arXiv:2601.01164v1 [math.CO] 3 Jan 2026

外平面图中的极值 Q-谱指标问题

Jin Cai*、LeyouXu†、Bo Zhou‡数学科学学院，华南师范大学，广州 510631，中国

摘要

近年来，外平面图的 Tur´an 问题受到了广泛关注。我们通过 Q-谱指标研究其谱版本。我们确定了在所有 n 阶连通外平面图中，使 Q-谱指标达到最大值的唯一图；这些图分别被禁止包含：（i）一个固定圈；以及（ii）给定阶的路径的不交并。

关键词： Q-谱指标、外平面图、外平面图 Tur´an 问题

美国数学学会分类：05C50，05C10

1 引言

对于两个顶点不交图 G 和 H， $G \cup H$ 表示 G 与 H的并， $G \vee H$表示 G 与 H的联。对于正整数 a， aG 表示图 G的 a 个（顶点不交的）副本的并。 n 个顶点的完全图记作 K_n。 n 个顶点的路径记作 P_n。 n 个顶点的圈记作 C_n，其中 $n \geq 3$。

给定一个图 F，如果 G不包含 F（作为子图），则称图 G是 F-自由的。著名的 Tur´an 型问题是确定一个 n阶 F-自由图的边数最大值（以及恰好具有这一边数的 n阶 F-自由图）。经典的 Tur´an 定理 [25] 指出，在所有 n阶 K_{r+1}-自由图中，使边数达到最大值的唯一极值图是 n 个顶点上的平衡完全 r部图。关于 Tur´an 型问题的研究已在综述 [11]中得到全面总结。

2016年，Dowden [8] 开创了平面图的 Tur´án 型问题研究。给定一个平面图 F，该问题旨在求不含 n顶点F 的平面图的边数最大值。关于 F 为圈或路径的情形已有许多结果，参见综述 [15]（及其中的参考文献）和后续论文，例如 [4, 12, 13, 21, 22]。

*电子邮箱：jincai@m.scnu.edu.cn

†电子邮箱：leyouxu@m.scnu.edu.cn

‡电子邮箱：zhoubo@scnu.edu.cn

如果一个图 G 存在一种平面嵌入，使得所有顶点都位于其外面的边界上，那么它就是外平面图。给定一个外平面图 F，人们可能会想知道不含 n顶点 F 的外平面图的边数最大值。最近，Matolcsi 和 Nagy [17] 确定了 $F = P_3$时的这一最大值，Gy¨ori 等人 [14] 确定了 $F = P_4$, P_5时的这一最大值。在 [9], , Fang 和 Zhai 确定了 $F = C_\ell$ 且满足 $\ell \geq 3$ ，或 $F = P_\ell$且满足 $\ell \geq 4$时的这一最大值。

设 $A(G)$ 表示图 G 的邻接矩阵。 G 的谱半径是 $A(G)$ 的最大特征值。1990年，Cvetkovi´c 和 Rowlinson [5] 提出了关于外平面图最大谱半径的一个猜想。2017年，Tait 和 Tobin [24] 证明了对于阶充分大的图，该猜想成立；2021年，Lin 和 Ning [16] 完全证明了这一猜想。最近，Sun 等人 [23] 确定了 n 顶点 C_ℓ-自由外平面图的最大谱半径，而 Yin 和 Li [26] 研究了 n 顶点 F-自由外平面图的最大谱半径，其中 F 是由 t 个有公共顶点的边不交圈 C_ℓ 构成的图，或是 $F = (t+1)K_2$。

图 G 的无符号拉普拉斯矩阵是矩阵 $Q(G) = D(G) + A(G)$，其中$D(G)$ 是 G 的度对角矩阵。 $Q(G)$ 的最大特征值称为 G 的Q-谱指标，记作 $q(G)$。Yu 等人 [28] 研究了所有n 阶平面图中的最大 Q-谱指标。对于外平面图，Yu 等人 [27] 证明， $K_1 \vee P_{n-1}$ 是使 Q-谱指标达到最大的唯一图。关于 Tur´an 型问题的 Q-谱指标版本的研究引起了广泛关注，参见例如 $[2, 3, 19, 29]$。

受上述结果启发，本文聚焦于外平面图上的 Tur´an 型问题的 Q-谱指标版本。

由于 $K_1 \vee P_{n-1}$ 在所有 n阶外平面图中使 Q-谱指标达到最大，且$K_1 \vee P_{n-1}$ 不含两个不交圈，因此将研究范围限制在禁止出现一个固定长度的圈的图上是很自然的。因此，在圈的背景下，我们研究不含给定圈 C_ℓ的外平面图的 Q-谱指标极值问题。

定理1。 设 G 是一个阶为 n 且满足 $\ell \geq 3$的连通外平面 C_ℓ-自由图。那么$q(G) \leq q(K_1 \vee (\alpha P_{\ell-2} \cup P_r))$ ，等号成立当且仅当 $G \cong K_1 \vee (\alpha P_{\ell-2} \cup P_r)$，其中$\alpha = \lfloor \frac{n-1}{\ell-2} \rfloor$ 且 $r = n - 1 - \alpha(\ell - 2)$。

在路径的问题中，我们考虑禁止一条路径，以及禁止由 t 条长度相同的路径构成的不交并。有趣的是，这两类问题的极值图表现出一定的差异。由于任何阶为 $n \geq 3$ 的连通图都包含P_2 和 P_3，因此对于禁止单条路径的情形，我们将注意力限制在阶至少为四的路径上。

定理2。 设 G 是一个阶为 n 且 $t \geq 1$的连通外平面 tP_ℓ-自由图。

(i) 若 $t = 1, \ell \geq 4$和 $n \geq$最大 $\left\{ \lfloor \frac{\ell-3}{2} \rfloor^2 + \lfloor \frac{\ell-3}{2} \rfloor + \ell - 1, 30\lfloor \frac{\ell-3}{2} \rfloor + 30\sqrt{\lfloor \frac{\ell-3}{2} \rfloor (\lfloor \frac{\ell-3}{2} \rfloor + 1)} \right\}$，则 $q(G) \leq q\left(K_1 \vee \left(P_{\lceil \frac{\ell-2}{2} \rceil} \cup \alpha P_{\lfloor \frac{\ell-2}{2} \rfloor} \cup P_r\right)\right)$，等号成立当且仅当 $G \cong K_1 \vee \left(P_{\lceil \frac{\ell-2}{2} \rceil} \cup \alpha P_{\lfloor \frac{\ell-2}{2} \rfloor} \cup P_r\right)$，其中 $\alpha = \left\lfloor \frac{n-\ell+1}{\lfloor \frac{\ell-2}{2} \rfloor} \right\rfloor + 1$且 $r = n - \ell + 1 - (\alpha - 1)\lfloor \frac{\ell-2}{2} \rfloor$。

(ii) 若 $t \geq 2, \ell \geq 2$ 和 $n \geq \max\left\{ \ell^2 + (t-3)\ell + 1, 30(\ell-2) + 30\sqrt{(\ell-2)(\ell-1)} \right\}$，则

$q(G) \leq q(K_1 \vee (P_{t\ell-\ell-1} \cup \alpha P_{\ell-1} \cup P_r))$ 当且仅当 $G \cong K_1 \vee (P_{t\ell-\ell-1} \cup \alpha P_{\ell-1} \cup P_r)$时等号成立，其中 $\alpha = \lfloor \frac{n-t+2}{\ell-1} \rfloor - t + 1$ 和 $r = n - 2\ell + 2 - (\alpha - 1)(\ell - 1)$。

为了证明 上述结果，我们为极值图建立一个结构定理 s.

定理 3. 设 $F = C_\ell$ 满足 $3 \leq \ell \leq n$ 或 $F = tP_k$ 满足 $k \geq 2$ 且 $4 \leq tk \leq n-1$。若在所有连通的、具有 n 个顶点且不含 F 的外平面图中，G 使 Q-谱指标达到最大值，则 G包含一个度为 $n-1$ 的顶点 u，且 $G[N(u)]$ 由路径构成。

本文安排如下。第 2 节介绍全文将用到的基本记号和预备引理。第 3 节证明定理 3。第 4 节证明定理1和定理2。

2 预备知识

本文所考虑的图均为简单无向图。设 G 是一个图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。对于任意 $v \in V(G)$，我们用 $N_G(v)$ 表示 G 中与 v 相邻的顶点集。令 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ 表示 v 的闭邻域，$d_G(v) = |N_G(v)|$ 表示 v 的度。若无歧义，我们将 $N(v)$ 和 $d(v)$ 分别记作 $N_G(v)$ 和 $d_G(v)$。对于$S \subseteq V(G)$，令 $N_S(v) = N_G(v) \cap S$，并令 $d_S(v) = |N_S(v)|$。对于 $S, T \subseteq V(G)$，若满足 $S \cap T = \emptyset$，令 $e(S,T)$ 表示 S 与 T 之间的边数，并令 $G[S]$ 表示由 S 诱导的 G 的子图。我们用 $e(S)$ 表示 $e(G[S])$。对于 $S \subset E(G)$，令 $G - S$ 表示从 G 中删除 S 中的边后得到的图。特别地，若 $S = \{e\}$，我们记 $G - e$ 为 $G - \{e\}$。反过来，若 $e \notin E(G)$，$G + e$ 表示通过添加一条边 e 从 G 得到的图。

令 $K_{a,\,b}$ 表示部大小为 a 和 b的完全二部图。

若图 H 可由图 G 的某个子图通过收缩边得到，则称图 H 是图 G 的子式。若图 G 不包含 H 作为子式，则称图 G 是 H-子式自由的。众所周知，外平面图是 $K_{2,\,3}$-子式自由且 K_4-子式自由。基于这一事实，我们有以下观察。

引理 *1.* *[1]* 设 G 是一个阶为 n的外平面图 G。则 $e(G) \leq 2n-3$。此外，对于任意 $u \in V(G)$，以下结论成立。***(i)*** $G[N(u)]$ 由路径组成；***(ii)*** 对任意 $v \in V(G) \setminus \{u\}$，$|N(u) \cap N(v)| \leq 2$；***(iii)*** 若对于某个 $v \in V(G) \setminus N_G[u]$，$|N(u) \cap N(v)| = 2$，则 v 的两个邻点要么相邻，要么位于 $G[N(u)]$的不同连通分支中。此外，若 v 的两个邻点位于 $G[N(u)]$，的不同连通分支中，则它们都是 $G[N(u)]$中的悬挂顶点；***(iv)*** 若对于某个 $v_1, v_2 \in V(G) \setminus N_G[u]$，$|N(u) \cap N(v_1)| = |N(u) \cap N(v_2)| = 2$，则 $(N(v_1) \cap N(u)) \cap (N(v_2) \cap N(u)) = \emptyset$。

对于方阵 M，用 $\lambda(M)$ 表示 M 的最大特征值。根据 [18,推论 2.2，第 38], 页，对于阶为 n 的非负矩阵 A 和 C，若 $A - C$ 为非负非零矩阵且 A 不可约，则 $\lambda(A) > \lambda(C)$。将这一结论应用于非完全连通图 G 的 $Q(G)$，可得以下引理。

引理 2. 设 G 是一个连通图，其 $u, v \in V(G)$ 和 $uv \notin E(G)$。则 $q(G+uv) > q(G)$。

引理 3. *[7]* 设 G 是最大度为 $\Delta(G) \geq 1$的图。则 $q(G) \geq \Delta(G)+1$，等号成立当且仅当 $G \cong K_{1,\ n-1}$。

对于顶点 $u \in V(G)$，令

$$\eta_G(u) = d_G(u) + \frac{1}{d_G(u)} \sum_{v \in N_G(u)} d_G(v).$$

若无歧义，我们用 $\eta(u)$ 表示 $\eta_G(u)$。

引理 4. *[10, 20]* 设 G 是不含孤立顶点的图。则 $q(G) \leq$ 最大值$\{\eta_G(u)\colon u \in V(G)\}$。

对于连通图 G， $Q(G)$ 不可约，因此根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理，它有一个对应于 $q(G)$ 的唯一单位正特征向量 $\mathbf{x}$ ，称为 G 的佩龙向量。

引理 5. *[6]* 设 G 是满足 u、v、$w \in V(G)$ 的连通图，使得 $uw \notin E(G)$ 且$vw \in E(G)$。若佩龙向量 $\mathbf{x}$ 满足 $x_u \geq x_v$，则 $q(G-vw+uw) > q(G)$。

引理 *6.* 设 G 是一个具有顶点 u的图。设 $v \in N(u)$，其中 $d(v) \leq d(u) - 2$ 且$w \in V(G) \setminus N[u]$ 是 v的一个邻点。若 $|N(v) \setminus N[u]| = 1$、*2*，且对于任意 $z \in N(v) \setminus N[u]$， $N(z) \setminus \{v\} \subseteq N(v) \setminus N(u)$，则 $q(G-vw+uw) > q(G)$。

证明。 设 $q = q(G)$ 和 $\mathbf{x}$ 是 G的佩龙向量。根据引理 5，只需证明$x_u \geq x_v$。

根据引理 3，我们有 $q \geq \Delta(G) + 1 > d(v) - 1$。

首先假设 $|N(v) \setminus N[u]| = 1$，即 $N(v) \setminus N[u] = \{w\}$。由于 $N(w) \setminus \{v\} \subseteq \{w\}$，我们有 $d(w) = 1$。由 $q\mathbf{x} = Q(G)\mathbf{x}$ 在 u 和 w处，我们有

$$\begin{aligned} qx_u &= d(u)x_u + x_v + \sum_{z \in N(u)\setminus\{v\}} x_z, \\ qx_w &= x_w + x_v. \end{aligned}$$

Then

$$(q-1)(x_u - x_w) = (d(u)-1)x_u + \sum_{z \in N(u)\setminus N(w)} x_z > 0,$$

因此 $x_u > x_w$。由 $q\mathbf{x} = Q(G)\mathbf{x}$ 在 u 和 v处可得

$$q(x_u - x_v) = d(u)x_u + x_v + \sum_{z \in N(u)\setminus\{v\}} x_z - \left(d(v)x_v + x_u + x_w + \sum_{z \in N(v)\setminus\{u,w\}} x_z \right),$$

so

$$(q-d(v)+1)(x_u-x_v)=(d(u)-d(v))x_u+\sum_{z\in N(u)\setminus N[v]}x_z-x_w\geq x_u-x_w>0$$

这意味着 $x_u\geq x_v$。

接下来，假设 $|N(v)\setminus N[u]|=2$，其中 $N(v)\setminus N[u]=\{w,w'\}$，且 $ww'\notin E(G)$。由于 $N(w)\setminus\{v\}\subseteq\{w,w'\}$，我们有 $d(w)=d(w')=1$。如上所述，我们有 $x_u>x_w$、$x_u>x_{w'}$ 和

$$\begin{aligned}(q-d(v)+1)(x_u-x_v)&=(d(u)-d(v))x_u+\sum_{z\in N(u)\setminus N[v]}x_z-x_w-x_{w'}\\&\geq 2x_u-x_w-x_{w'}>0,\end{aligned}$$

因此 $x_u\geq x_v$。

现在接下来假设 $|N(v)\setminus N[u]|=2$，其中 $N(v)\setminus N[u]=\{w,w'\}$，且 $ww'\in E(G)$。于是 $d(w)=d(w')=2$。根据 $q\mathbf{x}=Q(G)\mathbf{x}$ 在 u、w 和 w' 处，我们有 $x_w=x_{w'}$ 和

$$(q-3)(x_u-x_w)=(d(u)-3)x_u+\sum_{z\in N(u)\setminus N(w)}x_z>0,$$

因此 $x_u>x_w$。根据 $q\mathbf{x}=Q(G)\mathbf{x}$ 在 u 和 v 处，我们有

$$(q-d(v)+1)(x_u-x_v)=(d(u)-d(v))x_u+\sum_{z\in N(u)\setminus N[v]}x_z-2x_w\geq 0,$$

因此 $x_u\geq x_v$。 □

引理 7. 设 u 是图 G 的一个顶点。设 w_1、$w_2\in V(G)\setminus N[u]$，其中 $N(w_2)\setminus\{w_1\}\subseteq N(u)$。如果 $N(w_1)=\{w_2\}$ 且 $d(u)\geq d(w_2)+1$，那么 $q(G-w_1w_2+uw_1)>q(G)$。

证明。令 $q=q(G)$ 和 $\mathbf{x}$ 为 G 的佩龙向量。由引理 5，只需证明$x_u\geq x_{w_2}$。

由 $q\mathbf{x}=Q(G)\mathbf{x}$ 在 w_1 处的情形，可得

$$(q-1)x_{w_1}=x_{w_2}.$$

同样，由 $q\mathbf{x}=Q(G)\mathbf{x}$ 在 u 和 w_2 处的情形，可得

$$(q-d(w_2))(x_u-x_{w_2})=(d(u)-d(w_2))x_u+\sum_{z\in N(u)\setminus N(w_2)}x_z-x_{w_1}.$$

Then

$$\left(q-d(w_2)-\frac{1}{q-1}\right)(x_u-x_{w_2})=\left(d(u)-d(w_2)-\frac{1}{q-1}\right)x_u+\sum_{z\in N(u)\setminus N(w_2)}x_z.$$

由引理 3，得到 $q\geq\Delta(G)+1>d(w_2)+\frac{1}{q-1}$。因此 $x_u\geq x_{w_2}$。 □

引理 8. 设 G 是一个图，其顶点为 u，满足 $G[N(u)]$ 由路径组成，且 $d(u) \geq 5$。设 $w \in V(G) \setminus N[u]$，其中 $N(w) = \{v_1, v_2\}$。若 v_1和 v_2是 $N(u)$ 中两个相邻顶点，且对于 $i = 1, 2$，有 $N(v_i) \setminus (N[u] \cup \{w\}) = \emptyset$，则 $q(G - v_1v_2 + uw) > q(G)$。

证明。令 $q = q(G)$，并令 $\mathbf{x}$ 为 G 的佩龙向量。若 $x_u + x_w > x_{v_1} + x_{v_2}$，则由瑞利原理可得

$$q(G - v_1v_2 + uw) - q \geq \mathbf{x}^\top (Q(G - v_1v_2 + uw) - Q(G))\mathbf{x} = (x_u + x_w)^2 - (x_{v_1} + x_{v_2})^2 > 0,$$

如所需。因此，只需证明 $x_u + x_w > x_{v_1} + x_{v_2}$。

首先，假设 v_1 和 v_2 是 $G[N(u)]$, 中的悬挂顶点，则 $P_2 = v_1v_2$ 是 $G[N(u)]$的一个连通分支。在这种情况下，$d(v_1) = d(v_2) = 3$ 且 $x_{v_1} = x_{v_2}$。由 $q\mathbf{x} = Q(G)\mathbf{x}$ 在 v_i 处取$i = 1,2$，可得 $qx_{v_i} = 3x_{v_i} + x_u + x_{v_i}$，即 $(q - 4)x_{v_i} = x_u + x_w$，所以

$$x_u + x_w - (x_{v_1} + x_{v_2}) = x_u + x_w - 2x_{v_1} = (q - 6)x_{v_1}.$$

由引理 3 以及 $G \ncong K_{1,n-1}$ 这一事实，可得 $q > \Delta(G) + 1 \geq d(u) + 1 \geq 6$。因此 $x_u + x_w > x_{v_1} + x_{v_2}$。

接下来，假设在 $G[N(u)]$ 中，v_1 和 v_2 至多有一个是悬挂顶点。由 $q\mathbf{x} = Q(G)\mathbf{x}$ 在 u 处可得 $(q - d(u))x_u = \sum_{v \in N(u)} x_v$。由 $q\mathbf{x} = Q(G)\mathbf{x}$ 在 v_1 和 v_2 处可知，若 v_1和 v_2 中有一个是 $G[N(u)]$, 中的悬挂顶点，不妨设为 v_1，则

$$q(x_{v_1} + x_{v_2}) = 2x_u + 4(x_{v_1} + x_{v_2}) + x_{v_2} + x_{v_2'} + 2x_w,$$

其中 v_2' 是 $N(u)$ 中与 v_1 不同的 v_2 的邻点；否则（v_1 和 v_2 都不是 $G[N(u)]$ 中的悬挂顶点），

$$q(x_{v_1} + x_{v_2}) = 2x_u + 5(x_{v_1} + x_{v_2}) + x_{v_1'} + x_{v_2'} + 2x_w,$$

其中，对于 $i = 1, 2$，v_i' 是 $N(u)$ 中与 v_{3-i} 不同的 v_i 的邻点。无论哪种情况，均有

$$(q - 4)(x_{v_1} + x_{v_2}) < 2(x_u + x_w),$$

即，

$$2((x_u + x_w) - (x_{v_1} + x_{v_2})) > (q - 6)(x_{v_1} + x_{v_2}).$$

由于 $q > 6$，我们有 $x_u + x_w > x_{v_1} + x_{v_2}$。 □

给定一个具有 $u \in V(H)$ 的图 H 以及正整数 t 和 s，令 $H(u; t, s)$ 表示由 H 与 $K_1 \vee (P_t \cup P_s)$ 通过将 u 与 $K_1 \vee (P_t \cup P_s)$ 中度为 $t + s$ 的顶点识别而得到的图。令 $H(u; t, 0)$ 表示由 H 与 $K_1 \vee P_t$ 通过将 u 与 $K_1 \vee P_t$ 中度为 t 的顶点识别而得到的图。

引理 9. 若 $t \geq s \geq 1$，则 $q(H(u; t + 1, s - 1)) > q(H(u; t, s))$。

证明。若 $s=1$，由引理 2 可得。设 $s\geq 2$。令 $G=H(u;t,\ s)$、$q=q(G)$，且$\mathbf{x}$ 为 G 对应于 q的佩龙向量。依次将 P_t 和 P_s 的顶点标记为u_1、.....、u_t和 v_1、.....、v_s。令 $a_i=x_{u_i}$和 $b_j=x_{v_j}$，其中 $i=1$、.....、t和$j=1$、.....、s。

首先，假设对所有 $i=1,\ldots,s-1$，$a_i\geq b_{i+1}$；或者对所有 $i=1,\ldots,s-1$，$a_i\leq b_{i+1}$。在前一种情况下，由于 $a_1\geq b_2$ 且 $G-v_1v_2+u_1v_1\cong H(u;t+1,s-1)$，根据引理 5 可得 $q(H(u;\ t+1,s-1))>q$。在后一种情况下，由于 $a_{s-1}\leq b_s$ 且 $G-u_{s-1}u_s+u_sv_s\cong H(u;t+1,s-1)$，再次根据引理 5 可得 $q(H(u;\ t+1,s-1))>q$。

接下来，假设存在某个 $i=1,\ldots,s-2$，使得 $a_i\geq b_{i+1}$ 且 $a_{i+1}<b_{i+2}$，或者 $a_i\leq b_{i+1}$ 且 $a_{i+1}>b_{i+2}$。由于 $G'=G-u_iu_{i+1}-v_{i+1}v_{i+2}+u_iv_{i+2}+u_{i+1}v_{i+1}\cong H(u;\ t+1,s-1)$，根据瑞利原理可得

$$\begin{aligned}q(G')-q&\geq\mathbf{x}^\top(Q(G')-Q(G))\mathbf{x}\\&=(a_i+b_{i+2})^2+(a_{i+1}+b_{i+1})^2-(a_i+a_{i+1})^2-(b_{i+1}+b_{i+2})^2\\&=2(b_{i+2}-a_{i+1})(a_i-b_{i+1})\geq 0.\end{aligned}$$

若 $q(G')=q$，则$\mathbf{x}$ 也是 G' 的佩龙向量。由 $q\mathbf{x}=Q(G)\mathbf{x}$ 以及 $q(G')\mathbf{x}=Q(G')\mathbf{x}$ 在 u_i 处可得 $qa_i=3a_i+a_{i-1}+a_{i+1}+x_u$和 $qa_i=3a_i+a_{i-1}+b_{i+2}+x_u$，这意味着$a_{i+1}=b_{i+2}$，矛盾。因此 $q(H(u;t+1,\ s-1))>q$。□

3 定理 3 的证明

给定一个外平面图 F，令$\mathcal{G}_{n,F}$ 表示所有阶为 n 的连通 F-自由外平面图的集合。定理 3 指出，对于满足 $3\leq\ell\leq n$ 的 $F=C_\ell$ 或满足 $k\geq 2$ 且 $4\leq tk\leq n-1$ 的 $F=tP_k$，若 G 在$\mathcal{G}_{n,F}$ 中所有图里使 Q-谱指标最大，则 G 含有一个度为 $n-1$ 的顶点 u，且 $G[N(u)]$ 由路径构成。我们先讨论 F 为 P_4、$2K_2$ 或 C_3的特殊情形。注意，$K_{1,3}$ 是唯一一个阶为 4 且同时为 P_4-自由、$2K_2$-自由和 C_3-自由的连通图。因此，我们假设 $n\geq 5$。

定理4。设 $F=P_4$、$2K_2$、C_3。若 G 在$\mathcal{G}_{n,\ F}$中的所有图中使 Q-谱指标达到最大，且 $n\geq 5$，则$G\cong K_{1,\ n-1}$。

证明。首先假设 $F=P_4$，$2K_2$ 且$G\ncong K_{1,\ n-1}$。设 v 是 G 中最大度的顶点。则 $2\leq d(v)\leq n-2$，并且存在一个顶点 $z\in V(G)\setminus N[v]$ 与 $N(v)$ 中的某个顶点相邻，因此 G 包含作为子图的 F，矛盾。因此$G\cong K_{1,\ n-1}$。以下设 $F=C_3$。

由于$K_{1,\ n-1}\in\mathcal{G}_{n,\ F}$，我们有 $q(G)\geq q(K_{1,\ n-1})=n$。由于 G 不含 F，对于任意顶点 u，$N(u)$是 G 的独立集。只需证明 $\Delta(G)=n-1$。反设 $\Delta(G)\leq n-2$。根据引理 4 导出矛盾，只需证明对于任意 $u\in V(G)$，$\eta(u)<n$。

如果 $d(u)=1$，那么 $\eta(u)=1+d(v)<n$。

若 $d(u)=2$且 $N(u)=\{v_1,v_2\}$，则由引理 1 (ii)可得 $d(v_1)+d(v_2)=|N(v_1)\cup N(v_2)|+|N(v_1)\cap N(v_2)|\leq n-2+2=n$，因此 $\eta(u)=2+\frac{n}{2}<n$。

若 $d(u) = 3$ 且 $n = 5$ 或 $n = 6$，则由引理 1 (ii)可得，在前一种情况下 $\sum_{v\in N(u)} d_v = e(G) \le 5$，而在后一种情况下 $\sum_{v\in N(u)} d_v = e(G) \le 8$，由此可知，在前一种情况下 $\eta(u) = 3 + \frac{5}{3} < 5$，而在后一种情况下 $\eta(u) = 3 + \frac{8}{3} < 6$。

若 $d(u) = n - 2$，那么根据引理 1 (ii)，$e(G) \le n$ 因此 $\eta(u) \le n - 2 + \frac{n}{n-2} < n$.

剩下的情况是 $4 \le d(u) \le n - 3$ 或 $d(u) = 3$ 且满足 $n \ge 7$。那么，在这两种情况下都有$n \ge 7$。根据引理 1，得到 $\sum_{v\in N(u)} d(v) \le e(G) \le 2n - 3$，因此

$$\eta(u) \le d(u) + \frac{2n-3}{d(u)}.$$

由于函数 $f(x) = x + \frac{2n-3}{x}$ 在 $[0, \sqrt{2n-3}]$ 上递减、在 $[\sqrt{2n-3}, +\infty]$上递增，因此有 $\eta(u) \le \max\{f(3), f(n-3)\} < n$。 □

接下来，我们考虑 F 作为阶至少为五的路径的不交并，或阶至少为四的圈。令 $\mathcal{F}$ 表示这类图的族，即

$$\mathcal{F} = \{tP_\ell : 5 \le t\ell \le n-1, t \ge 1, \ell \ge 2\} \cup \{C_\ell : \ell \ge 4\}.$$

为了证明定理 3，根据定理4和引理 1 (i)，我们只需证明$\mathcal{G}_{n,F}$ 中 $F \in \mathcal{F}$的极值图满足以下结构定理。

定理5。 设 $F \in \mathcal{F}$。如果 G 在$\mathcal{G}_{n,F}$ 中所有满足 $n \ge 9$的图中使 Q 指数最大，则 G 包含$K_{1,n-1}$。

证明。 由于 $K_1 \vee (K_2 \cup (n-3)K_1) \in \mathcal{G}_{n,F}$，由引理 3可得 $q(G) \ge q\, K_1 \vee (K_2 \cup (n-3)K_1) > n$。

对于 $u \in V(G)$，令 $W = V(G)\backslash N[u]$。

断言 1。 $\eta(u) \le n$ 当 $d(u) \le n - 4$。

证明。 由引理 1 (i)和(ii)，我们有 $e(N(u)) \le d(u) - 1$和 $e(N(u), W) \le 2|W|$。如果 $3 \le d(u) \le n - 4$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{v\in N(u)} d(v) &= d(u) + 2e(N(u)) + e(N(u), W)\\ &\le d(u) + 2(d(u) - 1) + 2|W|\\ &= 2n + d(u) - 4.\end{aligned}$$

Then

$$\eta(u) \le d(u) + 1 + \frac{2n-4}{d(u)}.$$

由于 $h(x) = x + 1 + \frac{2n-4}{x}$在 $[0, \sqrt{2n-4}]$ 中递减、在 $[\sqrt{2n-4}, +\infty]$中递增，因此我们有 $\eta(u) \le \max\{h(3), h(n-4)\} < n$。

若 $d(u) = 2$，则由引理 1 (ii) 可得 $d(v_1) + d(v_2) = |N(v_1) \cup N(v_2)| + |N(v_1) \cap N(v_2)| \le n + 2$，从而 $\eta(u) = 2 + \frac{n+2}{2} < n$。

若 $d(u) = 1$，则有 $\eta(u) \le 1 + \Delta(G) \le 1 + n - 1 = n$。 □

若 $\Delta(G) \leq n-4$，则由引理 4 和断言 1 可得 $q(G) \leq n$，矛盾。因此 $\Delta(G) \geq n-3$。只需证明 $\Delta(G) = n-1$。反设 $\Delta(G) \leq n-2$。则 $\Delta(G) = n-3,\ n-2$。

情况 1. $\Delta(G) = n-3$.

根据断言 1，我们假设 u 是 G 中度最大的顶点。令 w_1 和 w_2 表示 $V(G) \setminus N[u]$ 中的两个顶点，即 $W = \{w_1, w_2\}$。

断言 2. $G[N(u)] \cong P_{n-3}$.

证明。由引理 1 (i) 和 (ii)，每个顶点 $v \in V(G) \setminus \{u\}$ 在$N(u)$ 中至多有两个邻点，因此 $d(v) \leq 5$，这意味着 $\eta(v) \leq n$。

由引理 1 (ii)，$e(N(u)\ W) \leq 4$，这意味着

$$e(W) + e(N(u), W) \leq 5.$$

假设 $e(W) + e(N(u)\ W) = 5$。那么 $e(N(u)\ W) = 4$ 和 $w_1w_2 \in E(G)$。由引理 1 (iv)，$N_{N(u)}(w_1) \cap N_{N(u)}(w_2) = \emptyset$。因此 $G[\{u\} \cup N[w_1] \cup N[w_2]]$ 包含一个 $K_{2,3}$-子式，这与 G 是外平面图这一事实矛盾。由此可得 $e(W) + e(N(u)\ W) \leq 4$。因此

$$e(G) \leq d(u) + e(N(u)) + 4 = e(N(u)) + n + 1$$

由引理 1 (i)，$G[N(u)]$ 由路径构成，因此 $e(N(u)) \leq n-4$，且当且仅当$G[N(u)]$是一条路径时等号成立。若 $e(N(u)) \leq n-5$，则 $\eta(u) \leq n-3+\frac{1}{n-3}(2e(N(u)) + n + 1) \leq n$，因此由断言 1 和引理 4 可得 $q(G) \leq n$，矛盾。因此 $e(N(u)) = n-4$且 $G[N(u)] \cong P_{n-3}$。□

由断言 2，$G[N[u]]$ 包含 C_ℓ，其中 $\ell = 3$、.....、$n-2$。此外，由于 G 是连通的，w_1、w_2 中至少有一个与 $N(u)$的某个顶点相邻，这意味着 G 包含 tP_ℓ，且$t\ell \leq n-1$。因此，只需证明 $F = C_{n-1}$ 或 C_n的情形。

根据引理 1 (ii)，$d_{N(u)}(w_i) \leq 2$ 当 $i = 1,\ 2$。假设 $d_{N(u)}(w_1) \leq d_{N(u)}(w_2)$。由于 G是连通的，$d_{N(u)}(w_2) \geq 1$。

首先假设 $d_{N(u)}(w_2) = 1$。那么 $d_{N(u)}(w_1) \leq 1$。令

$$G' = G - E(N(u), W) + uw_1 + uw_2.$$

显然，G' 包含于 $K_1 \vee (P_{n-3} \cup K_2)$中，而后者不含 F 作为子图。令 v 表示 w_2 在 $N(u)$ 中的邻点。若 $d_{N(u)}(w_1) = 0$，则由引理2和引理6可得 $q(G') > q(G - vw_2 + uw_2) > q(G)$，矛盾。这表明$d_{N(u)}(w_1) = 1$。令 v' 表示 w_1 在 $N(u)$中的邻点。若 $w_1w_2 \notin E(G)$，则两次应用引理2和引理6可得 $q(G') > q(G - vw_2 + uw_2 - v'w_1 + uw_1) > q(G)$，同样矛盾。因此 $w_1w_2 \in E(G)$。于是可知，要么 $v' = v$ ，要么 $vv' \in E(G)$；否则，
$G[\{u\} \cup W \cup V^*]$ 包含一个 K_4-子式，其中 V^* 是 v 与 v' 之间在 $G[N(u)$中的路径的顶点集], ，矛盾。若 $vv' \in E(G)$，则 G 包含 C_{n-1} 和C_n，这与 G 是 $F = C_{n-1}$ 或 C_n的 F-自由图矛盾。因此 $v' = v$。由引理6，$q(G') > q(G)$，矛盾。

接下来，假设 $d_{N(u)}(w_2) = 2$。由于 $G[N(u)] \cong P_{n-3}$，由引理1 (iii)可知，w_2 在 $N(u)$ 中的两个邻点相邻，因此 $G - w_1$ 包含 C_{n-1}。此外，若 $d_{N(u)}(w_1) = 2$，则由引理1 (iii)可知 w_1 的两个邻点相邻，且由引理1 (iv)可知 $N_{N(u)}(w_1) \cap N_{N(u)}(w_2) = \emptyset$，因此 G 包含 C_n，矛盾。于是 $d_{N(u)}(w_1) \leq 1$ 且 $F = C_n$。由于 G 是连通的，我们有 $1 \leq d(w_1) \leq 2$。若 $d(w_1) = 1$且其唯一邻点记为 v_1，那么 $G - v_1w_1 + uw_1$ 也是 F-自由的，因此由引理6或引理7可得 $q(G - v_1w_1 + uw_1) > q(G)$，矛盾。故 $d(w_1) = 2$，即 $w_1w_2 \in E(G)$，且 w_1 在 $N(u)$中有一个邻点 v_1'。令 v_2和 v_2'表示 w_2在 $N(u)$中的两个邻点。由引理1，$v_2v_2' \in E(G)$。若 $v_1' \notin \{v_2, v_2'\}$，则 $G[\{u, v_1', v_2, v_2', w_1, w_2\}]$ 包含K_2，3作为子式，矛盾。因此 $v_1' = v_2$ 或 v_2'，这意味着 G 包含 C_n，同样矛盾。情形 2. $\Delta(G) = n - 2$。

设 u 是 G 中度最大的顶点。设 w 表示在 G 中与 u 不相邻的顶点。由引理 1 (ii)，$d(w) \leq 2$。

假设 $d(w) = 1$。设 v 是 w 的邻点。则 $v \in N(u)$。设 $G' = G - vw + uw$。我们断言 $G' \in \mathcal{G}_{n,\ F}$。否则，$G'$ 包含 F，那么 F 包含 uw，这意味着存在某个 $t \geq 1$ 和 $\ell \geq 2$，使得 $F \cong tP_\ell$，且 $t\ell \leq n-1$。设 z 是 G 中不属于 F 的一个顶点。注意到 $uz \in E(G)$ 且 $G'[E(F), \setminus \{uw\} \cup \{uz\}] \cong F$ 是 G 的子图，这与 G 是 F-自由的事实矛盾。这说明 $G' \in \mathcal{G}_{n,\ F}$。于是由引理 6 可得 $q(G') > q(G)$，矛盾。

现在假设 $d(w) = 2$。w 的邻点记为 v_1 和 v_2。**C**

情况2.1. $E(G)$ $v_1v_2 \in$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$令 $G = G - v_1v_2 + uw$。根据引理 8，我们有 $q(G) > q(G)$。若 $G \in \mathcal{G}_{n,\ F}$，则会得到$\widehat{\ }$矛盾。假设这不成立。那么 G 包含 F，因此 F 必定包含 uw。

先假设 F 是一个圈。由于 $d_F(w) = 2$，F 只包含 v_1，v_2 中的一个，设为 v_2。令 z 为 u 在 F 中不同于 w 的邻点，并令 z' 为 z 在 F 中不同于 u 的邻点。令 $F' = F - uz - zz' - uw + uz' + wv_1 + uv_1$。于是 $F' \cong F$ 和 G 包含$\frown F'$，矛盾。因此 $G \in \mathcal{G}_{n,\ F}$。

接下来，假设 $F = tP_\ell$ 对于某个 $t \geq 1$ 和 $\ell \geq 2$满足 $5 \leq t\ell \leq n-1$。如果 w 是 F中的一个悬挂$\widehat{\ }$顶点，那么令 z为 u的一个不属于 F的邻点，则 $G[E(F)\backslash\{uw\}\cup\{uz\}] \cong F$是 G的一个子图，这与 G 是 F-自由的事实矛盾。因此，w 不是悬挂顶点，这意味着 $wv_1 \in E(F)$ 或 $wv_2 \in E(F)$成立；不妨设 $wv_2 \in E(F)$成立。令 F_1为 F 中包含 uw 的连通分支，令 w_1 为 F_1 中到 v_2 的距离小于$\widehat{\ }$到 w的距离的悬挂顶点。那么，$F - uw + uw_1 \cong F$是 G的一个子图，同样矛盾。因此，$G \in \mathcal{G}_{n,\ F}$。**情形 2.2**。$v_1v_2 \notin E(G)$。

由引理 1 (iii)，v_1 和 v_2 是悬挂顶点，且位于 $G[N(u)]$的不同连通分支中。令 V_i 表示 $G[N(u)]$ 中包含 v_i 的连通分支的顶点集，其中 $i = 1, 2$。令$G^* = G - v_1w + uw$。由引理 6，得 $q(G^*) > q(G)$。为导出矛盾，我们需要证明$G^* \in \mathcal{G}_{n,F}$。反设 G^* 包含 F，则 F必定包含边 uw。

首先，假设 F 是一个圈。由于 $\{u, w\}$ 在 G 和 G^* 中都是割集，且 $v_1w \notin E(G^*)$、F 仅包含 V_2 中的顶点，除 u 和 w 外。令 z 为 u 在 F 中不同于 w 的邻点，并令 z' 为 z 在 F 中不同于 u 的邻点。令 $F' = F - uz - zz' - uw + uz' + wv_1 + uv_1$。

那么 $F' \cong F$ 和 G 包含 F'，矛盾。因此 $G^* \in \mathcal{G}_{n,\ F}$。

接下来，假设对于某个 $t \geq 1$ 和 $\ell \geq 2$，有 $F = tP_\ell$ $5 \leq t\ell \leq n-1$。如果 w 是 F 中的一个悬挂顶点，那么，取 z 为 u 中不属于 F 的一个邻点，$G^*[E(F) \setminus \{uw\} \cup \{uz\}] \cong F$ 是 G 的一个子图，这与 G 是 F-自由的事实矛盾。因此，w 不是悬挂顶点，即 $uw,\ v_2w \in E(F)$。令 F_1 表示 F 中包含 w 的连通分支。令 w_1 表示 F_1 在 V_2 中的悬挂顶点。于是 $F - uw + uw_1 \cong F$ 是 G 的一个子图，这同样导致矛盾。这表明 $G^* \in \mathcal{G}_{n,\ F}$，证毕。 □

定理 3 由前两个定理推出。

4 定理1和定理2的证明

现在，我们可以证明定理1和定理2了。

定理*1*的证明。设 G 在所有阶为 n的连通外平面 C_ℓ-自由图中使 Q-谱指标达到最大值。

若 $\ell = 3$，则根据定理4，$G \cong K_{1,\ n-1} = K_1 \vee (n-1)K_1$，如所求。

以下设 $\ell \geq 4$。

根据定理5，$\Delta(G) = n-1$。设 u 为度为 $n-1$的顶点。由于 G 是 C_ℓ-自由的，$G[N(u)]$是 $P_{\ell-1}$-自由的。根据引理 1 (i)，$G[N(u)]$由阶至多为$\ell - 2$的路径组成。注意到 $r = n - 1 - \alpha(\ell - 2)$。反复应用引理 9，$G[N(u)] \cong \alpha P_{\ell-2} \cup P_r$，因此$G \cong K_1 \vee (\alpha P_{\ell-2} \cup P_r)$。 □

定理*2*的证明。设 G 在所有连通的外平面 tP_ℓ-自由图中使 Q 指数最大。

若 $t = 1$ 和 $\ell = 4$ 或 $t = 2$ 和 $\ell = 2$，则由定理4，$G \cong K_{1,\ n-1} = K_1 \vee (n-1)K_1$，如所求。

以下设 $t\ell \geq 5$。由 n 的下界可得 $t\ell \leq n-1$。

由定理5，$\Delta(G) = n-1$。设 u 为度为 $n-1$ 的顶点。由引理 1 (i)，$G[N(u)]$ 是路径的不交并。假设 $G[N(u)] \cong \cup_{i=1}^{s} P_{a_i}$ 且 $a_1 \geq \cdots \geq a_s$。由于 G 是 tP_ℓ-自由的，$a_1 + a_2 \leq t\ell - 2$。由引理 9，$a_1 + a_2 = t\ell - 2$ 且 $a_2 = \cdots = a_{s-1}$。

令 $q = q(G)$ 和 $\mathbf{x}$ 为 G 的佩龙向量，其中 $x_u = 1$。

命题3. 对于任意 $v \in N(u)$，$\frac{1}{q} < x_v < \frac{1}{q} + \frac{30}{q^2}$。

证明. 由 $q\mathbf{x} = Q(G)\mathbf{x}$ 在 u 处以及任意 $z \in N(u)$，可得

$$(q - d(z))(x_u - x_z) = (n - 2 - d(z))x_u + \sum_{w \in N(u) \setminus N(z)} x_w > 0,$$

即 $x_z < x_u = 1$。注意，$d(v) \leq 3$。由 $q\mathbf{x} = Q(G)\mathbf{x}$ 在 v，可得

$$qx_v = d(v)x_v + x_u + \sum_{z \in N(v) \setminus \{u\}} x_z. \tag{1}$$

回顾 $x_z < 1$，这意味着 $x_v < \frac{6}{q}$。再次由式 (1)，可得 $qx_v < 1 + \frac{30}{q}$，从而推出 $x_v < \frac{1}{q} + \frac{30}{q^2}$。另一方面，由式 (1)，可得 $x_v > \frac{1}{q}$。 □

我们将证明，$a_2 = \lfloor \frac{\ell-1}{2} \rfloor$ 当且仅当 $t = 1$，且 $a_2 = \ell - 1$ 当且仅当 $t \geq 2$。反设 $a_2 \leq \lfloor \frac{\ell-3}{2} \rfloor$ 当且仅当 $t = 1$，且 $a_2 \leq \ell - 2$ 当且仅当 $t \geq 2$。在前一种情形下，我们有

$$s = \left\lceil \frac{n-1-a_1}{a_2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n-\ell+1}{a_2} \right\rceil + 2 \geq \left\lceil \frac{n-\ell+1}{\lfloor \frac{\ell-3}{2} \rfloor} \right\rceil + 2 \geq \left\lfloor \frac{\ell-3}{2} \right\rfloor + 3 \geq a_2 + 3.$$

在后一种情形下，我们有

$$s = \left\lceil \frac{n-1-a_1}{a_2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n-t\ell+1}{a_2} \right\rceil + 2 \geq \frac{n-t\ell+1}{\ell-2} + 2 \geq \ell + 1 \geq a_2 + 3.$$

这表明，无论哪种情形，$s \geq a_2 + 3$。令 v_i 表示路径 P_{a_i} 中的一个端点 $i = 1, \ldots, a_2 + 2$，并令 v_1' 表示 P_{a_1} 中 v_1 的邻点。令 $P_{a_{s-1}} = w_1 \ldots w_{a_2}$ 和

$$G' = G - v_1 v_1' - \sum_{i=1}^{a_2-1} w_i w_{i+1} + v_1 v_2 + \sum_{i=3}^{a_2+2} v_i w_{i-2}.$$

这意味着，G' 是通过删除 a_2 条边并添加 $a_2 + 1$ 条边从 G 得到的。根据命题3，我们有

$$\mathbf{x}^\top (Q(G') - Q(G))\mathbf{x} \geq 4(a_2+1)\frac{1}{q^2} - 4a_2\left(\frac{1}{q} + \frac{30}{q^2}\right)^2 = \frac{4}{q^4}\left(q^2 - 60a_2 q - 900a_2\right).$$

由于 $n \geq 30\lfloor \frac{\ell-3}{2} \rfloor + 30\sqrt{\lfloor \frac{\ell-3}{2} \rfloor (\lfloor \frac{\ell-3}{2} \rfloor + 1)}$ 当 $t = 1$ 且 $n \geq 30(\ell-2) + 30\sqrt{(\ell-2)(\ell-1)}$ 当 $t \geq 2$，我们有 $n \geq 30a_2 + 30\sqrt{a_2(a_2+1)}$，因此 $q > n \geq 30a_2 + 30\sqrt{a_2(a_2+1)}$，这意味着 $\mathbf{x}^\top (Q(G') - Q(G))\mathbf{x} > 0$。因此，根据瑞利原理，$q(G') > q$，矛盾。故 $a_2 = \lfloor \frac{\ell-1}{2} \rfloor$ 当且仅当 $t = 1$，且 $a_2 = \ell - 1$ 当且仅当 $t \geq 2$。

因此，若 $t = 1$，则 $a_1 = \lceil \frac{\ell-1}{2} \rceil$ 和 $G \cong K_1 \vee \left(P_{\lceil \frac{\ell-1}{2} \rceil} \cup \alpha P_{\lfloor \frac{\ell-1}{2} \rfloor} \cup P_r\right)$；若 $t \geq 2$，则 $a_1 = t\ell - \ell - 1$ 和 $G \cong K_1 \vee (P_{t\ell-\ell-1} \cup \alpha P_{\ell-1} \cup P_r)$。 □

致谢 本研究得到国家自然科学基金（编号：12571364）资助。

利益冲突 作者声明不存在利益冲突。

数据可用性 本文所述研究未使用任何数据。

参考文献

[1] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, 《图论》, Springer, （2008年）。[2] M. Chen, Y. Jin, P. Zhang, 无书图的无符号拉普拉斯谱半径, 《离散数学》348（2025年）114448。[3] M. Chen, A. Liu, X. Zhang, 无相交奇圈图的无符号拉普拉斯谱半径, 《电子线性代数期刊》40（2024年）370–381。[4] D.W. Cranston, B. Lidick´y, X. Liu, A. Shantanam, 圈的平面 Tur´án 数：一个反例, 《电子组合学期刊》29（2022年）, 第3期, 论文编号3.31, 10页。[5] D. Cvetkovi´c, P. Rowlinson, 图的最大特征值：一篇综述, 《线性代数及其应用》28（1–2）（1990年）3–33。[6] D. Cvetkovi´c, P. Rowlinson, S.K. Simi´c, 有限图的无符号拉普拉斯矩阵, 《线性代数及其应用》423（2007年）155–171。[7] D. Cvetkovi´c, S.K. Simi´c, 基于无符号拉普拉斯矩阵的图谱理论探讨 II, 《线性代数及其应用》432（2010年）2257–2272。[8] C. Dowden, C_4-自由/C_5-自由外平面图, 《图论期刊》83（3）（2016年）213–230。[9] L. Fang, M. Zhai, 圈和路径的外平面 Tur´án 数, 《离散数学》346（2023年）113655。[10] L. Feng, G. Yu, 关于涉及图的无符号拉普拉斯谱半径的三个猜想, 《贝尔格莱德数学研究所出版物》85（99）（2009年）35–38。[11] Z. F¨uredi, M. Simonovits, 退化（二部）极值图问题的历史, 《博尧伊学会研究》（《厄尔德什百年纪念文集》）25（2013年）169–262。¨E. Gy[12] ori, K. Varga, X. Zhu, 圈的平面 Tur˝án 数的新构造, 《图与组合》40（2024年）, 第6期, 论文编号124, 5页。´D. Ghosh, E. Gy[13] ori, R.R. Martin, A. Paulos, C. Xiao, 六圈的平面 Tur˝án 数, 《SIAM 离散数学期刊》36（2022年）, 第3期, 2028–2050。´E. Gy[14] ori, A. Paulos, C.Q. Xiao, 短路径的广义外平面 Tur¨án 数, 《离散数学》346（2023年）113205。´Y. Lan, Y. Shi, Z. Song, 图的平面 Tur[15] án 数与平面反拉姆齐数, 《运筹学汇刊》25（3）（2021年）200–216。´H. Lin, B. Ning, Cvetkovi[16] c–Rowlinson 猜想的完整解, 《图论期刊》97（2021年）441–450。

[17] D. Matolcsi, Z.L. Nagy，广义外平面图 Tur´an 数与 k 阶子树的最大数量，《离散应用数学》307（2022年）115–124。[18] H. Minc，《非负矩阵》，John Wiley & Sons，纽约，1988。[19] V. Nikiforov, X. Yuan，Q 指数的最大值：不含长路径的图，《电子线性代数期刊》27（2014）504–514。[20] C.S. Oliveira, L.S. de Lima, N.M.M. de Abreu, P. Hansen，图的无符号拉普拉斯矩阵谱指标的界，《离散应用数学》158（2010年）355–360。[21] R. Shi, Z. Walsh, X. Yu，7-圈的平面 Tur´an 数，欧洲组合学杂志126（2025年），论文编号104134，共24页。[22] R. Shi, Z. Walsh, X. Yu，稠密回路图与圈的平面 Tur´an 数，《图论期刊》108（2025年），第1期，27–38。[23] Y. Sun, W. Wang, H. Shi，不含C_k的外平面图的极值谱半径，离散数学：算法与应用17（2025年）2450106。[24] M. Tait, J. Tobin，极值谱图论中的三个猜想，组合理论杂志 B 辑126（2017）137–161。[25] P. Tur´an，图论中的一个极值问题，数学与物理学报48（1941）436–452。[26] X. Yin, D. Li，外平面图和平面图上的谱极值问题，《离散数学》349（2026）114673。[27] G. Yu, S. Guo, Y. Wu，外平面图的 Q 指数最大值，线性与多线性代数63（2015）1837–1848。[28] G. Yu, J. Wang, S. Guo，平面图的无符号拉普拉斯谱半径最大值，《电子线性代数期刊》30（2015）795–811。[29] Y. Zhang, L. Wang，不含 $2K_3$的图的无符号拉普拉斯谱半径，《离散数学》347（2024年）114075。