arXiv:2601.01182v1 [math.CA] 3 Jan 2026

不同度量下多元函数广义维纳类的逼近

Andrii Shydlich

乌克兰国家科学院数学研究所

2026年1月6日

摘要。 本文介绍了关于不同度量下多元函数广义 Wiener 类的重要线性和非线性逼近特征估计的新结果与已有结果。

1 引言

设 d 为一个固定的正整数（$d \in \mathbb{N}$），设 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{Z}^d$ 分别为有序集合$k:=(k_1, \ldots\ldots, k_d)$, 其中的元素分别为 d实数和整数。另设 $\mathbb{T}^d:=[0,2\pi)^d$表示 d维环面，并设 $L_p:=L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, 为空间，其中包含所有在 $\mathbb{R}^d$ 2π 上可测、关于每个变量均为周期的函数 f，且其范数有限

$$\|f\|_{L_p} := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \begin{cases} \left((2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{T}^d} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

令 $(k,\ x) := k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_dx_d$, $e_k(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k,x)}$，对于任意 $f \in L_1$，记 f的傅里叶系数为 $\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} f(x)e_k(x)\mathrm{d}x$, $k \in \mathbb{Z}^d$，其中 z是 z的复共轭。 −

此外，设 $\mathcal{S}^p := \mathcal{S}^p(\mathbb{T}^d)$, $0 < p \le \infty$为空间，其中包含所有函数 $f \in L_1$，且其 ℓ_p-(准)范数有限

$$\|f\|_{\mathcal{S}^p} := \|\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell_p(\mathbb{Z}^d)} = \begin{cases} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty, \\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(k)|, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Stepanets、他的学生及追随者在多篇论文中积极研究了 $\mathcal{S}^p$ 单变量和多变量空间的逼近特征（例如，参见 [43, 46, 57],

[44, 第 11], [1, 2, 30, 45, 56, 58], 章等）。还值得一提的是一系列论文[3, 5–7, 31, 60]，它们主要致力于研究在不同的 Besicovitch-Musielak-Orlicz-Stepanets 型周期函数和几乎周期函数空间中，运用各种线性方法所得的正逆逼近定理；这些空间可视为某些空间 $\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)$ 的推广。关于这一方向的结果综述也可见 [32]。

这些空间 $\mathcal{S}^p$ 也称为 Wiener 空间或 Wiener 型空间，这是因为当 $p = 1$时，它们与经典 Wiener 代数有关，通常记作 $\mathcal{A}_p$。它们可视为所谓 Barron 空间 [4, 59] 的周期版本，并且在线性逼近方面具有类似的性质。对于 $p = 1$，空间 $\mathcal{S}^p$ 由傅里叶级数绝对收敛的函数组成。Wiener [61], 、Sz´asz [50], 、Stechkin [38–41], 、Sunouchi [51, 52], 等人曾研究一般三角级数和傅里叶级数的绝对收敛与可和性问题。Kahane 的专著 [16]阐述了这一领域的主要结果、此类空间的性质及其推广。还应提及 M´oricz [21–24], 等人的一系列重要结果：他们通过引入由混合连续模定义的扩展 Lipschitz 类和 Zygmund 类，揭示了（多重）傅里叶级数绝对收敛与函数结构光滑性之间的关系。

设 $\Psi = \{\Psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 为一个复数序列，$\Psi_k \neq 0$，且

$$\mathcal{F}_q^{\Psi} := \mathcal{F}_q^{\Psi}(\mathbb{T}^d) := \Big\{ f \in L_1 \ : \ \|\{\widehat{f}(k)/\Psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell_q(\mathbb{Z}^d)} \le 1 \Big\}, \quad 0 < q \le \infty. \tag{1.2}$$

类 $\mathcal{F}_q^{\Psi}$也称为加权 Wiener 类或广义 Wiener 类。

接下来，设 $\psi = \psi(t)$，$t \ge 1$为一个正的非递增函数。考虑满足以下条件的序列 Ψ所对应的类 $\mathcal{F}_q^{\Psi}$:

$$|\Psi_0| = \psi(1) \qquad \text{and} \qquad |\Psi_k| = \psi(|k|_r), \tag{1.3}$$

其中 $|k|_r := \|k\|_{\ell_r^d}$, $0 < r \le \infty$是为 $k \in \mathbb{Z}^d$ 定义的 ℓ_r-(拟)范数，其定义方式与（1.1）类似。在此情形下，记 $\mathcal{F}_q^{\Psi} = \mathcal{F}_q^{\Psi}(\mathbb{T}^d) = \mathcal{F}_{q,r}^{\psi}(\mathbb{T}^d) =: \mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$。

本文的主要目标是，根据函数 ψ趋于零的衰减速率，求出类 $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$ 在各种度量下的线性逼近和非线性逼近的精确阶估计。类似的估计对于 Sobolev 类、Besov 类等函数类的相应逼近的估计具有重要作用（例如参见 [10, 18, 25, 53]），还可作为 L_p中的（非线性）采样误差的上界（参见 [15, 19, 20], 等）。

若 $\psi(t) = t^{-s}$, $s \in \mathbb{N}$且 $r = \infty$，则 $\mathcal{F}_{q,\infty}^{\psi} =: \mathcal{F}_{q,\infty}^{s}$是由其 s 阶偏导数具有绝对收敛傅里叶级数的函数组成的集合。它也称为周期（各向同性的）

Wiener类。若 $q=2$, $\mathcal{F}^{s}_{q,\infty}$ 与 Sobolev类 W^{s}_{2} 的单位球等价（相差常数），则不同 $r\in(0,\infty]$）下类 $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ 的逼近特征，以及针对各种函数 ψ 的逼近特征，已由许多作者研究（例如参见 [10,17,18,29,33,35–37,53]）。尤其是，DeVore 和 Temlyakov [10] 给出了空间 L_p 中类 $\mathcal{F}^{s}_{q,\infty}$, $s>0$ 的最佳 m 项三角逼近的精确阶估计。Temlyakov [53] 得到了在 L_p 中用 m 项贪婪多项式逼近这些类的精确阶估计。当 $\psi(t)$ 是一个趋于零且衰减速度不快于某个幂函数的正函数时，文献 [18] 研究了类 $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}$ 的最佳 m 项单边三角逼近，以及用 m 项单边类贪婪多项式进行的逼近。文献 [17] 研究了 Wiener 型空间中的线性逼近。

如果序列 Ψ满足类似于 (1.3) 的条件，其中 ψ 是幂函数：$\psi(t)=t^{-s}$，并且用泛函 $|k|_{mix}:=\prod_{i=1}^{d}(1+|k_i|)^r$ 代替泛函 $|k|_r$，那么这些类 $\mathcal{F}^{\Psi}_{q}$记为 $\mathsf{S}^{\psi}_{q}\mathcal{A}$，称为具有混合光滑性的多元加权Wiener类。这类的逼近特征已在 [15,19,20,25],等文献中研究。

注意，广义 Wiener 类的非线性逼近已在 [43],[44, 第 11], [9,25], 章等文献中研究。特别是，Stepanets [43], [44, 第 11] 章以及 V. K. Nguyen 和 V. D. Nguyen [25] 对所有 $0<p,\ q\le\infty$，求出了空间 $\mathcal{S}^p$ 中类 $\mathcal{F}^{\Psi}_{q}$ 的最佳 m 项三角逼近的精确值。

2 逼近特征

设 $\mathscr{X}$ 是空间 L_p、$1\le p\le\infty$ 或 $\mathcal{S}^p$、$0<p\le\infty$、$m\in\mathbb{N}$ 之一，设 γ_m 是 $\mathbb{Z}^d$ 中由 m 个不同向量组成的集合，并设 f 是来自 $\mathscr{X}$ 的任意函数。量

$$E_{\gamma_m}(f)_{\mathscr{X}}=\inf_{c_k\in\mathbb{C}}\Big\|f-\sum_{k\in\gamma_m}c_k\,e_k\Big\|_{\mathscr{X}} \tag{2.1}$$

称为函数 f 在空间 $\mathscr{X}$ 中由集合 γ_m 确定的 m 项多项式的最佳逼近。

接下来，令 $S_{\gamma_m}(f)=\sum_{k\in\gamma_m}\widehat{f}(k)e_k$ 为对应于集合 γ_m 的傅里叶和，并令

$$\mathscr{E}_{\gamma_m}(f)_{\mathscr{X}}=\|f-S_{\gamma_m}(f)\|_{\mathscr{X}} \tag{2.2}$$

为函数 f 在 $\mathscr{X}$ 中由傅里叶和 $S_{\gamma_m}(f)$ 作出的逼近。

如果 $\mathfrak{N}$ 是空间 $\mathscr{X}$ 的子集，那么 $E_{\gamma_m}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}}$ 和 $\mathscr{E}_{\gamma_m}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}}$ 分别表示

量 (2.1) 和 (2.2) 在集合 $\mathfrak{N}$ 上的精确上界，即，

$$E_{\gamma_m}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} E_{\gamma_m}(f)_p \qquad \text{and} \qquad \mathscr{E}_{\gamma_m}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \mathscr{E}_{\gamma_m}(f)_{\mathscr{X}}. \tag{2.3}$$

记 Γ_m 为 $\mathbb{Z}^d$ 中所有由 m 个不同向量组成的集合。量

$$\mathscr{D}_m(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} = \inf_{\gamma_m\in\Gamma_m} E_{\gamma_m}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} \qquad \text{and} \qquad \mathscr{D}_m^{\perp}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} = \inf_{\gamma_m\in\Gamma_m} \mathscr{E}_{\gamma_m}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} \tag{2.4}$$

称为集合 $\mathfrak{N}$ 在 $\mathscr{X}$ 中的 m 阶基宽度和投影宽度（或傅里叶宽度）。

此外，对于 $f\in\mathscr{X}$，令 $\{k_l\}_{l=1}^{\infty} = \{k_l(f)\}_{l=1}^{\infty}$ 表示 $\mathbb{Z}^d$ 中向量的一个重排，使得

$$|\widehat{f}(k_1)| \geq |\widehat{f}(k_2)| \geq \dots. \tag{2.5}$$

一般情况下，这种重排并不唯一。在这种情况下，我们取满足 (2.5) 的任意一种重排。

我们定义 Σ_m 为所有形如 $T = \sum_{k\in\gamma_m} c_k e_k$, 的复三角多项式组成的类，其中 γ_m 是集合 Γ_m 中的一个集合。

除 (2.1)–(2.4) 外，考虑以下量

$$\|f - G_m(f)\|_{\mathscr{X}} = \Big\|f(\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \widehat{f}(k_l)e_{k_l}\Big\|_{\mathscr{X}}, \tag{2.6}$$

$$\sigma_m^{\perp}(f)_{\mathscr{X}} = \inf_{\gamma_m\in\Gamma_m} \Big\|f - \sum_{k\in\gamma_m} \widehat{f}(k)e_k\Big\|_{\mathscr{X}} = \inf_{\gamma_m\in\Gamma_m} \mathscr{E}_{\gamma_m}(f)_{\mathscr{X}}, \tag{2.7}$$

and

$$\sigma_m(f)_{\mathscr{X}} = \inf_{T\in\Sigma_m} \|f - T\|_{\mathscr{X}} = \inf_{\gamma_m\in\Gamma_m} E_{\gamma_m}(f)_{\mathscr{X}}. \tag{2.8}$$

量 (2.8) 和 (2.7) 分别称为函数 f 在空间 $\mathscr{X}$ 中的最佳 m 项三角逼近和最佳 m 项正交三角逼近。量 (2.6) 称为在空间 $\mathscr{X}$ 中用 m 项贪心多项式对函数 f 的逼近。

对于集合 $\mathfrak{N}\subset\mathscr{X}$，我们定义

$$\sigma_m^{\perp}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \sigma_m^{\perp}(f)_{\mathscr{X}} \qquad \text{and} \qquad \sigma_m(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \sigma_m(f)_{\mathscr{X}}. \tag{2.9}$$

一般情形下，量 (2.6) 取决于满足 (2.5) 的重排的选择。因此，为了给出唯一的定义，我们令

$$G_m(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \inf_{\{k_l(f)\}_{l=1}^{\infty}} \Big\|f(\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \widehat{f}(k_l(f))e_{k_l(f)}\Big\|_{\mathscr{X}}. \tag{2.10}$$

在 (2.10) 中，对于任意函数 $f \in \mathfrak{N}$，我们对所有满足 (2.5) 的重排列取下确界，但应注意，本文所表述的结果对于任何其他满足 (2.5) 的重排也成立。

对形如 (2.6)–(2.8) 的量的研究可追溯至 Stechkin[41] 的论文。许多作者得到了这些量在单变量和多变量的不同函数类上的阶估计。特别是，具有类似结果的论文目录可见 [8, 11, 28, 54, 55]。

由 (2.1)–(2.10) 可得

$$\sigma_m(f)_{L_p} \le \sigma_m^{\perp}(f)_{L_p} \le \|f - G_m(f)\|_{L_p} \qquad \forall f \in L_p, \tag{2.11}$$

$$\sigma_m(f)_{\mathcal{S}^p} = \sigma_m^{\perp}(f)_{\mathcal{S}^p} = \|f - G_m(f)\|_{\mathcal{S}^p} \qquad \forall f \in \mathcal{S}^p, \tag{2.12}$$

且对任意 $\gamma_m \subset \mathbb{Z}^d$ 和 $\mathfrak{N} \subset \mathscr{X}$

$$\sigma_m(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} \le \mathscr{D}_m(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} \le E_{\gamma_m}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}}, \quad \sigma_m^{\perp}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} \le \mathscr{D}_m^{\perp}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}} \le \mathscr{E}_{\gamma_m}(\mathfrak{N})_{\mathscr{X}}. \tag{2.13}$$

3 空间 $\mathcal{S}^p$ 中函数类 $\mathcal{F}_q^{\Psi}$ 的逼近特征

3.1 最佳逼近和基宽度的精确值

设 $\Psi = \{\Psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 是一个复数序列，$\Psi_k \ne 0$，且存在数系 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 的一个¯ ¯非递增重排 $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty}$。显然，此时系统 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 有界，即

$$|\Psi_k| \le K \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.1}$$

下文中，K、c、K_0、.....均为正数常数，且与相应的变量（k、t等）无关。

¯ ¯保证重排$\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 存在的一个充分条件是

$$\lim_{|k|\to\infty} |\Psi_k| = 0, \tag{3.2}$$

不过，例如当 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 为常数时，这种重排也存在。

在 $\mathfrak{N} = \mathcal{F}_q^{\Psi}$和 $\mathscr{X} = \mathcal{S}^p$的情形下，Stepanets [44, 第 XI 章], [45] 求得了所有 $0 < q < \infty$对应的特征值 (2.3) 和。为了表述这一 (2.4)

结果，对于 $\mathbb{Z}^d$中任意由 m 个不同向量组成的集合 γ_m ，用 $\Psi_{\gamma_m} = \{\Psi_{\gamma_m}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 表示一个数系，使得

$$\Psi_{\gamma_m}(k) = \begin{cases} 0, & k \in \gamma_m, \\ \Psi_k, & k \overline{\in} \gamma_m, \end{cases} \tag{3.3}$$

¯ ¯并用 $\Psi_{\gamma_m} = \{\Psi_{\gamma_m}(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 表示系统$\{|\Psi_{\gamma_m}(k)|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$的一个非递增重排。

定理 A（[44, 第 XI 章], [45]）。设 $0 < p$、$q < \infty$、 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\Psi = \{\Psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 是一个复数序列， $\Psi_k \neq 0$，且存在数系 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$的一个非递增重排_ _$\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty}$。

(i) 在情形 $0 < p \le q < \infty$下，

$$E_{\gamma_m}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathscr{E}_{\gamma_m}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \bar{\Psi}_{\gamma_m}(1) \qquad \forall \gamma_m \in \Gamma_m, \tag{3.4}$$

and

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \bar{\Psi}_{m+1}. \tag{3.5}$$

(ii) 在 $0 < q < p < \infty$ 和 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_k|^{\frac{pq}{q-p}} < \infty$的情形下，

$$E_{\gamma_m}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathscr{E}_{\gamma_m}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\Psi}_{\gamma_m}^{\frac{p\,q}{q-p}}(k)\Big)^{\frac{q-p}{p\,q}} \qquad \forall \gamma_m \in \Gamma_m, \tag{3.6}$$

and

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} \bar{\Psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{p\,q}}. \tag{3.7}$$

此外，对于集合 Γ_m 中的任意集合 $\gamma_m^* = \{k_1, \dots, k_m\}$，使得

$$\gamma_m^* = \{k_j \in \mathbb{Z}^d : \quad |\Psi_{k_j}| = \bar{\Psi}_j, \qquad j = 1, 2, \dots, m\}, \tag{3.8}$$

在两种情形下，以下关系均成立:

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = E_{\gamma_m^*}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathscr{E}_{\gamma_m^*}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p}. \tag{3.9}$$

接下来，我们表述一个定理，以补充关于参数 p和 q取无穷值情形的结论。

定理 1. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\Psi = \{\Psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 是复数序列， $\Psi_k \neq 0$，且¯ ¯使得系统 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 存在一个非递增重排 $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty}$。

(i) 如果 $0 < q < p = \infty$ 或 $p = q = \infty$，则关系式 (3.4) 和 (3.5) 成立。

(ii) 如果 $0 < p < q = \infty$ 且级数 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_k|^p$ 收敛，则

$$E_{\gamma_m}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathscr{E}_{\gamma_m}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\Psi}_{\gamma_m}^p(k)\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall \gamma_m \in \Gamma_m, \tag{3.10}$$

and

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} \bar{\Psi}_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.11}$$

此外，对于任意满足(3.8)的集合 $\gamma_m^* \in \Gamma_m$ ，关系(3.9) 成立。

这一论述的证明，以及本文中所有其他论述的证明，将在第5节给出。

3.2 最佳 n项逼近的精确值

3.2.1. 量 $\sigma_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p}$ 的精确值已在 [43], [44, 第 XI 章] **((i)**以及 [25] **((iii)-(v))**中求得。 (ii)) 它们可由以下论述推出。

定理 B ([43], [44, 第 XI 章], [25]). 设 $0 < p$、 $q \le \infty$、 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\Psi = \{\Psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$为复数序列，且数系 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$存在一个非递增重排$_-$ $_-\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 。

(i) 若 $0 < q \le p < \infty$，则

$$\sigma_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \sup_{l>m} \frac{(l-m)^{\frac{1}{p}}}{(\sum_{j=1}^{l} \bar{\Psi}_j^{-q})^{\frac{1}{q}}}. \tag{3.12}$$

(ii) 若 $0 < p < q < \infty$ 且级数 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_k|^{\frac{pq}{q-p}}$ 收敛，则

$$\sigma_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \left((l_m - m)^{\frac{q}{q-p}} \Big(\sum_{j=1}^{l_m} \bar{\Psi}_j^{-q}\Big)^{\frac{p}{p-q}} + \sum_{j=l_m+1}^{\infty} \bar{\Psi}_j^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{3.13}$$

其中，数 l_m 定义为

$$\bar{\Psi}_{l_m}^{-q} \le \tfrac{1}{l_m - m} \sum_{j=1}^{l_m} \bar{\Psi}_j^{-q} < \bar{\Psi}_{l_m+1}^{-q}. \tag{3.14}$$

(iii) 若 $0 < q < p = \infty$，则

$$\sigma_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{j=1}^{m+1} \bar{\Psi}_j^{-q}\Big)^{-\frac{1}{q}}. \tag{3.15}$$

(iv) 如果 $0 < p < q = \infty$ 且级数 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_k|^p$ 收敛，则

$$\sigma_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} \bar{\Psi}_j^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.16}$$

(v) 如果 $p=q=\infty$，则

$$\sigma_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p}=\bar{\Psi}_{m+1}. \tag{3.17}$$

从定理 A、B 和 1 的表述可以看出，$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p}$、$\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p}$和 $\sigma_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p}$的值显著取决于序列 Ψ 的行为。因此，为了得到它们对于特定序列 Ψ 的估计（如 $m\to\infty$），有必要进一步研究相应关系右端所给出的泛函的行为。

本文通过研究这类泛函并应用定理 A、B 和 1，求得上述量对于类 $\mathcal{F}_q^{\Psi}$ 的渐近行为，其中序列Ψ 满足条件 (1.3)，$\psi=\psi(t)$、$t\geq 1$是正的非增函数，即对于类 $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}$。

值得注意的是，逼近理论中的其他问题也可以用类似泛函的项来表述（例如，[27](第 6 章)，[49], [12], [13], [47]）。因此，研究这类泛函本身就很有意义。

3.2.2. 下面给出一些关于形如 (1.3) 的序列结构的辅助事实和估计。显然，对于任意满足条件 (1.3)、且具有非递增正函数 ψ 的序列 Ψ，数系 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 存在一个非递增重排 $_{-}\Psi=\{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty}$，并且它具有阶梯形式：

$$\bar{\Psi}_j=\psi(s),\quad j\in(V_{s-1},V_s],\quad s=0,1,2,\dots, \tag{3.18}$$

其中

$$V_s=V_s(d):=\#\{k\in\mathbb{Z}^d:\|k\|_{\ell_r^d}\leq s\},\qquad s=0,1,\dots,\qquad V_{-1}:=0. \tag{3.19}$$

因此，为了研究依赖于此类序列 Ψ 的泛函，需要对数值 V_s 给出方便的估计。

设 $B_r^d=\{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|_{\ell_r^d}\leq 1\}$ 是空间 $\mathbb{R}^d$ 的单位 ℓ_r 球。已知（例如，参见 [62]），球 B_r^d 的体积可由下式计算

$$M_{r,d}:=\mathrm{vol}(B_r^d)=\frac{\left(2\Gamma(1+\frac{1}{r})\right)^d}{\Gamma(1+\frac{d}{r})},\qquad r\in(0,\infty], \tag{3.20}$$

并且特别地，$M_{1,d}=\frac{2^d}{d!}$，$M_{2,d}=\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ 以及 $M_{\infty,d}=2^d$。

对于实数 a，我们记 $(a)_+=\max\{0,a\}$。对于正序列 $a(s)$ 和$b(s)$（或函数 $a(s)$ 和 $b(s)$，$s\geq 1$），表达式“$a(s)\asymp b(s)$”表示存在常数 $0<K_1<K_2$，使得对于任意 $s\in\mathbb{N}$（或 $s\geq 1$），都有 $a(s)\leq K_2b(s)$（此时记作“$a(s)\ll b(s)$”），且 $a(s)\geq K_1b(s)$（此时记作“$a(s)\gg b(s)$”）。

以下引理可由关于缩放凸体中格点数量渐近行为的已知一般结果推出（例如参见 [14, 第 14] 章）。

引理 1. 设 $r \in (0、\infty]$ 且 $d \in \mathbb{N}$。那么对于任意 $s = 0，1、2、\ldots$，

$$M_{r,d}\big((s - c_{r,d})_+\big)^d \le V_s \le M_{r,d}(s + c_{r,d})^d, \tag{3.21}$$

其中 $c_{r,\,d} := \frac{-d^{\frac{1}{r}}}{2}$ 且

$$\nu_s := V_s - V_{s-1} \asymp s^{d-1}. \tag{3.22}$$

证明。关系 (3.22) 由 (3.21) 得出。因此，只需证明 (3.21)。对于每个$k \in \mathbb{Z}^d$，令 $Q_k := k + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$为以 k 为中心的单位立方体。族 $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$构成了 $\mathbb{R}^d$ 的镶嵌，并且对所有 k，$\mathrm{vol}(Q_k) = 1$ 。根据定义，值 V_s 可表示为这些立方体并集的体积：

$$V_s = \mathrm{vol}\Big(\bigcup_{\|k\|_{\ell_r^d} \le s} Q_k\Big).$$

注意，值 $c_{r,\,d}$ 是单位立方体$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$中从中心到任意点的最大距离，即 $c_{r,\,d} = \sup_{y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} \|y\|_{\ell_r^d}$.

上界。设 $\|k\|_{\ell_r^d} \le s$。对于任意点 $x \in Q_k$，我们有 $x - k \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$，根据三角不等式

$$\|x\|_{\ell_r^d} \le \|k\|_{\ell_r^d} + \|x - k\|_{\ell_r^d} \le s + c_{r,d}.$$

这意味着立方体的并集包含于半径为 $s + c_{r、\,d}$ 的缩放球内，即

$$\bigcup_{\|k\|_{\ell_r^d} \le s} Q_k \subset (s + c_{r,d})B_r^d.$$

对该关系两边取体积，得到

$$V_s \le \mathrm{vol}((s + c_{r,d})B_r^d) = M_{r,d}(s + c_{r,d})^d.$$

下界。只需考虑 $s > c_{r、\,d}$ 的情形。令 $x \in (s - c_{r、\,d})B_r^d$。由于立方体 Q_k 铺满 $\mathbb{R}^d$，x 必须属于某个 $k \in \mathbb{Z}^d$ 对应的 Q_k。对于这个 k，我们有

$$\|k\|_{\ell_r^d} \le \|x\|_{\ell_r^d} + \|k - x\|_{\ell_r^d} \le (s - c_{r,d}) + c_{r,d} = s.$$

这表明较小球中的每个点都被一个立方体覆盖，该立方体的中心属于由 V_s 计数的集合，即，

$$(s - c_{r,d})B_r^d \subset \bigcup_{\|k\|_{\ell_r^d} \le s} Q_k.$$

类似地可得

$$M_{r,d}(s-c_{r,d})^d \le V_s.$$

□

R注 1. 对于给定的正整数 s，记 n_s 为满足以下条件的数 at

$$V_{n_s-1} < s \le V_{n_s}, \tag{3.23}$$

我们看到

$$\left((s/M_{r,d})^{\frac{1}{d}} - c_{r,d}\right)_+ \le n_s < (s/M_{r,d})^{\frac{1}{d}} + c_{r,d} + 1. \tag{3.24}$$

3.3 类 $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ 在空间 $\mathcal{S}^p$ 中最佳 n 项逼近和基宽度的阶估计

3.3.1. 类 $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ 的逼近特征估计及其求法在很大程度上取决于函数 ψ 的渐近行为。根据这一点，我们进一步区分 ψ 中具有共同性质的以下不同子集，并给出相应的结果。

首先，记 B 为所有满足所谓 Δ_2-条件的正的非增函数 $\psi(t)$，$t \ge 1$ 的集合，即对于所有 $t \ge 1$

$$1 < \tfrac{\psi(t)}{\psi(2t)} \le K_3. \tag{3.25}$$

集合 B 的自然代表元是如下形式的函数：$\psi(t) \equiv c$，$\psi(t) = \ln^{\varepsilon}(t+\mathrm{e})$，当 $\varepsilon < 0$ 时；$\psi(t) = t^{-r}\ln^{\varepsilon}(t+\mathrm{e})$，当 $r > 0$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 时；等等。

定理 2。 假设 $0 < p$、q、$r \le \infty$、$\psi \in B$，并且在 $p < q$ 情形下，此外，对所有大于某个数 t_0 的 t，$\psi(t)$ 是凸的并满足条件

$$\tfrac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} \ge \beta, \qquad \psi'(t) := \psi'(t+), \tag{3.26}$$

具有某个 $\beta > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$。那么

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \begin{cases} \psi(m^{\frac{1}{d}}), & 0 < q \le p \le \infty, \\ \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 0 < p < q \le \infty. \end{cases} \tag{3.27}$$

and

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \qquad 0 < p, q \le \infty. \tag{3.28}$$

Remark 2. 注意，条件 (3.26) 保证了 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_k|^{\frac{pq}{q-p}} < \infty$ —— .

证明。事实上，在这种情形下，对于所有 $\tau \geq t_0$,

$$\frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} \geq \frac{\beta}{\tau}. \tag{3.29}$$

将该关系的两边在从 t_0 到 t, $t>t_0$ 的范围内积分，我们得到估计$\psi(t) \ll t^{-\beta}$，其中 $\beta > {}^{d}/_{(q-p)\,pq}$。

因此，考虑到 (3.18) 和 (3.22)，我们得出

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_k|^{\frac{pq}{q-p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n) \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n) \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} n^{-\frac{pq\beta}{q-p}} < \infty. \tag{3.30}$$

□

3.3.2. 为了在函数 ψ 比任意幂函数趋于零更快的情形下得到类似的估计，我们给出以下定义。

考虑由所有正凸函数 $\psi(t)$, $t \geq 1$ 构成的集合 $\mathfrak{M}$，使得

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0. \tag{3.31}$$

用 $\mathfrak{M}'_\infty$ 表示满足条件的所有函数 $\psi \in \mathfrak{M}$ 构成的集合

$$\alpha(\psi, t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \downarrow 0, \qquad \psi'(t) := \psi'(t+), \tag{3.32}$$

以及 ${}^{\psi}/_{(t)\,|\psi'(t)|} \uparrow \infty$。用 $\mathfrak{M}^c_\infty$ 表示满足 (3.32) 和以下条件的所有函数 $\psi \in \mathfrak{M}$ 构成的集合

$$K_4 \leq \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \leq K_5 \qquad \forall t \geq 1. \tag{3.33}$$

最后，用 $\mathfrak{M}''_\infty$ 表示满足条件 ${}^{\psi}/_{(t)\,|\psi'(t)|} \downarrow 0$ 的所有 $\psi \in \mathfrak{M}$ 的集合。

集合 $\mathfrak{M}'_\infty$、$\mathfrak{M}^c_\infty$ 和 $\mathfrak{M}''_\infty$ 的自然代表元分别是形如 $\exp(-at^s)$、$a>0$ 的函数，其中对应的情形分别为 $s \in (0,1)$、$s=1$ 和 $s>1$。

3.3.3. 对于任意正整数 d 和 m 以及任意 $0 < r \leq \infty$，记

$$\widetilde{n}_m := \widetilde{n}_m(r,d) = (m/M_{r,d})^{\frac{1}{d}}, \tag{3.34}$$

其中 $M_{r,d}$ 是由关系 (3.20) 定义的数。

定理 3. 假设 $0<p$、q、$r \leq \infty$ 和 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$。则

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \begin{cases} \psi(\widetilde{n}_m), & 0<q\leq p\leq\infty, \\ \psi(\widetilde{n}_m)\big(m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m)\big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 0<p<q\leq\infty, \end{cases} \tag{3.35}$$

其中 $\widetilde{n}_m$ 由(3.34)定义，且

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(\widetilde{n}_m)\big(m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m)\big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \qquad 0<p,q\leq\infty. \tag{3.36}$$

由于对于满足 (3.32) 的任意 $\psi \in \mathfrak{M}$，不等式 (3.29) 对任意 $\beta > 0$ 以及充分大的 τ 均成立，因此可以类似地证明，对于来自集合 $\mathfrak{M}'_\infty$、$\mathfrak{M}^c_\infty$ 或$\mathfrak{M}''_\infty$的任意 ψ，级数 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_k|^s$ 对于任意 $s > 0$ 都收敛。

在 $d = 1$ 的情形下，类 $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\,r}(\mathbb{T}^1) =: \mathcal{F}^{\psi}_q$ 不依赖于 r，常数$M_{r,\,1} = 2$。因此，对于任意函数 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$,

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \begin{cases} \psi(\frac{m}{2}), & 0 < q \le p \le \infty, \\ \psi(\frac{m}{2})(m\alpha(\psi, \frac{m}{2}))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 0 < p < q \le \infty, \end{cases} \tag{3.35$'$}$$

and

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi(\tfrac{m}{2})(m\alpha(\psi, \tfrac{m}{2}))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \qquad 0 < p, q \le \infty. \tag{3.36$'$}$$

3.3.4. 考虑 ψ 属于集合 $\mathfrak{M}''_\infty$ 的情形。首先，注意到以下陈述可由关系式 (3.5)、(3.17) 和 (3.18) 推出：

命题1。假设 $0 < r \le \infty$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $\psi = \psi(t)$，$t \ge 1$ 是正的非增函数。那么对于任意 $0 < q \le p \le \infty$，以下关系成立：

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{\infty,r})_{\mathcal{S}^\infty} = \psi(n_{m+1}), \tag{3.37}$$

其中，数 n_{m+1} 由(3.23) 针对 $s = m + 1$ 定义。

如上所述，数 $V_s = V_s(d)$、$s = 0$、1、.....由 (3.19) 定义。

定理 4. 假设 $0 < r \le \infty$, $m \in [V_{s-1}, V_s)$，$s \in \mathbb{N}$ 和 $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$。

(i) 设 $0 < p < q \le \infty$，且函数 ψ 还满足条件

$$\lim_{t\to\infty} \tfrac{t^\beta \psi(t+1)}{\psi(t)} = 0 \tag{3.38}$$

其中 $\beta = \frac{d-1}{p}$。则

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(s) \tfrac{(V_s - m)^{\frac{1}{p}}}{m^{\frac{d-1}{qd}}}. \tag{3.39}$$

(ii) 设 $0 < q \le p < \infty$，且 ψ 满足条件 (3.38)，其中 $\beta = \frac{d-1}{q}$。则

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \tfrac{\psi(s)}{(m+1-V_{s-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}, \tag{3.40}$$

若 $m = V_{s-1}$，或满足以下附加条件：

$$p(V_s - m) \ge q(V_s - V_{s-1}), \tag{3.41}$$

并且关系 (3.39) 成立，且条件 (3.41) 不成立。

(iii) 如果 $0 < q < p = \infty$ 和 ψ 满足 (3.38) 且 $\beta = \frac{d-1}{q}$，那么 (3.40) 成立。(iv) 如果 $0 < p < q \le \infty$ 和 ψ 满足(3.38)，且 $\beta = (d-1)\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big)$，则

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(s)(V_s - m)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.42}$$

Re标记 3. 对于任意 $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$，条件(3.38) 等价于以下内容:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\tfrac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} - \beta\ln t\right) = +\infty. \tag{3.43}$$

因此，对于 $d=1$，条件 (3.38) 对任意 $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$均成立。

证明。事实上，如果 $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ 且 (3.43) 成立，那么对于任意 $M>0$ 以及充分大的 t，我们有

$$\ln\tfrac{\psi(t)}{\psi(t+1)} = \int_t^{t+1}\tfrac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)}\mathrm{d}\tau > \tfrac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} > \beta\ln t + M.$$

因此，关系 (3.38) 成立。

另一方面，如果 $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ 且 (3.38) 成立，那么对于任意 $M>0$ 以及充分大的 t，我们有

$$M \le \ln\tfrac{\psi(t)}{\psi(t+1)} - \beta\ln(t+1) = \int_t^{t+1}\tfrac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)}\mathrm{d}\tau - \beta\ln(t+1) \le \tfrac{|\psi'(t+1)|}{\psi(t+1)} - \beta\ln(t+1),$$

并且关系 (3.43) 成立。 □

注 4。 由(3.39) 和(3.21)可知，在关系(3.39)成立的条件下，我们有

$$\tfrac{\psi(s)}{m^{\frac{d-1}{qd}}} \ll \sigma_m(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \ll \psi(s)m^{\frac{d-1}{d}(\frac1p-\frac1q)}. \tag{3.44}$$

注意，当 $r=\infty$ 时，对任意 $s\in\mathbb{N}$，都有 $V_s=(2s+1)^d$。因此，若 $m\in[V_{s-1},V_s)$，数 s 由等式 $s=[\binom{(m+1)^d}{2}]$ 定义。下文中，$[x]$ 表示 x 中的最大整数。

若 $d=1$，类 $\mathcal{F}^\psi_{q,\,r} =: \mathcal{F}^\psi_q$ 不依赖于 r，并且对任意 $m\in[V_{s-1},V_s)$，都有 $m=V_{s-1}=V_s-1$ 和 $s=[\frac{m+1}{2}]$。因此，对任意 $\psi\in\mathfrak{M}''_\infty$，

$$\sigma_m(\mathcal{F}^\psi_q)_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \mathscr{D}_m(\mathcal{F}^\psi_q)_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([\tfrac{m+1}{2}]), \qquad 0<p,\,q\le\infty. \tag{3.45}$$

若 $d>1$，所得估计显著依赖于数 m 在半线段 $[V_{s-1},V_s)$ 上的位置。在定理 4 中考虑一些特定的子序列 $m(s)$，可得以下推论。

推论 1。 假设 $d>1$, $m\in[V_{s-1},V_s)$, $s\in\mathbb{N}$，参数 p, q, r 和 ψ 满足定理 4 的条件。

(i) 设 $m=m(s)=V_s-c_s$, $1\le c_s\le c$。则对于 $0<p$, $q\le\infty$

$$\sigma_m(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \tfrac{\psi(s)}{m^{\frac{d-1}{qd}}}, \tag{3.46}$$

以及对于 $0 < p < q \le \infty$

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(s). \tag{3.47}$$

(ii) 设序列 $m = m(s)$ 满足

$$V_s - m(s) \asymp V_s - V_{s-1}. \tag{3.48}$$

那么对于任意 $0 < p < q \le \infty$

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(s) m^{\frac{d-1}{d}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \tag{3.49}$$

and

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(s) m^{\frac{d-1}{d}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{3.50}$$

若 $0 < q \le p < \infty$，则关系 (3.49) 成立，特别是当 $m(s) - V_{s-1} \to \infty$ 趋于$s \to \infty$时。若 $m = m(s) = V_{s-1} + c_s$, $0 \le c_s \le c$，则对于 $0 < q < p < \infty$

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(s). \tag{3.51}$$

在 $0 < p = q < \infty$ 的情形下，若 $m = m(s) = V_{s-1} + c_s$, $1 \le c_s \le c$，则关系 (3.49) 成立；若 $m = m(s) = V_{s-1}$，则关系 (3.51) 成立。

注 5。 比较所得的估计，可得出以下结论:

- 若函数 ψ属于集合 B且满足条件 (3.26)，其中某个 $\beta > d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$，或者属于集合 $\mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$，则对于 $0 < p \le q \le \infty$

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}. \tag{3.52}$$

- 如果 $\psi \in B \cup \mathfrak{M}'_\infty$ 且 $0 < q < p \le \infty$，那么

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = o\big(\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}\big), \qquad m \to \infty. \tag{3.53}$$

- 如果 $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$ 且 $0 < q < p \le \infty$，那么(3.53) 对 $d > 1$成立，并且

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)}. \tag{3.54}$$

- 如果 $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$，那么对任意 $0 < p,\ q \le \infty$，关系(3.54) 成立。如果 $d > 1$，那么关系 (3.52)成立；特别是当序列 $m = m(s)$ 满足(3.48) 且 $0 < p < q \le \infty$，当$p = q = \infty$，或当 $m = m(s) = V_{s-1} + c_s$、 $0 \le c_s \le c$且 $0 < q < p < \infty$时。

注意，对于有限值 $0 < p, q < \infty$，定理 2、3 和 4 的陈述已在 [33, 35–37] 中得到证明。不过，鉴于英语读者较难获取这些文献，我们在本文中给出这些陈述及其证明，并对其表述和结构略作调整。

当 $\psi(t) = 1$ 时，关系 (4.6) 也可由引理 4.4 [20] 得出。对于 $d = 1$and $0 < p,\ q < \infty$，与定理 2、3 和 4 类似的结论已在 [34] 中得到证明。量 $\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,\ r})_{\mathcal{S}^p}$ 的积分类比量的精确阶估计已在 [48] 中给出。

4 空间 L_p 中的类 $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\,r}$ 的逼近特征

4.1. 在 $2 \le p < \infty$ 的情形下，基于豪斯多夫-杨定理（例如，参见 [54, §0.1]），对任意 $f \in L_p$，以下不等式成立：

$$\|f\|_{L_p} \le \|f\|_{\mathcal{S}^{p'}}. \tag{4.1}$$

下文中，对于任意 $1 < p < \infty$，当 $p = 1$ 时，令 $p' := \frac{p}{p-1}$ 以及 $p' := \infty$。

如果 $1 \le p < 2$，那么对于任意 $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$

$$\|f\|_{L_p} \le \|f\|_{L_2} = \|f\|_{\mathcal{S}^2}. \tag{4.2}$$

因此，由第 3.3 节中得到的空间 $\mathcal{S}^p$ 内近似量的估计，也可得到空间 L_p 中相应量的上估计。这里，我们考虑一些可以得到相应下估计的情形。

4.2. 如上所述，在 ψ 为幂函数的情形下，即 $\psi(t) = t^{-s}\, s > 0$，对于所有 $1 \le p \le \infty$，量 $\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,\,\infty})_{L_p}$ 和 $G_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,\,\infty})_{L_p}$ 的精确阶估计分别在 [10] 和 [53]，中得到。特别地，由定理 6.1 [10] 和 3.1 [53]，可知，对于所有 $s > d(1 - \frac{1}{q})_+$，

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{s}_{q,\infty})_{L_p} \asymp m^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{4.3}$$

and

$$G_m(\mathcal{F}^{s}_{q,\infty})_{L_p} \asymp \begin{cases} m^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2, \\ m^{-\frac{s}{d}-\frac{1}{q}+1-\frac{1}{p}}, & 2 \le p < \infty. \end{cases} \tag{4.4}$$

由下述定理 5 可知，特别是对于 $\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,\,\infty})_{L_p}$ 和 $G_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,\,\infty})_{L_p}$，形式为 (4.3) 和 (4.4) 的估计对更广泛的函数集合 ψ 成立。

定理 5. 假设 $0 < r, q \le \infty$, $1 \le p < \infty$, $\psi \in B$，且在情形 $\frac{p}{p-1} < q$ 下，此外对于所有大于某个数 t_0 的 t，$\psi(t)$ 是凸的，并满足条件(3.26)，其中 $\beta > d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ 当 $1 < p \le 2$ 时，且 $\beta \ge d(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ 当 $2 \le p < \infty$ 时。那么

$$G_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \asymp \sigma^{\perp}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \asymp \begin{cases} \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, & 1 \le p \le 2, \\ \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 2 \le p < \infty \end{cases}, \tag{4.5}$$

对于所有 $1 \le p \le 2$

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, \tag{4.6}$$

且对所有 $2 < p < \infty$

$$\psi(m^{\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \ll \sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \ll \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{4.7}$$

在情形 $2 < p \le \infty$ 下，以下定理成立。

定理6。 假设 $1 \le r \le \infty$、 $2 < p \le \infty$、 $0 < q < \infty$，函数 ψ 属于集合 B，并且对于所有大于某个数 t_0 的 t， $\psi(t)$ 是凸的，且满足条件(3.26)，其中 $\beta > d(1 - \frac{1}{q})+$。则关系 (4.6) 成立。

注意，定理5和定理6中的条件保证了嵌入 $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r} \subset L_p$。令 $r = \infty$ 和 $\psi(t) = t^{-s}$，由定理5和定理6可得以下推论：

推论2。 假设 $1 \le p < \infty$、 $0 < q < \infty$、 s 是一个正数，在情形 $\frac{p}{p-1} < q$ 下满足不等式 $s > \beta$，其中 β 在定理 5 中定义。则当 $1 \le p < \infty$ 时，关系 (4.4) 成立；当 $1 \le p \le 2$ 时，关系 (4.3) 成立。如果 $s > d(1 - \frac{1}{q})+$，则关系 (4.3) 成立。

这一表述从以下意义上补充了 [10]和 [53]上述结果：

- 由推论2可知，在 $1 < q \le \frac{p}{(p-1)}$的情形下，关系(4.3)（对于 $1 \le p \le 2$）和关系(4.4)（对于 $1 \le p < \infty$）也对所有 $s > 0$成立。
- 若 $1 < p \le 2$ 且$q > \frac{p}{p-1}$，则关系(4.3)和(4.4)也对所有满足$d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}) < s \le d(1 - \frac{1}{q})$的 s 成立。
- 若 $2 < p < \infty$ 且$q > \frac{p}{p-1}$，则关系(4.4)也对所有满足 $d(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) < s \le d(1 - \frac{1}{q})$的 s成立。
- 在 $2 < p \le \infty$的情形下，推论2中关于 s 的条件（关系(4.3)成立的条件）与定理6中的相同。1 [10]

还要注意，如果 $0 < q \le \frac{p}{p-1}$，那么例如对于函数 $\psi(t) = t^{-s}\ln^{\varepsilon}(t + \mathrm{e})$，其中 $s > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \ln^{\varepsilon}(t + \mathrm{e})$， $\varepsilon < 0$， 以及$\psi(t) \equiv c$， 定理 5 的条件均得到满足。如果 $1 < \frac{p}{p-1} < q$ 且 $1 < p \le 2$，那么对于 $\psi(t) = t^{-s}\ln^{\varepsilon}(t + \mathrm{e})$，其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 且 $s > d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$，定理 5 的条件得到满足。如果 $1 < \frac{p}{p-1} \le q$ 且 $2 < p < \infty$，那么对于 $\psi(t) = t^{-s}\ln^{\varepsilon}(t + \mathrm{e})$，其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ 且$s > d(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q})$，定理 5 的条件得到满足。对于 $\psi(t) = t^{-s}\ln^{\varepsilon}(t + \mathrm{e})$，其中$\varepsilon \in \mathbb{R}$ 且 $s > d(1 - \frac{1}{q})+$，定理6 的条件得到满足。

4.3. 考虑函数 ψ 比任何幂函数都衰减得更快的情形。

定理 7。 假设 $m \in \mathbb{N}$, $0 < r, q \le \infty$, $1 \le p < \infty$, $n \in [V_{m-1}, V_m)$ 且函数 ψ 属于集合 $\mathfrak{M}''_{\infty}$，并满足 (3.38)，其中 $\beta >$ 最大值$\{\frac{d-1}{p'}, \frac{d-1}{q}\}$。

(i) 如果 $m=m(s)=V_s-c_s$, $1\le c_s\le c$，那么对于任意 $0<q\le\infty$

$$\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}\asymp G_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}\asymp\frac{\psi(s)}{m^{\frac{d-1}{qd}}}. \tag{4.8}$$

(ii) 若 $m=m(s)=V_{s-1}+c_s$、$0\le c_s\le c$ 和 $0<q<p'<\infty$，或者若 $m=m(s)=V_{s-1}$ 且 $0<p'=q<\infty$，则

$$\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}\asymp G_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}\asymp\psi(s). \tag{4.9}$$

如上所述，若 $d=1$，类 $\mathcal{F}_{q,r}^{\psi}=\mathcal{F}_q^{\psi}$ 不依赖于 r，且对于任意 $m\in[V_{s-1},V_s)$，$s=[\frac{m+1}{2}]$。因此，以下推论由定理 7 得出。

推论 3. 对于任意 $1\le p<\infty$、$0<q\le\infty$ 以及任意函数 $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}''$

$$\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}\asymp G_m(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}\asymp\psi([\tfrac{m+1}{2}]). \tag{4.10}$$

当 $d=1$ 且 $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}^{c}$ 时，也可以证明类似的估计 .

定理 8. 对于任意 $1\le p<\infty$、$0<q\le\infty$ 以及任意函数 $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}^{c}$

$$\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}\asymp G_m(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}\asymp\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}\asymp\psi(\tfrac{m}{2})\asymp\psi([\tfrac{m+1}{2}]). \tag{4.11}$$

以下结论对量 $\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,\,r}^{\psi})_{L_p}$ 也成立。

定理 9. 假设 $m\in\mathbb{N}$, $0<r$, $q\le\infty$, $1\le p<\infty$ 和 $m\in[V_{s-1},V_s)$。

(i) 若 $0<q\le p'$，则对任意正的非增函数 ψ，有

$$\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}=\psi(s). \tag{4.12}$$

(ii) 若 $1<p'<q\le\infty$ 和 $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}''$，且条件 (3.38) 在 $\beta=\frac{(d-1)(q-p')}{p'q}$ 下满足，则对序列 $m=m(s)=V_s-c_s$, $1\le c_s\le c$，以下估计成立：

$$\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}\asymp\psi(s). \tag{4.13}$$

推论 4. 设 $1\le p<\infty$。对任意正的非增函数 ψ 和 $0<q\le\frac{p}{p-1}$，

$$\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}=\psi([\tfrac{m+1}{2}]). \tag{4.12$'$}$$

若 $1<p'<q\le\infty$，则对任意 $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}''$，

$$\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}\asymp\psi([\tfrac{m+1}{2}]). \tag{4.13$'$}$$

在 $\psi\in B$ 情形下，$\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,\,r}^{\psi})_{L_p}$的估计如下所述。

定理 10。 假设定理 *5* 的条件得到满足。则

$$\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \asymp \begin{cases} \psi(m^{\frac{1}{d}}), & 0<q\le \frac{p}{p-1},\ 1\le p<\infty, \\ \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, & \frac{p}{p-1}<q\le\infty,\ 1<p<2, \\ \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & \frac{p}{p-1}<q\le\infty,\ 2\le p<\infty. \end{cases} \tag{4.14}$$

注 6. 分析第 *4* 节的结果，我们得出以下结论：

- 若 $d=1$ 且 $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}''\cup\mathfrak{M}_{\infty}^{c}$，则对任意 $1\le p<\infty$ 和 $0<q\le\infty$

$$\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp G_n(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}.$$

- 若 $d>1$ 且 定理 *7* 和 (9) 的条件成立，则类似的估计

$$\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \asymp G_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \asymp \mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \tag{4.15}$$

当 $m=m(s)=V_{s-1}+c_s$, $0\le c_s\le c$ 和 $0<q<p'<\infty$ 时成立；或者当 $m=m(s)=V_{s-1}$ 且 $0<p'=q<\infty$ 时成立。若 $m=m(s)=V_s-c_s$, $1\le c_s\le c$，则对任意 $0<q\le\infty$

$$\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \asymp G_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} = o\Big(\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}\Big). \tag{4.16}$$

- 在定理 *5* 的条件成立时，对所有 $p'\le q\le\infty$，关系 (4.15)成立；对所有 $0<q\le p'$, $1\le p<\infty$，关系 (4.16) 成立。

注意，对于有限值 $0<q<\infty$，定理 5–10 的陈述已在 [33, 35–37] 中得到证明。当 $\psi(t)=1$、$0<q\le 1$ 和 $2\le p<\infty$ 时，量 $\sigma_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p}$ 的上估计也可由定理 4.4 [19] 得到。

5 定理的证明

5.1 定理 1 的证明

考虑 $0<q<p=\infty$ 或 $p=q=\infty$ 的情形。由 (2.1)、(2.2)、(1.1)、(1.2) 和 (3.3)，对于任意 $f\in\mathcal{F}_q^{\Psi}$和 $\gamma_m\in\Gamma_m$，有

$$E_{\gamma_m}(f)_{\mathcal{S}^p}=\mathscr{E}_{\gamma_m}(f)_{\mathcal{S}^p}=\|f-S_{\gamma_m}(f)\|_{\mathcal{S}^p}=\|\{\Psi_{\gamma_m}(k)\widehat{f}(k)/\Psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)}. \tag{5.1}$$

因此，对于任意 $f\in\mathcal{F}_q^{\Psi}$和 $\gamma_m\in\Gamma_m$，以下上估计成立：

$$E_{\gamma_m}(f)_{\mathcal{S}^\infty}=\sup_{k\in\mathbb{Z}^d}\left|\frac{\Psi_{\gamma_m}(k)\widehat{f}(k)}{\Psi_k}\right|\le\bar{\Psi}_{\gamma_m}(1)\sup_{k\in\mathbb{Z}^d}\left|\frac{\widehat{f}(k)}{\Psi_k}\right|$$

$$\leq \bar{\Psi}_{\gamma_m}(1)\|\{\widehat{f}(k)/\Psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} \leq \bar{\Psi}_{\gamma_m}(1). \tag{5.2}$$

设 $k_0 \in \mathbb{Z}^d$ 为满足 $|\Psi_{k_0}| = \bar{\Psi}_{\gamma_m}(1)$ 的向量。函数 $f_0(x) := \Psi_{k_0} e_{k_0}(x)$ 属于集合 $\mathcal{F}_q^{\Psi}$，且

$$E_{\gamma_m}(f_0)_{\mathcal{S}^p} = \mathscr{E}_{\gamma_m}(f_0)_{\mathcal{S}^p} = |\Psi_{k_0}| = \bar{\Psi}_{\gamma_m}(1). \tag{5.3}$$

结合（5.1）和（5.3），我们看到，在此情形下，关系（3.4）成立 .

现在，假设 $0 < p < q = \infty$，且级数 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_k|^p$ 收敛。根据（5.1），对于任意 $f \in \mathcal{F}_\infty^{\Psi}$ 和 $\gamma_m \in \Gamma_m$，我们有

$$E_{\gamma_m}(f)_{\mathcal{S}^p}^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left|\tfrac{\Psi_{\gamma_m}(k)\widehat{f}(k)}{\Psi_k}\right|^p \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} \left|\tfrac{\widehat{f}(k)}{\Psi_k}\right|^p \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_{\gamma_m}(k)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Psi}_{\gamma_m}^p(j). \tag{5.4}$$

由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\Psi}_{\gamma_m}^p(k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\Psi}_k^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_k|^p < \infty,$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个数 N_ε，使得 $\sum_{j=N_\varepsilon+1}^{\infty} \bar{\Psi}_{\gamma_m}^p(j) < \varepsilon$. 考虑集合 $\gamma_{N_\varepsilon}^* = \{k_1, \dots, k_{N_\varepsilon}\}$，其中 $\gamma_{N_\varepsilon}^* = \{k_1, \dots, k_{N_\varepsilon}\}$ 来自集合 $\Gamma_{N_\varepsilon} \setminus \gamma_m$，满足

$$\gamma_{N_\varepsilon}^* = \{k_j \in \mathbb{Z}^d : \quad |\Psi_{k_j}| = \bar{\Psi}_{\gamma_m}(j), \quad j = 1, 2, \dots, m\}$$

那么函数 $f_\varepsilon(x) := \sum_{k\in\gamma_{N_\varepsilon}^*} \Psi_k e_k(x)$ 属于集合 $\mathcal{F}_\infty^{\Psi}$，并且

$$E_{\gamma_m}(f_\varepsilon)_{\mathcal{S}^p}^p = \sum_{k\in\gamma_{N_\varepsilon}^*} |\Psi_k|^p = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \bar{\Psi}_{\gamma_m}^p(j) > \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Psi}_{\gamma_m}^p(j) - \varepsilon. \tag{5.5}$$

结合（5.4）和（5.5），并考虑到 ε的任意性，我们看到该结论确实成立。 (3.10)

最后，考虑所有 $\gamma_m \in \Gamma_m$ 上的量 (3.4) 和 (3.10) 的下确界，可知在相应情形下，关系 (3.7) 和 (3.11) 成立；对于满足 (3.8) 的任意集合$\gamma_m^* \in \Gamma_m$，关系 (3.9) 成立。

□

5.2 辅助估计

在证明关于空间 $\mathcal{S}^p$中最佳 n 项逼近和基宽度的估计的定理之前，我们先给出若干辅助命题。

5.2.1. 首先，我们说明函数属于集合 B、 $\mathfrak{M}'_\infty$、 $\mathfrak{M}^c_\infty$ 或 $\mathfrak{M}''_\infty$会如何影响其在不同点处的取值。

由 (3.25) 可知，对于任意 $\psi \in B$ 和 $c > 1$，有

$$\psi(t) \asymp \psi(ct). \tag{5.6}$$

当 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$ 时，我们可以得到以下结论 .

命题 2. 设 $d \geq 1$ 和 $c > 1$。那么对于任意 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$

$$\psi(t^{1/d}) \asymp \psi((t+c)^{1/d}) \qquad and \qquad \frac{\psi(t^{1/d})}{|\psi'(t^{1/d})|} \asymp \frac{\psi(ct^{1/d})}{|\psi'(ct^{1/d})|}. \tag{5.7}$$

证明。如果 ψ 属于 $\mathfrak{M}'_\infty$ 或 $\mathfrak{M}^c_\infty$，则对于任意 $t \geq 1$，有 $\left|\psi'\left(\frac{t}{\psi}\right)\right| \leq K_6$。于是

$$\ln \frac{\psi(t^{1/d})}{\psi((t+c)^{1/d})} = \int_{t^{1/d}}^{(t+c)^{1/d}} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} d\tau \leq K_6((t+c)^{\frac{1}{d}} - t^{\frac{1}{d}}) \leq K_6 c.$$

考虑到这一关系以及 ψ的单调性，我们看到（5.7）中的第一个关系成立。

对于 $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$，（5.7）中的第二个关系显然成立。对于 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$，它由函数 $\alpha(\psi, t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$ 和 $\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}$ 的单调性得到：

$$1 \geq \frac{\psi(t^{1/d})/|\psi'(t^{1/d})|}{\psi(ct^{1/d}/|\psi'(ct^{1/d})|} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\alpha(\psi, t^{1/d})}{\alpha(\psi, ct^{1/d})} \geq \frac{1}{c}.$$

□

最后，在 $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$的情形下，对于任意正数 c，我们有

$$\ln \frac{\psi(t)}{\psi(t+c)} = \int_t^{t+c} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} d\tau \geq \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} \uparrow \infty.$$

5.2.2. 接下来，我们陈述关于集合 $\mathfrak{M}'_\infty$、$\mathfrak{M}^c_\infty$和 $\mathfrak{M}''_\infty$中的函数的若干已知事实。为此，按照 Stepanets [44, 第 3] 章（另见 [42]），对于任意 $\psi \in \mathfrak{M}$，考虑函数 $\eta(t) = \eta(\psi, t)$ 和 $\mu(t) = \mu(\psi, t)$，使得

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right) \qquad \text{and} \qquad \mu(t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \qquad t \geq 1, \tag{5.8}$$

其中 ψ^{-1} 是 ψ的反函数，以及集合

$$\mathfrak{M}^+_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi, t) \uparrow \infty\} \qquad \text{and} \qquad F = \{\psi \in \mathfrak{M} : \eta'(\psi, t) \leq K\}.$$

注 7. 由定理 *12.1* 和 *13.1 [44, Ch. 3]*（另见 *[42, Th. 1* 和*2]*）可知，所有集合 $\mathfrak{M}'_\infty$、$\mathfrak{M}^c_\infty$ 和 $\mathfrak{M}''_\infty$ 都属于集合 $\mathfrak{M}^+_\infty \subset F$。根据 *[44, Ch. 3]* 中的注记 *13.1* 和 *13.2*（另见 *[42, Remarks 1* 和 *2]*），对于任意函数 $\psi \in F$（尤其是任意 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty \cup \mathfrak{M}''_\infty$）以及所有 $t \geq 1$，以下关系成立：

$$K_7(\eta(\psi, t) - t) \leq \psi(t)/|\psi'(t)| = t\alpha(\psi, t) \leq K_8(\eta(\psi, t) - t) \tag{5.9}$$

and

$$2(\eta(\psi, t) - t) \leq \eta(\psi, \eta(\psi, t)) - \eta(\psi, t) \leq K_9(\eta(\psi, t) - t). \tag{5.10}$$

5.2.3. 现在我们证明一些命题，它们给出了包含来自集合 B、$\mathfrak{M}'_\infty$、$\mathfrak{M}^c_\infty$ 或 $\mathfrak{M}''_\infty$ 的函数的某些积分和求和的估计。

命题 3. 设 $d \geq 1$ 和 $0 < s < \infty$。那么对于任意 $\psi \in B$

$$\int_1^l \frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^s(t)} \asymp \sum_{k=1}^{l} \frac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \asymp \frac{l^d}{\psi^s(l)}. \tag{5.11}$$

此外，若对于所有大于某个数 t_0 的 t，$\psi(t)$ 都是凸的，且满足条件(3.26)，其中 $\beta > d/s$，则

$$\int_l^\infty t^{d-1}\psi^s(t)\mathrm{d}t \asymp \sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^s(k) \asymp l^d\psi^s(l). \tag{5.12}$$

证明。由于函数 $\frac{t^{d-1}}{\psi^s\ t\ ()}$ 单调递增，因此有

$$I_l := \int_1^l \frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^s(t)} \leq \sum_{n=1}^{l} \frac{n^{d-1}}{\psi^s(n)} \leq I_{l+1}, \tag{5.13}$$

并且对于任意 $\psi \in B$，以下必要估计成立：

$$\frac{l^d}{\psi^s(l)} \ll \frac{(l/2)^d}{\psi^s(l/2)} \ll \sum_{l/2\leq n\leq l} \frac{n^{d-1}}{\psi^s(n)} \ll \sum_{k=1}^{l} \frac{n^{d-1}}{\psi^s(n)} \ll \frac{l^d}{\psi^s(l)}.$$

现在，假设对于所有大于某个数 t_0 的 t，函数 ψ 也是凸的，且满足条件 (3.26)，其中 $\beta > \frac{d}{s}$。那么函数 $t^d\psi^s(t)$ 在$t > t_0$时趋于零。因此，对于 $l > t_0$，$l \in \mathbb{N}$，

$$\int_l^\infty t^{d-1}\psi^s(t)\mathrm{d}t =: J_l \geq \sum_{n=l+1}^{\infty} n^{d-1}\psi^s(n) \geq J_{l+1}. \tag{5.14}$$

由于 $\psi \in B$，因此

$$J_l \geq \int_l^{2l} t^{d-1}\psi^s(t)\mathrm{d}t \gg l^d\psi^s(l). \tag{5.15}$$

应用 (3.26) 并进行分部积分，我们得到

$$J_l \leq \frac{1}{\beta}\int_l^\infty t^d\psi^{s-1}(t)|\psi'(t)|dt = \frac{l^d\psi^s(l)}{s\beta} + \frac{d}{s\beta}J_l.$$

因此，鉴于 (3.26)，我们看到

$$J_l \leq \frac{1}{s\beta-d}l^d\psi^s(l) \ll l^d\psi^s(l) \tag{5.16}$$

结合式 (5.15)、(5.16) 和 (5.14)，即可得到式 (5.12)。

□

命题 4. 设 $d \geq 1$ 和 $0 < s < \infty$。则对于任意 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$

$$\int_1^l \frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^s(t)} \asymp \sum_{n=1}^{l} \frac{n^{d-1}}{\psi^s(n)} \asymp \frac{l^d \alpha(\psi,l)}{\psi^s(l)} \tag{5.17}$$

and

$$\int_l^\infty t^{d-1}\psi^s(t)\mathrm{d}t \asymp \sum_{n=l+1}^{\infty} n^{d-1}\psi^s(n) \asymp l^d \psi^s(l)\alpha(\psi,l). \tag{5.18}$$

证明。首先证明关系 (5.17)。考虑函数

$$f(t) = f(\psi,t) := \frac{\psi^s(t)}{t^{d-1}}, \quad t \geq 1. \tag{5.19}$$

其导数具有如下形式

$$f'(t) = \left(\frac{\psi^s(t)}{t^{d-1}}\right)' = -\frac{\psi^s(t)}{t^{d-1}}\left(s\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} + \frac{d-1}{t}\right), \qquad t \geq 1.$$

因此，对于任意 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$，有

$$\frac{1}{t\alpha(f,t)} := \frac{|f'(t)|}{f(t)} = \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}\Big(s + (d-1)\alpha(\psi,t)\Big) \asymp \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} \asymp \frac{1}{t\alpha(\psi,t)} \tag{5.20}$$

且 $\alpha(f,\ t) = \frac{f_{(t)}}{t|f'(t)|} \downarrow 0$。利用 (5.19) 和 (5.13)，通过分部积分可得

$$I_l = \int_1^l \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = \frac{l}{f(l)} - \frac{1}{f(1)} - \int_1^l \frac{\mathrm{d}t}{\alpha(f,t)f(t)} \geq \frac{l}{f(l)} - \frac{1}{f(1)} - \frac{I_l}{\alpha(f,l)},$$

and

$$I_l \geq \frac{\alpha(f;l)}{1+\alpha(f;l)}\left(\frac{l}{f(l)} - \frac{1}{f(1)}\right) \gg \frac{l\alpha(f,l)}{f(l)}. \tag{5.21}$$

此外，若 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$，则由 (5.20) 得 $\frac{f_{(t)}|f'(t)|}{} \uparrow \infty$ 且 $f(t) \geq \frac{f'^2_{(t)}}{f''(t)}$，$f''(t) := f''(t+)$，对几乎所有 $t \geq 1$ 均成立。因此，

$$I_l \leq \int_1^l \frac{f''(t)\mathrm{d}t}{f'^2(t)} = \frac{1}{|f'(l)|} - \frac{1}{|f'(1)|} \leq \frac{1}{|f'(l)|} = \frac{l\alpha(f,l)}{f(l)}. \tag{5.22}$$

由 (5.21) 和 (5.22)，并结合 (5.19) 和 (5.20)，可知对于任意 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$

$$I_l = \int_1^l \frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^s(t)} = \int_1^l \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \asymp \frac{l\alpha(f,l)}{f(l)} \asymp \frac{l^d\alpha(\psi,l)}{\psi^s(l)}. \tag{5.23}$$

若 $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$，由 (5.20) 和 (3.33) 可得 $K_{10} \leq \frac{f_{(t)}}{|f'(t)|} \leq K_{11}$，$t \geq 1$，并且

$$I_l \leq K_{11}\int_1^l \frac{|f'(t)|\mathrm{d}t}{f^2(t)} = K_{11}\left(\frac{1}{f(l)} - \frac{1}{f(1)}\right) \asymp \frac{1}{f(l)} \asymp \frac{l\alpha(f,l)}{f(l)}. \tag{5.24}$$

根据 (5.21 ），（5.24）、（5.19）和（5.20），可见对于 $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$，关系（5.23）也成立 .

结合（5.23）和（5.13），得到（5.17）中的第二个估计。

现在来证明关系式 (5.18)。为此，我们首先证明式 (5.14) 中定义的积分 J_l 满足关系式

$$J_l \asymp l^d \psi^s(l)\alpha(\psi, l). \tag{5.25}$$

由于 $\alpha(\psi,\ t) \downarrow 0$ 对于 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$，通过分部积分可得

$$J_l = -\tfrac{l^d\psi^s(l)}{d} + \tfrac{s}{d}\int_l^\infty \tfrac{t^{d-1}\psi^s(t)}{\alpha(\psi,t)}\mathrm{d}t \geq -\tfrac{l^d\psi^s(l)}{d} + \tfrac{s}{d\alpha(\psi,l)}J_l$$

并且对于充分大的 l（使得 $\alpha(\psi,\ l) < \frac{s}{d}$），

$$J_l \leq \tfrac{\alpha(\psi,l)}{s-d\alpha(\psi,l)} l^d\psi^s(l) \ll l^d\psi^s(l)\alpha(\psi,l). \tag{5.26}$$

另一方面，根据 ψ 的单调性及 (5.9)，我们有

$$J_l \geq \int_l^{\eta(\psi,t)} t^{d-1}\psi^s(t)\mathrm{d}t \geq l^{d-1}\psi^s(\eta(\psi,l))(\eta(\psi,l)-l) \gg l^d\psi^s(l)\alpha(\psi,l).$$

因此，关系式 (5.25) 确实成立。

此外，函数 $h(t) := t^{d-1}\psi^s(t)$ 的导数为

$$h'(t) = t^{d-2}\psi^s(t)\Big(d-1-s\tfrac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\Big) \qquad \forall t > 1.$$

因此，根据 (3.32)，我们看到，当 t 足够大时，函数 $h(t)$ 递减（使得 $(d-1)\alpha(\psi,\ t) < s$），因此，关系 (5.14) 成立；结合 (5.25) 和 (5.7)，可得 (5.18) 中所需的第二个估计。

□

命题 5. 设 $d \geq 1$ 和 $0 < s < \infty$。那么，对于任意 $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$

$$\sum_{n=1}^{l} \tfrac{n^{d-1}}{\psi^s(n)} \asymp \tfrac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} \tag{5.27}$$

and

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} n^{d-1}\psi^s(n) \asymp l^{d-1}\psi^s(l+1). \tag{5.28}$$

证明. 对任意 $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$，我们有 $\psi(t) \leq K_{12}|\psi'(t)|$, $t \geq 1$。因此，

$$I_l = \int_1^l \tfrac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^s(t)} \leq K_{12}l^{d-1}\int_1^l \tfrac{|\psi'(t)|\mathrm{d}t}{\psi^{s+1}(t)} = K_{12}l^{d-1}\Big(\tfrac{1}{s\psi^s(l)} - \tfrac{1}{s\psi^s(1)}\Big) \ll \tfrac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}.$$

而估计式 (5.27) 可由以下关系推出：

$$\tfrac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} \leq \sum_{k=1}^{l} \tfrac{k^{d-1}}{\psi^s(k)} \leq \tfrac{l^{d-1}}{\psi^s(l)} + \int_1^l \tfrac{t^{d-1}dt}{\psi^s(t)} \ll \tfrac{l^{d-1}}{\psi^s(l)}.$$

为证明上述估计式 (5.26)，我们实际上只用到了 ψ 属于集合 $\mathfrak{M}$ 且满足条件 (3.32) 这一事实。因此，估计式 (5.26) 对任意 $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ 也成立。然而，由于在这种情形下 $\frac{\psi_{(t)}}{|\psi'(t)|} = t\alpha(\psi,t) \downarrow 0$，于是

$$J_l = \int_l^\infty t^{d-1}\psi^s(t)\mathrm{d}t \ll l^d\psi^s(l)\alpha(\psi,l) \ll l^{d-1}\psi^s(l).$$

如上所示，函数 $h(t) = t^{d-1}\psi^s(t)$ 对所有满足 $\alpha(\psi, t) < \frac{s}{d-1}$ 的 t 都是递减的。因此，

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^s(k) \ll (l+1)^{d-1}\psi^s(l+1) + J_{l+1} \ll l^{d-1}\psi^s(l+1),$$

并且由于

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} k^{d-1}\psi^s(k) \geq l^{d-1}\psi^s(l+1),$$

关系 (5.28) 也成立。 □

5.3 定理 2 的证明

首先，对量 $\sigma_m(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p}$ 求估计。

情形 $0 < q \leq p < \infty$。根据 (3.12)、(3.18) 和 (3.22)，我们有

$$\sigma_m^p(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \sup_{l>m}(l-m)\Big(\sum_{n=1}^{n_l-1}\frac{\nu_n}{\psi^q(n)} + \frac{l-V_{n_l-1}}{\psi^q(n_l)}\Big)^{-\frac{p}{q}}, \tag{5.29}$$

其中，数值 n_l 由 (3.23) 在 $s = l$ 时定义。

根据 (3.24) 和 (3.25)，我们有

$$n_l \asymp l^{\frac{1}{d}} \qquad \text{and} \qquad \psi(n_l) \asymp \psi(l^{\frac{1}{d}}). \tag{5.30}$$

由 (5.11) 可得

$$\sigma_m^p(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \sup_{l>m}\frac{l-m}{\big(\frac{n_l^d}{\psi^q(n_l)}\big)^{\frac{p}{q}}} \asymp \sup_{l>m}\frac{\psi^p(l^{\frac{1}{d}})(l-m)}{l^{\frac{p}{q}}} \ll \psi^p(m^{\frac{1}{d}})\sup_{l>m}\frac{l-m}{l^{\frac{p}{q}}}. \tag{5.31}$$

对于 $t > 0$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $s \in (1,\infty)$，函数 $h(t) = h(t,s) = \frac{t-m}{t^s}$ 在点 $t_* = \frac{sm}{s-1}$ 处取得其最大值，并且

$$h(t_*, s) = \big(1 - \tfrac{1}{s}\big)^s m^{1-s}. \tag{5.32}$$

若 $s = 1$，则函数 $h(t) = h(t;1)$ 单调不减，并且随着 t 增大而趋于 1。因此，

$$\sup_{t>0} h(t;1) = \sup_{t>0}\tfrac{t-m}{t} = \lim_{t\to+\infty}\tfrac{t-m}{t} = 1. \tag{5.33}$$

结合 (5.31)–(5.33)，我们得到必要的上估计：

$$\sigma_m^p(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} \ll \psi^p(m^{\frac{1}{d}})m^{1-\frac{p}{q}}.$$

考虑到 (5.31) 和 (3.25)，我们还得到下估计：

$$\sigma_m^p(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} \gg \frac{\psi^p((2m)^{\frac{1}{d}})(2m-m)}{(2m)^{\frac{p}{q}}} \asymp \psi^p(m^{\frac{1}{d}})m^{1-\frac{p}{q}}.$$

情形 $0 < p < q < \infty$。设 $\Psi = \{\Psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 是一个复数序列，满足存在数系 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 的一个非递增重排 $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty}$。对于固定的 $m \in \mathbb{N}$ 和 $l \in \mathbb{N}$，$l > m$，考虑泛函

$$Q_m(\Psi, l) := \frac{l-m}{\sum\limits_{j=1}^{l} \bar{\Psi}_j^{-q}}.$$

我们有

$$Q_m(\Psi, l+1) = Q_m(\Psi, l) + \frac{\bar{\Psi}_{l+1}^{-q}}{\sum\limits_{j=1}^{l+1} \bar{\Psi}_j^{-q}}\Big(\bar{\Psi}_{l+1}^{q} - Q_m(\Psi, l)\Big)$$

and

$$\bar{\Psi}_{l+1}^{q} = Q_m(\Psi, l+1) + \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} \bar{\Psi}_j^{-q}}{\sum\limits_{j=1}^{l+1} \bar{\Psi}_j^{-q}}\Big(\bar{\Psi}_{l+1}^{q} - Q_m(\Psi, l)\Big)$$

因此，鉴于 Ψ 的单调性及关系 (3.14)，我们得出

$$Q_m(\Psi, l) > Q_m(\Psi, l+1) > \Psi^q(l+1) \qquad \forall l \geq l_m$$

and

$$Q_m(\Psi, l) \leq Q_m(\Psi, l+1) \leq \Psi^q(l+1) \qquad \forall l \in [m, l_m).$$

由此可得

$$\sup_{l>m} Q_n(\Psi, l) = Q_m(\Psi, l_m). \tag{5.34}$$

根据 (3.14)，我们得到 $\Psi(l_m + 1) > \Psi(l_m)$。因此，若系统 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 具有阶梯形式 (3.18)，则

$$l_m = V_{n_{l_m}} = \sum_{i=0}^{n_{l_m}} \nu_i, \tag{5.35}$$

其中，n_{l_m} 在 $s = l_m$ 时由（3.23）定义。因此，我们有

$$\sigma_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \left((l_m - m)^{\frac{q}{q-p}}\Big(\sum_{n=1}^{n_{l_m}} \frac{\nu_n}{\psi^q(n)}\Big)^{\frac{p}{p-q}} + \sum_{n=n_{l_m}+1}^{\infty} \nu_n \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n)\right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{5.36}$$

其中

$$\psi^{-q}(n_{l_m}) \le \frac{1}{l_m-m}\sum_{j=1}^{n_{l_m}} \frac{\nu_n}{\psi^q(n)} < \psi^{-q}(n_{l_m}+1). \tag{5.37}$$

由 (5.34) 可得

$$\sup_{l>m}(l-m)\bigg(\sum_{n=1}^{n_l-1}\frac{\nu_n}{\psi^q(n)}+\frac{l-V_{n_l-1}}{\psi^q(n_l)}\bigg)^{-1} = (l_m-m)\bigg(\sum_{n=1}^{n_{l_m}}\frac{\nu_n}{\psi^q(n)}\bigg)^{-1}. \tag{5.38}$$

然后，类似于情形 $0<p\le q<\infty$，我们证明

$$(l_m-m)\bigg(\sum_{n=1}^{n_{l_m}}\frac{\nu_n}{\psi^q(n)}\bigg)^{-1} \asymp \psi^q(m^{\frac{1}{d}}). \tag{5.39}$$

考虑到 (5.37)、(5.39) 和 (3.25)，可知

$$\psi(n_{l_m}) \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}}). \tag{5.40}$$

由于 $\psi\in B$，因此根据 (3.22)、(3.26) 和 (5.12)，我们得出

$$\sum_{n=l+1}^{\infty}\nu_n\psi^{\frac{pq}{q-p}}(n) \asymp \sum_{n=l+1}^{\infty} n^{d-1}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(n) \asymp l^d\psi^{\frac{pq}{q-p}}(l). \tag{5.41}$$

我们还证明

$$n_{l_m} \asymp m^{\frac{1}{d}}. \tag{5.42}$$

事实上，由 (5.35) 和 (5.30) 可知 $\widetilde{m}:=K_{13}m^{\frac{1}{d}} \le K_{13}l_m^{\frac{1}{d}} \le n_{l_m}$。另一方面，将 (3.29) 的两边在从 $\widetilde{m}$ 到 n_{l_m}, $\widetilde{m}>t_0$ 的范围内积分，得到$\psi(\widetilde{m})\psi^{(n_{l_m})} \ge \binom{n_{l_m}}{\widetilde{m}}^{\beta}$。因此，根据 (5.40) 和 (3.25), 可知 $\widetilde{m}\gg n_{l_m}$，且关系 (5.42) 成立。

结合 (5.36)、(5.39)、(5.11)、(5.40)、(5.41) 和 (5.42)，我们得到 (3.28):

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \bigg(\psi^{\frac{q^2}{q-p}}(m^{\frac{1}{d}})\frac{m}{\psi^q(m^{\frac{1}{d}})}+m\psi^{\frac{pq}{q-p}}(m^{\frac{1}{d}})\bigg)^{\frac{q-p}{pq}} \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

情形 $0<q<p=\infty$。根据 (3.15)、(3.18) 和 (3.22)，我们有

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \bigg(\sum_{n=1}^{n_{m+1}-1}\frac{\nu_n}{\psi^q(n)}+\frac{m+1-V_{n_{m+1}-1}}{\psi^q(n_{m+1})}\bigg)^{-\frac{1}{q}}.$$

考虑到 (3.22)、(5.11) 和 (5.30)，我们得到

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \bigg(\sum_{n=1}^{n_{m+1}}\frac{\nu_n}{\psi^q(n)}\bigg)^{-\frac{1}{q}} \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{-\frac{1}{q}}.$$

情形 $0 < p < q = \infty$。类似于 (3.30) 和 (5.41) 的证明，我们可以证明，条件 (3.26) 与 $\beta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) = \frac{d}{p}$保证该级数收敛

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Psi_k|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Psi}_j^p = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \psi^p(n)$$

and

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} \nu_n \psi^p(n) \asymp l^d \psi^p(l). \tag{5.43}$$

然后利用 (3.16)、(3.18)、(3.22)、(5.43) 和 (5.30)，得到 (3.28)：

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \Big((V_{n_{m+1}} - m - 1)\psi^p(n_{m+1}) + \sum_{n=n_{m+1}+1}^{\infty} \nu_n \psi^p(n)\Big)^{\frac{1}{p}} \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}}.$$

情形 $p = q = \infty$. 在这种情形下，由 (3.17)、(3.18) 和 (5.30) 可得估计 (3.28)

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \bar{\Psi}_{m+1} = \psi(n_{m+1}) \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}}).$$

最后，考虑量 $\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}$。在情形 $0 < q \le p \le \infty$ 下，由 (3.5)、(3.18) 和 (5.30) 可得估计 (3.27)：

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \psi(n_{m+1}) \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}}).$$

对于 $0 < p < q < \infty$，由 (3.7)、(3.18)、(5.41) 和 (5.30) 可得估计 (3.27)：

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \Big(\sum_{n=n_{m+1}+1}^{\infty} \nu_n \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n)\Big)^{\frac{q-p}{pq}} \asymp \psi(n_{m+1}) n_{m+1}^{\frac{q-p}{dpq}} \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

而对于 $0 < p < q = \infty$，同理可由 (3.11)、(3.18)、(5.43) 和 (5.30) 得出。

□

5.4 定理 3 的证明

首先，考虑量 $\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}$。在情形 $0 < q \le p \le \infty$ 下，考虑到命题 2，估计式 (3.35) 可由定理 A 和定理 1 的相应结果以及关系式 (3.23)、(3.24) 和 (3.34) 得出：

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \psi(n_{m+1}) \asymp \psi(\widetilde{n}_m). \tag{5.44}$$

在情形 $0 < p < q \le \infty$ 中，估计 (3.35) 同样可由定理 A 和定理 1 的结果、关系 (3.22)、(5.18)、(3.24) 和 (3.34)，并考虑命题 2，推出：

$$\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \Big(\sum_{n=n_{m+1}+1}^{\infty} \nu_n \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n)\Big)^{\frac{q-p}{pq}} \asymp \Big(\sum_{n=n_{m+1}+1}^{\infty} n^{d-1} \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n)\Big)^{\frac{q-p}{pq}}$$

$$\asymp \Big(n_{m+1}^{d}\psi^{\frac{p\,q}{q-p}}(n_{m+1})\alpha(\psi,n_{m+1})\Big)^{\frac{q-p}{p\,q}} \asymp \psi(\widetilde{n}_m)(m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{5.45}$$

现在，求量 $\sigma_m(\mathcal{F}_{q,\,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p}$ 的估计。注意，在 情形 $p=q=\infty$和 $0<p<q=\infty$，估计 (3.36) 的推导与估计 (5.44) 和 (5.45) 类似，使用定理 B 的相应结果即可。

在 情形 $0<q<p=\infty$，利用命题 4 和命题 2，由关系式 (3.15)、(3.23)、(3.24)、(3.34) 可得：

$$\sigma_m(\mathcal{F}_q^{\Psi})_{\mathcal{S}^p} \asymp \Big(\sum_{n=1}^{n_{m+1}}\frac{\nu_n}{\psi^q(n)}\Big)^{-\frac{1}{q}} \asymp \Big(\sum_{n=1}^{n_{m+1}}\frac{n^{d-1}}{\psi^q(n)}\Big)^{-\frac{1}{q}}$$

$$\asymp \Big(\frac{n_{m+1}^{d}\alpha(\psi,n_{m+1})}{\psi^q(n_{m+1})}\Big)^{-\frac{1}{q}} \asymp \psi(\widetilde{n}_m)\big(m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m)\big)^{-\frac{1}{q}}.$$

情形 $0<q\le p<\infty$。令 $M_{r,\,d}$ 为由 (3.20) 定义的数，c 为一个固定实数。对于 $m\in\mathbb{N}$ 和任意 $l\ge m$，考虑函数

$$W_m(l,c):=\frac{l-m}{\Big(\int\limits_1^{k(l)}\frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^q(t)}\Big)^{\frac{p}{q}}},\qquad \text{where}\ \ k(l)=k(l,c)=(l/M_{r,d})^{\frac{1}{d}}+c.$$

该函数连续可微，其导数具有如下形式

$$W_m'(l,c)=\Big(\int_1^{k(l)}\frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^q(t)}-\frac{p(l-m)}{q\psi^q(k(l))}\cdot\frac{k^{d-1}(l)}{dM_{r,d}^{\frac{1}{d}}l^{(d-1)/d}}\Big)\Big(\int_1^{k(l)}\frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^q(t)}\Big)^{\frac{p}{q}-1}, \tag{5.46}$$

其中

$$\lim_{l\to\infty}\frac{k^{d-1}(l)}{l^{(d-1)/d}}=\lim_{l\to\infty}\Big(\frac{(l/M_{r,d})^{\frac{1}{d}}+c}{l^{\frac{1}{d}}}\Big)^{d-1}=M_{r,d}^{\frac{1-d}{d}}. \tag{5.47}$$

存在唯一点 $l_m>m$，使得 $W_m'(l_m,\ c)=0$。函数 $W_m(l,\ c)$ 在 $m\le l<l_m$ 时递增，在 $l>l_m$ 时递减。此外，由 (5.46) 、 (5.47) 和 (5.23) 可得

$$(l_m-m)\Big(\int_1^{k(l_m)}\frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^q(t)}\Big)^{-1}=\frac{dqM_{r,d}^{\frac{1}{d}}l^{(d-1)/d}}{k^{d-1}(l)}\psi^q(k(l_m))\asymp\psi^q(k(l_m)). \tag{5.48}$$

由 (5.48) 和 (5.17)，对于任意 $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}'\cup\mathfrak{M}_{\infty}^{c}$，可得

$$\sup_{l\ge m}W_m(l,c)=W_m(l_m,c)=\frac{l_m-n}{\int\limits_1^{k(l_m)}\frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^r(t)}}\cdot\Big(\int_1^{k(l_m)}\frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^q(t)}\Big)^{1-\frac{p}{q}}\asymp$$

$$\asymp\psi^q(k(l_m))\Big(\frac{k^d(l_m)\alpha(\psi,k(l_m))}{\psi^q(k(l_m))}\Big)^{1-\frac{p}{q}}=\frac{\psi^p(k(l_m))}{\Big(k^d(l_m)\alpha(\psi,k(l_m))\Big)^{\frac{p}{q}-1}}. \tag{5.49}$$

由于 $l_m\ge m$ 和 $k(l_m)\ge(m/M_{r,d})^{\frac{1}{d}}-|c|=\widetilde{n}_m-|c|$，对于任意 $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}'\cup\mathfrak{M}_{\infty}^{c}$，考虑到命题 2，我们有

$$\frac{\psi^p(k(l_m))}{\Big(k^d(l_m)\alpha(\psi,k(l_m))\Big)^{\frac{p}{q}-1}}\le\frac{\psi^p(\widetilde{n}_m-|c|)}{\Big((\widetilde{n}_m-|c|)^{d-1}\frac{\psi(k(l_m))}{|\psi'(k(l_m))|}\Big)^{\frac{p}{q}-1}}\ll\frac{\psi^p(\widetilde{n}_m)}{\Big(\widetilde{n}_m^{d-1}\frac{\psi(\widetilde{n}_m)}{|\psi'(\widetilde{n}_m)|}\Big)^{\frac{p}{q}-1}}=\frac{\psi^p(\widetilde{n}_m)}{\Big(m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m)\Big)^{\frac{p}{q}-1}}.$$

组合 结合最后一个估计和 (5.49)，我们得出，对于任意 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$

$$\sup_{l\geq m} W_m(l,c) \ll \frac{\psi^p(\widetilde{n}_m)}{\left(m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m)\right)^{\frac{p}{q}-1}}. \tag{5.50}$$

根据（5.29）、（3.24）和（5.50），我们得到（3.36）中的上估计:

$$\sigma_m^p(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \leq \sup_{l>m} \frac{l-m}{\left(\sum\limits_{n=1}^{n_l-1} \frac{\nu_n}{\psi^q(n)}\right)^{\frac{p}{q}}} \ll \sup_{l>m} \frac{l-m}{\left(\sum\limits_{n=1}^{n_l-1} \frac{n^{d-1}}{\psi^q(n)}\right)^{\frac{p}{q}}}$$

$$\ll \sup_{l>m} \frac{l-m}{\left(\int\limits_{1}^{n_l-1} \frac{t^{d-1}\mathrm{d}t}{\psi^q(t)}\right)^{\frac{p}{q}}} \ll \sup_{l>m} W_m(l, c_{r,d}+1) \ll \frac{\psi^p(\widetilde{n}_m)}{\left(m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m)\right)^{\frac{p}{q}-1}}.$$

我们还 可以得到下估计。由（5.29）、（3.24）、（5.17）和（5.7），我们有 e

$$\sigma_m^p(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \gg \sup_{l>m} \frac{l-m}{\left(\sum\limits_{n=1}^{n_l} \frac{n^{d-1}}{\psi^q(n)}\right)^{\frac{p}{q}}} \gg \sup_{l>m, l\in\mathbb{N}} \frac{\psi^p(n_l)(l-m)}{\left(n_l^d\alpha(\psi,n_l)\right)^{\frac{p}{q}}}$$

$$\gg \sup_{l>m, l\in\mathbb{N}} \frac{\psi^p((l/M_{r,d})^{\frac{1}{d}})(l-m)}{\left(l\alpha(\psi,(l/M_{r,d})^{\frac{1}{d}})\right)^{\frac{p}{q}}} =: \sup_{l>m, l\in\mathbb{N}} R_m(l). \tag{5.51}$$

考虑函数

$$g(t) = g(\psi;t) := \psi((t/M_{r,d})^{\frac{1}{d}}), \quad t \geq 1. \tag{5.52}$$

容易看出， $g \in \mathfrak{M}$ 和

$$\alpha(g,t) = \tfrac{g(t)}{t|g'(t)|} = dM_{r,d}^{\frac{1}{d}}\,\alpha(\psi,(t/M_{r,d})^{\frac{1}{d}}) \downarrow 0$$

对任意 $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$。因此，与 ψ 类似，函数 $g \in \mathfrak{M}^+_\infty \subset F$。于是，根据 (5.9) 和 (5.10)，对于量 $\eta(t) = \eta(g,t)$，有

$$\eta(\eta(t)) - \eta(t) \asymp \eta(t) - t \asymp \tfrac{g(t)}{|g'(t)|} \asymp t\alpha(\psi,(t/M_{r,d})^{\frac{1}{d}}). \tag{5.53}$$

令 $l_0 = [\eta(m)] + 1$. 因此，由命题 2、注 7、关系式 (5.52)、(5.53) 和 (3.34)，

$$R_m(l_0) \gg \frac{\psi^p((\eta(g,m)/M_{r,d})^{\frac{1}{d}})(\eta(g,m)-m)}{(\eta(g,m)\alpha(\psi,(\eta(g,m)/M_{r,d})^{\frac{1}{d}}))^{\frac{p}{q}}} \gg \frac{g^p(m)}{(\eta(g,m)-m))^{\frac{p}{q}-1}} \gg \frac{\psi^p(\widetilde{n}_m)}{(m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m))^{\frac{p}{q}-1}}. \tag{5.54}$$

结合关系式 (5.51) 和 (5.54)，得到所需的下界:

$$\sigma_m^p(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \gg \frac{\psi^p(\widetilde{n}_m)}{(m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m))^{\frac{p}{q}-1}}$$

这就完成了情形 $0 < q \leq p < \infty$ 下关系式 (3.36) 的证明。

情形 $0 < p < q < \infty$. 我们使用关系 (5.36)–(5.38)，该关系对任意正的非增函数 ψ 均成立。与前几种情形类似，我们证明

$$\sup_{l>m} \frac{l-m}{\sum\limits_{n=1}^{n_l-1} \frac{\nu_n}{\psi^q(n)} + \frac{l-V_{n_l-1}}{\psi^q(n_l)}} = \frac{l_m-m}{\sum\limits_{n=1}^{n_{l_m}} \frac{\nu_n}{\psi^q(n)}} \asymp \psi^q(\widetilde{n}_m) \asymp \psi^q(n_{l_m}), \tag{5.55}$$

w这里， $\widetilde{n}_m$ 和 n_{l_m} 由 (3.34) 和 (5.37) 定义。接下来，我们来证明 t

$$l_m \asymp \widetilde{n}_m. \tag{5.56}$$

由于 $l_m > m$，由 (3.24) 可得 $n_{l_m} > n_m \geq \widetilde{n}_m - c_2$。若 $n_{l_m} \leq \widetilde{n}_m$，则关系 (5.56) 成立。假设 $n_{l_m} > \widetilde{n}_m$。由于 $\alpha(\psi,\ t) \downarrow 0$，因此对所有 $t \geq$-1，都有 $\frac{1}{t} \leq K_{14}{}^{|\psi'}{}_{\psi}{}_{t}{}^{|)()}$。在区间 $\widetilde{n}_m$ 到 n_{l_m} 上对该不等式两边积分，得到

$$\ln \tfrac{n_{l_m}}{\widetilde{n}_m} \leq K_{14} \ln \tfrac{\psi(\widetilde{n}_m)}{\psi(n_{l_m})} \qquad \text{and} \qquad n_{l_m} \ll \widetilde{n}_m.$$

因此，关系 (5.56) 确实成立。

根据 (3.21)、(5.17)、(5.56) 和 (5.7)，

$$\sum_{n=1}^{n_{l_m}} \tfrac{\nu_n}{\psi^q(n)} \asymp \sum_{n=1}^{n_{l_m}} \tfrac{n^{d-1}}{\psi^q(n)} \asymp \tfrac{n_{l_m}^d \alpha(\psi,n_{l_m})}{\psi^q(n_{l_m})} \asymp \tfrac{m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m)}{\psi^q(\widetilde{n}_m)}. \tag{5.57}$$

最后，由于 (3.21)、(5.18)、(5.56) 和 (5.7)，可得

$$\sum_{n=n_{l_m}+1}^{\infty} \nu_n \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n) \asymp \sum_{n=n_{l_m}+1}^{\infty} n^{d-1} \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n)$$

$$\asymp n_{l_m}^d \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n_{l_m}) \alpha(\psi, n_{l_m}) \asymp m \psi^{\frac{pq}{q-p}}(\widetilde{n}_m) \alpha(\psi, \widetilde{n}_m). \tag{5.58}$$

结合关系 (5.36)、(5.55)、(5.57) 和 (5.58)，可得 (3.36)：

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \Big(\psi^{\frac{q^2}{q-p}}(\widetilde{n}_m) \tfrac{m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m)}{\psi^q(\widetilde{n}_m)} + m\psi^{\frac{pq}{q-p}}(\widetilde{n}_m)\alpha(\psi,\widetilde{n}_m) \Big)^{\frac{q-p}{pq}} \asymp \psi(\widetilde{n}_m) \big(m\alpha(\psi,\widetilde{n}_m) \big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

□

5.5 定理 4 的证明

首先，我们求出量 $\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,\ r})_{\mathcal{S}^p}$ 的估计。

(i) 情形 $0 < p < q < \infty$。我们使用表示式 (5.36)，其中 n_{l_m} 对于 $s = l_m$ 定义见 (3.23)，而 l_m 满足关系 (5.37) 和 (5.35)。由 (3.22) 和 (5.28)，

$$\sum_{n=n_{l_m}+1}^{\infty} \nu_n \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n) \asymp \sum_{n=n_{l_m}+1}^{\infty} n^{d-1} \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n) \asymp n_{l_m}^{d-1} \psi^{\frac{pq}{q-p}}(n_{l_m}+1). \tag{5.59}$$

由于 $l_m \geq m+1$ 和 $m \in [V_{s-1}, V_s)$，由（5.35）和（3.23）可得 $l_m = V_{n_{l_m}} \geq V_{n_{m+1}}$。根据（5.27）、（3.21）和（3.38），当 s 足够大时，有

$$\sum_{j=1}^{s} \tfrac{\nu_j}{\psi^q(j)} \asymp \sum_{j=1}^{s} \tfrac{j^{d-1}}{\psi^q(j)} \asymp \tfrac{s^{d-1}}{\psi^q(s)} < \psi^{-q}(s+1). \tag{5.60}$$

因此，对于这样的 s 和 $m\in[V_{s-1},V_s)$，成立以下关系

$$\frac{V_s-m}{\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{\nu_j}{\psi^q(j)}}\asymp\frac{V_s-m}{\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{j^{d-1}}{\psi^q(j)}}\asymp\frac{(V_s-m)\psi^q(s)}{s^{d-1}}\gg\psi^q(s+1),$$

这意味着 $l_m\le V_s$，因此 $l_m=V_s$ 和 $n_{l_m}=s$。结合这一等式、关系（5.36）、（5.59）和（5.60），并考虑到关系（3.24）和（3.38），我们可知关系（3.39）确实成立：

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}\asymp\left(\left(\frac{(V_s-m)\psi^q(s)}{s^{d-1}}\right)^{\frac{q}{q-p}}\frac{s^{d-1}}{\psi^q(s)}+s^{d-1}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(s+1)\right)^{\frac{q-p}{pq}}$$

$$\asymp\frac{(V_s-m)^p\psi(s)}{s^{\frac{d-1}{q}}}\left(1+\left(\frac{s^{\frac{d-1}{p}}\psi(s+1)}{\psi(s)(V_s-m)^p}\right)^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}\asymp\psi(s)\frac{(V_s-m)^p}{m^{\frac{d-1}{dq}}}.$$

（ii）情形 $0<p<q=\infty$。根据（3.16）和 $m\in[V_{s-1},V_s)$，我们有

$$\sigma^p_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}=(V_s-m)\psi^p(s)+\sum_{n=s+1}^{\infty}\nu_n\psi^p(n).$$

考虑到（3.22）和（5.28），我们得到

$$\sigma^p_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}\asymp(V_s-m)\psi^p(s)+s^{d-1}\psi^p(s+1),$$

并根据（3.38），我们可知，对于 $0<p<q=\infty$，关系（3.39）也成立。

情形 $0<q\le p<\infty$。根据（5.29）和（5.27），我们有

$$\sigma^p_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}=\sup_{l>m}\frac{l-m}{\left(\sum\limits_{n=1}^{n_l-1}\frac{n^{d-1}}{\psi^q(n)}+\frac{l-V_{n_l-1}}{\psi^q(n_l)}\right)^{\frac{p}{q}}}\asymp\sup_{l>m,\,l\in\mathbb{N}}\frac{l-m}{\left(\frac{(n_l-1)^{d-1}}{\psi^q(n_l-1)}+\frac{l-V_{n_l-1}}{\psi^q(n_l)}\right)^{\frac{p}{q}}}.$$

在此情形下，$\beta=\frac{d-1}{p}$ 也满足条件（3.38）。因此，—

$$\sigma^p_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}\asymp\sup_{l\in\mathbb{N},\,l>m}\frac{\psi^p(n_l)(l-m)}{(l-V_{n_l-1})^{\frac{p}{q}}}=\sup_{j>m}\left(\psi^p(n_j)\max_{l\in I_j}\frac{l-m}{(l-V_{n_j-1})^{\frac{p}{q}}}\right),\tag{5.61}$$

其中，I_{m+1} 表示半区间（m，V_s] 和 I_j、$j=m+2$，$m+3$，.....）中的正整数集合，l 表示半区间（V_{n_j-1}，V_{n_j}]）中的正整数集合。

根据（3.21）、（3.23）和（3.38），对于 $j>m$，有

$$\psi^p(n_j)\max_{l\in I_j}\frac{l-m}{l-V_{n_j-1}}=\frac{\psi^p(n_j)(V_{n_j}-m)}{V_{n_j}-V_{n_j-1}}\asymp\frac{\psi^p(n_j)(V_{n_j}-m)}{n_j^{d-1}}\gg\psi^p(n_j+1)\max_{l\in I_{j+1}}\frac{l-m}{l-V_{n_j}}.$$

因此，如果 $p=q$，则（5.61）中的上确界在点 $j=m+1$ 处取得，并且在此情形下，关系（3.39）成立：

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{p,r})_{\mathcal{S}^p}\asymp\psi(n_{m+1})\frac{(V_{n_{m+1}}-m)^{\frac{1}{p}}}{n_{m+1}^{\frac{d-1}{p}}}\asymp\psi(n_{m+1})\frac{(V_{n_{m+1}}-m)^{\frac{1}{p}}}{m^{\frac{d-1}{dp}}}\asymp\psi(s)\frac{(V_s-m)^{\frac{1}{p}}}{m^{\frac{d-1}{dp}}}.$$

现在，设 $0<q<p<\infty$。对于固定的 m 和 $v>m$，函数

$$f_m(l,v)=\frac{l-m}{(l-v)^{\frac{p}{q}}},\qquad l>v, \tag{5.62}$$

在点 $l_v^*=\frac{pm-qv}{p-q}$ 处取得其最大值，

$$f_m(l_v^*,v)=\frac{q(p-q)^{\frac{p}{q}-1}}{p^{\frac{p}{q}}}\frac{1}{(m-v)^{\frac{p}{q}-1}}\asymp\frac{1}{(m-v)^{\frac{p}{q}-1}}, \tag{5.63}$$

$f_m(l,\ v)$ 在 $l\in(v,\ l_v^*)$ 上递增，在 $l>l_v^*$ 上递减。

若 $m>V_{s-1}$，根据 (3.21)、(3.38) 和 (5.63)，我们有

$$\psi^p(s)\max_{l\in I_{m+1}}\frac{l-m}{(l-V_{s-1})^{\frac{p}{q}}}\gg\frac{\psi^p(s)}{(V_s-V_{s-1})^{\frac{p}{q}}}\asymp\frac{\psi^p(s)}{s^{\frac{(d-1)p}{q}}}\gg\psi^p(s+1)$$

$$\gg\frac{\psi^p(s+1)}{(m-V_s)^{\frac{p}{q}-1}}=\psi^p(s+1)\sup_{l>V_s}f_m(l,V_s)\geq\psi^p(n_j)\max_{l\in I_j}\frac{l-m}{(l-V_{n_j-1})^{\frac{p}{q}}}$$

对任意 $j>m+1$ 均成立。因此，(5.61) 中的上确界在 $j=m+1$ 处取得，且

$$\sigma_m^p(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p}\asymp\psi^p(s)\max_{l\in I_{m+1}}\frac{(l-m)}{(l-V_{s-1})^{\frac{p}{q}}}\asymp\psi^p(s)\max_{l\in(m,V_s]}f(l,v_m),$$

其中 $f(l,\ v)$ 由 (5.62) 定义，且 $v_m=V_{s-1}$。此外，若条件 (3.41) 成立，则点 $l_{v_m}^*=\frac{pm-qV_{s-1}}{p-q}$ 属于 $(m,\ V_s]$，考虑到 (5.63)，我们得到 (3.40)：

$$\sigma_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p}\asymp\psi(s)f^{\frac{1}{p}}(l_{r_m}^*,v_m)\asymp\frac{\psi(s)}{(m+1-V_{s-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}.$$

若条件 (3.41) 不成立，则 $f(l,\ v_m)$ 在 $(m,\ V_s]$ 上递增。因此，考虑到 (3.21)，我们得到 (3.39)：

$$\sigma_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p}\asymp\psi(s)f^{\frac{1}{p}}(V_s,r_m)\asymp\frac{\psi(s)(V_s-m)^{\frac{1}{p}}}{(V_s-V_{s-1})^{\frac{1}{q}}}\asymp\frac{\psi(s)(V_s-m)^{\frac{1}{p}}}{m^{\frac{d-1}{dq}}}.$$

类似地，如果 $m=V_{s-1}$，对于任意 $j>m$，我们有

$$\psi^p(s)\max_{l\in I_{m+1}}\frac{l-m}{(l-V_{s-1})^{\frac{p}{q}}}=\psi^p(s)\max_{l\in I_{m+1}}(l-V_{s-1})^{-\frac{p}{q}+1}=\psi^p(s)$$

$$\gg\frac{\psi^p(s+1)}{(m+1-V_s)^{\frac{p}{q}-1}}=\psi^p(s+1)\sup_{l>V_s}f_m(l,V_s)\geq\psi^p(n_j)\max_{l\in I_j}\frac{l-m}{(l-V_{n_j-1})^{\frac{p}{q}}}.$$

因此，在这种情形下，关系 (3.40) 成立：

$$\sigma_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p}\asymp\psi(s)=\frac{\psi(s)}{(m+1-V_{s-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}.$$

(iii) 情形 $0<q<p=\infty$。由 (3.15)、(3.18) 和 (5.60)，可得

$$\sigma_m^q(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^\infty}=\Big(\sum_{n=1}^{s-1}\frac{\nu_n}{\psi^q(n)}+\frac{m+1-V_{s-1}}{\psi^q(s)}\Big)^{-\frac{1}{q}}\asymp\Big(\frac{(s-1)^{d-1}}{\psi^q(s-1)}+\frac{m+1-V_{s-1}}{\psi^q(s)}\Big)^{-\frac{1}{q}}$$

$$\asymp \frac{\psi(s)}{(m+1-V_{s-1})^{\frac{1}{q}}}\Big(1+\frac{s^{d-1}\psi^q(s)}{\psi^q(s-1)}\frac{1}{m+1-V_{s-1}}\Big)^{-\frac{1}{q}}.$$

由于 ψ 满足带有 $\beta=\frac{d-1}{q}$ 的 (3.38)，我们得出关系 (3.40) 也成立。

(iv) 求 $\mathscr{D}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}$ 在情形 $0<p<q\le\infty$。由 (3.7) 和 (3.18),

$$\mathscr{D}_m^{\frac{q-p}{pq}}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}=(V_s-m)\psi^{\frac{pq}{q-p}}(s)+\sum_{n=s+1}^{\infty}\nu_n\psi^{\frac{pq}{q-p}}(n).$$

结合 (3.22) 和 (5.28)，可得

$$\mathscr{D}_m^{\frac{q-p}{pq}}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}\asymp(V_s-m)\psi^{\frac{pq}{q-p}}(s)+(s+1)^{d-1}\psi^{\frac{pq}{q-p}}(s+1).$$

根据 (3.38)，我们看到，对于 $0<p<q<\infty$，关系 (3.42) 成立。 □

5.6 定理 5 的证明

上界估计。在情形 $1\le p\le 2$ 下，由 (2.11)、(4.2) 和 (2.12)，有

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}\ll\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}\ll G_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}\ll G_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_2}\ll\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^2}. \tag{5.64}$$

因此，t 为了得到所需的上界，只需对 $\mathcal{S}^p=\mathcal{S}^2$ 使用（3.28）。

在 $2\le p<\infty$ 情形下，利用关系（2.11）、（4.1）和（2.12），我们得到

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}\ll\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}\ll G_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}\ll G_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^{p'}}\asymp\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^{p'}}, \tag{5.65}$$

由关系（3.28）可类似地得到上界。

下估计。令 $\mathscr{T}_n$、$n\in\mathbb{N}$ 表示所有形如.....的多项式组成的集合

$$\tau_n=\sum_{|k|_\infty\le n}\widehat{\tau}_n(k)e_k,$$

并令 $\mathcal{A}_q(\mathscr{T}_n)$、$0<q\le\infty$ 表示满足 $\|\tau_n\|_{\mathcal{S}^q}\le 1$ 的所有多项式 $\tau_n\in\mathscr{T}_n$ 组成的子集。由 [10], 的定理 5.2 可知，对于任意 $0<q\le\infty$、$1\le p\le\infty$、$n=1$, 2, ... 以及 $m=(2n+1)_2^{\,d-1}$,

$$\sigma_m(\mathcal{A}_q(\mathscr{T}_n))_{L_p}\ge Km^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

对于固定的 $n\in\mathbb{N}$，考虑集合 $\psi(dn)\mathcal{A}_q(\mathscr{T}_n)=\{\tau\in\mathscr{T}_n:\ \|\tau\|_{\mathcal{S}^q}\le\psi(dn)\}$. 由于单调性 ψ，对于任意 $\tau\in\psi(dn)\mathcal{A}_q(\mathscr{T}_n)$ 和 $0<r\le\infty$，我们有

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\Big|\frac{\widehat{\tau}(k)}{\psi(|k\|_r)}\Big|^q\le\sum_{|k|_\infty\le n}\Big|\frac{\widehat{\tau}(k)}{\psi(d|k|_\infty)}\Big|^q\le\sum_{|k|_\infty\le n}\Big|\frac{\widehat{\tau}(k)}{\psi(dn)}\Big|^q\le 1$$

因此， $\psi(dn)\mathcal{A}_q(\mathscr{T}_n)$ 包含于集合 $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\,r}$。根据集合 B 的定义，对于所有 $n=1$，2、..... 以及 $m=(2n+1)_2^{\,d-1}$，我们得到

$$\sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \geq \sigma_m(\psi(dn)\mathcal{A}_q(\mathscr{T}_n))_{L_p} \gg \psi(dn)m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \gg \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

考虑到关系 (2.11)、量 σ_m 的单调性以及包含关系 $\psi \in B$，可知对所有 $1 \leq p \leq \infty$,

$$G_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \gg \sigma^{\perp}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \gg \sigma_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \gg \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

在情形 $2<p<\infty$下，对于量 $\sigma^{\perp}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}$和 $G_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p}$，这个估计可以改进。为此，考虑函数

$$h_1 = \sum_{|k|_r \leq n_m} \widehat{h}_1(k)e_k = \mathfrak{h}_1 \sum_{|k|_r \leq n_m} e_k,$$

其中 $\mathfrak{h}_1^{-q}(m) := \sum_{|j|_r \leq n_m} \psi^{-q}(|j|_r)$，$n_m := n_m(r,d) = [(\overline{2m M_{r,d}})^{\frac{1}{d}}]$，而 $M_{r,d}$是在 (3.20) 中定义的常数。显然，$f_1 \in \mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$，并且由 (5.11) 和 (3.25) 得

$$\mathfrak{h}_1^{-q}(m) \asymp \sum_{j=1}^{n_m} \frac{j^{d-1}}{\psi^q(j)} \asymp \frac{n_m^d}{\psi^q(n_m)} \asymp \frac{m}{\psi^q(m^{\frac{1}{d}})}.$$

对任意集合 $\gamma_n \subset \mathbb{Z}^d$，利用尼科尔斯基不等式 [26] 和 (3.21)，可得

$$\left\| h_1 - \sum_{k\in\gamma_m} \widehat{h}_1(k)e_k \right\|_{L_p} \gg \mathfrak{h}_1(m)m^{-\frac{1}{p}} \left\| \sum_{|k|_1 \leq n_m,\, k\notin\gamma_m} e_k \right\|_{L_\infty} \asymp \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

因此，对所有 $2 \leq p < \infty$，以下估计成立:

$$G_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \gg \sigma^{\perp}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \gg \sigma^{\perp}_m(h_1)_{L_p} \gg \psi(m^{\frac{1}{d}})m^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

□

5.7 定理6的证明

定理6的证明与定理6中上界估计的证明相似1 [10]。证明中用到了 [10]中的以下引理。

引理2. [10] 对于任意 $0<q\leq\infty$, $n=1,2,..,$ 和 $1\leq m\leq(2n+1)^d$,

$$\sigma_m(\mathcal{A}_q(\mathscr{T}_n))_{L_\infty} \leq Cm^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}L(n^d/m), \quad 0<q\leq 1, \tag{5.66}$$

其中 $L(x) = (1+(\ln x)_+)^{1/2}$ 并且

$$\sigma_m(\mathcal{A}_q(\mathscr{T}_n))_{L_\infty} \leq Cn^{d-\frac{d}{q}}m^{-\frac{1}{2}}L(n^d/m), \quad 1<q\leq\infty, \tag{5.67}$$

其中 C 仅取决于 q 和 d。

对于任意 $f \in \mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}$，我们采用分解

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j, \qquad \text{where} \quad f_j := \sum_{2^{j-1} \le |k|_\infty < 2^j} \widehat{f}(k) e_k, \quad j \ge 1, \quad f_0 := \widehat{f}(0).$$

我们注意到

$$f_j / \psi(2^{j-1}) \in \mathcal{A}_q(\mathscr{T}_{2^j}), \quad j = 1, 2, \dots \tag{5.68}$$

对于任意 $N = 1, 2, \dots$，我们按如下方式逼近 f。令 N_0 为满足条件 $m_j := [(j-N)^{-2} 2^{Nd}] \ge 1$ 的最大整数 j，即 $N_0 = [2^{\frac{Nd}{2}} + N]$。若 $j \le N$，则令 $P_j := f_j$。若 $N < j \le N_0$，则根据 (5.66)、(5.67) 和 (5.68)，存在一个多项式 $P_j \in \Sigma_{m_j}$，使得

$$\|f_j - P_j\|_{L_p} \ll m_j^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} L(2^{jd}/m_j) \psi(2^{j-1}), \quad 0 < q \le 1. \tag{5.69}$$

and

$$\|f_j - P_j\|_{L_p} \ll 2^{j(d - \frac{d}{q})} m_j^{-\frac{1}{2}} L(2^{jd}/m_j) \psi(2^{j-1}), \ 1 < q < \infty. \tag{5.70}$$

令 $P = \sum_{j=0}^{N_0} P_k$。

由于

$$(2 \cdot 2^N + 1)^d + \sum_{j=N+1}^{N_0} (j-N)^{-2} 2^{Nd} \le a 2^{Nd},$$

其中 a 仅依赖于 d，则 P 是至多 $a2^{Nd}$ 个指数函数 e_k 的线性组合。因此，P 属于 $\Sigma_{a2^{Nd}}$。此外，我们还有

$$\|f - P\|_{L_p} \le \sum_{j=N+1}^{N_0} \|f_j - P_j\|_{L_p} + \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \|f_j\|_{L_p} =: S_1 + S_2. \tag{5.71}$$

对于所有 $x \ge 1$，都有 $[x] \ge x/2$。因此，对于充分大的 N 和 $N < j \le N_0$，根据 $L(x)$ 的定义，我们有

$$L(2^{jd}/m_j) \le (1 + \ln(2^{d(j-N)+1}(j-N)^2))^{\frac{1}{2}} \ll (j-N)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.72}$$

首先，考虑情形 $0 < q \le 1$。仿照 (5.12) 中上估计的证明，容易证明：若函数 ψ 属于集合 B，且对所有大于某个数 t_0 的 t，ψ 都是凸函数，并满足带有固定 $\beta \ge 0$ 的条件 (3.26)，那么对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 以及充分大的 $t > N$，函数 $h_{\alpha,\beta}(t) := 2^{\beta t}(t-N)^{\alpha} \psi(2^{t-1})$ 也趋于零，此外

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} 2^{\beta j} (j-N)^{\alpha} \psi(2^{j-1}) \ll 2^{\beta N} \psi(2^N). \tag{5.73}$$

在这种情形下，$\beta = 0$。由 (5.69)、(5.72) 和 (5.73)，我们得到 (5.71) 中第一项和 S_1 的估计：

$$S_1 \ll \sum_{j=N+1}^{\infty} (j-N)^{2(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} 2^{-Nd(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} (j-N)^{\frac{1}{2}} \psi(2^{j-1}) \ll$$

$$\ll 2^{-N(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})} \sum_{j=N+1}^{\infty} (j-N)^{\frac{2}{q}-\frac{1}{2}} \psi(2^{j-1}) \ll 2^{-N(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})} \psi(2^N). \tag{5.74}$$

为估计 S_2，注意到由 (5.68)

$$S_2 \le \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \|f_j\|_{L_\infty} \le \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \Big(\sum_{2^{j-1} \le \|k\|_\infty < 2^j} |\widehat{f}(k)| \Big)$$

$$\le \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \|f_j\|_{\mathcal{S}^q} \ll \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \psi(2^{j-1}) \ll \psi(2^{N_0}).$$

此外，注意到如果对于所有大于某个数 t_0 的 t，ψ 是凸的且满足条件 (3.26)，那么对于任意 $\alpha > 0$，都有 $\psi(2^{N(\alpha+1)}) \ll \psi(2^N) 2^{-N\alpha}$。

根据 N_0 的定义，我们有 $N_0 \ge N + 2^{\frac{Nd}{2}} - 1$。由此可知，如果 N 足够大（仅取决于 d 和 q），则 $N_0 \ge N(1 + \frac{d}{q} - \frac{d}{2})$。因此，

$$S_2 \ll \psi(2^{N(1+\frac{d}{q}-\frac{d}{2})}) \ll 2^{-N(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})} \psi(2^N).$$

在 (5.71) 中使用上述结果和 (5.74)，可得

$$\sigma_{a2^{Nd}}(f)_{L_p} \le \|f - P\|_{L_p} \ll 2^{-N(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})} \psi(2^N). \tag{5.75}$$

在 $1 < q < \infty$ 的情形下，条件 (3.26) 在 $\beta = d - \frac{d}{q}$ 下成立。由 (5.70)、(5.72) 和 (5.73)，可得

$$S_1 \ll 2^{-\frac{N}{2}} \sum_{j=N+1}^{\infty} 2^{j(d-\frac{d}{q})} (j-N)^{\frac{3}{2}} \psi(2^{j-1}) \ll \psi(2^N) 2^{-N(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})}. \tag{5.76}$$

为估计 S_2，我们使用 H¨older 不等式、(5.68)、(5.73) 以及不等式 $N_0 \ge N + 2^{\frac{Nd}{2}} - 1$ 和 $h_{\alpha,\beta}(N_0) \le h_{\alpha,\beta}(N+1)$，其中 $\alpha = 1$ 和 $\beta = d - \frac{d}{q}$，

$$S_2 \le \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \|f_j\|_{L_\infty} \le \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \psi(2^{j-1}) \Big(\sum_{2^{j-1} \le \|k\|_\infty < 2^j} \Big| \frac{\widehat{f}(k)}{\psi(2^{j-1})} \Big| \Big) \le$$

$$\le \sum_{j=N_0+1}^{\infty} \psi(2^{j-1}) 2^{(j-1)(d-\frac{d}{q})} \ll \psi(2^{N_0}) 2^{N_0(d-\frac{d}{q})} \ll \psi(2^N) 2^{N(\frac{d}{2}-\frac{d}{q})}.$$

将此结果和 (5.76) 代入 (5.71)，可知在这种情形下，关系 (5.75) 也成立。因此，由 σ_m 的单调性和包含关系 $\psi \in B$可得 (3.26) 中的上估计。 □

5.8 定理 7 的证明

上界估计。设 $m = m(s) = V_s - c_s$, $1 \le c_s \le c_\circ$ 那么，由于关系 (5.64) 和 (5.65) 以及估计 (3.46)，可知在这种情形下，对于任意 $0 < q \le \infty$ 和 $1 \le p < \infty$

$$\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \ll G_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \ll \tfrac{\psi(s)}{m^{\frac{d-1}{qd}}}. \tag{5.77}$$

如果 $m = m(s) = V_{s-1} + c_s$、 $0 \le c_s \le c$，且 $0 < q < p' < \infty$，或者如果 $m = m(s) = V_{s-1}$ 且$0 < p' = q < \infty$，那么根据（5.64）、（5.65）和（3.51）可类似地得到上估计

$$\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \ll G_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \ll \psi(s). \tag{5.78}$$

下界估计。令 $\{k_1^*, k_2^*, \ldots\}$ 为来自 $\mathbb{Z}^d$ 的向量的一个重排，使得

$$|\Psi_{k_j^*}| = \bar{\Psi}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{5.79}$$

其中，与上文一样， $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是系统 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 的非递增重排。

考虑函数

$$h_2 = \sum_{j=1}^{m+1} \widehat{h}_3(k_j^*) e_{k_j} = \mathfrak{h}_2(m) \sum_{j=1}^{m+1} e_{k_j}, \qquad \text{where} \quad \mathfrak{h}_2^{-q}(m) = \sum_{i=1}^{m+1} |\Psi_{k_i^*}|^{-q}.$$

容易证明　注意到 $h_2 \in \mathcal{F}_{q,\,r}^{\psi}$ 并且由 (5.79) 和 (3.18)，对于 $m \in [V_{s-1}, V_s)$，我们有

$$\mathfrak{h}_2^{-q}(m) = \sum_{j=1}^{m+1} \bar{\Psi}_j^{-q} \asymp \sum_{k=1}^{s-1} \tfrac{V_k - V_{k-1}}{\psi^q(k)} + \tfrac{m+1-V_{s-1}}{\psi^q(s)}, \tag{5.80}$$

其中，根据 (3.22) 和 (5.27),

$$\sum_{k=1}^{s-1} \tfrac{V_k - V_{k-1}}{\psi^q(k)} \asymp \sum_{k=1}^{s-1} \tfrac{k^{d-1}}{\psi^q(k)} \asymp \tfrac{(s-1)^{d-1}}{\psi^q(s-1)}. \tag{5.81}$$

结合 (5.80) 和 (5.81)，并考虑到 (3.38)，我们得出

$$\mathfrak{h}_2^{-q}(m) \asymp \tfrac{m+1-V_{s-1}}{\psi^q(s)} \left(1 + \tfrac{(s-1)^{d-1}\psi^q(s)}{\psi^q(s-1)(m+1-V_{s-1})}\right) \asymp \tfrac{m+1-V_{s-1}}{\psi^q(s)}.$$

那么，对于任意集合 $\gamma_m \in \Gamma_m$，我们有

$$\Big\| h_2 - \sum_{k\in\gamma_m} \widehat{h}_2(k) e_k \Big\|_{L_p} = \mathfrak{h}_2(m) \Big\| \sum_{j\in[1,m+1]\setminus\gamma_m} e_{k_j^*} \Big\|_{L_p} \asymp \tfrac{\psi(s)}{(m+1-V_{s-1})^{\frac{1}{q}}}.$$

因此，对于所有 $1 \le p < \infty$，以下估计成立：

$$G_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \gg \sigma_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \gg \sigma_n^{\perp}(h_2)_{L_p} \gg \tfrac{\psi(s)}{(m+1-V_{s-1})^{\frac{1}{q}}}. \tag{5.82}$$

若 $m = m(s) = V_{s-1} + c_s$, $0 \le c_s \le c$，则关系 (5.82) 和 (5.78) 右端的量等价。若 $m = m(s) = V_s - c_s$, $1 \le c_s \le c$，则根据 (3.22)、(3.23) 和 (3.24)，关系 (5.82) 和 (5.77) 右端的量等价。

□

5.9 定理 8 的证明

定理 8 的证明与定理 7 类似。 $\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}$ 和 $G_n(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}$ 的上界估计由 (5.64)、(5.65) 和 (3.36′) 得出，并考虑 (3.33)。

与（5.64）和（5.65）类似，我们有

$$\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \le \mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_2} = \mathscr{D}_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^2}, \qquad 1 \le p \le 2, \tag{5.83}$$

and

$$\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{L_p} \le \mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^{p'}} = \mathscr{D}_m(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^{p'}}, \qquad 2 \le p < \infty. \tag{5.84}$$

因此，为了得到 $\mathscr{D}_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)}$ 的上界估计，只需使用估计（5.83）、（5.84）、（3.27）和（3.35′），并考虑（3.33）。

为了得到下界估计，考虑集合 $\mathbb{Z}$ 的一个重排 $\{k_1^*, k_2^*, \ldots\}$，使得

$$|\Psi_{k_j^*}| = \bar{\Psi}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{5.85}$$

wher $\bar{\ }$ $\bar{\ }$e $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是系统 $\{|\Psi_k|\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的非递增重排 .

对于给定的 $m \in \mathbb{N}$，考虑函数

$$h_3 = \sum_{j=1}^{m+1} \widehat{h}_3(k_j^*) e_{k_j} = \mathfrak{h}_3(m) \sum_{j=1}^{m+1} e_{k_j}, \qquad \text{where} \quad \mathfrak{h}_3^{-q}(m) = \sum_{j=1}^{m+1} |\Psi_{k_i^*}|^{-q}.$$

显然， $h_3 \in \mathcal{F}_q^{\psi}$，并且根据 (5.85)、(3.18)、(5.17) 和 (3.33)，可知

$$\mathfrak{h}_3^{-q}(m) \asymp \sum_{j=1}^{m+1} \bar{\Psi}_j^{-q} \asymp \sum_{k=1}^{[\frac{m+1}{2}]} \psi^{-q}(k) \asymp \tfrac{[\frac{m+1}{2}]\alpha(\psi,[\frac{m+1}{2}])}{\psi^s([\frac{m+1}{2}])} \asymp \psi^{-q}([\tfrac{m+1}{2}]).$$

因此，对于任意集合 $\gamma_m \in \Gamma_m$，我们有

$$\Big\|h_3 - \sum_{k\in\gamma_m} \widehat{h}_3(k) e_k\Big\|_{L_p(\mathbb{T}^1)} = \mathfrak{h}_3(m) \Big\| \sum_{\substack{j=1 \\ k_j^* \notin \gamma_m}}^{n+1} e_{k_j^*} \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([\tfrac{m+1}{2}])$$

且必要的下估计成立：

$$\sigma_m^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{L_p(\mathbb{T}^1)} \gg \sigma_m^{\perp}(h_3)_{L_p(\mathbb{T}^1)} \gg \psi([\tfrac{m+1}{2}]) \asymp \psi(\tfrac{m}{2}).$$

□

5.10 定理 9 的证明

要得到 (4.12) 和 (4.13) 中的上界估计，只需使用关系 (5.83)、(5.84)、(3.37) 和 (3.47)。要得到下界估计，对于任意集合 $\gamma_m \in \Gamma_m$，我们选择任意向量 $k_0 = k_0(\gamma_m) \in \mathbb{Z}^d \setminus \gamma_m$，使得

$$|\psi(|k_0|_r)| = \bar{\Psi}_{\gamma_m}(1) = \sup_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\gamma_m} |\Psi_{\gamma_m}(k)| = \sup_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\gamma_m} |\psi(|k|_r)|,$$

其中，与第 3 节中一样，系统 $\Psi_{\gamma_m} = \{\Psi_{\gamma_m}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 由（3.3）定义，而 $\bar{\Psi}_{\gamma_m} = \{\Psi_{\gamma_m}(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 是系统 $\{|\Psi_{\gamma_m}(k)|\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$的非递增重排。

那么，函数 $h_4 := \psi(|k_0|_r)e_{k_0}$ 属于集合 $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$，并且

$$\mathcal{E}_{\gamma_m}(h_4)_{L_p} = \left\|\psi(|k_0|_r)e_{k_0}\right\|_{L_p} = \psi(|k_0|_r) = \bar{\Psi}_{\gamma_m}(1).$$

考虑到（3.18）、（3.23）、（3.24）和（3.25），我们得到所需的下估计：

$$\mathcal{D}^{\perp}_m(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{L_p} \geq \inf_{\gamma_m\in\Gamma_m} \mathcal{E}_{\gamma_m}(h_4)_{L_p} = \inf_{\gamma_m\in\Gamma_m} \bar{\Psi}_{\gamma_m}(1) = \bar{\Psi}_{m+1} = \psi(s).$$

□

5.11 定理 10 的证明

上界估计 由关系式 (5.83)、(5.84) 以及估计式 (3.27) 得出。

当 $0 < q \leq \frac{p}{p-1}$ 时，下估计 由 (4.12) 得出，同时考虑关系式 (3.23)、(3.24) 以及集合 B 的定义。当 $\frac{p}{p-1} < q \leq \infty$ 时，(4.14) 中的下估计 由 (4.5) 得出。

□

6 致谢

这项工作部分得到了西蒙斯基金会资助（SFI-PD-Ukraine- 00014586，A.Sh.）。

参考文献

[1] Abdullayev F. G., Ozkartepe P., Savchuk V. V., Shidlich A. L. 多元函数在 $\mathcal{S}^p$ 空间中的正逆逼近定理的精确常数。*Filomat*, 33 (5), 1471-1484 (2019)。DOI: 10.2298/FIL1905471A。

[2] Abdullayev F., Serdyuk A., Shidlich A. 由广义光滑模的主函数定义的函数类的宽度，在空间 $\mathcal{S}^p$中。《乌克兰数学杂志》，73（6），841–858（2021年）。DOI: 10.1007/s11253-021-01963-6

[3] Abdullayev F., Chaichenko S., Shidlich A. Musielak-Orlicz 型空间中函数的正逆逼近定理。《数学不等式与应用》，24（2），323–336（2021年）。DOI: 10.7153/mia-2021-24-23
[4] Barron R. S形函数叠加的通用逼近界。《IEEE信息论汇刊》，39（3），930–945（1993年）。DOI: 10.1109/18.256500[5] Chaichenko S., Savchuk V., Shidlich A. Orlicz 型空间中利用线性求和方法逼近函数。《数学科学杂志》（美国），249（5），705–719（2020年）。DOI: 10.1007/s10958-020-04967-y[6] Chaichenko S. O., Shidlich A. L., Shulyk T. V. 几乎周期函数的 Besicovitch-Musielak-Orlicz 空间中的正逆逼近定理。《乌克兰数学杂志》，74（5），801–819（2022年）。DOI: 10.1007/s11253-022-02102-5[7] Chaichenko S. O., Shidlich A. L. 变指数加权 Orlicz 型空间中利用线性方法逼近函数。《数学研究》，32（2），70–87（2024年）。DOI: 10.15421/242420
[8] DeVore R. A. 非线性逼近。《数值学报》，7，51–150（1998年）。DOI: 10.1017/S0962492900002816[9] DeVore R., Petrova G., Wojtaszczyk P.关于广义 Wiener 类的最佳 n项逼近的注记。载于：DeVore, R.、Kunoth, A.（编），《多尺度、非线性与自适应逼近 II》。施普林格，Cham，2024年。DOI: 10.1007/978-3-031-75802-7 11[10] DeVore R. A., Temlyakov V. N. 利用三角和进行非线性逼近。《傅里叶分析与应用杂志》，2（1），29–48（1995年）。DOI: 10.1007/s00041-001-4021-8[11] Dung, D., Temlyakov, V. N. and Ullrich, T. 《双曲十字逼近》。数学高级课程——巴塞罗那 CRM，Birkh¨aauser/施普林格，Cham，2018年。DOI: 10.1007/978-3-319-92240-9[12] Fang G., Qian L.不同计算设置下对角算子的逼近特征。《逼近理论杂志》，140（2），178–190（2006年）。DOI: 10.1016/j.jat.2005.12.005。[13] Fang G., Qian L. 不同计算设置下对角算子在 N宽度上的最优算法。《理论与应用分析》，23（2），180–187（2007年）。DOI: 10.1007/s10496-007-0180-z。[14] Gruber P. M. 《凸几何与离散几何》。数学科学基础丛书，336，柏林、海德堡 / 施普林格，2007年。DOI: 10.1007/978-3-540-71133-9[15] Jahn T., Ullrich T., Voigtlaender F. 通过 l^1最小化计算光滑类的采样数。《复杂性杂志》，79，101786（2023年）。DOI: 10.1016/j.jco.2023.101786。[16] Kahane J.-P., S´eries de Fourier absolument convergentes。施普林格，柏林、海德堡，1970年。DOI: 10.1007/978-3-662-59158-1
[17] Kolomoitsev Y., Lomako T., Tikhonov S. 加权 Wiener 空间中的稀疏网格逼近。《傅里叶分析与应用杂志》，29（2），19（2023年）。DOI: 10.1007/s00041-023-09994-2[18] Li R. S., Liu Y. P. 由某类乘子定义的若干函数类的最佳 m项单侧三角逼近。《数学学报（英文版）》，26（5），975–984（2010年）。DOI: 10.1007/s10114-009-6478-3

[19] Moeller M., Stasyuk S., Ullrich T. 一致范数下的高维稀疏三角逼近及其在采样恢复中的应用。Arxiv: 2407.15965, 2024年。DOI: 10.48550/arXiv.2407.15965.[20] Moeller M., Stasyuk S., Ullrich T.加权 Wiener 空间中的最佳 m 项三角逼近及其应用。Arxiv: 2508.07336v2, 2025。DOI: 10.48550/arXiv.2508.07336.[21] Móricz F. 绝对收敛傅里叶级数与函数类。《傅里叶分析与应用杂志》, 324 (2), 1168-1177 (2006年)。DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.12.051[22] Móricz F. 绝对收敛傅里叶级数与函数类。II.《傅里叶分析与应用杂志》, 342 (2), 1246-1249 (2008)。DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.12.055
[23] Móricz F. 函数的绝对收敛多重傅里叶级数与乘法 Lipschitz 类。Acta Mathematica Hungarica, 121 (1-2), 1-19 (2008)。DOI: 10.1007/s10474-008-7164-0[24] Móricz F., Sáfár Z.绝对收敛双重傅里叶级数、扩大的 Lipschitz 类和二元函数的 Zygmund 类。《东部逼近杂志》, 16 (1), 1-24 (2010年)。
[25] Nguyen V. K., Nguyen V. D. 对角算子的最佳 n 项逼近及其在混合光滑度函数空间中的应用。《数学分析》, 48 (4) (2022年), 1127-1152。DOI: 10.1007/s10476-022-0169-z[26] Nikol'skii S. M. 有限次数整函数的不等式及其在多变量可微函数理论中的应用。《美国数学会译丛：第二辑》, 80, 1-38 (1969), 译自《V. A. Steklov 数学研究所学报》, 38, 244-278 (1951)。[27] Pinkus, A. n逼近理论中的宽度。施普林格出版社，柏林-海德堡-纽约-东京，1985。DOI: 10.1007/978-3-642-69894-1[28] Romanyuk, A. S. 多元周期函数类的逼近特征。《乌克兰国家科学院数学研究所学报》, 40, 乌克兰国家科学院数学研究所，基辅，2012。[29] Romanyuk V. S. 多重序列空间中的非线性逼近。载于：《函数逼近理论及相关问题》 *[*乌克兰语*]*, 《乌克兰国家科学院数学研究所汇刊》, 12 (4), 253-261 (2015)。
[30] Savchuk V. V., Shidlich A. L. 在空间 S^p中用线性方法逼近多元函数。《数学科学学报》（塞格德）, 80 (3-4), 477-489 (2014)。DOI: 10.14232/actasm-012-837-8[31] Serdyuk A. S., Shidlich A. L. Besicovitch-Stepanets 空间中几乎周期函数逼近的直接与逆定理。《喀尔巴阡数学出版物》, 13 (3), 687-700 (2021年)。DOI: 10.15330/cmp.13.3.687-700[32] Serdyuk A. S., Shidlich A. L. 可和周期函数与几乎周期函数集合上离散空间度量中的逼近论现实问题。《乌克兰数学杂志》, 76 (11), 1858-1900 (2025)。DOI: 10.1007/s11253-025-02428-w[33] Shidlich A. L. 函数类$\mathcal{F}_q^{\psi},_r$ 的非线性逼近：多元函数的积分度量。载于：《力学与计算数学中的数学问题》, 《乌克兰国家科学院数学研究所汇刊》, 13 (3), 256-274 (2016)。

[34] Shydlich A. L. 某些泛函的阶等式及其在最佳 n 项逼近与宽度估计中的应用。《乌克兰数学杂志》, 61 (10), 1649-1671 (2009)。DOI: 10.1007/s11253-010-0304-z[35] Shydlich A. L. 函数类 n的最佳 $\mathcal{F}_q^\psi$ 项正交三角逼近的阶估计∞ , 在空间 $L_p(\mathbb{T}^d)$ 中。载于: 《函数逼近理论及相关问题》 /乌克兰语/, 《乌克兰国家科学院数学研究所汇刊》, 8 (1), 224-243 (2011)。[36] Shydlich A. L. 某些逼近特征的阶估计, 载于: 《函数逼近理论及相关问题》 /乌克兰语/。《乌克兰国家科学院数学研究所汇刊》, 10 (1), 304-337 (2013)。[37] Shydlich A. L. 以之表示函数类$\mathcal{F}_q^\psi$,r 的最佳 n 项逼近的泛函阶估计。载于: 《函数逼近理论及相关问题》 /乌克兰语/,《乌克兰国家科学院数学研究所汇刊》, 11 (3), 287-314 (2014)。
[38] Stechkin S. B. 关于正交级数的绝对收敛。I. Matematicheskii Sbornik (Novaya Seriya), 29 (71), (1), 225-232 (1951)。[39] Stechkin S. B. 关于傅里叶级数的绝对收敛。Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya, 17 (2), 87-98 (1953)。[40] Stechkin S. B. 关于傅里叶级数的绝对收敛。II. Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya, 19, 4 (1955), 221-246。
[41] Stechkin S. B. 关于正交级数的绝对收敛。Doklady Akademii Nauk SSSR (Novaya Seriya), 102, 37-40 (1955)。[42] Stepanets A. I. 凸函数的若干命题。《乌克兰数学杂志》, 51 (5), 764-780 (1999)。DOI: 10.1007/BF02591710[43] Stepanets A. I. 空间 S_φ^p 在不同度量下的逼近特征。《乌克兰数学杂志》, 53 (10), 1340-1374 (2001)。DOI: 10.1023/A:1013307912783[44] Stepanets A. I. 逼近理论方法。VSP, 莱顿-波士顿, 2005。DOI: 10.1515/9783110195286[45] Stepanets A. I.线性空间中的逼近论问题。《乌克兰数学杂志》, 58 (1), 54-102 (2006)。DOI: 10.1007/s11253-006-0052-2[46] Stepanets A. I., Serdyuk A. S. 空间 $\mathcal{S}^p$中函数逼近理论的直接与逆定理。《乌克兰数学杂志》, 54 (1), 322-338 (2002)。DOI: 10.1023/A:1019701805228[47] Stepanets A. I., Shidlich A. L. 用有限秩积分逼近积分的最佳逼近。《逼近理论杂志》, 162 (2), 323-348 (2010)。DOI: 10.1016/j.jat.2009.05.007
[48] Stepanets A.I., Shidlich A. L. 非负函数积分的极值问题, 《数学消息》, 74 (3), 607-660 (2010)。DOI: 10.1070/IM2010v074n03ABEH002500[49] Stepanets' O. I., Shydlich A. L. 空间S_p^ϕ中用 Λ 方法进行的最佳 n 项逼近。《乌克兰数学杂志》, 55 (8), 1334-1358 (2003)。DOI: 10.1023/B:UKMA.0000010763.01827.6f[50] Szász O.关于三角级数的收敛与可和性。《美国数学杂志》, 61 (1), 575-591 (1942)。DOI: 10.2307/2371705

[51] Sunouchi G.傅里叶级数的收敛判据。东北数学杂志 (第二辑)，3 (2)，216-219 (1951)。DOI: 10.2748/tmj/1178245525[52] Sunouchi G.傅里叶级数的收敛判据。东北数学杂志 (第二辑)，4 (2)，187-193 (1952)。DOI: 10.2748/tmj/1178245421[53] Temlyakov V. N. 贪心算法与 m项三角逼近。*Constractive Approx-imation*，14 (4)，569-587 (1998)。DOI: 10.1007/s003659900090
[54] Temlyakov V. N. 周期函数逼近。计算数学与分析丛书，纽约州科马克，Nova Science Publ.，1993年。[55] Temlyakov V. N. 贪心逼近。剑桥应用与计算数学专著丛书，第20卷。剑桥大学出版社，剑桥，2011年。DOI: 10.1017/CBO9780511762291[56] Timan M. P.，Shavrova O. B. 空间 S_m^p 和 L_p^m 中多变量周期函数的线性Marcinkiewicz型算子。载于：逼近理论及相关问题 *[乌克兰文]*，《乌克兰国家科学院数学研究所汇刊》，4 (1)，352-375 (2007年)。[57] Vakarchuk S. B. 空间 S^p、 $1 \leq p < \infty$中函数类的Jackson型不等式及其宽度的精确值。《乌克兰数学杂志》，56 (5)，718-729 (2004)。DOI: 10.1007/s11253- 005-0070-5[58] Vakarchuk S. B.，Shchitov A. N. 关于空间 S^p、 $1 \leq p < \infty$中函数逼近理论的一些极值问题。《乌克兰数学杂志》，58 (3) (2006年)，340-356。DOI: 10.1007/s11253-006-0070-0[59] Voigtlaender F. L_p傅里叶分析Barron空间的采样数。*arXiv: 2208.07605*，2022年。DOI: 10.48550/arXiv.2208.07605[60] Volosivets S. 由Vilenkin-傅里叶系数定义的Orlicz-Stepanets空间中的逼近。数学科学杂志（美国），290 (2)，287-300 (2025)。DOI: 10.1007/s10958-025-07607-5[61] Wiener N. 傅里叶积分及其若干应用。剑桥大学出版社，剑桥，1933 DOI: 10.1017/CBO9780511662492[62] Wang X. 广义单位球的体积。数学杂志，78 (5) (2005)，390-395。DOI: 10.2307/30044198