适用于二维方格晶格，但并不局限于此。我们考虑如下随时间变化的哈密顿量

$$H(\lambda) = (1-\lambda)H_Z + \lambda H_{XXZ}. \tag{27}$$

绝热规范势的一阶 NC 近似可利用式（4）求得：

$$\mathcal{A}^{(1)}(\lambda) = 4J\alpha_1(\lambda) \sum_{\langle a,b\rangle} \left(Y_a X_b - X_a Y_b \right). \tag{28}$$

A. 乘积公式分解

与第 IVA 节一样，我们通过计算算符范数误差 $\|U_{\text{exact}} - U_{\text{PF}}\|/\sqrt{2^N}$ 随时间步长 δt变化的情况，分析乘积公式分解引入的误差。图 5展示了不同乘积公式分解的误差，对应于图 2。与伊辛模型的情况一样，使用式（12）和式（15）的分解时，我们得到了预期的下界指数$\nu = 3/2$。对于式（16），我们得到 $\nu \approx 1$，这同样大于下界 $3/4$。对于图 5所用的参数，式（16）的嵌套分解所产生的误差，在 δt 处就开始偏离小 $\delta t \approx 10^{-5}$ 幂律标度。这表明，要在嵌套乘积公式分解中控制误差，就必须采用较小的时间步长；不过，误差大小取决于时变因子

. α_l 和 λ，而这些因素在图 5中并未考虑。

我们进一步分析了不同分解下随时间变化的目标态保6真度。图6展示了相对于最终哈密顿量方程（25）基态的瞬时保真度。二阶非对角展开的保真度高于一阶展开。与伊辛自旋玻璃模型相比，初态和末态的目标态保真度都更高，这表明所选初态与目标态的重叠更大。初态是具有固定总磁化强度 $\langle \hat{} M\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle \hat{} Z_j\rangle$的反铁磁态，并且我们验证了最终哈密顿量的基态具有相同的总磁化强度。对于此处考虑的系统，我们发现，即使近似的反绝热哈密顿量不与 M对易，CD 演化仍以很高的数值精度守恒总磁化强度。我们已经

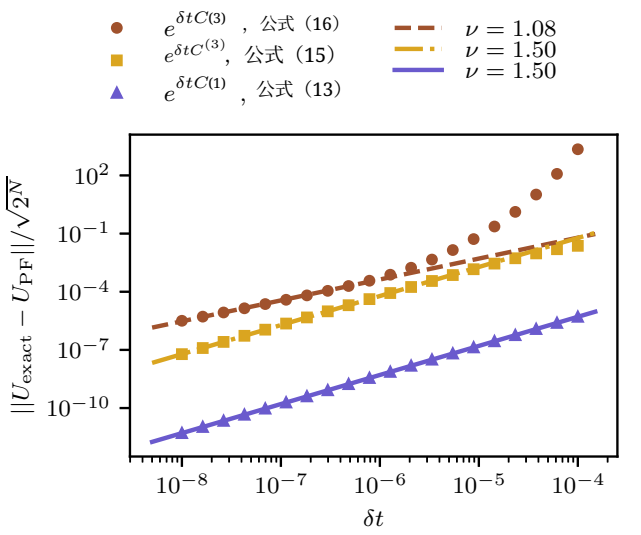


图5。乘积公式分解 U_{PF} 的酉算符 $U^{(l)}{}_{\text{精确}}(\delta t) = e^{\delta t C^{(l)}}$ 随时间步长 δt的变化，类似于图 2。这里，我们考虑具有 $\Delta = 0.5$的二维XXZ模型，系统尺寸为 3×3，并在方程 $\lambda = 0.5$ （27）中设定 ν。拟合指数 ν 与方程 （17）的上界标度一致。

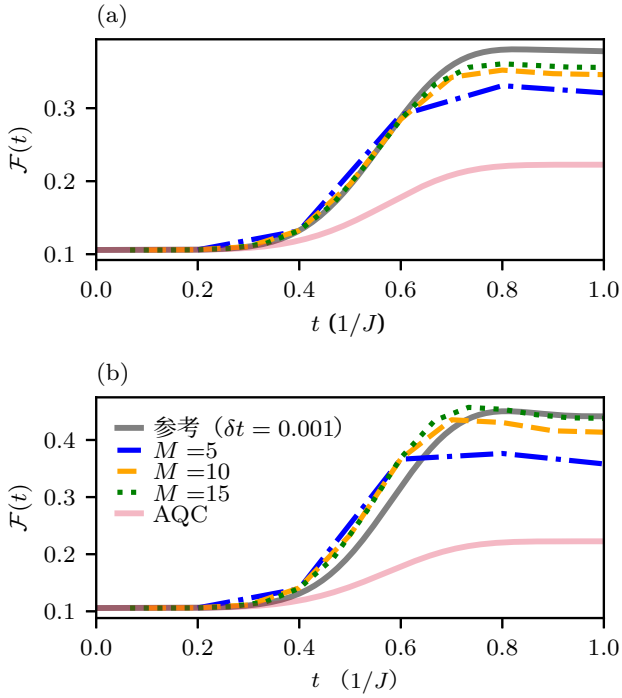


图 6. XXZ自旋模型式（25）的目标态保真度随时间的变化。CD 演化采用绝热规范势的（a）一阶和（b）二阶NC近似。在面板（a）中，我们使用式（13）的 GC 分解；在面板（b）中，我们应用式（16）。随着特罗特步数增加，保真度逐渐趋近于收敛的参考线。图中展示的是尺寸为 3×3、其中 $J = -1$ 且 $\Delta = 0.5$的系统。

验证了，与伊辛自旋玻璃的情形一样，改用初始哈密顿量 H_X 会导致保真度降低。

B. 电路构造与深度

如同第 IVC节所述，与方程 27）中的哈密顿量相关联的演化算符可以直接使用可用的模拟模块进行合成。具体而言，通过施加单层局域旋转 $R_z^{(b)}(-\pi/2)$，且仅作用于B 子晶格，可以生成主要的CD贡献。使用一阶NC拟设对CD 演化进行相应的单层合成，其总结见算法 2。

构造式（27）中的完整绝热哈密顿量还需要额外步骤。不过，所有二体相互作用项都可以用三个 AAB 实现。具体而言， ZZ 相互作用可以通过两层分解实现。具体构造见附录B。我们强调，上述综合方法具有完全普适性：它适用于任意耦合（包括随机耦合）$J_{a,\,b}$ 和 $\Delta_{a,\,b}$，且适用于任何二分晶格几何。

与伊辛模型的情况类似，AAB 分解大幅降低了电路深度。为量化这种降低，我们采用了第 IV 节中的相同深度分析流程。不同 NC 阶数下哈密顿量中项的数量 l 汇总于表 II。我们采用了相同的假设，即每个时间步长内可并行实现的项数以估算 $P_{\min}$ 的下界。

XXZ模型也可以使用 ZZ采用类似分解的模拟模块进行模拟。在附录C中，我们还比较了使用一阶非对易近似进行 CD 演化时，DACQC电路与相应数字电路所获得的保真度。

VI. 结论

我们提出了一种利用数字-模拟幺正操作实现 NC CD驱动的高效方法。该方法通过对易子采用 Lie-Trotter乘积公式，近似实现 l阶 CD项，同时将电路深度保持为常数，不受系统尺寸和连接性的影响。该方法的优势主要来自单量子比特旋转与多量子比特门的结合，后者能够自然地实现不同的相互作用。因此，与纯数字实现相比，这种实现方式大幅降低了电路深度，特别适用于含噪中等规模量子

算法2： 单层合成

使用以下方式进行一阶非对易 CD $XY \mid YX$ 演化（$XX{+}YY$）个模拟模块

输入： 耦合 $\{J_{a,b}\}$ 与 $a \in A, b \in B$；时间步长 δt

输出： 输出酉算符 $V_{XY|YX}(\delta t)$

1

$$V_{XY|YX}(\delta t) = \exp\Big[-i\,\delta t \sum_{a\in A, b\in B} 4J_{a,b}\big(Y_aX_b - X_aY_b\big)\Big]$$

2 定义集体旋转：

$$R_B \leftarrow \prod_{b\in B} R_z^{(b)}\big(-\tfrac{\pi}{2}\big)$$

3 定义原生模拟模块：

$$U_{XX+YY}(\tau) \leftarrow \exp\Big[-i\,\tau \sum_{a\in A, b\in B} 4J_{a,b}\big(X_aX_b + Y_aY_b\big)\Big]$$

4 单层合成：

$$V_{XY|YX}(\delta t) \leftarrow R_B\, U_{XX+YY}(\delta t)\, R_B^{\dagger}$$

5 返回 $V_{XY|YX}(\delta t)$

阶数 项		项数	$P_{\min}$	AAB 数
$l=0$	1体	L^2	-	3
	二体	$4L\ (L-1)$	8	
$l=1$	1-体	L^2	-	4
	二体	$\boldsymbol{8L\ (L-1)}$	16	
$l=2$	1-体	L^2	-	26
	二体	$8L(L-1)$	16	
	三体	0	0	
	四体	$\boldsymbol{4(17L^2-49L+30)}$	204	
$l=3$	1-体	L^2	-	132
	二体	$8L(L-1)$	16	
	三体	0	0	
	四体	$\boldsymbol{4(330-415L+119L^2)}$	1904	
	5体	$4(54-89L+31L^2)$	620	

表II. 二维XXZ模型的缩放信息，类似于表I。这里，我们使用 AB $XX+YY$。

架构。

我们通过两个典型模型展示了DACQC协议的多功能性：横场伊辛自旋玻璃和XXZ自旋模型。在每种情况下，我们都推导出了幺正时间演化算符的高效分解，将其分解为AAB，从而仅使用一层或两层即可实现一阶NC CD项。

此外，当 AB 完全可编程时，通过对块内耦合进行单独调节，同一框架可扩展至有效合成高阶多体相互作用，并在任意空间维度下编码自旋玻璃哈密顿量。这一能力可用于量子优化任务，包括投资组合优化和物流、采样与热态制备 [32]，，也可能与量子化学相关，因为高保真度的基态制备至关重要。

对于更高阶的NC 项，当使用固定时间步长时，目标幺正算子的近似误差通常会随展开阶数呈指数增长，并随总演化时间呈多项式增长。因此，抑制这些误差需要逐步减小时间步长，而这又会增加实现中的特罗特步数。然而，尽管算符范数误差会呈指数增长，所制备量子态的保真度预计会随步数呈多项式提升。这一区别源于：与幺正算子之间相应的距离相比，态制备保真度通常对相干酉误差不那么敏感。因此，即使是CD协议的近似实现，也能使基态制备保真度获得显著的多项式提升，这使DACQC对在近期量子硬件上的实际应用尤其具有吸引力。

尽管具有这些优势，硬件方面仍面临重大挑战。尤其是，扩大模拟模块的规模和复杂度并非易事，因为控制误差和退相干通常会随着底层硬件连接性的复杂程度增加，导致有效门保真度下降。克服这些局限需要在硬件校准、稳健的脉冲级控制和误差缓解策略方面取得进展，同时还需要自适应设计 AB，以兼顾表达能力与可控性。此外，对 AB 性能进行基准测试仍是一项关键挑战。解决这些挑战对于在下一代量子处理器上充分发挥混合数字-模拟CD协议的潜力至关重要。

致谢

感谢 Sebasti´an V. Romero 与我们进行了富有启发性的讨论。

附录 A：第二个嵌套对易子乘积公式的推导

式（$U^{(3)}$ 14）中第二项的乘积公式可通过将式（11）中的乘积公式恒等式代入其自身推导得出。对于 $\alpha_2 > 0$ 和 $x_2 = \sqrt{|\delta t\dot{\lambda}\alpha_2|}$，我们可以写成

$$
\begin{aligned}
U^{(3)}(\delta t,\alpha_2) = e^{-ix_2^2\cdot iC^{(3)}} &= e^{x_2^2[-iH,iC^{(2)}]} \\
&= e^{-ix_2H}e^{ix_2C^{(2)}}e^{ix_2H}e^{-ix_2C^{(2)}} + \mathcal{O}(x_2^3) \\
&= e^{-ix_2H}\left(e^{x_2[iH,C^{(1)}]}\right)e^{ix_2H}\left(e^{x_2[C^{(1)},iH]}\right) + \mathcal{O}(x_2^3) \\
&= e^{-ix_2H}\left(e^{i\sqrt{x_2}H}e^{\sqrt{x_2}C^{(1)}}e^{-i\sqrt{x_2}H}e^{-\sqrt{x_2}C^{(1)}}\right)e^{ix_2H}\left(e^{\sqrt{x_2}C^{(1)}}e^{i\sqrt{x_2}H}e^{-\sqrt{x_2}C^{(1)}}e^{-i\sqrt{x_2}H}\right) + \mathcal{O}(x_2^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}
$$

要实现一阶项 $U^{(1)}$，可以直接采用高效的分解方式，例如算法1 或算法2中的 AAB。或者，也可以使用生成 H 和 $\partial_\lambda H$ 的 AAB 来实现式（13）。将 $\alpha \to \sqrt{c_2}$代入后，我们得到

$$
\begin{aligned}
e^{\sqrt{x_2}C^{(1)}} &= e^{\sqrt{x_2}[H,\partial_\lambda H]} = e^{\sqrt{x_2}[-iH,i\partial_\lambda H]} \\
&= e^{-ix_2^{1/4}H}e^{ix_2^{1/4}\partial_\lambda H}e^{ix_2^{1/4}H}e^{-ix_2^{1/4}\partial_\lambda H} + \mathcal{O}(x_2^{\frac{3}{4}})
\end{aligned}
$$

并且 $e^{-\sqrt{x_2}C^{(1)}} = e^{\sqrt{x_2}[\partial_\lambda H,H]}$ 可通过交换$H \leftrightarrow \partial_\lambda H$获得。

对于 $\alpha_2 < 0$的情况，我们有

$$
\begin{aligned}
U^{(3)}(\delta t,\alpha_2) = e^{ix_2^2\cdot iC^{(3)}} &= e^{x_2^2[iH,iC^{(2)}]} \\
&= e^{ix_2H}\left(e^{i\sqrt{x_2}H}e^{\sqrt{x_2}C^{(1)}}e^{-i\sqrt{x_2}H}e^{-\sqrt{x_2}C^{(1)}}\right)e^{-ix_2H} \\
&\quad\times\left(e^{\sqrt{x_2}C^{(1)}}e^{i\sqrt{x_2}H}e^{-\sqrt{x_2}C^{(1)}}e^{-i\sqrt{x_2}H}\right) + \mathcal{O}(x_2^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}
$$

附录B：增强模拟模块的算法

本节给出了所有可用于生成 AAB 的算法。

1. 伊辛自旋玻璃

首先，我们考虑最近邻伊辛自旋玻璃的例子，即定义在晶格 S上的方程（19）。由于我们是根据子晶格 A 和B来构建算法的，因此这里的推导适用于任意空间维度下的任何二分晶格。为了使用（$XX+YY$）类型的 AB 构造 AAB 电路，我们首先考虑哈密顿量（19）中的二体 ZZ 项。相应的酉算子 exp $\left(-i\delta t\sum_{a\in A,b\in B}\widetilde{J}_{a,b}Z_aZ_b\right)$ 可用算法 3中给出的两层 AAB 分解进行近似。该酉算子

$$
\exp\Big[-i\delta t\sum_{a,b}J_{a,b}\left(Y_aZ_b+Z_aY_b\right)\Big] \tag{B1}
$$

与一阶 NC 项对应的部分可以使用单个（$XX+YY$）模拟模块进行近似，如算法 4所述。

Algorithm 3: Two-layer synthesis of ZZ evolution using $(XX+YY)$ analog blocks

输入： 耦合 $\{\widetilde{J}_{a,\ b} = \Delta J_{a,\ b}\}$ 对于 $a\in A, b\in B$; 时间步长 δt

输出： 输出酉算符 $V_{ZZ}(\delta t)$

1

$$
V_{ZZ}(\delta t) = \exp\Big[-i\,\delta t\sum_{a\in A,b\in B}\widetilde{J}_{a,b}Z_aZ_b\Big]
$$

2 定义原生模拟模块：

$$
U_{XX+YY}(t) \leftarrow \exp\Big[-i\,t\sum_{a\in A,b\in B}\widetilde{J}_{a,b}\big(X_aX_b+Y_aY_b\big)\Big]
$$

3 定义单量子比特旋转：

$$
R_1 \leftarrow \Big(\prod_{a\in A}R_y^{(a)}(\tfrac{\pi}{2})\Big)\Big(\prod_{b\in B}R_y^{(b)}(\tfrac{\pi}{2})\Big)
$$

$$
R_2 \leftarrow \Big(\prod_{a\in A}R_x^{(a)}(\tfrac{\pi}{2})R_z^{(a)}(\tfrac{\pi}{2})\Big)\Big(\prod_{b\in B}R_x^{(b)}(\tfrac{\pi}{2})R_z^{(b)}(-\tfrac{\pi}{2})\Big)
$$

4 第 1 层：

$$
V^{(1)} \leftarrow R_1\,U_{XX+YY}(\delta t/2)\,R_1^\dagger
$$

5 第 2 层：

$$
V^{(2)} \leftarrow R_2\,U_{XX+YY}(\delta t/2)\,R_2^\dagger
$$

6 总酉算符：

$$
V_{ZZ}(\delta t) \leftarrow V^{(1)}V^{(2)}
$$

7 返回 $V_{ZZ}(\delta t)$

2. XXZ模型

为了实现由 ZZXXZ 哈密顿量的项（25）引起的酉演化，我们可以采用与 Ising 自旋玻璃模型相同的两层分解，如算法 3 中所示。

算法4： 对……进行单层合成
使用一阶 NC-CD $ZY \mid YZ$ 演化
$(XX+YY)$ 模拟模块

输入： 耦合 $\{J_{a,b}\}$ 与 $a \in A, b \in B$；时间步长 δt

输出： 输出酉算符 $V_{ZY|YZ}(\delta t)$

1

$$V_{ZY|YZ}(\delta t) = \exp\Big[-i\,\delta t \sum_{a\in A, b\in B} J_{a,b}\big(Y_a Z_b + Z_a Y_b\big)\Big]$$

2 **定义集体旋转：**

$$R_A \leftarrow \prod_{a\in A} R_y^{(a)}\left(-\tfrac{\pi}{2}\right), \qquad R_B \leftarrow \prod_{b\in B} R_y^{(b)}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) R_z^{(b)}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

3 **定义原生模拟模块：**

$$U_{XX+YY}(\tau) \leftarrow \exp\Big[-i\,\tau \sum_{a\in A, b\in B} J_{a,b}\big(X_a X_b + Y_a Y_b\big)\Big]$$

4 **单层合成：**

$$V_{ZY|YZ}(\delta t) \leftarrow R_B\, R_A\, U_{XX+YY}(\delta t)\, R_A^\dagger R_B^\dagger$$

5 **返回** $V_{ZY|YZ}(\delta t)$

附录 C：性能比较

在本节中，我们将补充介绍基于 AAB 的 DACQC 分解和全数字电路实现的性能。为此，我们对这两种方法进行了态矢量模拟。在第 C1 节中，我们展示了目标态保真度，并考察两种分解中的不同误差来源。在第 C2 节中，我们还展示算子范数误差的缩放情况，并讨论分解中算子排序的影响。

1. 伊辛自旋玻璃

这里，我们比较基于 AAB 的 DACQC 分解与用于二维伊辛自旋玻璃的数字电路的性能。我们将所得保真度与直接对哈密顿量进行指数运算得到的结果进行基准比较，比较时采用相同的特罗特步数以及连续时间极限 $\delta t \to 0$。在本文的所有模拟中，我们选择了一个平滑的调度函数

$$\lambda(t) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\,\sin^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right)\right). \tag{C1}$$

具体而言，我们使用通过算法 1 实现的一阶 NC 构造，评估制备式（19）所定义的二维伊辛模型基态的保真度。在这种情况下，不需要

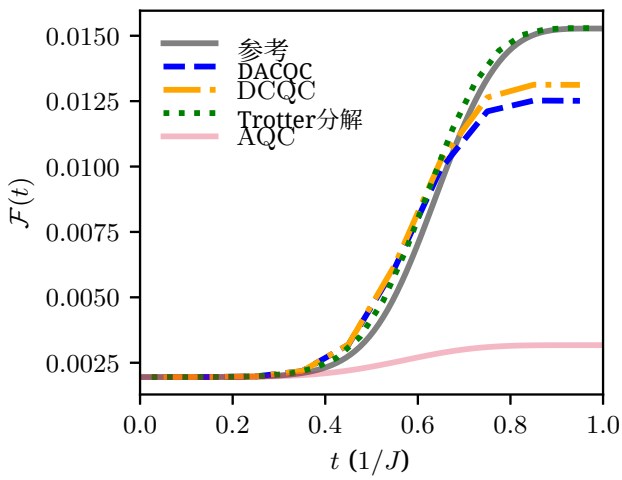


图 7. 自旋玻璃哈密顿量 (19) 的时间依赖目标态保真度 [式 (21)]。系统尺寸为 3×3，耦合为随机值，$J_{a,\,b} \in (-J,\ J]$ 以及 $h_a \in (-h,\ h]$，其中 $J = h = 1$。对于这些参数和 $M = 10$ 个时间步，数字电路所得的保真度高于 DACQC 电路。参考曲线采用 $\delta t = 0.001$，该曲线在 δt 内已收敛。

使用 PF 分解。初态 $|+\rangle^{\otimes N}$ 在有效哈密顿量 $\mathcal{H}^{(1)}(t$作用下随时间演化。目标态保真度随瞬时时间的变化如图 7所示。

我们观察到，两种电路实现所获得的保真度与哈密顿量精确指数化产生的保真度略有不同。这一差异源于每个时间步长 m 内对$e^{-i\delta t\mathcal{H}_m^{(1)}}$ 进行的特罗特分解。一阶特罗特分解

$$e^{-i\delta t\mathcal{H}_m} = e^{-i\delta t H_m} e^{-i\delta t H_{\mathrm{CD}}^{(1),m}} + \mathcal{O}(\delta t^2), \tag{C2}$$
$$e^{-i\delta t H_m} = e^{-i\delta t(1-\lambda_m)H_X} e^{-i\delta t\lambda_m H_{\mathrm{SG}}} + \mathcal{O}(\delta t^2) \tag{C3}$$

会导致 $e^{-i\delta t\mathcal{H}_m}$的算子范数出现误差。这些误差随时间步长的平方以及必须按顺序实现的非对易项数量线性增长，而后者与系统尺寸成正比，即 $\mathcal{O}(N\delta t^2)$。数字分解和 DACQC 分解中的这一误差相同，主要贡献来自涉及 X、ZZ、 Y 的非对易项，以及形式为 ZY 和 YZ 的混合算子。

在完全数字化的电路中，还需将式（C2）中的每个酉算子分解为单量子比特门和双量子比特门。对于 $U_m^{(1)} = e^{-i\delta t H^{(1)}}{}_{\mathrm{CD}}{}^m$ 项，这会产生相同的误差标度 $\mathcal{O}(N\delta t^2)$。相比之下，在 DACQC 中，不需要进行这第二次特罗特分解。取而代之的是，对 $e^{-i\delta t\sum ZZ}$ 进行的双层 AAB 分解会产生随 $\mathcal{O}(N\delta t^2)$ 标度的误差，而这种误差不会出现在数字分解中。同时，在理想情况下，$U_m^{(1)}$ 的单层 AAB 表示是精确的。

我们发现，对于此处考虑的系统尺寸，DCQC 和 DACQC 电路中的这些不同误差来源会使图中的目标态保真度略有差异。7

哈密顿量的精确指数化不会受到此类分解所引入的误差影响，并且最接近参考值。值得研究的是，在更高阶的 NC 展开中，更多的非对易项是否会导致 DCQC 与 DACQC 结果之间出现更大的差异。

2. XXZ模型

我们进一步比较了 XXZ模型中全数字电路与 DACQC 电路的误差和性能。为了分析两种分解在算子范数下的误差，我们计算精确幺正时间演化算符与近似幺正时间演化算符之差的二范数，并考察其随 δt的变化。各分解的误差如图8所示，与正文中的图2 和5 类似。绝热幺正算符 $e^{-i\delta t H_m}$ 对应的误差在图8(a)中的 $\lambda = 0.5$ 处给出。这里的误差源于 $XX+YY$与 ZZ 和 Z不对易。在数字分解中，将 $e^{-i\delta t J \sum_{\langle a,b\rangle}(X_a X_b + Y_a Y_b)}$ 分解为双量子比特门还会引入额外误差，其标度为 $\mathcal{O}(N\delta t^2)$。与此同时， $e^{-i\delta t \sum ZZ}$的双层 AAB 分解也会产生误差，其标度同样为 $\mathcal{O}(N\delta t^2)$。尽管误差来源不同，我们发现两种分解产生的误差相当，且呈现预期的标度关系 $\mathcal{O}(\delta t^2)$。

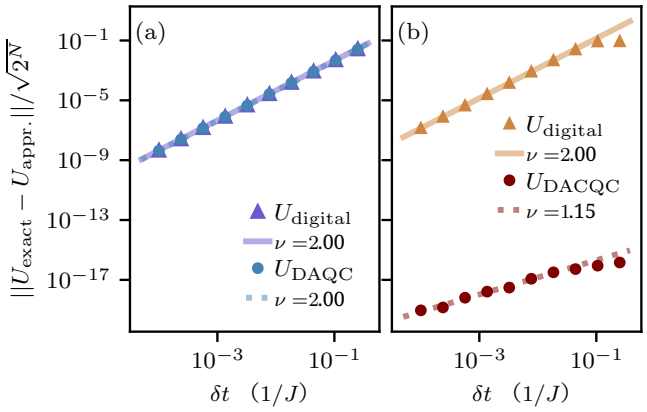


图8。（a）数字分解和 DAQC 分解的算符范数误差 $U_{\text{exact}} = e^{-i\delta t H(\lambda=0.5)}$ 随时间步长 δt的变化关系。误差定义为缩放后的二范数$||.||_\diamond$ 两种分解的误差相互重合。（b）数字分解和 DACQC 分解的算符范数误差 $U_{\text{exact}} = e^{\delta t C^{(1)}}$。拟合曲线 $f(\delta t) = b\,\delta t^{\nu}$ 分别以实线和点划线表示，拟合指数记为 ν。这里考虑大小为 3×3、 $\Delta - 0.5$和 $\lambda = 0.5$ 的二维XXZ模型，见式（20）。

在图 8(b) 中，我们单独绘出了一阶非对易幺正算符 $e^{\delta t C^{(1)}}$ 的算子范数误差。数字分解中的误差源于XY 与 YX的对易子，其标度符合预期，为 $\mathcal{O}(\delta t^2)$。理想情况下，非对易幺正算符的单一AAB表示是精确的。数值计算发现，其误差比数字分解的误差小几个数量级。

我们还按照第C1节的方法，使用完整酉时间演化计算随时间变化的目标状态保真度
算符。保真度如图 9所示。

我们发现，对于图 9所用的参数，数字电路和 DACQC 电路得到的保真度非常接近，这表明此处式（C2）中的误差比进一步分解因子 $e^{-i\delta t H_m}$ 和$e^{-i\delta t H^{(1)}_{\text{CD}^m}}$所导致的误差更显著。

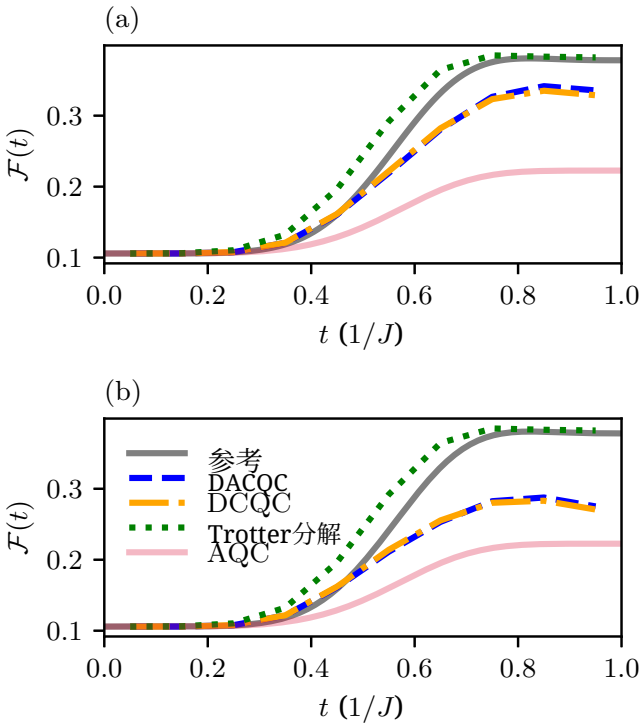


图 9. 式（25）中的 XXZ 哈密顿量定义在大小为 3×3 的正方晶格上，其目标态保真度随时间的变化。此处采用一阶 NC 近似，并将参数设为 $J = -1$和 $\Delta = 0.5$。我们使用 $M = 10$ 个特罗特步数。由于我们在每个时间步的中点 $t_m = (m - 0.5)\,\delta t$ 处计算保真度，虚线和点线终止于 $t = 0.95/J$。(a) 每个时间步按序列 $e^{-i\delta t H}\, e^{-i\delta t H_{\text{CD}}}\,|\psi\rangle$执行；而在面板 (b) 中，顺序相反，即 $e^{-i\delta t H_{\text{CD}}}\, e^{-i\delta t H}\,|\psi\rangle$。

对于较少的特罗特步数，例如 $M = 10$图9所示，不同项的施加顺序会显著影响最终的保真度。为说明这一影响，我们比较两种电路

构造，其中 CD 和绝热幺正算符的位置互换。在面板 (a) 中，每个时间步长都施加序列 $e^{-i\delta t H}\, e^{-i\delta t H_{\mathrm{CD}}}\, |\psi\rangle$；而在面板 (b) 中，顺序相反，即 $e^{-i\delta t H_{\mathrm{CD}}}\, e^{-i\delta t H}\, |\psi\rangle$。在实现绝热演化的电路中 $e^{-i\delta t H}$，各项排列如下

$$e^{-i\delta t J \sum_{\langle a,b\rangle}(X_a X_b + Y_a Y_b)}\, e^{-i\delta t\left(\Delta J \sum_{\langle a,b\rangle} Z_a Z_b + H_Z\right)}\, |\psi\rangle\,.$$

（b）图中采用的排序得到的保真度略微更接近参考值。随着步长减小至 $\delta t \lesssim 0.01/J$，所有保真度曲线都趋近于参考结果，并且基本不再受算子排序的影响。

[1] S. Lloyd, Science 273, 1073 (1996). [2] A. Peruzzo, J. McClean, P. Shadbolt, M.-H. Yung, X.-Q. Zhou, P. J. Love, A. Aspuru-Guzik, and J. L. O'Brien, 《自然·通讯》5, 4213 (2014). [3] J. Preskill, 《量子》2, 79 (2018). [4] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, and et.al., 《自然》574, 505 (2019). [5] C. D. Bruzewicz, J. Chiaverini, R. McConnell, and J. M. Sage, 《应用物理评论》6, 021314 (2019). [6] H.-S. Zhong *et al.*, Science 370, 1460 (2020). [7] A. Miessen, D. J. Egger, I. Tavernelli, and G. Mazzola, 《PRX量子》5, 040320 (2024). [8] T. I. Andersen, N. Astrakhantsev, A. H. Karamlou, J. Berndtsson, and et.al., 《自然》638, 79 (2025). [9] A. D. King, A. Nocera, M. M. Rams, J. Dziarmaga, and et.al., Science 388, 199 (2025). [10] D. Deutsch, 《伦敦皇家学会会刊》. A. Mathematical and Physical Sciences 400, 97 (1985). [11] E. Farhi, J. Goldstone, and S. Gutmann, 一种量子近似优化算法 (2014). [12] I. M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori, 《现代物理评论》86, 153 (2014). [13] T. Albash and D. A. Lidar, 《现代物理评论》90, 015002 (2018). [14] M. Cerezo, A. Arrasmith, R. Babbush, S. C. Benjamin, S. Endo, K. Fujii, J. R. McClean, K. Mitarai, X. Yuan, L. Cincio, and P. J. Coles, 《自然·物理评论》3, 625 (2021). [15] I. M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori, 《PRX量子》2, 017003 (2021). [16] C. W. Bauer, Z. Davoudi, A. B. Balantekin, and et.al., 《PRX量子》4, 027001 (2023). [17] M. V. Berry, 《日本物理学会志》A: Math. Theor. 42, 365303 (2009). [18] A. del Campo, Physical Review Letters 111, 100502 (2013). [19] E. Torrontegui, S. Ib´a˜nez, S. Mart´ınez-Garaot, M. Mod- ugno, A. del Campo, D. Gu´ery-Odelin, A. Ruschhaupt, X. Chen, and J. G. Muga, 见 *Advances in Atomic, Molec-ular, and Optical Physics*, 《原子、分子与光物理进展》, 第 62 卷，由 E. Arimondo、P. R. Berman 和 C. C. Lin 编（Academic Press，2013 年），第 117–169 页。[20] M. Okuyama and K. Takahashi, 《日本物理学会志》86, 043002 2017( ). [21] D. Gu´ery-Odelin, A. Ruschhaupt, A. Kiely, E. Tor- rontegui, S. Mart´ınez-Garaot, and J. G. Muga, 《现代物理评论》91, 045001 (2019). [22] P. W. Claeys, M. Pandey, D. Sels, and A. Polkovnikov, Physical Review Letters 123, 090602 (2019). [23] D. Sels and A. Polkovnikov, 《美国国家科学院院刊》114, E3909 (2017). [24] N. N. Hegade, K. Paul, Y. Ding, M. Sanz, F. Albarr´an-Arriagada, E. Solano, 和 X. Chen, Physical Review Applied 15, 024038 2021( )。[25] N. N. Hegade, P. Chandarana, K. Paul, X. Chen, F. Al- barr´an-Arriagada, 和 E. Solano, Physical Review Research 4, 043204 2022( )。[26] P. Chandarana, N. N. Hegade, I. Montalban, E. Solano, 和 X. Chen, Physical Review Applied 20, 014024 (2023)。[27] P. M. Schindler 和 M. Bukov, Physical Review Letters 133, 123402 2024( )。[28] A. Dalal, I. Montalban, N. N. Hegade, A. G. Cadavid, E. Solano, A. Awasthi, D. Vodola, C. Jones, H. Weiss, 和 G. F¨uchsel, Physical Review Applied 22, 064068 (2024)。[29] S. Kumar, N. N. Hegade, A.-M. Visuri, B. A. Bhargava, J. F. R. Hernandez, E. Solano, F. Albarr´an-Arriagada, 和 G. A. Barrios, npj Quantum Information 11, 43 (2025)。[30] S. Kumar, N. N. Hegade, M. Henrique de Oliveira, E. Solano, A. Gomez Cadavid, 和 F. Albarr´an-Arriagada, Quantum Science and Technology 10, 015023 (2024)。[31] A.-M. Visuri, A. G. Cadavid, B. A. Bhargava, S. V. Romero, A. Grabarits, P. Chandarana, E. Solano, A. del Campo, 和 N. N. Hegade, 数字化反绝热量子临界动力学（ 2025 2502 15100 ）, [ ] arXiv: . quant-ph . [32] N. N. Hegade, N. L. Kortikar, B. A. Bhargava, J. F. R. Hern´andez, A. G. Cadavid, P. Chandarana, S. V. Romero, S. Kumar, A. Simen, A.-M. Visuri, E. Solano, 和 P. A. Erdman, 数字化反绝热量子采样 (2025), arXiv:2510.26735 [quant-ph]。[33] L. Lamata, A. Parra-Rodriguez, M. Sanz, 和 E. Solano, Advances in Physics: X 3, 1457981 (2018)。[34] A. Parra-Rodriguez, P. Lougovski, L. Lamata, E. Solano, 和 M. Sa nz, Physical Review A 101, 022305 (2020)。[35] I. Arrazola, J. S. Pedernales, L. Lamata, 和 E. Solano, Scientific Reports 6, 30534 (2016)。[36] T. Gonzalez-Raya, R. Asensio-Perea, A. Martin, L. C. C´eleri, M. Sanz, P. Lougovski, 和 E. F. Dumitrescu, 《PRX量子》2, 020328 (2021)。[37] S. P. Fors, J. Fern´andez-Pend´as, 和 A. F. Kockum, 超导量子比特中 zz 耦合的全面解释 (2024)。[38] M. Gong, M.-C. Chen, Y. Zheng, *et al.*, Science 372, 948 (2021)。[39] Y. Solomons, Y. Kadish, L. Peleg, J. Nemirovsky, A. Ben Kish, 和 Y. Shapira, arXiv 预印本 (2025), arXiv:2509.14331 [quant-ph]。[40] Y. Shapira, J. Markov, N. Akerman, A. Stern, 和 R. Oz- eri, Physical Review Letters 134, 010602 (2025)。[41] A. M. Childs 和 N. Wiebe, Journal of Mathematical

Physics 54, 062202 (2013)。[42] A. M. Childs, Y. Su, M. C. Tran, N. Wiebe, 和 S. Zhu, Phys. Rev. X 11, 011020 (2021)。[43] A. Perdomo, C. Truncik, I. Tubert-Brohman, G. Rose, 和 A. Aspuru-Guzik, Physical Review A 78, 012320 (2008)。[44] S. V. Romero, A. G. Cadavid, P. Nikaˇcevi´c, E. Solano, 和 et.al., arXiv:2506.07866v2 (2025)。[45] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, 第 2 版 (Cam- bridge University Press, 2011)。[46] A. Hudomal, T. Prosen, *et al.*, 《PRX量子》5, 010316 (2024)。[47] J. W. Britton, B. C. Sawyer, A. C. Keith, C.-C. J. Wang, J. K. Freericks, H. Uys, M. J. Biercuk, 和 J. J. Bollinger, 《自然》484, 489 (2012)。[48] R. Barends, A. Shabani, L. Lamata, J. Kelly, 和 et. al., 《自然》534, 222 (2016)。[49] M. Demirplak 和 S. A. Rice, J. Phys. Chem. A 107, 9937 2003( )。[50] L. Prielinger, A. Hartmann, Y. Yamashiro, K. Nishimura, W. Lechner, 和 H. Nishimori, Physical Review Research 3, 013227 (2021)。[51] A. Kiely, 《量子观点》4, 45 (2020)。[52] Q. Zhang, N. N. Hegade, A. G. Cadavid, L. Lassabli`ere, J. Trautmann, S. Perseguers, E. Solano, L. Henriet, 和 E. Michon, arXiv:2405.14829v1 ( 2024)。[53] I. Bloch, J. Dalibard, 和 S. Nascimb`ene, 《自然·物理》8, 267 (2012)。[54] R. Blatt 和 C. F. Roos, 《自然·物理》8, 277 (2012)。

[55]A. Lukin、B. F. Schiffer、B. Braverman、S. H. Cantu、F. Huber、A. Bylinskii、J. Amato-Grill、N. Maskara、M. Cain、D. S. Wild、R. Samajdar 和 M. D. Lukin, 《量子淬火动力学作为绝热捷径》（2024）。[56] H. Hayasaka、T. Imoto、Y. Matsuzaki 和 S. Kawabata, 《构造用于基态搜索的平均场反绝热驱动的一般方法》（2023）。[57] H. F. Trotter, 《美国数学会会刊》10，545（1959）。[58] M. Suzuki, 《数学物理通讯》51, 183（1976）。[59] M. Suzuki, 《物理快报A》146，319（ 1990）。[60] O. Katz、A. Schuckert、T. Wang、E. Crane、A. V. Gor- shkov 和 M. Cetina，arXiv 预印本 arXiv:2512 21385 10 48550 2512 21385 2025 2512 . . /arXiv. .（ ）。21385 [quant- ph]。[61] T. Giamarchi, 《*Quantum physics in one dimension*》，第121卷（克拉伦登出版社，2003）。[62] A. Auerbach, 《*Interacting electrons and quantum magnetism* 2012 》（施普林格科学与商业媒体，）。[63] S. M. Winter、A. A. Tsirlin、M. Daghofer、J. van den Brink、Y. Singh、P. Gegenwart 和 R. Valent´ı, 《物理学杂志：凝聚态》29，493002（2017）。[64] R. Barends、C. M. Quintana、A. G. Petukhov、Y. Chen 和等, 《Physical Review Letters》123，210501（2019）。