arXiv:2601.01189v1 [math.PR] 3 Jan 2026

# 部分观测相互作用霍克斯过程系统的中心极限定理 I：次临界情形

CHENGUANG LIU, LIPING XU, AN ZHANG

Abstract. 我们考虑一个由 $N$ 霍克斯过程构成的系统，并观测一个规模为 $K \leq N$ 的子群体截至时间 $t$的行为，其中 $K$ 很大。每一对个体之间的影响关系由独立同分布的《伯努利》($p$)随机变量建模，其中 $p \in [0,1]$ 是未知参数。每个个体以 $baseline$ 速率 $\mu > 0$ 行动，此外，还以$excitation$速率行动，该速率具有如下形式： $N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\int_0^t \phi(t-s)\,dZ^{j}_{,\ s}{}^{N}$，它取决于所有对该个体有影响的个体过去的行为，并按 $N^{-1}$ 缩放（即平均场类型）；较早行为的影响则通过记忆核 $\phi$折减：$\mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$。这里， $\mu$ 和 $\phi$ 被视为干扰参数。本文旨在证明在次临界条件 $\Lambda p < 1$下，针对 $p$ 的估计量满足中心极限定理；该估计量由 [21], 提出。

## Contents

1. 引言 2 1.1. 设定 3 1.2. 假设 4 1.3. 模型 4 1.4. 主要目标 4 1.5. 符号说明 4 2. 主要结果 5 2.1. 主要结果 5 2.2. 三个估计量的启发式说明 7 2.3. 论文结构 7 3. 预备知识 7 3.1. 一些符号 7 3.2. 一些辅助过程 9 4. 随机矩阵的一些极限定理 10 4.1. 第一估计量 10 4.2. 第二估计量 10 4.3. 第三估计量 11 5. 第一和第二估计量的极限定理 12 6. 第三估计量的极限定理 21 6.1. 估计量的一些小项 23 6.2. $\mathbb{X}^{N}_{,\ \Delta_t}{}^{K}{}_{t\ ,\ ,\ v}$ $^{28}$的收敛 6.3. 定理 6.1 的证明 35 7. 主要结果的证明 35

2020 *Mathematics Subject Classification.* 62M09, 60J75, 60K35.*Key words and phrases.*多元霍克斯过程，点过程，统计推断，相互作用图，随机相互作用粒子，平均场极限。

附录 A. 引理 3.4 的证明 A.1. 引理 3.4 (i) 的证明 A.2. 引理 3.4 (ii) 的证明 A.3. 引理 3.4 (iii)&(iv) 的证明 附录 B. 引理 4.3 的证明 B.1. 引理 4.3 (i) 的证明 B.2. 引理 4.3 (ii) 的证明 B.3. 引理 4.3 (iii) 的证明 B.4. 引理 4.3 (iv) 的证明 附录 C. $\phi$的卷积 附录 D. 引理 6.4 和引理 6.6 的证明 D.1. 引理 6.4 (i) 的证明 D.2. 引理 6.4 (ii) 的证明 D.3. 引理 6.4 (iii) 的证明 D.4. 引理 6.6 (i)&(ii) 的证明 D.5. 引理 6.6 (iii)&(iv) 的证明 D.6. 引理 6.6 (v) 的证明 致谢 参考文献
39 39 40 41 43 43 44 46 46 47 48 48 48 49 51 53 53 56 56

## 1. Introduction

霍克斯过程最初由 Hawkes 于 1971年 提出，现已广泛应用于神经科学、金融、社交网络交互和犯罪学等多个领域（例如，参见 [1, 4, 5, 15, 23, 24, 30, 32, 33, 35] ，其中列举的文献并不全面）。从数学角度来看，大量理论文献致力于研究霍克斯过程及其推广（例如，参见 [2, 6, 7, 8, 11, 12, 18, 20, 22, 27, 34] ，其中列举的文献并不全面）。

关于霍克斯过程的统计推断，大多数研究聚焦于渐近性质为 $t \to \infty$ 的固定有限维情形（即固定的 $N$）。对于参数模型，Ogata[26] 研究了平稳点过程的最大似然估计量。在 Bacry-Muzzy[3], Delattre 等人 [14], 、Hansen 等人 [16], 和 Reynaud-Bouret 等人 [29, 30, 31], 的研究中，考虑了以下系统的非参数估计：对于固定的 $N \geq 1$，和 $i,\ j = 1,$ ……，$N$，计数过程（$Z^{i,\ }{}_s{}^N$）$_{i=1\ldots N,\ 0\leq s\leq t}$ 由其强度过程（$\lambda^{i,\ }{}_s{}^N$）$_{i=1\ldots N,\ 0\leq s\leq t}$，定义如下

$$\lambda_t^{i,N} := \mu_i + \sum_{j=1}^{N} \int_0^{t-} \phi_{ij}(t-s) dZ_s^{j,N}, \tag{1}$$

对于 $\mu_i > 0$ 和 $\phi_{ij}$： $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是可测且局部可积的。他们给出了 $\mu_i$ 以及函数 $\phi_{ij}$. 的估计量。在 [28], 中，Rasmussen 考虑了一维系统的贝叶斯推断：计数过程 $(Z_s)_{0\leq s\leq t}$ 由其形式如下的强度过程 $(\lambda_s)_{0\leq s\leq t}$决定

$$\lambda_t := \mu_t + \int_0^{t-} \phi(t-s) dZ_s, \tag{2}$$

其中速率 $\mu_t$ 取决于时间 $t$.

然而，在实际应用中，通常有必要研究系统中大量测量组件之间的相互作用。例如，在神经科学中，所涉及的神经元数量通常极其庞大。因此，自然会考虑一种双重渐近情形，即 $t \to \infty$ 和 $N \to \infty$均成立。对此情形的研究仍然有限。在 [13], ，Delattre 和 Fournier 研究了一种图模型，其中包含 $N$ 个霍克斯点过程，过程之间以概率 $p$发生两两相互作用。他们基于对整个系统 $(Z^i_s{}^N)_{i=1\ldots N、\ 0\le s\le t}$的观测，提出了一个用于 $p$ 的估计量，并给出了明确的速率 $N^{-1/2} + N^{1/2}m_t^{-1}$（允许任意小的损失），其中 $m_t$ 表示每个点过程的平均事件数。随后，Liu [21]在与 [13] 相同的设定下，研究了同一估计 $p$ 的问题，但仅使用部分信息，具体而言，是从 $K$ 个霍克斯过程中获得的信息，其中 $K \le N$。作者证明，在某个 $q > 3$满足条件 $(H(q))$ 时，用于 $p$ 的估计量 $\hat{}p_{N,K,t}$ 的收敛速率为$K^{-1/2} + N/(K^{1/2}m_t) + N/(Km_t^{1/2})$。最近，Chevallier、L¨ocherbach 和 Ost [9] 研究了一个由 $N$ 个相互作用的 $\{0,1\}$值链组成的系统（而非霍克斯点过程），其中链之间在底层 Erd¨os-R´enyi 随机图上以未知概率 $p$ 发生二元相互作用。通过分析定义该系统向后再生表示的合并随机游走，他们证明，未知连接概率 $p$ 可以通过计算高效的估计量来估计，其收敛速率为 $N^{-1/2} + N^{1/2}t + (\log(t)/t)^{1/2}$。与此同时，Chevallier 和 Ost [10] 在与 [9]相同的设定下，研究了在不知道其余模型参数的情况下估计集合 $\mathcal{P}+$ 和 $\mathcal{P}-$的问题。

**1.1. 设定**。我们考虑一些未知参数 $p \in [0,1]$, $\mu > 0$ 以及一个可测、局部可积的函数 $\phi$：$[0,\infty) \to [0,\infty)$。对于 $N \ge 1$，令 $(\Pi^i(dt,\ dz))_{i=1,\ \ldots\ldots,\ N}$为定义在 $[0,\infty) \times [0,\infty)$ 上、强度为 $dtdz$ 的独立同分布泊松随机测度族。与该族独立，令 $(\theta_{ij})_{i,\ j=1,\ \ldots\ldots,\ N}$ 为独立同分布的《伯努利》$(p)$ 随机变量族。我们研究以下系统：对每个 $i \in \{1,\ldots,N\}$ 及所有 $t \ge 0$,

$$Z_t^{i,N} = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le \lambda_s^{i,N}\}} \Pi^i(ds,dz), \text{ where } \lambda_t^{i,N} = \mu + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \theta_{ij} \int_0^{t-} \phi(t-s) dZ_s^{j,N}. \tag{3}$$

解 $((Z^{i,\ }_{\ t}{}^N)_{t\ge 0})_{i=1,\ \ldots\ldots,\ N}$ 是一族计数过程。根据 [13, 命题 1], ，系统 (3) 存在唯一的 c`adl`ag 解，该解是 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$-可测的，前提是 $\phi$ 局部可积。这里，

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\Pi^i(A) : A \in \mathcal{B}([0,t] \times [0,\infty)), i = 1,\ldots,N) \vee \sigma(\theta_{ij}, i, j = 1,\ldots,N),$$

其中 $\mathcal{B}([0,t] \times [0,\infty))$ 表示相应乘积空间上的 Borel $\sigma$-代数 ce.

直观而言，过程 $Z^{i,\ }_{\ t}{}^N$ 记录了个体 $i$ 在 $[0,t]$中的行为。我们称个体 $j$影响个体 $i$，当且仅当 $\theta_{ij} = 1$ （允许出现 $i = j$的情况）。在任意时刻 $t$，第 $i$ 个个体根据强度 $\lambda^{i,\ }_{\ t}{}^N$ 采取行动。该强度由两部分组成：常数自主率 $\mu > 0$，以及形式如下的相互作用驱动部分

$$N^{-1}\sum_{j=1}^N \theta_{ij} \int_0^t \phi(t-s)\, dZ_s^{j,N},$$

用于描述模仿的模型。相互作用项取决于所有影响 $i$ 的个体过去的行为，并由 $N^{-1}$ 加权；记忆核 $\phi$ 则会降低较早行为的影响：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$。

**1.2. 假设。** 定义 $\Lambda := \int_0^\infty \phi(t)dt \in (0, \infty]$. 对于某个 $q \geq 1$,

$$(H(q)) \qquad \mu \in (0,\infty), \quad \Lambda \in (0,\infty), \quad \Lambda p \in [0,1), \quad \int_0^\infty s^q \phi(s)ds < \infty, \quad \int_0^\infty (\phi(s))^2 ds < \infty.$$

**1.3. 模型。** 考虑一个由 $N$个体组成的系统。对于每个个体 $j \in \{1,\dots,N\}$，记 $S_j = \{i \in \{1,\dots,N\} : \ \theta_{ij} = 1\}$为与 $j$相连的个体集合。个体 $i$唯一可执行的操作是向 $S_i$的每个成员发送消息。这里 $Z^{i,\ N}_{t}$ 表示个体 $i$ 在 $[0,t]$期间发送的消息总数。计数过程 $(Z^{i,\ N}_{s})_{i=1\dots N,\ 0\leq s\leq t}$ 由其强度过程 $(\lambda^{i,\ N}_{s})_{i=1\dots N,\ 0\leq s\leq t}$所支配。直观地说，强度定义为

$$P\Big(Z_t^{i,N} has\ a\ jump\ in\ [t,t+dt]\Big|\mathcal{F}_t\Big) = \lambda_t^{i,N}dt,\ i = 1,...,N,$$

其中，$\mathcal{F}_t$ 表示由 $(Z^{i,\ N}_{s})_{i=1\dots N,\ 0\leq s\leq t}$ 和 $(\theta_{ij})_{i,\ j=1,\ \dots\dots,\ N}$生成的σ-代数。 $\lambda^{i,\ N}_{t}$ 向 $i$ 发送消息的速率可以分解为两个分量之和:

- **新消息**：以 $\mu$ 的速率产生的新消息;
- **转发消息**：$i$ 已接收并在一定延迟后（可能无限久）转发的消息，延迟取决于消息的年龄，其贡献的发送速率形式如下

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\int_0^{t-}\phi(t-s)dZ_s^{j,N}.$$

例如，若 $\phi = \mathbf{1}_{[0,K]}$，则 $N^{-1}\sum_{j=1}^N \theta_{ij}\int_0^{t-}\phi(t-s)dZ^{j,\ N}_{s}$恰好是第 $i$ 个个体在 $t-K$ 到 $t$ 之间接收到的消息数除以 $N$。

评注 1.1。 在 [25], 中，我们看到 Erd¨os-R´enyi 图可以用于对社交网络建模。而 [5] 告诉我们，霍克斯过程可以对消息数量建模。

**1.4. 主要目标。** 在本文中，我们沿用 [21] 中相同的设定。具体而言，我们考虑一组 $N$ 个独立同分布的霍克斯点过程 $(Z^{i,\ N}_{s})_{i=1\dots N,\ 0\leq s\leq t}$ 以及一族独立同分布的《伯努利》$(p)$ 随机变量 $(\theta_{ij})_{i,\ j=1\dots\dots,\ N}$，其中 $p \in [0,1]$ 是一个未知参数。霍克斯过程之间的相互作用是二元的，并由一个具有 $p$ 的有向 Erd¨os-R´enyi 随机图编码。本文的目标是通过基于来自 $N$ 个霍克斯过程的部分观测所构造的相应估计量的极限分布，建立对 $p$ 的估计；也就是说，只知道 $(Z^{i,\ N})_{i=1\dots\dots,\ N}$ 中前 $1 \ll K \leq N$ 个过程，且 $t$ 很大。

评注 1.2。 由于 $(Z^{i,N})_{i=1,\dots,N}$ 是可交换的，因此由前 $K$ 个过程给出的观测并不构成限制。

**1.5. 记号。** 本文中，给定 $(\theta_{ij})_{i,j=1,\dots N}$ 的条件期望记为 $\mathbb{E}_\theta$。相应的条件方差和协方差分别记为 $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta$ 和 $\mathbb{C}\mathrm{ov}_\theta$。对于 $f,g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$，定义它们的卷积为

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds, \quad t > 0,$$

并且 $\varphi^{*n}$ 表示 $\varphi$ 的 $n$ 重卷积。我们采用约定 $\phi^{*0}(s)ds = \delta_0(ds)$ 和$\phi^{*0}(t-s)ds = \delta_t(ds)$，因此特别有 $\int_0^t s\phi^{*0}(t-s)ds = t$。 $\xrightarrow{d}$ 和 $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ 分别表示依分布收敛和依概率收敛。

我们用 $C$ 表示一个正常数，其值可能随行而变化 .

## 2. Main result

**2.1. 主要结果。** 我们假设 $(H(q))$ 对某个 $q \geq 1$ 成立。本文不讨论超临界情形 $(\Lambda p > 1)$。其处理需要采用不同的技术，并涉及更多繁复的论证，因此留待一篇已完成的独立论文进行研究。我们首先回顾在 [21] 中构造的估计量。对于 $N \geq 1$，以及对于 $((Z^{i,N}_t)_{t\geq 0})_{i=1,\dots,N}$（系统 (3) 的解），我们设 $\bar{Z}^N_t := N^{-1}\sum_{i=1}^N Z^{i,N}_t$，以及 $\bar{Z}^{N,K}_t := K^{-1}\sum_{i=1}^K Z^{i,N}_t$. 接下来，我们引入

$$\varepsilon^{N,K}_t := \frac{1}{t}(\bar{Z}^{N,K}_{2t} - \bar{Z}^{N,K}_t), \qquad \mathcal{V}^{N,K}_t := \frac{N}{K}\sum_{i=1}^K \Big[\frac{Z^{i,N}_{2t} - Z^{i,N}_t}{t} - \varepsilon^{N,K}_t\Big]^2 - \frac{N}{t}\varepsilon^{N,K}_t.$$

并且对于满足 $t/(2\Delta) \in \mathbb{N}^*$. 的 $\Delta > 0$

$$\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta,t} := \mathcal{W}^{N,K}_{\Delta,t} - \frac{N-K}{K}\varepsilon^{N,K}_t,$$

其中

$$\mathcal{W}^{N,K}_{\Delta,t} = 2\mathcal{Z}^{N,K}_{2\Delta,t} - \mathcal{Z}^{N,K}_{\Delta,t}, \qquad \mathcal{Z}^{N,K}_{\Delta,t} = \frac{N}{t}\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}} (\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta} - \bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta} - \Delta\varepsilon^{N,K}_t)^2.$$

接着，我们引入由下式定义的函数 $\Psi^{(3)}$

$$\Psi^{(3)}(u,v,w) = \frac{u^2(1-\sqrt{\frac{u}{w}})^2}{v + u^2(1-\sqrt{\frac{u}{w}})^2} \quad \text{if } u>0,\, v>0,\, w>0 \quad \text{and} \quad \Psi^{(3)}(u,v,w) = 0 \text{ otherwise.}$$

我们设

$$\hat{p}_{N,K,t} := \Psi^{(3)}(\varepsilon^{N,K}_t, \mathcal{V}^{N,K}_t, \mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t,t}),$$

with

$$\Delta_t = (2\lfloor t^{1-4/(q+1)}\rfloor)^{-1}t. \tag{4}$$

本文的主要结果如下，并将在第 7 节中证明。

**定理 2.1。** 我们假设 $p > 0$，并且对于某个 $q > 3$，$(H(q))$ 成立。由 (4) 定义 $\Delta_t$。令 $c_{p,\Lambda} := (1-\Lambda p)^2/(2\Lambda^2)$。我们始终在渐近 $(N,K,t) \to (\infty,\infty,\infty)$ 且 $\frac{1}{\sqrt{K}} + \frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}} + \frac{N}{t\sqrt{K}} + Ne^{-c_{p,\Lambda}K} \to 0$ 的情形下工作。

*(i)* 主导项为 $\frac{1}{\sqrt{K}}$，即当 $[\frac{1}{\sqrt{K}}]/[\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}} + \frac{N}{t\sqrt{K}}] \to \infty$ 时，有

$$\sqrt{K}\Big(\hat{p}_{N,K,t} - p\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(0, p^2(1-p)^2\Big).$$

*(ii)* 主导项为 $\frac{N}{t\sqrt{K}}$，即当 $[\frac{N}{t\sqrt{K}}]/[\frac{1}{\sqrt{K}} + \frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}] \to \infty$ 时，我们有

$$\frac{t\sqrt{K}}{N}\Big(\hat{p}_{N,K,t} - p\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(0, \frac{2(1-\Lambda p)^2}{\mu^2\Lambda^4}\Big).$$

*(iii)* 主导项为 $\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}$，即当 $[\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}]/[\frac{1}{\sqrt{K}} + \frac{N}{t\sqrt{K}}] \to \infty$ 时，此外还要求 $\lim_{N,K\to\infty}\frac{K}{N} = \gamma \in [0,1]$，

$$\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\Big(\hat{p}_{N,K,t} - p\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{6(1-p)^2}{\Lambda^2}\Big((1-\gamma)(1-\Lambda p)^3 + \gamma(1-\Lambda p)\Big)^2\right).$$

我们不会考察涉及两个或三个主导项的情形，因为我们认为这在实际应用中并没有太大限制。此外，由于分析不同项之间相关性的难度较大，这类研究会繁琐得多。定理 2.1 也可以采用另一种表述方式。

**推论 2.2.** 在定理 *2.1* 的假设下，我们还假设 $\lim_{N,\ K\to\infty} \frac{K}{N} = \gamma \in [0,1]$并且

$$\lim max\{\frac{1}{\sqrt{K}}, \frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}, \frac{N}{t\sqrt{K}}\}\Big/\Big(\frac{1}{\sqrt{K}} + \frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}} + \frac{N}{t\sqrt{K}} - \max\{\frac{1}{\sqrt{K}}, \frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}, \frac{N}{t\sqrt{K}}\}\Big) = \infty.$$

于是我们有

$$\Big[\max\Big\{\frac{p(1-p)}{\sqrt{K}}, \frac{\sqrt{2}(1-\Lambda p)}{\mu\Lambda^2}\frac{N}{t\sqrt{K}}, \frac{(1-p)}{\Lambda}\Big[(1-\gamma)(1-\Lambda p)^3 + \gamma(1-\Lambda p)\Big]\frac{N}{K}\sqrt{\frac{6\Delta_t}{t}}\Big\}\Big]^{-1}\Big(\hat{p}_{N,K,t} - p\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

评注 2.3。该结果使我们能够在次临界情形下为 $p$ 构造渐近置信区间。我们定义

$$\hat{\mu}_{N,K,t} := \Psi^{(1)}(\varepsilon_t^{N,K}, \mathcal{V}_t^{N,K}, \mathcal{X}_{\Delta_t,t}^{N,K}), \quad \hat{\Lambda}_{N,K,t} := \Psi^{(2)}(\varepsilon_t^{N,K}, \mathcal{V}_t^{N,K}, \mathcal{X}_{\Delta_t,t}^{N,K})$$

其中

$$\Psi^{(1)}(u,v,w) := u\sqrt{\frac{u}{w}}, \quad \Psi^{(2)}(u,v,w) := \frac{v + [u - \Psi^{(1)}(u,v,w)]^2}{u[u - \Psi^{(1)}(u,v,w)]},$$

若 $u > 0, v > 0, w > u$ 且 $\Psi^{(1)}(u,\ v,\ w) = \Psi^{(2)}(u,\ v,\ w) = 0$ 否则。根据 [21, 定理 2.3], , 当 $\frac{1}{\sqrt{K}} + \frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}} + \frac{N}{t\sqrt{K}} + Ne^{-c_{p,\ \Lambda}K} \to 0$ 时，

$$\Big(\hat{\mu}_{N,K,t}, \hat{\Lambda}_{N,K,t}, \hat{p}_{N,K,t}\Big) \xrightarrow{\mathbb{P}} (\mu, \Lambda, p).$$

因此，根据定理 2.1，在情形 (i)、(ii) 或 (iii) 下，对于 $0 < \alpha < 1$,

$$\lim \mathbb{P}\Big(|\hat{p}_{N,K,t} - p| \le I_{N,K,t,\alpha}\Big) = 1 - \alpha,$$

其中

$$I_{N,K,t,\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\Big(\frac{1}{\sqrt{K}}\hat{p}_{N,K,t}(1 - \hat{p}_{N,K,t}) + \frac{N}{t\sqrt{K}}\frac{\sqrt{2}(1 - \hat{\Lambda}_{N,K,t}\,\hat{p}_{N,K,t})}{\hat{\mu}_{N,K,t}(\hat{\Lambda}_{N,K,t})^2} + \frac{N}{K}\sqrt{\frac{6\Delta_t}{t}}\frac{(1-\hat{p}_{N,K,t})}{\hat{\Lambda}_{N,K,t}}\Big[(1-\gamma)(1 - \hat{\Lambda}_{N,K,t}\,\hat{p}_{N,K,t})^3 + \gamma(1 - \hat{\Lambda}_{N,K,t}\,\hat{p}_{N,K,t})\Big]\Big),$$

并且 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds.$

Co关于情形 $p = 0$，以下结果表明 $\hat{}p_{N,\ K,\ t}$ 并不总是相合 .

**命题 2.4**。我们假设 $p = 0$ 且满足条件 $(H(q))$ ，其中某个 $q > 3$。令 $c_{p,\ \Lambda} := (1 - \Lambda p)^2/(2\Lambda^2)$。我们始终在渐近$(N, K, t) \to (\infty, \infty, \infty)$ 下工作，并处于状态$\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}} + \frac{N}{t\sqrt{K}} + Ne^{-c_{p,\ \Lambda}K} \to 0$。

*(i)* 如果 $[\frac{N}{t\sqrt{K}}]/[\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}]^2 \to \infty$，则有

$$\hat{p}_{N,K,t} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

*(ii)* 如果 $[\frac{N}{K\sqrt{\Delta_t}}]^2/[\frac{N}{t\sqrt{K}}] \to \infty$，则有

$$\hat{p}_{N,K,t} \xrightarrow{d} X$$

其中 $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$。

**2.2. 三种估计量的启发式说明。** 这三种估计量最初由 [13]提出，随后在 [21]中推广到部分观测情形。从本质上说，它们可视为随机过程的样本均值、样本方差以及经时间平移的（时间）经验方差的类似物。由于我们的目标是建立中心极限定理，因此重点关注每个估计量的首项。关于其构造的直观说明，请参见 [13, 第 2 节1]。向部分观测情形的推广方式类似，见 [21, 第 3 节1]。为方便读者，我们也在下文简要说明；更多细节请参见 [13, 第 2 节1]或 [21, 第 3 节1]。

考虑由 $A_N(i,j)$定义的矩阵 $A_N$，并令 $Q_N = (I - \Lambda A_N)^{-1}$。在次临界条件 $\Lambda p < 1$下， $Q_N$ 以高概率存在，并具有如下级数展开$\sum_{n\geq 0} \Lambda^n A_N^n$。令 $\ell_N(i) = \sum_{j=1}^N Q_N(i,j)$、 $c_N(i) = \sum_{j=1}^N Q_N(j,i)$以及 $\bar{\ell}_N^K = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K \ell_N(i)$。

根据 [13, 第 2 节1]，，可以非正式地证明，当 $N$足够大时， $\bar{\ell}_N^K \simeq \frac{1}{1-\Lambda p}$。在给定（$\theta_{ij}$）$_{i,\ j=1,\ldots\ldots,\ N}$，且 $t$， $N$足够大时， $K$大数定律表明 $\sum_{i=1}^K Z^{i,\ t}{}^N \simeq \sum_{i=1}^K \mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}]$（即（$\sum_{i=1}^K Z^{i,\ t}{}^N$）/（$\sum_{i=1}^K \mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}]$） $\to 1$）。假设极限$\gamma_N$（$i$）：$= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}]/t$存在。则定义（3）推出 $\boldsymbol{\gamma}_N = \mu \mathbf{1}_N + \Lambda A_N \boldsymbol{\gamma}_N$，因此$\boldsymbol{\gamma}_N = \mu Q_N \mathbf{1}_N$。由此， $t^{-1}\bar{Z}^{N,\ t}{}^K \simeq (tK)^{-1}\sum_{i=1}^K \mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}] \simeq \mu K^{-1}\sum_{i=1}^K \ell_N$（$i$） $\simeq \frac{\mu}{1-\Lambda p}$。

接下来，我们解释为何使用 $\bar{Z}^{N,\ K}$ $\bar{Z}^{N,t}{}^K$，而不是 $\bar{Z}^{N,t}{}^K$ 本身。在假设 $(H(q))$ 下（见 [13]中引理 16 的证明），我们有 $\mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}] = \mu\ell_N(i)t + \chi_i^N + \pm t^{1-q},$，其中 $\chi_i^N$ 是某个有限随机变量。因此， $t^{-1}\mathbb{E}_\theta[Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N}]$ 以 $t^{-q}$的速率收敛到 $\ell_N(i)$，该速率快于仅由 $t^{-1}\mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}]$ 得到的速率 $t^{-1}$。

基于 [13, 第 2 节1]，并采用类似的论证，我们有 $\mathcal{V}^{N,\ K} \simeq \frac{\mu^2\Lambda^2 p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}$以及 $\mathcal{X}^{N,\Delta_t\ K} \simeq \frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}$。然后，我们可以通过排列 $(\varepsilon^{N,t}\ ^K, \mathcal{V}^{N,t}\ ^K, \widetilde{\mathcal{X}}^{N,\Delta_t\ t}\ ^K)$，构造参数 $(\mu,\Lambda,p)$ 的部分观测估计量。

**2.3. 论文结构。** 在第 3 节陈述一些预备知识后，我们将在第 4 节研究一些随机矩阵；第 5 节建立第一个和第二个估计量的一些极限定理，第 6 节建立第三个估计量的极限定理。最后，我们将在第 7 节完成主要结果的证明。此外，一些技术性引理的证明见附录。

## 3. Preliminaries

**3.1. 一些记号。** 对于 $r \in [1,\infty)$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$，我们定义 $\|\boldsymbol{x}\|_r = (\sum_{i=1}^N |x_i|^r)^{\frac{1}{r}}$，以及 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i=1\ldots N} |x_i|$。对于一个 $N \times N$矩阵 $M$，我们用 $|||M|||_r$表示与$\|\cdot\|_r$相关的算子范数，即 $|||M|||_r = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N} \|M\boldsymbol{x}\|_r/\|\boldsymbol{x}\|_r$。以下是一些特殊情形

$$|||M|||_1 = \sup_{j=1,\ldots,N} \sum_{i=1}^N |M_{ij}|, \quad |||M|||_\infty = \sup_{i=1,\ldots,N} \sum_{j=1}^N |M_{ij}|.$$

我们还有如下不等式

$$|||M|||_r \le |||M|||_1^{\frac{1}{r}} |||M|||_\infty^{1-\frac{1}{r}} \quad \text{for any} \quad r \in [1,\infty).$$

我们定义随机矩阵 $A_N$，其满足 $A_N(i,\ j) := N^{-1}\theta_{ij}$，其中 $i,\ j = 1,\ \ldots,\ N$；并定义矩阵 $Q_N := (I - \Lambda A_N)^{-1}$，其定义在 $I - \Lambda A_N$ 可逆的事件上。

对于 $1 \le K \le N$，我们引入 $N$ 维向量 $\mathbf{1}_K$，其第 $i$ 个坐标为 $\mathbf{1}_K(i) = \mathbf{1}_{\{1\le i\le K\}}$，其中 $i = 1,\ \ldots,\ N$，并引入由 $I_K(i,\ j) = \mathbf{1}_{\{i=j\le K\}}$ 定义的 $N \times N$ 矩阵 $I_K$。

接下来，我们定义 $\boldsymbol{\ell}_N := Q_N\mathbf{1}_N$，即 $\ell_N(i) := \sum_{j=1}^N Q_N(i,j)$，以及 $\boldsymbol{\ell}_N^K := I_K\boldsymbol{\ell}_N$，即 $\ell_N^K(i) := \ell_N(i)\mathbf{1}_{\{i\le K\}}$。我们还令 $\bar{\ell}_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \ell_N(i)$ $\bar{\ell}_N^K := \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K \ell_N(i)$，并定义差向量 $\boldsymbol{x}_N^K := (x_N^K(i))_{i=1,\ldots,N} = \boldsymbol{\ell}_N^K - \bar{\ell}_N^K\mathbf{1}_K$，其中 $x_N^K(i) := (\ell_N(i) - \bar{\ell}_N^K)\mathbf{1}_{\{i\le K\}}$，以及 $\boldsymbol{x}_N := (x_N(i))_{i=1,\ldots,N}$，其中 $x_N(i) := \ell_N(i) - \ell_N$。

回顾一下，$\mathbf{1}_N$表示一个$N$维向量，其所有坐标均为$1$。令 $\boldsymbol{L}_N := A_N\mathbf{1}_N$，则 $L_N(i) := \sum_{j=1}^N A_N(i,j)$。我们还定义 $\bar{L}_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N L_N(i)$ $\bar{L}_N^K := \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K L_N(i)$，并将差向量记为 $\boldsymbol{X}_N^K = (X_N^K(i))_{i=1,\ldots,N}$，其中 $X_N^K(i) = (L_N(i) - \bar{L}_N^K)\mathbf{1}_{\{i\le K\}}$，为方便起见，设 $\boldsymbol{X}_N := \boldsymbol{X}_N^N$。令 $\boldsymbol{C}_N := A_N^T\mathbf{1}_N$（$A_N^T$是 $A_N$的转置），则 $C_N(j) := \sum_{i=1}^N A_N(i,j)$。我们还定义 $\bar{C}_N := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N C_N(j)$ $\bar{C}_N^K := \frac{1}{K}\sum_{j=1}^K C_N(i)$，并考虑事件

$$\mathcal{A}_N := \{\|\boldsymbol{L}_N - p\mathbf{1}_N\|_2 + \|\boldsymbol{C}_N - p\mathbf{1}_N\|_2 \le N^{\frac{1}{4}}\}. \tag{5}$$

我们在此假设 $\Lambda p \in (0,1)$，并令 $a = \frac{1+\Lambda p}{2} \in (\frac{1}{2},1)$。我们引入以下事件

$$\Omega_N^1 := \Big\{\Lambda|||A_N|||_r \le a,\ \text{for all}\ \ r \in [1,\infty]\Big\},$$

$$\mathcal{F}_N^{K,1} := \Big\{\Lambda|||I_K A_N|||_r \le \Big(\tfrac{K}{N}\Big)^{\frac{1}{r}} a, \text{for all } r \in [1,\infty)\Big\},$$

$$\mathcal{F}_N^{K,2} := \Big\{\Lambda|||A_N I_K|||_r \le \Big(\tfrac{K}{N}\Big)^{\frac{1}{r}} a,\ \text{for all } r \in [1,\infty)\Big\},$$

$$\Omega_{N,K}^1 := \Omega_N^1 \cap \mathcal{F}_N^{K,1}, \quad \Omega_{N,K}^2 := \Omega_N^1 \cap \mathcal{F}_N^{K,2}, \quad \Omega_{N,K} = \Omega_{N,K}^1 \cap \Omega_{N,K}^2.$$

现在我们回顾 [21] 中证明的以下引理，其中 $c_{p,\Lambda} = (1-\Lambda p)^2/(2\Lambda^2)$ .

**引理 3.1** （引理 5.7, [21]）。 假设 $\Lambda p < 1$。则有

$$\mathbb{P}(\Omega_{N,K}) \ge 1 - CNe^{-c_{p,\Lambda}K}$$

对某些常数 $C > 0$。

接下来，我们也回顾 [13]中的一个重要结果。

**引理 3.2**。 假设 $\Lambda p < 1$ ，并回顾 (5)。则对于所有 $r \in [1,\infty]\} \subset \{\sup_{i=1,\cdots,N} \ell_N(i) \le C\}$，有 $\Omega_{N,K} \subset \Omega_N^1 \subset \{|||Q_N|||_r \le C,$ ，其中 $C = (1-a)^{-1}$。对于任意 $\alpha > 0$，存在常数 $C_\alpha$ 使得

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_N) \ge 1 - C_\alpha N^{-\alpha}.$$

证明。 参见 [13, 记号 12 和命题 14，步骤 1]。 □

3.2. **一些辅助过程。** 基于（3），我们首先引入一族鞅：对于$i = 1, \ldots\ldots, N$,

$$M_t^{i,N} = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z \le \lambda_s^{i,N}\}} \widetilde{\pi}^i(ds, dz),$$

其中 $\widetilde{\pi}^i(ds, dz) = \pi^i(ds, dz) - dsdz$。我们进一步定义一族中心化过程 $U^{i,}{}_t{}^N = Z^{i,}{}_t{}^N - \mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}]$ 。

令 $\boldsymbol{Z}_t^N$（分别为 $\boldsymbol{U}_t^N$、 $\boldsymbol{M}_t^N$）表示坐标为 $Z^{i,}{}_t{}^N$（分别为 $U^{i,}{}_t{}^N$、$M^{i,}{}_t{}^N$）的 $N$ 维向量。定义向量

$$\boldsymbol{Z}_t^{N,K} = I_K \boldsymbol{Z}_t^N, \quad \boldsymbol{U}_t^{N,K} = I_K \boldsymbol{U}_t^N,$$

以及相应的平均值

$$\bar{Z}_t^{N,K} = K^{-1} \sum_{i=1}^K Z_t^{i,N}, \bar{U}_t^{N,K} = K^{-1} \sum_{i=1}^K U_t^{i,N}, \bar{M}_t^{N,K} = K^{-1} \sum_{i=1}^K M_t^{i,N}.$$

根据 [13, 评注 10 和引理 11], ，我们回顾以下恒等式:

$$\mathbb{E}_\theta[\boldsymbol{Z}_t^{N,K}] = \mu \sum_{n \ge 0} \Big[ \int_0^t s\phi^{*n}(t-s)ds \Big] I_K A_N^n \mathbf{1}_N, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{U}_t^{N,K} = \sum_{n \ge 0} \int_0^t \phi^{*n}(t-s) I_K A_N^n \boldsymbol{M}_s^N ds, \tag{7}$$

$$[M^{i,N}, M^{j,N}]_t = \mathbf{1}_{\{i=j\}} Z_t^{i,N}. \tag{8}$$

特别地，对于 $i = 1, \cdots, N$,

$$U_t^{i,N} = \sum_{n \ge 0} \int_0^t \phi^{*n}(t-s) \sum_{j=1}^N A_N^n(i,j) M_s^{j,N} ds. \tag{9}$$

采用 $\phi^{*0}(s)ds = \delta_0(ds)$ 且 $\int_0^t s\phi^{*0}(t-s)ds = t$ 的约定，我们对由 (3) 定义的强度过程 $\lambda^{i,}{}_t{}^N$ 以及第 3.2 节中引入的过程建立一些先验估计。我们首先回顾引理 6.1] 中确立的以下结果。

**引理 3.3** (引理 6.1,[21])。 假设存在某个 $q \ge 1$，使得 $(H(q))$ 成立。

*(i)* 对所有 $r \in [1, \infty]$ 及所有 $t \ge 0$，几乎处处成立:

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}} \|\mathbb{E}_\theta[\boldsymbol{Z}_t^{N,K}]\|_r \le CtK^{\frac{1}{r}}.$$

*(ii)* 对任意 $r \in [1, \infty]$，对所有 $t \ge s \ge 0$,

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}} \|\mathbb{E}_\theta[\boldsymbol{Z}_t^{N,K} - \boldsymbol{Z}_s^{N,K} - \mu(t-s)\boldsymbol{\ell}_N^K]\|_r \le C(\min\{1, s^{1-q}\})K^{\frac{1}{r}}.$$

**引理 3.** **4.** 假设存在某个 $q \ge 1$，使得 $(H(q))$ 成立。那么以下不等式在 $\Omega_{N,\ K}$ 上几乎处处成立，

$(i)$ $\sup^{t \in \mathbb{R}_+} \max_{i=1,\ldots,N} \mathbb{E}_\theta[\lambda_t^{i,N}] \le \frac{\mu}{1-\alpha}$ 和$\sup^{t \in \mathbb{R}_+} \max_{i=1,\ldots,N} \mathbb{E}_\theta[(\lambda^{i,}{}_t{}^N)^2]^{\frac{1}{2}} \le C$。$(ii)$ 对所有 $t \ge 1$,

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbb{E}_\theta \Big[ \Big( \lambda_t^{i,N} - \mu \ell_N(i) \Big)^2 \Big]^{\frac{1}{2}} \le \frac{C}{t^q} + \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

$(iii)$ *For all* $t \geq s+1 \geq 1$,

$$\max_{i=1,\ldots,N} \mathbb{E}_\theta[(U_t^{i,N} - U_s^{i,N})^4] \leq C(t-s)^2 \quad \textit{and} \quad \max_{i=1,\ldots,N} \mathbb{E}_\theta[(Z_t^{i,N} - Z_s^{i,N})^4] \leq C(t-s)^4.$$

*(iv)* 对所有 $t \geq s+1 \geq 1$,

$$\mathbb{E}_\theta[(\bar{U}_t^{N,K} - \bar{U}_s^{N,K})^4] \leq \frac{C(t-s)^2}{K^2} \quad \textit{and} \quad \mathbb{E}_\theta[(\bar{Z}_t^{N,K} - \bar{Z}_s^{N,K})^4] \leq C(t-s)^4.$$

引理 3.4 的证明较为繁琐，故推迟至附录 A。

## 4. Some limit theorems for the random matrix

本节证明与随机矩阵 $Q_N$ 相关量的渐近行为，而该矩阵决定了第 2.1 节中定义的估计量 $\varepsilon^{N,K}_t$，$\mathcal{V}^{N,K}_t$ 和 $\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta t}$ 的渐近行为。

**4.1. 第一个估计量。** 回顾第 3.1 节中的事件 $\Omega_{N,K}$ 以及量 $\ell_N(i) = \sum_{j=1}^N Q_N(i,j)$ 和 $\bar{\ell}_N^K = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K \ell_N(i)$。正如引理 5.1 中所确立的，估计量 $\varepsilon^{N,K}_t = (\bar{Z}^{N,K}_{2t} - \bar{Z}^{N,K}_t)/t$ 与 $\bar{\ell}_N^K$ 密切相关。因此，为了确定 $\varepsilon^{N,K}_t$ 的极限，我们需要以下关于 $\bar{\ell}_N^K$ 的不等式，该不等式在 [21, 引理 5.9] 中得到证明。

**引理 4.1** (引理 5.9, [21])**.** 若 $\Lambda p < 1$，则存在 $C > 0$，使得对所有 $1 \leq K \leq N$,

$$\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\bar{\ell}_N^K - \frac{1}{1-\Lambda p}\Big|^2\Big] \leq \frac{C}{NK}.$$

**4.2. 第二个估计量。** 回顾估计量

$$\mathcal{V}_t^{N,K} = \frac{N}{K}\sum_{i=1}^K \Big[\frac{Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N}}{t} - \varepsilon_t^{N,K}\Big]^2 - \frac{N}{t}\varepsilon_t^{N,K},$$

其中 $\varepsilon^{N,K}_t = (\bar{Z}^{N,K}_{2t} - \bar{Z}^{N,K}_t)/t$，以及第 3.1 节中矩阵 $A_N$, $Q_N$、事件 $\Omega_{N,K}$、量 $\ell_N(i) = \sum_{j=1}^N Q_N(i,j)$ 和 $\bar{\ell}_N^K = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K \ell_N(i)$ 的定义。此外，第二个估计量 $\mathcal{V}^{N,K}_t$ 与 $\mathcal{V}^{N,K}_\infty = \frac{N\mu^2}{K}\|\boldsymbol{x}_N^K\|_2^2$ 之间存在密切联系（见定理 5.2），其中 $\boldsymbol{x}_N^K = (x_N^K(i))_{i=1,\ldots,N} = \boldsymbol{\ell}_N^K - \bar{\ell}_N^K \mathbf{1}_K$，且 $x_N^K(i) = (\ell_N(i) - \bar{\ell}_N^K)\mathbf{1}_{\{i\leq K\}}$ 在第 3.1 节中定义。因此，确定 $\mathcal{V}^{N,K}_t$ 的极限等价于求出 $\mathcal{V}^{N,K}_\infty$ 的极限。

**定理4.2.** 假设 $\Lambda p < 1$。那么，当 $(N,K) \to (\infty,\infty)$，且 $Ne^{-c_{p,\Lambda}K} \to 0$ 满足 $c_{p,\Lambda} = (1-\Lambda p)^2/(2\Lambda^2)$,

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sqrt{K}\Big(\mathcal{V}_\infty^{N,K} - \frac{\mu^2\Lambda^2 p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(0, \Big(\mu^2\Lambda^2\frac{p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big)^2\Big).$$

我们首先写出如下分解

$$\begin{aligned}
&\sqrt{K}\Big(\mathcal{V}_\infty^{N,K} - \frac{\mu^2\Lambda^2 p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big) \\
&= \frac{N\mu^2}{\sqrt{K}}\Big(\|\boldsymbol{x}_N^K\|_2^2 - (\Lambda\bar{\ell}_N)^2\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big) + \frac{N(\mu\Lambda\bar{\ell}_N)^2}{\sqrt{K}}\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2 - \frac{\mu^2\Lambda^2 p(1-p)\sqrt{K}}{(1-\Lambda p)^2},
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{X}_N^K = (X_N^K(i))_{i=1,\ldots,N} = \boldsymbol{L}_N^K - \bar{L}_N^K\mathbf{1}_K$ 与 $X_N^K(i) = (L_N(i) - \bar{L}_N^K)\mathbf{1}_{\{i\leq K\}}$、$L_N(i) = \sum_{j=1}^N A_N(i,j)$，以及在第 3.1 节中定义的 $\bar{L}_N^K = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K L_N(i)$。定理4.2的证明随后

通过分别分析这些项展开。项 $\frac{N}{\sqrt{K}}(\mu\Lambda\bar{\ell}_N)^2\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2 - \frac{\mu^2\Lambda^2 p}{(1-p)\sqrt{K}(1-\Lambda p)^2}$ 构成主要项（见引理 4.3-(iv)），而项 $\frac{N\mu^2}{\sqrt{K}}(\|\boldsymbol{x}_N^K\|_2^2 - (\Lambda\bar{\ell}_N)^2\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2)$ 被证明是可忽略的（见引理 4.3-(iii)）。

现在转向引理 4.3，其证明推迟至附录 B。

**引理 4.3**。假设 $\Lambda p < 1$ 并回顾 *(5)* 中的 $\mathcal{A}_N$，存在 $C > 0$，使得对于所有 $1 \le K \le N$，$(i)$ $\mathbb{E}[\|(I_K A_N)^T \mathbf{X}_N^K)\|_2^2] \le \frac{CK^2}{N^3}$.

$(ii)$ $\mathbb{E}\Big[\Big|\Big(I_K A_N \mathbf{X}_N, \mathbf{X}_N^K\Big)\Big|\Big] \le \frac{CK}{N^2}$，其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示两个向量之间的内积

$(iii)$ $\frac{N}{K}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}\Big|\Big(\|\boldsymbol{x}_N^K\|_2^2 - (\Lambda\bar{\ell}_N)^2\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big) - \|\boldsymbol{x}_N^K - \bar{\ell}_N\Lambda\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big|\Big] \le \frac{C}{N}$.

$(iv)$ 当 $(N, K) \to (\infty, \infty)$ 且 $Ne^{-c_{p,\Lambda}K} \to 0$，其中 $c_{p,\Lambda} = (1-\Lambda p)^2/(2\Lambda^2)$，

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sqrt{K}\Big[\frac{N}{K}(\bar{\ell}_N\|\mathbf{X}_N^K\|_2)^2 - \frac{p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(0, \Big(\frac{p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big)^2\Big).$$

现在，我们给出定理4.2的证明。

**定理*4.2*的证明。** 回顾 $\mathcal{V}_{\infty}^{N,K} = \frac{N\mu^2}{K}\|\boldsymbol{x}_N^K\|_2^2$，我们写出

$$\begin{aligned}
&\sqrt{K}\Big(\mathcal{V}_{\infty}^{N,K} - \frac{\mu^2\Lambda^2 p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big) \\
&= \frac{N\mu^2}{\sqrt{K}}\Big(\|\boldsymbol{x}_N^K\|_2^2 - (\Lambda\bar{\ell}_N)^2\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big) + \frac{N\mu^2(\Lambda\bar{\ell}_N)^2}{\sqrt{K}}\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2 - \frac{\mu^2\Lambda^2 p(1-p)\sqrt{K}}{(1-\Lambda p)^2}.
\end{aligned}$$

由引理 4.3-(iv)，只需验证

$$\zeta_{N,K} := \mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{N}{\sqrt{K}}\Big(\|\boldsymbol{x}_N^K\|_2^2 - (\Lambda\bar{\ell}_N)^2\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big)$$

依概率收敛于 0。由引理 3.2，$\mathbf{1}_{\mathcal{A}_N} \to 1$ 几乎处处成立，因此只需验证$\mathbf{1}_{\mathcal{A}_N}\zeta_{N,K} \to 0$ 依概率成立。为此，我们写出

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{A}_N}\zeta_{N,K}] \le &\frac{N}{\sqrt{K}}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}\|\boldsymbol{x}_N^K - \Lambda\bar{\ell}_N\mathbf{X}_N^K\|_2^2] \\
&+ \frac{N}{\sqrt{K}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}\Big|\Big(\|\boldsymbol{x}_N^K\|_2^2 - (\Lambda\bar{\ell}_N)^2\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big) - \|\boldsymbol{x}_N^K - \bar{\ell}_N\Lambda\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big|\Big].
\end{aligned}$$

由 [21, 引理 5.11]，第一项有界于 $C/\sqrt{K}$。由引理 4.3-(iii)，第二项有界于 $C\sqrt{K}/N \le C/\sqrt{N}$，从而完成证明。□

4.3. 第三估计量。对于满足 $t/(2\Delta) \in \mathbb{N}^*$ 的 $\Delta > 1$，我们回顾定义 $\mathcal{X}_{\Delta^K,t}^{N} = \mathcal{W}_{\Delta^K}^{N,} - \frac{N-K}{K}\underline{\varepsilon_{,t}^{N}}^K$，其中 $\mathcal{W}_{\Delta^K,t}^{N} = 2\mathcal{Z}_{2\Delta^K,t}^{N} - \mathcal{Z}_{\Delta^K,t}^{N}$，$\mathcal{Z}_{\Delta^K,t}^{N} = \sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(\bar{Z}_{a\Delta^K}^{N} - \bar{Z}_{(a-1)\Delta^K}^{N,K})^2$ 以及 $\varepsilon_{,t}^{N\ K} = (\bar{Z}_{,\ K}^{N} - \bar{Z}_{,t}^{N,K})/t$。此外，回顾矩阵 $A_N$ 和 $Q_N$、第 3.1 节中定义的事件 $\Omega_{N,K}$，以及 $\ell_N(i) = \sum_{j=1}^{N} Q_N^{2t}(i,j)$ 和 $\bar{\ell}_N^K = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\ell_N(i)$。现在，具体取 $\Delta$ 为在 (4) 中定义的 $\Delta_t = (2\lfloor t^{1-4/(q+1)}\rfloor)^{-1}t$，我们将看到（定理 6.1），第三估计量 $\mathcal{X}_{\Delta_t}^{N,K}$ 与.....密切相关

$$\mathcal{X}_{\infty,\infty}^{N,K} = \mathcal{W}_{\infty,\infty}^{N,K} - \frac{(N-K)\mu}{K}\bar{\ell}_N^K,$$

其中 $\mathcal{W}^{N,K}_{\infty,\infty} = \mu_{K^2} A^{N,K}_{\infty,\infty}$, $A^{N,K}_{\infty,\infty} = \sum_{j=1}^{N} \Big( \sum_{i=1}^{K} Q_N(i,j) \Big)^2 \ell_N(j)$。因此，要证明 $\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t t}$ 的收敛，只需证明 $\mathcal{W}^{N,K}_{\infty,\infty}$ 的收敛。后者依赖于以下两个关键估计。

**引理 4.4** (引理 5.19, [21])。 如果 $\Lambda p < 1$，则存在 $C > 0$ 使得对所有 $1 \le K \le N$，

$$\mathbb{E}\Big[ \mathbf{1}_{\Omega_{N,K}} \Big| \mathcal{X}^{N,K}_{\infty,\infty} - \frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3} \Big| \Big] \le \frac{C}{K}.$$

以下引理旨在证明 $(A^{N,K}_{\infty,\infty}/2K^2)^2$ 接近于 $\frac{1}{N}\big( N^{N-K}_{(1-\Lambda p)} + \frac{K}{N(1-\Lambda p)^3} \big)^2$。

**引理 4.5**。 当 $(N, K)$ 趋于 $(\infty, \infty)$ 时，对于 $K \le N$ 且在 $\lim_{N,K\to\infty} \frac{K}{N} = \gamma \in [0,1]$ 的状态下，我们有

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}} \frac{A^{N,K}_{\infty,\infty}}{K} \longrightarrow \frac{1-\gamma}{(1-\Lambda p)} + \frac{\gamma}{(1-\Lambda p)^3},$$

依概率成立。

证明。 回顾 $\mathcal{X}^{N,K}_{\infty,\infty} = \mathcal{W}^{N,K}_{\infty,\infty} - \frac{(N-K)\mu \bar{\ell}^K_N}{K}$ 以及 $\mathcal{W}^{N,K}_{\infty,\infty} = (\mu N/K^2) A^{N,K}_{\infty,\infty}$，我们得到

$$\frac{A^{N,K}_{\infty,\infty}}{K} = \frac{K}{\mu N} \mathcal{X}^{N,K}_{\infty,\infty} + \frac{N-K}{N} \bar{\ell}^K_N.$$

结合引理 4.1 中 $\bar{\ell}^K_N \to \frac{1}{1-\Lambda p}$ 依概率收敛的结果与引理 4.4 中 $\mathcal{X}^{N,K}_{\infty,\infty} \to \frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}$ 依概率收敛的结果，即可立即得到结论。□

## 5. The limit theorems for the first and second estimators

本节旨在确立第 2.1 节中定义的估计量 $\varepsilon^{N,K}_t$ 和 $\mathcal{V}^{N,K}_t$ 的渐近行为。

- 对于 $\varepsilon^{N,K}_t$，其极限可由引理 7.3], 直接推出，如引理 5.1 所述。
- 然而，对于 $\mathcal{V}^{N,K}_t$，则需要进行更精细的分析。我们首先将 $\frac{t}{N}\sqrt{K}(\mathcal{V}^{N,K}_t - \mathcal{V}^{N,K}_{\infty})$ 分解为若干项，即 $J^{N,K}_{t,1}, J^{N,K}_{t,211}, J^{N,K}_{t,212}, J^{N,K}_{t,213}, J^{N,K}_{t,22}, J^{N,K}_{t,23}, J^{N,K}_{t,3}$。我们注意到，在 $\Omega_{N,K}$ 上，主要贡献来自项 $J^{N,K}_{t,211}$（见引理 5.3）。对该项进一步分解后可知，主导阶的渐近行为由以下因素决定

$$\frac{2}{t\sqrt{K}} \sum_{i=1}^{K} \int_t^{2t} (M^{i,N}_{s-} - M^{i,N}_t) dM^{i,N}_s,$$

如定理 5.2 证明中的步骤 3 所示，该表达式依分布收敛于方差为 $2\mu^2/(1-\Lambda p)^2$, 的高斯随机变量，正如引理 5.4 所确立的那样。

请回顾一下在第2.1节中定义的 $\mathcal{V}^{N,K}_t = \frac{K}{N} \sum_{i=1}^{K} \Big[ \frac{Z^{i,N}_{2t} - Z^{i,N}_t}{t} - \varepsilon^{N,K}_t \Big]^2 - \frac{N}{t} \varepsilon^{N,K}_t$，以及 $\mathcal{V}^{N,K}_{\infty} = \frac{N}{K} \mu^2 \|\boldsymbol{x}^K_N\|_2^2$，其中 $\varepsilon^{N,K}_t = (\bar{Z}^{N,K}_{2t} - \bar{Z}^{N,K}_t)/t$, $x^K_N(i) = (\ell_N(i) - \bar{\ell}^K_N)\mathbf{1}_{\{i \le K\}}$ 和 $\boldsymbol{x}^K_N = (x^K_N(i))_{i=1,\dots,N}$。$(\ell_N(i))_{i=1,\dots,N}$ 和 $\bar{\ell}^K_N$ 的定义见第 3.1 节。

**引理 5.1 (**引理 7.3, [21]**).** 假设$(H(q))$ 对某个 $q \geq 1$成立，在状态 $\frac{K}{t^{2q}} \to 0$下，我们有

$$\lim_{(N,K,t)\to(\infty,\infty,\infty)} \mathbf{1}_{\Omega_{N,K}} \sqrt{K} \mathbb{E}_\theta \Big[ \Big| \varepsilon_t^{N,K} - \mu \bar{\ell}_N^K \Big| \Big] = 0,$$

几乎必然地。

本节的主要结果是以下极限定理。

**定理 5.2**。 假设 $(H(q))$ 对某个 $q > 1$ 成立。当$(N, K, t) \to (\infty, \infty, \infty)$ 且 $\frac{t\sqrt{K}}{N}(\frac{N}{t^q} + \sqrt{\frac{N}{Kt}}) - \sqrt{N} e^{-c_{p,\Lambda} K} \to 0$且 $c_{p,\Lambda} = (1-\Lambda p)^2/(2\Lambda^2)$ 时，我们有

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}} \frac{t\sqrt{K}}{N} (\mathcal{V}_t^{N,K} - \mathcal{V}_\infty^{N,K}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(0, \frac{2\mu^2}{(1-\Lambda p)^2}\Big).$$

在证明之前，我们将差值 $\mathcal{V}^N_{,t}{}^K - \mathcal{V}^{N,}{}_\infty{}^K := J^N_{,t}{}^{K\,1} + J^{N,,}_t{}^{K\,2} + J^{N,,}_t{}^{K\,3}$ ,,分解如下，其中

$$J_t^{N,K,1} = \frac{N}{K}\Big\{ \sum_{i=1}^K \Big[ \frac{Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N}}{t} - \varepsilon_t^{N,K} \Big]^2 - \sum_{i=1}^K \Big[ \frac{Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N}}{t} - \mu \bar{\ell}_N^K \Big]^2 \Big\},$$

$$J_t^{N,K,2} = \frac{N}{K}\Big\{ \sum_{i=1}^K \Big[ \frac{Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N}}{t} - \mu \ell_N(i) \Big]^2 - \frac{K}{t} \varepsilon_t^{N,K} \Big\},$$

$$J_t^{N,K,3} = 2\frac{N}{K} \sum_{i=1}^K \Big[ \frac{Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N}}{t} - \mu \ell_N(i) \Big] \Big[ \mu \ell_N(i) - \mu \bar{\ell}_N^K \Big].$$

我们进一步将 $J^N_{,t}{}^{K\,2} = J^{N,,}_t{}^{K\,21} + J^{N,,}_t{}^{K\,22} + J^{N,,}_t{}^{K\,23}$ ,, 分解如下，其中

$$J_t^{N,K,21} = \frac{N}{K}\Big\{ \sum_{i=1}^K \Big[ \frac{Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N}}{t} - \frac{\mathbb{E}_\theta[Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N}]}{t} \Big]^2 - \frac{K}{t} \varepsilon_t^{N,K} \Big\},$$

$$J_t^{N,K,22} = \frac{N}{K} \sum_{i=1}^K \Big\{ \frac{\mathbb{E}_\theta[Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N}]}{t} - \mu \ell_N(i) \Big\}^2,$$

$$J_t^{N,K,23} = 2\frac{N}{K} \sum_{i=1}^K \Big[ \frac{Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N}}{t} - \frac{\mathbb{E}_\theta(Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N})}{t} \Big] \Big[ \frac{\mathbb{E}_\theta(Z_{2t}^{i,N} - Z_t^{i,N})}{t} - \mu \ell_N(i) \Big].$$

回顾 $U^i_{,t}{}^N = Z^{i,}{}_t{}^N - \mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}]$，我们进一步写作 $J^N_{,t}{}^{K\,21} = J^{N,,}_t{}^{K\,211} + J^{N,,}_t{}^{K\,212} + J^{N,,}_t{}^{K\,213}$ ,, 其中

$$J_t^{N,K,211} = \frac{N}{K} \sum_{i=1}^K \Big\{ \frac{(U_{2t}^{i,N} - U_t^{i,N})^2}{t^2} - \frac{\mathbb{E}_\theta[(U_{2t}^{i,N} - U_t^{i,N})^2]}{t^2} \Big\},$$

$$J_t^{N,K,212} = \frac{N}{K}\Big\{ \sum_{i=1}^K \frac{\mathbb{E}_\theta[(U_{2t}^{i,N} - U_t^{i,N})^2]}{t^2} - \frac{K}{t} \mathbb{E}_\theta[\varepsilon_t^{N,K}] \Big\},$$

$$J_t^{N,K,213} = \frac{N}{K}\Big\{ \frac{K}{t} \mathbb{E}_\theta[\varepsilon_t^{N,K}] - \frac{K}{t} \varepsilon_t^{N,K} \Big\}.$$

最后，我们还写作 $J^{N,K,3}_t := J^{N,K,31}_t + J^{N,K,32}_t$，其中

$$J^{N,K,31}_t = 2\frac{N}{K}\sum_{i=1}^{K}\Big[\frac{Z^{i,N}_{2t}-Z^{i,N}_t}{t} - \frac{\mathbb{E}_\theta[Z^{i,N}_{2t}-Z^{i,N}_t]}{t}\Big]\Big[\mu\ell_N(i)-\mu\bar{\ell}^K_N\Big],$$

$$J^{N,K,32}_t = 2\frac{N}{K}\sum_{i=1}^{K}\Big[\frac{\mathbb{E}_\theta[Z^{i,N}_{2t}-Z^{i,N}_t]}{t} - \mu\ell_N(i)\Big]\Big[\mu\ell_N(i)-\mu\bar{\ell}^K_N\Big].$$

尽管上述分解较为复杂，但主项是 $J^{N,K,211}_t$，经标准化后收敛于高斯分布。其余各项，即 $J^{N,K,1}_t$，$J^{N,K,22}_t$，$J^{N,K,23}_t$，$J^{N,K,213}_t$，$J^{N,K,32}_t$，$J^{N,K,212}_t$，$J^{N,K,31}_t$，根据引理 5.3，均可得到适当的界。

**引理 5.3**。假设对于某个 $q > 1$，$(H(q))$ 成立。当 $(N,K,t) \to (\infty,\infty,\infty)$ 且 $\frac{t\sqrt{K}}{N}(\frac{N}{t^q}+\sqrt{\frac{N}{Kt}}) \to 0$ 时，

$$\frac{t\sqrt{K}}{N}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|J^{N,K,1}_t + J^{N,K,212}_t + J^{N,K,213}_t + J^{N,K,22}_t + J^{N,K,23}_t + J^{N,K,3}_t\Big|\Big] \longrightarrow 0.$$

证明。$J^{N,K,1}_t, J^{N,K,22}_t, J^{N,K,23}_t, J^{N,K,213}_t, J^{N,K,32}_t$ 的界见 [21, 引理 8.2]。虽然 $J^{N,K,212}_t$ 可由 [21, 引理 8.3] 得到界，但仍需处理 $J^{N,K,3}_t = J^{N,K,31}_t + J^{N,K,32}_t$。对于 $J^{N,K,31}_t$，[21, 引理 8.5] 可推出

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}\mathbb{E}_\theta[|J^{N,K,31}_t|] \le C\frac{N}{K\sqrt{t}}\Big[\sum_{i=1}^{K}(\ell_N(i)-\bar{\ell}^K_N)^2\Big]^{1/2} = C\frac{N}{K\sqrt{t}}||\boldsymbol{x}^K_N||_2.$$

取期望并应用 $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}||\boldsymbol{x}^K_N||_2] \le CK^{1/2}N^{-1/2}$ 由 [21, 引理 5.14], 得到的估计，我们得到 $\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}|J^{N,K,31}_t|\big] \le C\sqrt{\frac{N}{Kt}}$。对所有项的个体界进行汇总，即得所需结果。□

下面这个繁琐的引理将使我们能够处理贡献项 $J^{N,K,211}_t$。

**引理 5.4**。假设 $(H(q))$ 对某个 $q > 1$成立。对于 $u \in [0,1]$，定义过程

$$N^{t,i,N}_u := \int_t^{t+\sqrt{ut}}(M^{i,N}_{s-} - M^{i,N}_t)dM^{i,N}_s,$$

其中 $M^{i,N}$ 在第 *3.2* 节中定义。当 $(N,K,t) \to (\infty,\infty,\infty)$ 时，

$$\Big(\frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}N^{t,i,N}_u\Big)_{u\in[0,1]} \xrightarrow{d} \Big(\frac{\mu}{\sqrt{2}(1-\Lambda p)}B_u\Big)_{u\in[0,1]}, \tag{10}$$

其中 $(B_u)^{u\in[0,1]}$ 是一个布朗运动。

证明。注意，对固定的 $t \ge 0$，过程 $(N^{t,i,N}_u)_{u\in[0,1]}$ 是关于滤过 $\mathcal{F}^N_{t+\sqrt{ut}}$ 的鞅。为证明 (10)，我们应用 Jacod-Shiryaev [19, 定理 VIII-3-8]，该定理要求验证，当 $(t, N, K) \to (\infty, \infty, \infty)$ 时，

(a) $[\frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}N^{t,i,N}_\cdot, \frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}N^{t,i,N}_\cdot]_u \to \frac{\mu^2}{(1-\Lambda p)^2}u$ 按概率收敛，对所有 $u \in [0,1]$ 固定的情形均成立。

(b) $\sup_{u\in[0,1]}\frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}|N^{t,i,N}_u - N^{t,i,N}_{u-}| \to 0$，依概率收敛。

验证 (b) 点相对直接。利用 (3) 中泊松测度的独立性，以及 $M^{i,N}$ 的跳跃幅度始终为 1 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{t\sqrt{K}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sup_{u\in[0,1]}\sum_{i=1}^{K}\Big|N_u^{t,i,N}-N_{u-}^{t,i,N}\Big|\Big]\leq&\frac{C}{t\sqrt{K}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sup_{u\in[0,1]}\max_{i=1,\dots,K}\Big|M_{t+t\sqrt{u}}^{i,N}-M_t^{i,N}\Big|\Big]\\ \leq&\frac{C}{t\sqrt{K}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sup_{u\in[0,1]}\Big|\sum_{i=1}^{K}(M_{t+t\sqrt{u}}^{i,N}-M_t^{i,N})^2\Big|^{\frac{1}{2}}\Big].\end{aligned}$$

应用柯西-施瓦茨不等式并利用 (8)，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{t\sqrt{K}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sup_{u\in[0,1]}\sum_{i=1}^{K}\Big|N_u^{t,i,N}-N_{u-}^{t,i,N}\Big|\Big]\leq&\frac{C}{t\sqrt{K}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sup_{u\in[0,1]}\sum_{i=1}^{K}(M_{t+t\sqrt{u}}^{i,N}-M_t^{i,N})^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\ \leq&\frac{C}{t\sqrt{K}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\sum_{i=1}^{K}(Z_{2t}^{i,N}-Z_t^{i,N})\Big|\Big]^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C}{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

最后一个不等式由引理 3.3-(ii) 对 $K=N$ 和 $r=\infty$ 得出，这意味着在 $\Omega_{N,\,K}\subset\Omega_{N,\,N}$ 上，$\max_{i=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}-Z_s^{i,N}]\leq C(t-s)$。

关于 (a)，回顾 $Z^{i,N}_t=M^{i,N}_t+\int_0^t\lambda^{i,N}_s ds$。对于固定的 $u$，我们记

$$\begin{aligned}\Big[\frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}N_\cdot^{t,i,N},\frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}N_\cdot^{t,i,N}\Big]_u=&\frac{1}{t^2K}\sum_{i=1}^{K}\int_t^{t+\sqrt{u}t}(M_{s-}^{i,N}-M_t^{i,N})^2dZ_s^{i,N}\\ :=&\,\Upsilon^1_{t,N,K,u}+\Upsilon^2_{t,N,K,u}+\Upsilon^3_{t,N,K,u},\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}\Upsilon^1_{t,N,K,u}:=&\frac{1}{t^2K}\sum_{i=1}^{K}\int_t^{t+\sqrt{u}t}(M_{s-}^{i,N}-M_t^{i,N})^2dM_s^{i,N},\\ \Upsilon^2_{t,N,K,u}:=&\frac{1}{t^2K}\sum_{i=1}^{K}\int_t^{t+\sqrt{u}t}(M_s^{i,N}-M_t^{i,N})^2(\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i))ds,\\ \Upsilon^3_{t,N,K,u}:=&\frac{1}{t^2K}\sum_{i=1}^{K}\mu\ell_N(i)\int_t^{t+\sqrt{u}t}(M_s^{i,N}-M_t^{i,N})^2ds.\end{aligned}$$

每一项都将在单独的步骤中处理。

**步骤 1**。在这一步中，我们验证 $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Upsilon^1_{t,N,K,u}]\to 0$ as $(N,\ K,\ t)\to(\infty,\ \infty,\ \infty)$。利用 (8)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[(\Upsilon^1_{t,N,K,u})^2]=&\frac{1}{K^2t^4}\sum_{i=1}^{K}\mathbb{E}_\theta\Big[\int_t^{t+\sqrt{u}t}(M_{s-}^{i,N}-M_t^{i,N})^4dZ_s^{i,N}\Big]\\ =&\frac{1}{K^2t^4}\sum_{i=1}^{K}\mathbb{E}_\theta\Big[\int_t^{t+\sqrt{u}t}(M_s^{i,N}-M_t^{i,N})^4\lambda_s^{i,N}ds\Big]\\ \leq&\frac{1}{K^2t^4}\sum_{i=1}^{K}\int_t^{t+\sqrt{u}t}\Big\{\mathbb{E}_\theta[(M_s^{i,N}-M_t^{i,N})^4|\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)|]+\mu\mathbb{E}_\theta[(M_s^{i,N}-M_t^{i,N})^4]|\ell_N(i)|\Big\}ds.\end{aligned}$$

应用柯西–施瓦茨不等式和伯克霍尔德不等式，我们进一步得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta[(\Upsilon^1_{t,N,K,u})^2]\\
\leq&\frac{1}{K^2t^4}\sum_{i=1}^K\int_t^{t+\sqrt{ut}}\Big\{\mathbb{E}_\theta[(M_s^{i,N}-M_t^{i,N})^8]^{\frac12}\mathbb{E}_\theta[|\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)|^2]^{\frac12}+C\mu\mathbb{E}_\theta[(Z_s^{i,N}-Z_t^{i,N})^2]|\ell_N(i)|\Big\}ds\\
\leq&\frac{C}{K^2t^4}\sum_{i=1}^K\int_t^{t+\sqrt{ut}}\Big\{\mathbb{E}_\theta[(Z_s^{i,N}-Z_t^{i,N})^4]^{\frac12}\mathbb{E}_\theta[|\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)|^2]^{\frac12}+\mu\mathbb{E}_\theta[(Z_s^{i,N}-Z_t^{i,N})^4]^{\frac12}|\ell_N(i)|\Big\}ds.
\end{aligned}$$

根据引理 3.4-(iii)，在 $\Omega_{N,\ K}$ 上，对于所有 $\ s\geq t$，我们有 $\max_{i=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta[(Z^{i,\ }_{s}{}^{N}-Z^{i,\ }_{t}{}^{N})^4]\leq C(t-s)^4$。此外，$\ \ell_N$ 在 $\Omega_{N,\ K}$ 上有界。因此，

$$\mathbb{E}_\theta[(\Upsilon^1_{t,N,K,u})^2]\leq\frac{C}{K^2t^2}\sum_{i=1}^K\int_t^{t+\sqrt{ut}}\Big(1+\mathbb{E}_\theta[|\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)|^2]^{\frac12}\Big)ds\leq\frac{C}{Kt}\Big(1+\frac{1}{t^q}+\frac{1}{\sqrt{N}}\Big),$$

其中，最后一个不等式由引理 3.4-(ii) 得出。步骤 2 完成。

**步骤 2**。类似地，在 $\Omega_{N,\ K}$ 上，有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta[|\Upsilon^2_{t,N,K,u}|]\leq&\frac{1}{Kt^2}\sum_{i=1}^K\int_t^{t+\sqrt{ut}}\mathbb{E}_\theta[(M_s^{i,N}-M_t^{i,N})^4]^{\frac12}\mathbb{E}_\theta[|\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)|^2]^{\frac12}\\
\leq&\frac{C}{Kt}\sum_{i=1}^K\int_t^{2t}\mathbb{E}_\theta[|\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)|^2]^{\frac12}ds\leq\frac{C}{t^q}+\frac{C}{\sqrt{N}}.
\end{aligned}$$

**步骤 3**。最后，我们证明 $\Upsilon^3_{t,\ N,\ K,\ u}\to\mu^2u/[2(1-\Lambda p)^2]$ 依概率收敛，当 $(N,\ K,\ t)\to(\infty,\ \infty,\ \infty)$ 时成立。应用 Itˆo 公式和（8），我们写成

$$\begin{aligned}
&(M_s^{i,N}-M_t^{i,N})^2\\
=&2\int_t^s(M_{r-}^{i,N}-M_t^{i,N})dM_r^{i,N}+Z_s^{i,N}-Z_t^{i,N}\\
=&2\int_t^s(M_{r-}^{i,N}-M_t^{i,N})dM_r^{i,N}+U_s^{i,N}-U_t^{i,N}+\mathbb{E}_\theta[Z_s^{i,N}-Z_t^{i,N}-\mu(s-t)\ell_N(i)]+\mu(s-t)\ell_N(i).
\end{aligned}$$

因此，我们将 $\Upsilon^3_{t,\ N,\ K,\ u}:=\Upsilon^{3,\ 1}_{t\ N,\ \ ,\ K,\ u}+\Upsilon^{3,\ 2}_{t\ N,\ \ ,\ K,\ u}+\Upsilon^{3,\ 3}_{t\ N,\ \ ,\ K,\ u}+\Upsilon^{3,\ 4}_{t\ N,\ \ ,\ K,\ u}$ 分解为

$$\begin{aligned}
\Upsilon^{3,1}_{t,N,K,u}:=&\frac{2}{t^2K}\sum_{i=1}^K\mu\ell_N(i)\int_t^{t+\sqrt{ut}}\int_t^s(M_{r-}^{i,N}-M_t^{i,N})dM_r^{i,N}ds,\\
\Upsilon^{3,2}_{t,N,K,u}:=&\frac{1}{t^2K}\sum_{i=1}^K\mu\ell_N(i)\int_t^{t+\sqrt{ut}}(U_s^{i,N}-U_t^{i,N})ds,\\
\Upsilon^{3,3}_{t,N,K,u}:=&\frac{1}{t^2K}\sum_{i=1}^K\mu\ell_N(i)\int_t^{t+\sqrt{ut}}\mathbb{E}_\theta[Z_s^{i,N}-Z_t^{i,N}-\mu(s-t)\ell_N(i)]ds,\\
\Upsilon^{3,4}_{t,N,K,u}:=&\frac{1}{t^2K}\sum_{i=1}^K\mu^2(\ell_N(i))^2\times\frac{ut^2}{2}=\frac{\mu^2u}{2K}\sum_{i=1}^K(\ell_N(i))^2.
\end{aligned}$$

首先，注意到 $\mathcal{V}^{N,\infty}{}^{K} = \frac{N}{K}\mu^2\|\boldsymbol{x}_N^K\|_2^2$，我们有

$$2\Upsilon^{3,4}_{t,N,K,u} = \mu^2 u(\bar{\ell}_N^K)^2 + \frac{\mu^2 u}{K}\sum_{i=1}^{K}(\ell_N(i)-\bar{\ell}_N^K)^2 = \mu^2 u(\bar{\ell}_N^K)^2 + \frac{\mu^2 u}{K}||\boldsymbol{x}_N^K||_2^2 = \mu^2 u(\bar{\ell}_N^K)^2 + \frac{u}{N}\mathcal{V}_\infty^{N,K}.$$

于是，由引理 4.1 和定理4.2 可立即推出，$\Upsilon^{3,}{}_{t}{}^{4}{}_{N,,K,u}$ 依概率收敛于 $\mu^2 u/[2(1-\Lambda p)^2]$。

对于第二项，我们回顾式 (9)，并对 $s \geq t$，作如下表示：

$$U_s^{i,N} - U_t^{i,N} = \sum_{n\geq 0}\int_0^s (\phi^{*n}(s-u)-\phi^{*n}(t-u))\sum_{j=1}^{N} A_N^n(i,j)M_u^{j,N}du,$$

因此，根据闵可夫斯基不等式，并像往常一样将 $n=0$ 和 $n\geq 1$ 两项分开，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta[|\Upsilon^{3,2}_{t,N,K,u}|^2]^{\frac{1}{2}} \leq & \frac{C}{t^2K}\int_t^{t+\sqrt{u}t}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{K}\ell_N(i)(U_s^{i,N}-U_t^{i,N})\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}ds \\
\leq & \frac{C}{t^2K}\int_t^{t+\sqrt{u}t}\Big\{\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{K}\ell_N(i)(M_s^{i,N}-M_t^{i,N})\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\
& + \sum_{n\geq 1}\int_0^s(\phi^{*n}(s-r)-\phi^{*n}(t-r))\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{N}\ell_N(i)A_N^n(i,j)M_r^{j,N}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}dr\Big\}ds.
\end{aligned}$$

由式 (8) 可知，在 $\Omega_{N,K}$ 上，对所有 $t\leq s\leq 2t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{K}\ell_N(i)(M_s^{i,N}-M_t^{i,N})\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} =& \mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{i=1}^{K}(\ell_N(i))^2(Z_s^{i,N}-Z_t^{i,N})\Big]^{\frac{1}{2}} \\
=& \Big\{\sum_{i=1}^{K}(\ell_N(i))^2\mathbb{E}_\theta\Big[Z_s^{i,N}-Z_t^{i,N}\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
\leq & C\sqrt{Kt},
\end{aligned}$$

根据引理　引理 3.3-(i) 与 $r=\infty$，再加上 $\ell_N(i)$ 在 $\Omega_{N,K}$ 上有界。接下来，对于 $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{N}\ell_N(i)A_N^n(i,j)M_r^{j,N}\Big)^2\Big] =& \sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{K}\ell_N(i)A_N^n(i,j)\Big)^2\mathbb{E}_\theta[Z_r^{j,N}] \\
\leq & C\sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{K}A_N^n(i,j)\Big)^2\mathbb{E}_\theta[Z_r^{j,N}] \\
\leq & C\sum_{j=1}^{N}|||I_K A_N^n|||_1^2\mathbb{E}_\theta[Z_r^{j,N}] \\
\leq & \frac{CK^2}{N}|||A_N|||_1^{2n-2}r.
\end{aligned}$$

最后一行由 $|||I_K A_N|||_1 \le CK/N$ 在 $\Omega_{N,K}$ 上成立，并再次应用引理 3.3-(i) 得出。因此，对于任意 $u \in [0,1]$（回忆 $\int_0^\infty \phi^{*n}(u)du = \Lambda^n$），

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[|\Upsilon^{3,2}_{t,N,K,u}|^2]^{\frac{1}{2}} \le& \frac{C}{t^2K}\int_t^{t+\sqrt{u}t}\Big\{\sqrt{Kt} + \sum_{n\ge1}\int_0^s (\phi^{*n}(s-r)-\phi^{*n}(t-r))\frac{K}{\sqrt{N}}|||A_N|||_1^{n-1}\sqrt{r}dr\Big\}ds\\ \le& \frac{C}{t^2K}\int_t^{t+\sqrt{u}t}\Big\{\sqrt{Kt} + \sum_{n\ge1}\sqrt{s}\frac{K}{\sqrt{N}}\Lambda^n|||A_N|||_1^{n-1}\Big\}ds \le \frac{C}{\sqrt{Kt}}.\end{aligned}$$

最后一个不等式利用了以下事实：在 $\Omega_{N,K}$ 上，有 $\Lambda|||A_N|||_1 \le a < 1$。

对于第三项，由于 $\ell_N(i)$ 在 $\Omega_N$ 上一致有界，$K$并且根据引理 3.3-(ii)，取$r=1$，我们在 $\Omega_N$ 上得到$K$，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[|\Upsilon^{3,3}_{t,N,K,u}|] \le& \frac{1}{Kt^2}\sum_{i=1}^K\int_t^{t+\sqrt{u}t}|\ell_N(i)|\Big|\mathbb{E}_\theta[Z^{i,N}_s - Z^{i,N}_t - \mu(s-t)\ell_N(i)]\Big|ds\\ \le& \frac{C}{Kt^2}\sum_{i=1}^K\int_t^{t+\sqrt{u}t}\Big|\mathbb{E}_\theta[Z^{i,N}_s - Z^{i,N}_t - \mu(s-t)\ell_N(i)]\Big|ds \le \frac{C}{t^q}.\end{aligned}$$

最后，我们令 $\mathbb{N}^{t,\ i\ N,}_{u\ \ \cdot} := M^{i,\ \ N}_{t+ut} - M^{i,t\ \ N}$。那么 $\mathbb{N}^{t,\ i\ N,}_{u\ \ \cdot}$ 是关于滤过 $\mathcal{F}^N_{t+ut}$、参数为 $0 \le u \le 1$ 的鞅。因此，根据 (8)，

$$[\mathbb{N}^{t,i,N}_\cdot, \mathbb{N}^{t,j,N}_\cdot]_u = \mathbf{1}_{\{i=j\}}(Z^{i,N}_{t+ut} - Z^{i,N}_t).$$

在 $\Omega_{N,K}$ 上，利用变量代换 $s = t + at$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[(\Upsilon^{3,1}_{t,N,K,u})^2] =& \frac{2}{K^2t^2}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^K\mu\ell_N(i)\int_0^{\sqrt{u}}\int_t^{t+at}(M^{i,N}_{r-} - M^{i,N}_t)dM^{i,N}_r da\Big)^2\Big]\\ =& \frac{1}{K^2t^2}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^K\mu\ell_N(i)\int_0^{\sqrt{u}}\int_0^a \mathbb{N}^{t,i,N}_{b-}d\mathbb{N}^{t,i,N}_b da\Big)^2\Big]\\ =& \frac{\mu^2}{K^2t^2}\sum_{i=1}^K\sum_{i'=1}^K\ell_N(i)\ell_N(i')\int_0^{\sqrt{u}}\int_0^{\sqrt{u}}\mathbb{E}_\theta\Big[\int_0^a \mathbb{N}^{t.i,N}_{b-}d\mathbb{N}^{t,i,N}_b\int_0^{a'}\mathbb{N}^{t,i',N}_{b'-}d\mathbb{N}^{t,i',N}_{b'}\Big]dada'\\ \le& \frac{C}{K^2t^2}\sum_{i=1}^K\int_0^1\int_0^1\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\int_0^{a\wedge a'}\mathbb{N}^{t.i,N}_{b-}d\mathbb{N}^{t,i,N}_b\Big)^2\Big]dada'.\end{aligned}$$

利用 Burkholder–Davis–Gundy 不等式，上述项可由以下式子界定：

$$\begin{aligned}&\frac{C}{K^2t^2}\sum_{i=1}^K\mathbb{E}_\theta\Big[\int_0^1(\mathbb{N}^{t.i,N}_{b-})^2dZ^{i,N}_{t+bt}\Big]\\ \le& \frac{C}{K^2t^2}\sum_{i=1}^K\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sup_{0\le b\le1}(\mathbb{N}^{t.i,N}_b)^2\Big)Z^{i,N}_{2t}\Big].\end{aligned}$$

因此，应用柯西-施瓦茨不等式和 Burkholder–Davis–Gundy 不等式，

$$\mathbb{E}_\theta[(\Upsilon^{3,1}_{t,N,K,u})^2] \le \frac{C}{K^2t^2}\sum_{i=1}^K\mathbb{E}_\theta\Big[\sup_{0\le b\le1}(\mathbb{N}^{t.i,N}_b)^4\Big]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}_\theta[(Z^{i,N}_{2t})^2]^{\frac{1}{2}} \le \frac{C}{K^2t^2}\sum_{i=1}^K\mathbb{E}_\theta[(Z^{i,N}_{2t})^2] \le \frac{C}{K},$$

其中，最后一个不等式由引理 3.4-(iii) 得出。证明至此完成。

□

现在，我们已做好充分准备，可以证明第二个估计量的极限。

**定理 5.2 的证明。** 回顾一下，我们在 $(N,K,t)\to(\infty,\infty,\infty)$ 下进行讨论，其中 $\frac{t\sqrt{K}}{N}(\frac{N}{t^q}+\sqrt{\frac{N}{Kt}})+\sqrt{N}e^{-c_{p,\Lambda}K}\to 0$。在本节开头，我们将该差分解为

$$\mathcal{V}_t^{N,K}-\mathcal{V}_\infty^{N,K}=J_t^{N,K,1}+J_t^{N,K,211}+J_t^{N,K,212}+J_t^{N,K,213}+J_t^{N,K,22}+J_t^{N,K,23}+J_t^{N,K,3}.$$

如引理 5.3 所示，除 $J_t^{N,K,211}$ 外的所有项乘以 $t\sqrt{K}/N$ 后都收敛于 0。为完成证明，还需证明在 $(t,N,K)\to(\infty,\infty,\infty)$ 以及 $Ne^{-c_{p,\Lambda}K}\to 0$ 下，

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{t\sqrt{K}}{N}J_t^{N,K,211}=\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}\Big\{(U_{2t}^{i,N}-U_t^{i,N})^2-\mathbb{E}_\theta[(U_{2t}^{i,N}-U_t^{i,N})^2]\Big\}\xrightarrow{d}\mathcal{N}\Big(0,\frac{2\mu^2}{(1-\Lambda p)^2}\Big),$$

这将确立所需结果。

现在我们在 $\Omega_{N,K}$ 上进行讨论。回顾式 (9)，我们写出

$$(U_{2t}^{i,N}-U_t^{i,N})^2=(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N})^2+2T_t^{i,N}(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N})+(T_t^{i,N})^2,$$

其中

$$T_t^{i,N}:=\sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{N}\int_0^{2t}\phi^{*n}(2t-s)A_N^n(i,j)M_s^{j,N}ds-\sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{N}\int_0^{t}\phi^{*n}(t-s)A_N^n(i,j)M_s^{j,N}ds.$$

这些术语将在下文中分别处理。这里，照例，我们设 $\phi(s)=0$ for $s\leq 0$。

**步骤 1.** 在这一步中，我们验证

$$\lim_{(N,K,t)\to(\infty,\infty,\infty)}\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{1}{t\sqrt{K}}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{i=1}^{K}\Big|(T_t^{i,N})^2-\mathbb{E}_\theta[(T_t^{i,N})^2]\Big|\Big]=0.$$

根据三角不等式，只需证明对所有 $i=1,\dots,K$, $\mathbb{E}_\theta[(T^{i,N}_t)^2]\leq Ct/N$。

令 $\beta_n(s,t,r)=\phi^{*n}(t-r)-\phi^{*n}(s-r)$，我们改写为

$$T_t^{i,N}=\sum_{n\geq 1}\int_0^{2t}\beta_n(t,2t,u)\sum_{j=1}^{N}A_N^n(i,j)M_u^{j,N}du. \tag{11}$$

因此，

$$\mathbb{E}_\theta[(T_t^{i,N})^2]=\sum_{m,n\geq 1}\int_0^{2t}\int_0^{2t}\beta_m(t,2t,u)\beta_n(t,2t,v)\sum_{j,k=1}^{N}A_N^m(i,j)A_N^n(i,k)\mathbb{E}_\theta[M_u^{j,N}M_v^{k,N}]dvdu.$$

注意，对于任意 $n \geq 0.$， $\int_0^{2t} \beta_n(t,2t,u) \leq 2\Lambda^n$。利用（8）和引理 3.3-(i)，其中 $r=\infty$ 在 $\Omega_{N,K}$ 上，我们得到 $\mathbb{E}_\theta[M_u^{j,N}M_v^{k,N}] = \mathbf{1}_{\{j=k\}}\mathbb{E}_\theta[Z_{u\wedge v}^{j,N}] \leq C(u\wedge v)$。因此，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta[(T_t^{i,N})^2] =& \sum_{m,n\geq 1}\int_0^{2t}\int_0^{2t}\beta_m(t,2t,u)\beta_n(t,2t,v)\sum_{j,k=1}^N A_N^m(i,j)A_N^n(i,k)\mathbb{E}_\theta[M_u^{j,N}M_v^{k,N}]dvdu\\
\leq& Ct\sum_{m,n\geq 1}\int_0^{2t}\int_0^{2t}\beta_m(t,2t,u)\beta_n(t,2t,v)dvdu\sum_{j=1}^N A_N^m(i,j)A_N^n(i,j)\\
\leq& Ct\sum_{m,n\geq 1}\Lambda^{m+n}\sum_{j=1}^N A_N^m(i,j)A_N^n(i,j)\\
\leq& Ct\sum_{j=1}^N (Q_N(i,j)-\mathbf{1}_{\{i=j\}})^2 \leq \frac{Ct}{N}.
\end{aligned}$$

最后一步由 [13, (8)], 得出，该式指出，在 $\Omega_{N,K} \subset \Omega_N^1$, $\mathbf{1}_{\{i=j\}} \leq Q_N(i,j) \leq \mathbf{1}_{\{i=j\}} + \Lambda C N^{-1}$.

**步骤 2.** 在这一步中，我们验证

$$\lim_{(N,K,t)\to(\infty,\infty,\infty)} \mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{1}{t\sqrt{K}}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{i=1}^K\Big(T_t^{i,N}(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N}) - \mathbb{E}_\theta[T_t^{i,N}(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N})]\Big)\Big|\Big] = 0.$$

实际上，这可由 $\Omega_{N,K}$ 上的方差估计得出:

$$x := \mathbb{V}ar_\theta\Big[\sum_{i=1}^K (T_t^{i,N}(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N}))\Big] \leq C\frac{Kt^2}{N}.$$

我们从以下内容开始

$$\begin{aligned}
x =& \mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{i,j=1}^K\Big(T_t^{i,N}(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N}) - \mathbb{E}_\theta[T_t^{i,N}(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N})]\Big)\\
&\Big(T_t^{j,N}(M_{2t}^{j,N}-M_t^{j,N}) - \mathbb{E}_\theta[T_t^{j,N}(M_{2t}^{j,N}-M_t^{j,N})]\Big)\Big].
\end{aligned}$$

回顾 (11)，并令 $\alpha_N(u,t,i,j) := \sum_{n\geq 1}\beta_n(t,2t,u)A_N^n(i,j)$, 我们得到

$$\begin{aligned}
x \leq& \sum_{i,j=1}^K\int_0^{2t}\int_0^{2t}\sum_{k,m=1}^N |\alpha_N(s,t,i,k)\alpha_N(u,t,j,m)|\\
&|\mathbb{C}ov_\theta[(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N})M_s^{k,N},(M_{2t}^{j,N}-M_t^{j,N})M_u^{m,N}]|dsdu.
\end{aligned}$$

此外，由于对于任意 $n\geq 0$, $\int_0^{2t}\beta_n(t,2t,u) \leq 2\Lambda^n$，我们有

$$\int_0^{2t}|\alpha_N(s,t,i,k)|ds \leq \sum_{n\geq 1}A_N^n(i,k)\int_0^{2t}|\beta_n(t,2t,s)|ds \leq 2\sum_{n\geq 1}A_N^n(i,k)\Lambda^n \leq 2(Q_N(i,k)-\mathbf{1}_{\{i=k\}}),$$

正如步骤 1 末尾所指出的，它由 $C/N$ 根据 [13, (8)] 有界。此外，根据[13, 引理 22],，我们在 $\Omega_{N,K}$ 上有，对于 $s,\ u\in[0,2t]$,

$$|\mathbb{C}ov_\theta[(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N})M_s^{k,N},(M_{2t}^{j,N}-M_t^{j,N})M_u^{m,N}]| \leq C(\mathbf{1}_{\#\{k,i,j,m\}=3}N^{-2}t + \mathbf{1}_{\#\{k,i,j,m\}\leq 2}t^2).$$

因此，我们得出

$$x \le \frac{C}{N^2}\sum_{i,j=1}^{K}\sum_{k,m=1}^{N}(\mathbf{1}_{\#\{k,i,j,m\}=3}N^{-2}t+\mathbf{1}_{\#\{k,i,j,m\}\le 2}t^2) \le \frac{C}{N^2}\Big(N^2K\times N^{-2}t+NK\times t^2\Big),$$

其上界为 $CKt^2/N$，如所需。

**步骤 3.** 接下来只需证明

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{1}{t\sqrt{K}}\Big[\sum_{i=1}^{K}(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N})^2-\sum_{i=1}^{K}\mathbb{E}_\theta[(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N})^2]\Big] \tag{12}$$

收敛到方差为 $2\mu^2/(1-\Lambda p)^2$ 的高斯随机变量。应用 Itô 公式，得到

$$(M_{2t}^{i,N}-M_t^{i,N})^2=2\int_t^{2t}(M_{s-}^{i,N}-M_t^{i,N})dM_s^{i,N}+Z_{2t}^{i,N}-Z_t^{i,N}.$$

因此，(12) 变为

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}\left[2\int_t^{2t}(M_{s-}^{i,N}-M_t^{i,N})dM_s^{i,N}+\Big\{(Z_{2t}^{i,N}-Z_t^{i,N})-\mathbb{E}_\theta[Z_{2t}^{i,N}-Z_t^{i,N}]\Big\}\right].$$

由 [21, 引理7.2-(ii)], 可知 $\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{E}_\theta[|\bar U_t^{N,K}|^2]\le \frac{Ct}{K}$。这立即推出

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}\{(Z_{2t}^{i,N}-Z_t^{i,N})-\mathbb{E}_\theta[Z_{2t}^{i,N}-Z_t^{i,N}]\}=\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{\sqrt{K}}{t}[\bar U_{2t}^{N,K}-\bar U_t^{N,K}]\to 0.$$

回忆引理 5.4 中定义的 $N^{t,i,N}=\int_t^{t+\sqrt{ut}}(M^{i,N}-M^{i,N})dM^{i,N}$。由于式 (10) 已在引理 5.4 中得到证明，且 $\frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}\int_t^{2t}(M^{i,N}-M^{i,N})dM^{i,N}=\frac{1}{t\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}N^{t,i,N}$，因此证明完成。

□

## 6. 第三估计量的极限定理

本节的目标是建立第 2.1 节中引入的第三估计量 $\mathcal{X}^{N,\Delta,K}_t$ 的渐近行为（见定理 6.1）。首先，回忆对于满足 $t/(2\Delta)\in\mathbb{N}^*$ 的 $\Delta\ge 1$，

$$\mathcal{X}_{\Delta,t}^{N,K}=\mathcal{W}_{\Delta,t}^{N,K}-\frac{N-K}{K}\varepsilon_t^{N,K},\quad \mathcal{W}_{\Delta,t}^{N,K}=2\mathcal{Z}_{2\Delta,t}^{N,K}-\mathcal{Z}_{\Delta,t}^{N,K},$$

$$\mathcal{Z}_{\Delta,t}^{N,K}=\frac{N}{t}\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(\bar Z_{a\Delta}^{N,K}-\bar Z_{(a-1)\Delta}^{N,K}-\Delta\varepsilon_t^{N,K})^2,\quad \varepsilon_t^{N,K}=(\bar Z_{2t}^{N,K}-\bar Z_t^{N,K})/t,$$

其中 $\bar Z_t^N=N^{-1}\sum_{i=1}^{N}Z^{i,N}_t$ 和 $\bar Z^{N,K}_t=K^{-1}\sum_{i=1}^{K}tZ^{i,N}_t$。此外，$Q_N$、$(\ell_N(i))_{i=1,\cdots,N}$ 以及 $\bar\ell_N^K$ 在第 3.1 节中定义。我们还引入 $c_N^K(j):=\sum_{i=1}^{K}Q_N(i,j)\ \ j=1,\cdots,N$。

在 [21] 中证明了 $\mathcal{X}^{N,\Delta,K}_t$ 收敛至 $\mathcal{X}^{N,\infty,K}_{\infty}=\mathcal{W}^{N,\infty,K}_{\infty}-\frac{(N-K)}{K}\mu\bar\ell_N^K$，其中 $\mathcal{W}^{N,\infty,K}_{\infty}=\mu\frac{N}{K^2}A^{N,\infty,K}_{\infty}$，$A^{N,\infty,K}_{\infty}=\sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{K}Q_N(i,j)\Big)^2\ell_N(j)$。为证明所述中心极限定理

在定理 6.1 中，我们将 $\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta,t}-\mathcal{X}^{N,K}_{\infty,\infty}$ 分解为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta,t}-\mathcal{X}^{N,K}_{\infty,\infty}\\
=&(\mathcal{W}^{N,K}_{\Delta,t}-\mathcal{W}^{N,K}_{\infty,\infty})-\frac{N-K}{K}\Big(\varepsilon^{N,K}_t-\mu\bar{\ell}^K_N\Big)\\
=&-\underbrace{D^{N,K,1}_{\Delta,t}+2D^{N,K,1}_{2\Delta,t}-D^{N,K,2}_{\Delta,t}+2D^{N,K,2}_{2\Delta,t}}_{small\ error}-\underbrace{D^{N,K,3}_{\Delta,t}+2D^{N,K,3}_{2\Delta,t}}_{principle}+\underbrace{D^{N,K,4}_{\Delta,t}-\frac{N-K}{K}\Big(\varepsilon^{N,K}_t-\mu\bar{\ell}^K_N\Big)}_{small\ error},
\end{aligned}$$

其中

$$D^{N,K,1}_{\Delta,t}=\frac{N}{t}\Big\{\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big(\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}-\Delta\varepsilon^{N,K}_t\Big)^2-\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big(\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}-\Delta\mu\bar{\ell}^K_N\Big)^2\Big\},$$

$$\begin{aligned}
D^{N,K,2}_{\Delta,t}=\frac{N}{t}\Big\{&\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big(\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}-\Delta\mu\bar{\ell}^K_N\Big)^2\\
&-\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big(\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}-\mathbb{E}_\theta[\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}]\Big)^2\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^{N,K,3}_{\Delta,t}=\frac{N}{t}\Big\{&\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big(\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}-\mathbb{E}_\theta[\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}]\Big)^2\\
&-\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big(\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}-\mathbb{E}_\theta[\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}]\Big)^2\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}
D^{N,K,4}_{\Delta,t}=&\Big\{\frac{2N}{t}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{2\Delta}+1}^{\frac{t}{\Delta}}\Big(\bar{Z}^{N,K}_{2a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{2(a-1)\Delta}-\mathbb{E}_\theta[\bar{Z}^{N,K}_{2a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{2(a-1)\Delta}]\Big)^2\Big]\\
&-\frac{N}{t}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big(\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}-\mathbb{E}_\theta[\bar{Z}^{N,K}_{a\Delta}-\bar{Z}^{N,K}_{(a-1)\Delta}]\Big)^2\Big]-\mathcal{W}^{N,K}_{\infty,\infty}\Big\}.
\end{aligned}$$

该分解中的主要项来自 $D^{N,K,3}_{\Delta,t}$（见引理 6.2），并由式 (13) 中定义的鞅差组合 $\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta,t,v}$ 近似（见命题 6.3）。随后，我们在命题 6.7 中证明 $\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta,t,v}$ 满足中心极限定理，从而确立定理 6.1。

命题 6.3 的证明依赖于引理 6.4、6.5 和 6.6，它们共同确立了分解中 $\Big|D^{N,K,3}_{\Delta,t}-\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta,t,1}\Big|$ 各个分量的收敛性。另一方面，命题 6.7 的证明分为两个步骤：我们首先证明引理 6.8)，然后证明命题 6.9，而后者本身由引理 6.10 和 6.11 推出。现在我们陈述定理 6.1，该定理将在第 6.3 节中证明。

**定理 6.1**。 假设 $(H(q))$ 对于某些 $q>3$、 $K\le N$ 以及 极限$_{(N,K)\to(\infty,\infty)}\ \frac{K}{N}=\gamma\le 1$, $\Delta_t=t/(2\lfloor t^{1-4/(q+1)}\rfloor)\sim t^{4/(q+1)}/2$ （当 $t$ 足够大时）成立。如果 $(N,K,t)\to(\infty,\infty,\infty)$ 且 $\frac{1}{\sqrt{K}}+\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}+\frac{N}{t\sqrt{K}}+Ne^{-c_{p,\wedge}K}\to 0$，

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\Big(\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t,t}-\mathcal{X}^{N,K}_{\infty,\infty}\Big)\longrightarrow\mathcal{N}\Big(0,6\mu^2\Big(\frac{1-\gamma}{(1-\Lambda p)}+\frac{\gamma}{(1-\Lambda p)^3}\Big)^2\Big).$$

**6.1. 估计量的一些小项**。 首先，我们将证明这些项 $D^{N,K1}_{\Delta t},D^{N,K2}_{\Delta t},D^{N,K4}_{\Delta t}$，以及 $\frac{N}{K}|\varepsilon^{N,K}_t-\mu\bar{\ell}^K_N|$ 都很小。

**引理 6.2**。 假设对于某个 $q>3$，$(H(q))$ 成立。若我们选择 $\Delta_t=t/(2\lfloor t^{1-4/(q+1)}\rfloor)\sim t^{4/(q+1)}/2$(当 $t$ 足够大时)，那么，若 $(N,K,t)\to(\infty,\infty,\infty)$ 且 $\frac{1}{\sqrt{K}}+\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}+\frac{N}{t\sqrt{K}}+Ne^{-c_{p,\wedge}K}\to 0$，则我们有如下依概率收敛

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\Big\{|D^{N,K,1}_{\Delta_t,t}|+|D^{N,K,2}_{\Delta_t,t}|+|D^{N,K,4}_{\Delta_t,t}|+\frac{N}{K}|\varepsilon^{N,K}_t-\mu\bar{\ell}^K_N|\Big\}\longrightarrow 0.$$

证明。 这直接推论自 [21,引理 7.3、9.2、9.3 和 9.5]。 □

接下来，对于 $\Delta\ge 1$，我们考虑项 $D^{N,K3}_{\Delta t}$，并证明它接近于 $\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta t v}$，回忆一下 $c^K_N(j)=\sum_{i=1}^K Q_N(i,\ j)$，并对 $0\le v\le 1$，定义

$$\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta,t,v}:=\sum_{a=[\frac{vt}{\Delta}]+1}^{[\frac{2vt}{\Delta}]}\Big\{(\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2-\mathbb{E}_\theta[(\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2]\Big\},\tag{13}$$

其中

$$\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}:=\frac{1}{K}\sum_{j=1}^N c^K_N(j)(M^{j,N}_{a\Delta}-M^{j,N}_{(a-1)\Delta}).\tag{14}$$

**命题 6.3**。 假设存在某个 $q>3$，使得$(H(q))$ 对于 $\Delta\ge 1$ 成立，则有

$$\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|D^{N,K,3}_{\Delta,t}-\frac{N}{t}\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta,t,1}\Big|\Big]\le\frac{CK}{N\Delta}+\frac{C\sqrt{K}}{\sqrt{N\Delta}}+\frac{Ct^{\frac{3}{4}}\sqrt{K}}{\Delta^{1+\frac{q}{2}}}.$$

在给出证明之前，我们需要做一些准备工作。回顾在 (9) 中定义的 $U^{i,N}$。对于$a\in\{t/(2\Delta)+1,\ \ldots..\ 2t/\Delta\}$，我们对 $i=1,\ \cdots,\ K$ 记为

$$U^{i,N}_{a\Delta}-U^{i,N}_{(a-1)\Delta}=\Gamma^{i,N}_{(a-1)\Delta,a\Delta}+X^{i,N}_{(a-1)\Delta,a\Delta},$$

其中

$$\Gamma^{i,N}_{(a-1)\Delta,a\Delta} := \sum_{n\geq 1}\Big\{\int_0^{a\Delta}\phi^{*n}(a\Delta-s)\sum_{j=1}^{N}A_N^n(i,j)[M_s^{j,N}-M_{a\Delta}^{j,N}]ds \tag{15}$$
$$-\int_0^{(a-1)\Delta}\phi^{*n}((a-1)\Delta-s)\sum_{j=1}^{N}A_N^n(i,j)[M_s^{j,N}-M_{(a-1)\Delta}^{j,N}]ds\Big\},$$

$$X^{i,N}_{(a-1)\Delta,a\Delta} := \sum_{n\geq 0}\sum_{j=1}^{N}\Big\{\int_0^{a\Delta}\phi^{*n}(a\Delta-s)dsA_N^n(i,j)M_{a\Delta}^{j,N} \tag{16}$$
$$-\int_0^{(a-1)\Delta}\phi^{*n}((a-1)\Delta-s)dsA_N^n(i,j)M_{(a-1)\Delta}^{j,N}\Big\}.$$

因此，我们定义 $\bar{\Gamma}^{N,K}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta} := \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\Gamma^{i,N}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$, $\bar{X}^{N,K}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta} := \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}X^{i,N}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$。我们将该差分解为三项:

$$\begin{aligned}\Big|D_{\Delta,t}^{N,K,3}-\frac{N}{t}\mathbb{X}_{\Delta,t,1}^{N,K}\Big| =& \frac{N}{t}\Big|\Big\{\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big(\bar{Z}_{a\Delta}^{N,K}-\bar{Z}_{(a-1)\Delta}^{N,K}-\mathbb{E}_\theta[\bar{Z}_{a\Delta}^{N,K}-\bar{Z}_{(a-1)\Delta}^{N,K}]\Big)^2\\ &-\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big(\bar{Z}_{a\Delta}^{N,K}-\bar{Z}_{(a-1)\Delta}^{N,K}-\mathbb{E}_\theta[\bar{Z}_{a\Delta}^{N,K}-\bar{Z}_{(a-1)\Delta}^{N,K}]\Big)^2\Big]\Big\}\\ &-\sum_{a=[\frac{vt}{\Delta}]+1}^{[\frac{2vt}{\Delta}]}\Big\{(\mathcal{Y}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K})^2-\mathbb{E}_\theta[(\mathcal{Y}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K})^2]\Big\}\Big|,\end{aligned}$$

其上界为

$$\begin{aligned}&\frac{2N}{t}\Big[\Big(\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big\{(\bar{\Gamma}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K})^2-\mathbb{E}_\theta[(\bar{\Gamma}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K})^2]\Big\}\Big|\\ &\quad+\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\bar{\Gamma}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}\bar{X}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}-\mathbb{E}_\theta[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\bar{\Gamma}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}\bar{X}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}]\Big|\\ &\quad+\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big|\mathcal{Y}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}\Big|\Big|\mathcal{Y}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}-\bar{X}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}\Big|+\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big|\mathcal{Y}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}-\bar{X}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}\Big|^2\Big)\Big]\\ &+\frac{2N}{t}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big|\mathcal{Y}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}\Big|\Big|\mathcal{Y}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}-\bar{X}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}\Big|+\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big|\mathcal{Y}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}-\bar{X}_{(a-1)\Delta,a\Delta}^{N,K}\Big|^2\Big].\end{aligned}$$

现在证明上述各项均可忽略。第一项在引理 6.5 中处理，其余各项则在引理 6.6 中处理。

我们先回顾式（15）中定义的 $\Gamma^{i,N}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$, $i=1,\cdots,K$，由此可将它们的平均值 $\bar{\Gamma}^{N,K}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\Gamma^{i,N}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$ 改写为 $\bar{\Gamma}^{N,K}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta} = C^{N,K}{}_{(a-1)\Delta} - B^{N,K}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta} + B^{N,K}{}_{a\Delta} - C^{N,K}{}_{a\Delta}$,

其中

$$C_{a\Delta}^{N,K} := \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n\geq 1}\int_0^{\Delta}\phi^{*n}(s)A_N^n(i,j)(M_{(a\Delta-s)}^{j,N}-M_{a\Delta}^{j,N})ds, \tag{17}$$

$$B_{a\Delta}^{N,K} := \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n\geq 1}\int_{\Delta}^{a\Delta}\phi^{*n}(s)A_N^n(i,j)(M_{(a\Delta-s)}^{j,N}-M_{a\Delta}^{j,N})ds. \tag{18}$$

现在我们为 $C^{N,K}_{a\Delta}$ 和 $B^{N,K}_{a\Delta}$ 建立以下界。这些证明见附录 D。

**引理 6.4**。 假设 $(H(q))$ 对某个 $q\geq 1$成立。对于 $\Delta\geq 1$ 和 $a,b\in\{\frac{t}{\Delta}+1,...,\frac{2t}{\Delta}\}$，则几乎必然有 $\Omega_{N,K}$，

$(i)$ $\mathbb{E}_\theta[(B_{a\Delta}^{N,K})^2]\leq\frac{C}{N}\Delta^{1-2q}$,

$(ii)$ $\mathbb{E}_\theta[(C_{a\Delta}^{N,K})^4]\leq\frac{C}{N^2}$,

$(iii)$ $\mathbb{C}ov_\theta[(C_{a\Delta}^{N,K}-C_{(a-1)\Delta}^{N,K})^2,(C_{b\Delta}^{N,K}-C_{(b-1)\Delta}^{N,K})^2]\leq\frac{C\sqrt{t}}{N\Delta^{q-1}}$, $|a-b|\geq 4$.

现在我们可以给出 $\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big\{(\bar{\Gamma}^{N,K}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2-\mathbb{E}_\theta[(\bar{\Gamma}^{N,K}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2]\Big\}$的估计

**引理 6.5**。 假设 $(H(q))$ 对某个 $q\geq 1$成立，则在集合$\Omega_{N,K}$上几乎必然，对于 $\Delta\geq 1$,

$$\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta}}\frac{N}{t}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big\{(\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2-\mathbb{E}_\theta[(\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2]\Big\}\Big|\Big]\leq\frac{CK\sqrt{t}}{N\Delta^{(q+1)}}+\frac{CK}{N\Delta}+\frac{CKt^{\frac{3}{4}}}{\Delta^{(1+\frac{q}{2})}\sqrt{N}}.$$

证明。 我们从

$$(\bar{\Gamma}^{N,K}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2=(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}{}_{(a-1)\Delta})^2+2(B^{N,K}_{a\Delta}-B^{N,K}{}_{(a-1)\Delta})(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}{}_{(a-1)\Delta})+(B^{N,K}_{a\Delta}-B^{N,K}{}_{(a-1)\Delta})^2.$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta}}\frac{N}{t}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big\{(\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2-\mathbb{E}_\theta[(\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2]\Big\}\Big|\Big]\\
\leq&\frac{K}{\sqrt{t\Delta}}\Big\{\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(B^{N,K}_{a\Delta}-B^{N,K}_{(a-1)\Delta})^2-\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(B^{N,K}_{a\Delta}-B^{N,K}_{(a-1)\Delta})^2\Big]\Big|\Big]\\
&+\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta})^2-\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta})^2\Big]\Big|\Big]\\
&+2\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(B^{N,K}_{a\Delta}-B^{N,K}_{(a-1)\Delta})(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta})\\
&\qquad-\mathbb{E}_\theta\Big[(B^{N,K}_{a\Delta}-B^{N,K}_{(a-1)\Delta})(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta})\Big]\Big|\Big]\Big\}.
\end{aligned}$$

应用引理 6.4-(i) 得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(B_{a\Delta}^{N,K}-B_{(a-1)\Delta}^{N,K})^2-\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(B_{a\Delta}^{N,K}-B_{(a-1)\Delta}^{N,K})^2\Big]\Big|\Big]\\
\leq&2\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(B_{a\Delta}^{N,K}-B_{(a-1)\Delta}^{N,K})^2\Big]\\
\leq&\frac{Ct}{N\Delta^{2q}}.
\end{aligned}$$

由引理 6.4-(ii)&(iii)，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(C_{a\Delta}^{N,K}-C_{(a-1)\Delta}^{N,K})^2-\mathbb{E}_\theta[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(C_{a\Delta}^{N,K}-C_{(a-1)\Delta}^{N,K})^2]\Big|^2\Big]\\
=&\mathbb{V}ar_\theta\Big[\sum_{a=\frac{vt}{\Delta}+1}^{\frac{2vt}{\Delta}}(C_{a\Delta}^{N,K}-C_{(a-1)\Delta}^{N,K})^2\Big]\\
\leq&\sum_{\substack{t/\Delta+1\leq a,b\leq 2t/\Delta\\|a-b|\leq 3}}\mathbb{E}_\theta\Big[(C_{a\Delta}^{N,K}-C_{(a-1)\Delta}^{N,K})^4\Big]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}_\theta\Big[(C_{b\Delta}^{N,K}-C_{(b-1)\Delta}^{N,K})^4\Big]^{\frac{1}{2}}\\
&+\sum_{\substack{t/\Delta+1\leq a,b\leq 2t/\Delta\\|a-b|\geq 4}}\mathbb{C}ov_\theta\Big[(C_{a\Delta}^{N,K}-C_{(a-1)\Delta}^{N,K})^2,(C_{b\Delta}^{N,K}-C_{(b-1)\Delta}^{N,K})^2\Big]\\
\leq&C\Big[\frac{t}{\Delta}\frac{1}{N^2}+\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Delta^{q+1}N}\Big].
\end{aligned}$$

此外，根据柯西-施瓦茨不等式和引理 6.4-(i)&(ii)，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}(B_{a\Delta}^{N,K}-B_{(a-1)\Delta}^{N,K})(C_{a\Delta}^{N,K}-C_{(a-1)\Delta}^{N,K})-\mathbb{E}_\theta[(B_{a\Delta}^{N,K}-B_{(a-1)\Delta}^{N,K})(C_{a\Delta}^{N,K}-C_{(a-1)\Delta}^{N,K})]\Big|\Big]\\
\leq&4\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big\{\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|B_{a\Delta}^{N,K}C_{a\Delta}^{N,K}\Big|\Big]+\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|B_{(a-1)\Delta}^{N,K}C_{a\Delta}^{N,K}\Big|\Big]+\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|B_{a\Delta}^{N,K}C_{(a-1)\Delta}^{N,K}\Big|\Big]\\
&\qquad+\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|B_{(a-1)\Delta}^{N,K}C_{(a-1)\Delta}^{N,K}\Big|\Big]\Big\}\\
\leq&4\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big\{\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|B_{a\Delta}^{N,K}\Big|^2\Big]^{\frac{1}{2}}+\Big|B_{(a-1)\Delta}^{N,K}\Big|^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}\Big\{\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|C_{a\Delta}^{N,K}\Big|^2\Big]^{\frac{1}{2}}+\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|C_{(a-1)\Delta}^{N,K}\Big|^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}\\
\leq&\frac{Ct}{\Delta^{q+\frac{1}{2}}}\frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

综上，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta}}\frac{N}{t}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big\{(\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2-\mathbb{E}_\theta[(\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2]\Big\}\Big|\Big]\\
\leq&\frac{K}{\sqrt{t\Delta}}\Big\{\frac{1}{N}\frac{Ct}{\Delta^{2q}}+\Big[\frac{t}{\Delta}\frac{1}{N^2}+\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Delta^{q+1}N}\Big]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{N}\frac{Ct}{\Delta^{q+\frac{1}{2}}}\Big\}\\
\leq&C\Big\{\frac{K}{N\Delta}+\frac{Kt^{\frac{3}{4}}}{\Delta^{(1+\frac{q}{2})}\sqrt{N}}+\frac{K\sqrt{t}}{N\Delta^{(q+1)}}\Big\}.
\end{aligned}$$

证明结束。 □

回顾一下，$c^K_N(j)=\sum_{i=1}^K Q_N(i,j)$，且 $X^{i,N}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$ 在式 (16) 中定义。接下来，我们将证明项 $\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^K X^{i,N}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$ 与式 (14) 中定义的 $\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$ 足够接近。

**引理 6.6** . 假设 $(H(q))$ 对某个 $q\geq 2$ 成立。对于 $\Delta\geq 1$，有以下不等式 ，

$(i)$ $\mathbb{E}_\theta[(\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2]\leq\frac{C}{N}\Big[\frac{1}{(a\Delta)^{2q-1}}+\frac{1}{((a-1)\Delta)^{2q-1}}\Big]$.

$(ii)$ $\frac{K}{\sqrt{t\Delta}}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^2\Big]\leq\frac{CK}{N\sqrt{t}\Delta^{2q-\frac{1}{2}}}$.

$(iii)$ $\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^4\Big]\leq\frac{C\Delta^2}{K^2}$.

$(iv)$ $\frac{K}{\sqrt{\Delta t}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sum_{a=\frac{t}{\Delta}}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|\Big]\leq\frac{C\sqrt{K}}{\Delta^{q-\frac{1}{2}}\sqrt{Nt}}$.

$(v)$ $\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta}}\frac{N}{t}\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\mathbb{E}_\theta[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}]\Big|\Big]$

$$\leq\frac{CK}{N\Delta^q\sqrt{t}}+\frac{C\sqrt{tK}}{\Delta^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{N}}+\frac{C\sqrt{K}}{\sqrt{N\Delta}}+\frac{Ct^{\frac{3}{4}}\sqrt{K}}{\Delta^{1+\frac{q}{2}}}.$$

引理 6.6 的证明见附录 D。现在，我们可以给出命题 6.3 的证明。

命题 *6.3* 的证明。 回顾 (13) 和 (14)，以及引理 6.4、6.5、6.6-(i)、(ii)、(iv) 和 (v)，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|D^{N,K,3}_{\Delta,t}-\frac{N}{t}\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta,t,1}\Big|\Big]\\
\leq&\frac{CK}{N\Delta}+\frac{CKt^{\frac{3}{4}}}{\Delta^{(1+\frac{q}{2})}\sqrt{N}}+\frac{CK\sqrt{t}}{N\Delta^{(q+1)}}+\frac{CK}{N\Delta^q\sqrt{t}}+\frac{C\sqrt{tK}}{\Delta^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{N}}\\
&\quad+\frac{C\sqrt{K}}{\sqrt{N\Delta}}+\frac{Ct^{\frac{3}{4}}\sqrt{K}}{\Delta^{1+\frac{q}{2}}}+\frac{C\sqrt{K}}{\Delta^{q-\frac{1}{2}}\sqrt{Nt}}+\frac{CK}{N\sqrt{t}\Delta^{2q-\frac{1}{2}}}\\
\leq&\frac{CK}{N\Delta}+\frac{CKt^{\frac{3}{4}}}{\Delta^{1+\frac{q}{2}}\sqrt{N}}+\frac{C\sqrt{K}}{\sqrt{N\Delta}}+\frac{Ct^{\frac{3}{4}}\sqrt{K}}{\Delta^{1+\frac{q}{2}}}\\
\leq&\frac{CK}{N\Delta}+\frac{C\sqrt{K}}{\sqrt{N\Delta}}+\frac{Ct^{\frac{3}{4}}\sqrt{K}}{\Delta^{1+\frac{q}{2}}},
\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

**6.2. .....的收敛** $\mathbb{X}^{N,\ \overset{K}{\Delta_t\ t},\ ,\ v}$。 回顾式（13）中定义的过程 $\mathbb{X}^{N,\ \overset{K}{\Delta_t\ t},\ ,\ v}$。本小节的目标是证明以下命题，该命题指出，$(\mathbb{X}^{N,\ \overset{K}{\Delta_t\ t},\ ,\ v})_{v\geq 0}$ 的归一化版本收敛到一个高斯过程。

**命题 6.7**。 假设 $(H(q))$对某个 $q>3$成立。对于 $t\geq 1$，令 $\Delta_t = t/(2\lfloor t^{1-4/(q+1)}\rfloor) \sim t^{4/(q+1)}/2$ (当 $t\to\infty$)。当 $(N,K,t)\to(\infty,\infty,\infty)$ 满足 $\frac{K}{N}\to\gamma\leq 1$ 且 $\frac{1}{\sqrt{K}}+\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}+\frac{N}{t\sqrt{K}}+Ne^{-c_{p,\Lambda}K}\to 0$时，有

$$\left(\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\frac{N}{t}\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta_t,t,v}\right)_{v\geq 0}\xrightarrow{d}\sqrt{2}\mu\Big(\frac{1-\gamma}{(1-\Lambda p)}+\frac{\gamma}{(1-\Lambda p)^3}\Big)(B_{2v}-B_v)_{v\geq 0},$$

关于斯科罗霍德拓扑，其中 $B$ 是标准布朗运动。

回顾鞅求和 $\mathcal{Y}^{N,\ K\ (a-1)\Delta,\ a\Delta}$ 在式 (14) 中的定义，我们应用伊藤公式得到

$$(K\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2 = Q_{a,N,K}+\sum_{j=1}^{N}\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big(Z^{j,N}_{a\Delta}-Z^{j,N}_{(a-1)\Delta}\Big), \tag{19}$$

其中

$$Q_{a,N,K}=2\int_{(a-1)\Delta}^{a\Delta}\sum_{j=1}^{N}c_N^K(j)(M^{j,N}_{s-}-M^{j,N}_{(a-1)\Delta})\sum_{j=1}^{N}c_N^K(j)dM^{j,N}_s.$$

于是我们可以将其分解为

$$\frac{K}{\sqrt{\Delta t}}\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta,t,v}=\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(2v)-\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(v)+rest,$$

其中

$$\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(u):=\frac{1}{K\sqrt{\Delta t}}\sum_{a=1}^{[\frac{t}{\Delta}u]}Q_{a,N,K},\qquad \text{for } 0\leq u\leq 2.$$

命题 6.7 的证明分为两个步骤：我们首先证明“$rest$”项可以忽略（见引理 6.8），然后证明 $\mathcal{L}^{t}$、$\overset{\Delta}{N}$、$K$ 满足中心极限定理（见命题 6.9）。

**引理 6.8**。 假设 $(H(q))$ 对某个 $q\geq 1$ 成立，则对于 $0\leq v\leq 1$ 和 $\Delta\geq 1$,

$$\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(2v)-\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(v)-\frac{K}{\sqrt{\Delta t}}\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta,t,v}\Big|\Big]\leq\frac{C}{\sqrt{\Delta t}}.$$

证明。 注意到 $\mathbb{E}[Q_{a,N,K}|\mathcal{F}_{(a-1)\Delta}]=0$，过程 $\mathcal{L}^{t,\ \overset{\Delta}{N}\ K,}(u)$ 是关于滤过 $\mathcal{F}_{[\frac{t}{\Delta}u]\Delta}$. 的鞅。根据等式 (19) 以及 (13) 中 $\mathbb{X}^{N,\ \overset{K}{\Delta\ t},\ ,\ v}$ 的定义，剩下只需验证

$$\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\frac{1}{K\sqrt{\Delta t}}\sum_{a=[\frac{vt}{\Delta}]+1}^{[\frac{2vt}{\Delta}]}\sum_{j=1}^{N}\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big(Z^{j,N}_{a\Delta}-Z^{j,N}_{(a-1)\Delta}-\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{a\Delta}-Z^{j,N}_{(a-1)\Delta}]\Big)\Big|\Big]\leq\frac{C}{\sqrt{\Delta t}}.$$

我们首先将其分解

$$\frac{1}{K\sqrt{\Delta t}}\sum_{a=[\frac{vt}{\Delta}]+1}^{[\frac{2vt}{\Delta}]}\sum_{j=1}^{N}\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big(Z_{a\Delta}^{j,N}-Z_{(a-1)\Delta}^{j,N}-\mathbb{E}_\theta[Z_{a\Delta}^{j,N}-Z_{(a-1)\Delta}^{j,N}]\Big)$$
$$=\frac{1}{K\sqrt{\Delta t}}\Big\{\sum_{j=1}^{N}\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big(Z_{2vt}^{j,N}-Z_{vt}^{j,N}-\mu vt\ell_N(j)\Big)$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big(\mu vt\ell_N(j)-Z_{2vt}^{j,N}+Z_{vt}^{j,N}\Big)\Big]\Big\}.$$

由 [13, (8)], , 在事件 $\Omega_{N,\ K}\subset\Omega_N^1$ 上，我们有 $\mathbf{1}_{\{i=j\}}\le Q_N(i,\ j)\le\mathbf{1}_{\{i=j\}}+\frac{C}{N}$ 对所有 $i,\ j=1,\ \ldots\ldots,\ N$. 回顾 $c_N^K(i)=\sum_{j=1}^K Q_N(j,\ i),\ \ i=1,\ \cdots,\ N$，可得

$$1\le c_N^K(i)\le 1+\frac{CK}{N}\text{ when }1\le i\le K\text{ and }0\le c_N^K(i)\le\frac{CK}{N}\text{ when }(K+1)\le i\le N. \tag{20}$$

此外，由 [13, 引理 16-(ii)],可得

$$\max_{j=1,\ldots,N}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\Big(Z_{2vt}^{j,N}-Z_{vt}^{j,N}-\mu vt\ell_N(j)\Big)\Big|\Big]\le C.$$

因此,

$$\mathbb{E}_\theta\Big[\frac{1}{K\sqrt{\Delta t}}\sum_{j=1}^{N}\Big|\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big(Z_{2vt}^{j,N}-Z_{vt}^{j,N}-\mu vt\ell_N(j)\Big)\Big|\Big]$$
$$\le\frac{C}{K\sqrt{\Delta t}}\Big[\sum_{j=1}^{K}\Big(c_N^K(j)\Big)^2+\sum_{j=K}^{N}\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big]\le\frac{C}{\sqrt{\Delta t}}.$$

因此,

$$\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\frac{1}{K\sqrt{\Delta t}}\sum_{a=[\frac{vt}{\Delta}]+1}^{[\frac{2vt}{\Delta}]}\sum_{j=1}^{N}\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big(Z_{a\Delta}^{j,N}-Z_{(a-1)\Delta}^{j,N}-\mathbb{E}_\theta[Z_{a\Delta}^{j,N}-Z_{(a-1)\Delta}^{j,N}]\Big)\Big|\Big]\le\frac{C}{\sqrt{\Delta t}},$$

证明至此结束。 □

现在我们来证明 $\mathcal{L}_{N,K}^{t,\Delta}(u)$ 收敛到布朗运动。

**命题 6.9**。 假设 $K\le N$。对于 $t\ge 1$，定义 $\Delta_t:=t/(2\lfloor t^{1-4/(q+1)}\rfloor)\sim t^{4/(q+1)}/2$ (对于 $t$较大的取值)。令 $(N,K,t)\to(\infty,\infty,\infty)$满足 $\frac{1}{\sqrt{K}}+\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}+\frac{N}{t\sqrt{K}}+Ne^{-c_p\cdot\Lambda K}\to 0$和 $\frac{K}{N}\to\gamma\le 1$。那么，在斯科罗霍德拓扑下，

$$(\mathcal{L}_{N,K}^{t,\Delta_t}(u))_{u\ge0}\xrightarrow{d}\mu\sqrt{2}\Big(\frac{1-\gamma}{(1-\Lambda p)}+\frac{\gamma}{(1-\Lambda p)^3}\Big)(B_u)_{u\ge0},$$

其中 $B$ 是标准布朗运动。

根据引理 4.5，要证明命题 6.9，只需根据 [19, 定理 VIII.3.8], 验证以下两个条件:

1. $\mathcal{L}_{N,K}^{t,\Delta}(u)$ 的跳跃幅度不大（引理 6.10）。
2. 其二次变差随时间线性增加（引理 6.11）。

以下引理处理第一个条件。

**引理 6.10**。 假设 $(H(q))$ 对某个 $q \geq 1$成立，并且对于 $\Delta \geq 1$,

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}} \mathbb{E}_\theta \Big[ \sup_{0 \leq u \leq 2} \Big| \mathcal{L}_{N,K}^{t,\Delta}(u) - \mathcal{L}_{N,K}^{t,\Delta}(u-) \Big| \Big] \leq C \Big( \frac{\Delta}{t} \Big)^{\frac{1}{4}}.$$

证明。 首先注意到， $\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(u)$ 是一个纯跳过程。因此，在跳跃时刻，我们有

$$\mathcal{L}_{N,K}^{t,\Delta}(u) - \mathcal{L}_{N,K}^{t,\Delta}(u-) = \frac{1}{K\sqrt{\Delta t}} Q_{[\frac{t}{\Delta}u],N,K}.$$

接下来，我们将证明

$$\mathbb{E}_\theta[(Q_{a,N,K})^4] \leq C(K\Delta)^4.$$

对于 $0 \leq u \leq 1$， 我们定义

$$q_{a,N,K}(u) := \int_{(a-1)\Delta}^{[(a-1)+u]\Delta} \sum_{j=1}^{N} c_N^K(j)(M_s^{j,N} - M_{(a-1)\Delta}^{j,N}) d\Big( \sum_{j=1}^{N} c_N^K(j) M_s^{j,N} \Big).$$

显然 $q_{a,N,K}(1) = \frac{1}{2} Q_{a,N,K}$ ，其二次变差为

$$[q_{a,N,K}(.), q_{a,N,K}(.)]_u = \int_{(a-1)\Delta}^{(a-1+u)\Delta} \Big( \sum_{j=1}^{N} c_N^K(j)(M_s^{j,N} - M_{(a-1)\Delta}^{j,N}) \Big)^2 \sum_{j=1}^{N} \Big( c_N^K(j) \Big)^2 dZ_s^{j,N}.$$

因此 地，回顾 $\bar{Z}_t^N = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} Z^{i,N}_t$、 $\bar{Z}^{N,K}_t = K^{-1} \sum_{i=1}^{K} Z^{i,N}_t$ 并利用 (20)，我们得到

$$\sum_{j=1}^{N} \Big( c_N^K(j) \Big)^2 dZ_s^{j,N} \leq C \Big( K d\bar{Z}_s^{N,K} + \frac{K^2}{N} d\bar{Z}_s^N \Big).$$

在 $\Omega_{N,K}$ 上，利用 Burkholder–Davis–Gundy 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta[(q_{a,N,K}(v))^4] \leq 4\mathbb{E}_\theta[([q_{a,N,K}(\cdot)q_{a,N,K}(\cdot)]_v)^2] \\
=&4\mathbb{E}_\theta \Big[ \Big( \int_{(a-1)\Delta}^{(a-1+v)\Delta} \Big( \sum_{j=1}^{N} c_N^K(j)(M_s^{j,N} - M_{(a-1)\Delta}^{j,N}) \Big)^2 d \sum_{j=1}^{N} \Big( c_N^K(j) \Big)^2 Z_s^{j,N} \Big)^2 \Big] \\
\leq&4\mathbb{E}_\theta \Big[ \sup_{0 \leq s \leq v\Delta} \Big( \sum_{j=1}^{N} c_N^K(j)(M_{(a-1)\Delta+s}^{j,N} - M_{(a-1)\Delta}^{j,N}) \Big)^4 \Big( \sum_{j=1}^{N} \Big( c_N^K(j) \Big)^2 (Z_{(a-1+v)\Delta}^{j,N} - Z_{(a-1)\Delta}^{j,N}) \Big)^2 \Big] \\
\leq&8\mathbb{E}_\theta \Big[ \sup_{0 \leq s \leq v\Delta} \Big( \sum_{j=1}^{N} c_N^K(j)(M_{(a-1)\Delta+s}^{j,N} - M_{(a-1)\Delta}^{j,N}) \Big)^8 + \Big( \sum_{j=1}^{N} \Big( c_N^K(j) \Big)^2 (Z_{(a-1+v)\Delta}^{j,N} - Z_{(a-1)\Delta}^{j,N}) \Big)^4 \Big] \\
\leq&C\mathbb{E}_\theta \Big[ \Big( \sum_{j=1}^{N} \Big( c_N^K(j) \Big)^2 (Z_{(a-1+v)\Delta}^{j,N} - Z_{(a-1)\Delta}^{j,N}) \Big)^4 \Big] \\
\leq&C\mathbb{E}_\theta \Big[ \Big( K(\bar{Z}_{(a-1+v)\Delta}^{N,K} - \bar{Z}_{(a-1)\Delta}^{N,K}) + \frac{K^2}{N} (\bar{Z}_{(a-1+v)\Delta}^{N} - \bar{Z}_{(a-1)\Delta}^{N}) \Big)^4 \Big] \\
\leq&C(Kv\Delta)^4.
\end{aligned}$$

这里第四步使用了 Burkholder–Davis–Gundy 不等式，而最后一个界由引理 3.4-(iv) 得出。

最后，在第三步应用柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\theta\Big[\sup_{0\le u\le 2}\Big|\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(u)-\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(u-)\Big|\Big]\\ =&\frac{1}{K\sqrt{\Delta t}}\mathbb{E}_\theta\Big[\sup_{\{i=1\dots[\frac{2t}{\Delta}]\}}|Q_{i,N,K}|\Big]\le\frac{1}{K\sqrt{\Delta t}}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{[\frac{2t}{\Delta}]}|Q_{i,N,K}|^4\Big)^{\frac14}\Big]\\ \le&\frac{1}{K\sqrt{\Delta t}}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{i=1}^{[\frac{2t}{\Delta}]}|Q_{i,N,K}|^4\Big]^{\frac14}\le C\Big(\frac{\Delta}{t}\Big)^{\frac14}.\end{aligned}$$

证明完毕。 □

**引理 6.11**。 我们假设 $(H(q))$ 对于某个 $q\ge 1$成立。对于 $0\le u\le 2$和 $\Delta\ge 1$,

$$\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|[\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(.),\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(.)]_u-\frac{2u(\mu A^{N,K}_{\infty,\infty})^2}{K^2}\Big|\Big]\le C\Big(\frac{1}{K\Delta}+\frac{1}{\sqrt{N}}+\Big(\frac{K\sqrt{t}}{\Delta^{q+1}}\Big)^{\frac12}+\sqrt{\frac{\Delta}{t}}\Big).$$

证明。 对于 $s\ge 0$，我们引入 $\phi_{t,\Delta}(s)=a\Delta$，其中 $a$ 是满足 $a\Delta\le s<(a+1)\Delta$的唯一整数。于是我们得到

$$\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(u)=\frac{2}{K\sqrt{\Delta t}}\int_0^{tu}\sum_{j=1}^N c^K_N(j)(M^{j,N}_s-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})\sum_{i=1}^N c^K_N(i)dM^{i,N}_s.$$

注意到，对于 $i=1,\dots\dots,N$，有 $Z^{i,N}_t=M^{i,N}_t+\int_0^t\lambda^{i,N}_s ds$，因此我们得到

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(.),\mathcal{L}^{t,\Delta}_{N,K}(.)]_u=&\frac{4}{K^2\Delta t}\int_0^{tu}\Big(\sum_{j=1}^N c^K_N(j)(M^{j,N}_s-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})\Big)^2\sum_{i=1}^N\Big(c^K_N(i)\Big)^2dZ^{i,N}_s\\ =&4(\mathcal{A}^{u,1}_{N,K}+\mathcal{A}^{u,2}_{N,K}+\mathcal{A}^{u,3}_{N,K}),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{u,1}_{N,K}:=&\frac{1}{K^2\Delta t}\int_0^{tu}\Big(\sum_{j=1}^N c^K_N(j)(M^{j,N}_s-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})\Big)^2\sum_{i=1}^N\Big(c^K_N(i)\Big)^2dM^{i,N}_s,\\ \mathcal{A}^{u,2}_{N,K}:=&\frac{1}{K^2\Delta t}\int_0^{tu}\Big(\sum_{j=1}^N c^K_N(j)(M^{j,N}_s-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})\Big)^2\sum_{i=1}^N\Big(c^K_N(i)\Big)^2\Big(\lambda^{i,N}_s-\mu\ell_N(i)\Big)ds,\\ \mathcal{A}^{u,3}_{N,K}:=&\Big[\mu\sum_{i=1}^N\Big(c^K_N(i)\Big)^2\ell_N(i)\Big]\frac{1}{K^2\Delta t}\int_0^{tu}\Big(\sum_{j=1}^N c^K_N(j)(M^{j,N}_s-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})\Big)^2ds.\end{aligned}$$

首先，我们推导 $\mathcal{A}^{u,N^1,K}$ 的上界。回顾 (8)，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\mathcal{A}^{u,1}_{N,K}\Big)^2\Big]=\frac{1}{K^4(\Delta t)^2}\mathbb{E}_\theta\Big[\int_0^{tu}\Big(\sum_{j=1}^N c^K_N(j)(M^{j,N}_s-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})\Big)^4\sum_{i=1}^N\Big(c^K_N(i)\Big)^4dZ^{i,N}_s\Big]\\ \le&\frac{C}{K^4(\Delta t)^2}\mathbb{E}_\theta\Big[\max_{a=1,\dots,[\frac{2t}{\Delta}]}\sup_{0\le s\le\Delta}\Big(\sum_{j=1}^N c^K_N(j)(M^{j,N}_{(a-1)\Delta+s}-M^{j,N}_{(a-1)\Delta})\Big)^4\sum_{j=1}^N\Big(c^K_N(j)\Big)^4Z^{j,N}_{2t}\Big]\\ \le&\frac{C}{K^4(\Delta t)^2}\mathbb{E}_\theta\Big[\max_{a=1,\dots,[\frac{2t}{\Delta}]}\sup_{0\le s\le\Delta}\Big(\sum_{j=1}^N c^K_N(j)(M^{j,N}_{(a-1)\Delta+s}-M^{j,N}_{(a-1)\Delta})\Big)^8+\Big(\sum_{j=1}^N\Big(c^K_N(j)\Big)^4Z^{j,N}_{2t}\Big)^2\Big].\end{aligned}$$

利用 Doob不等式、引理 3.4-(iii) 以及 (20)，最后一个表达式可由以下式子上界

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{K^4(\Delta t)^2}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=1}^{[\frac{2t}{\Delta}]}\sup_{0\le s\le\Delta}\Big(\sum_{j=1}^{N}c_N^K(j)(M^{j,N}_{(a-1)\Delta+s}-M^{j,N}_{(a-1)\Delta})\Big)^8\Big]+\frac{C}{K^2\Delta^2}\\
&\le\frac{C}{K^4(\Delta t)^2}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{a=1}^{[\frac{2t}{\Delta}]}\Big(\sum_{j=1}^{N}(c_N^K(j))^2(Z^{j,N}_{a\Delta}-Z^{j,N}_{(a-1)\Delta})\Big)^4\Big]+\frac{C}{K^2\Delta^2}\\
&\le\frac{C\Delta}{t}+\frac{C}{K^2\Delta^2}.
\end{aligned}$$

对于第二项，应用柯西-施瓦茨不等式、Burkholder–Davis–Gundy 不等式和(20)，可得在$\Omega_{N,\,K}$上，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\mathcal{A}^{u,2}_{N,K}\Big|\Big]\\
\le&\frac{1}{K^2\Delta t}\int_0^{tu}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{j=1}^{N}c_N^K(j)\Big(M_s^{j,N}-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)}\Big)\Big)^4\Big]^{\frac12}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{i=1}^{N}\Big(c_N^K(i)\Big)^2\Big(\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)\Big)\Big|^2\Big]^{\frac12}ds\\
\le&\frac{1}{K^2\Delta t}\int_0^{tu}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big(Z_s^{j,N}-Z^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)}\Big)\Big)^2\Big]^{\frac12}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{i=1}^{N}\Big(c_N^K(i)\Big)^2\Big(\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)\Big)\Big|^2\Big]^{\frac12}ds\\
\le&\frac{C}{K^2\Delta t}\int_0^{tu}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(K\Big(\bar Z_s^{N,K}-\bar Z^{N,K}_{\phi_{t,\Delta}(s)}\Big)+\frac{K^2}{N}\Big(\bar Z_s^{N}-\bar Z^{N}_{\phi_{t,\Delta}(s)}\Big)\Big)^2\Big]^{\frac12}\\
&\qquad\times\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{i=1}^{N}\Big(c_N^K(i)\Big)^2\Big(\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)\Big)\Big|^2\Big]^{\frac12}ds.
\end{aligned}$$

现在，应用引理 3.3-(ii)，其表明在 $\Omega_{N,\,K}$上

$$\max_{i=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}-Z_s^{i,N}]\le C(t-s),$$

结合 (20) 和引理 3.4-(ii)，我们进一步得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\mathcal{A}^{u,2}_{N,K}\Big|\Big]\le&\frac{C}{Kt}\int_0^{tu}\sum_{i=1}^{N}\Big(c_N^K(i)\Big)^2\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|(\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i))\Big|^2\Big]^{\frac12}ds\\
\le&\frac{C}{Kt}\int_0^{tu}\sum_{i=1}^{K}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)\Big|^2\Big]^{\frac12}ds+\frac{C}{Nt}\int_0^{tu}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\lambda_s^{i,N}-\mu\ell_N(i)\Big|^2\Big]^{\frac12}ds\\
\le&\frac{C}{\sqrt{N}}+\frac{C}{t^q}.
\end{aligned}$$

对于第三项，我们先回顾 $A^{N,\infty}{}^{K}{}_{,\infty} = \sum_{i=1}^{N}\Big(c_N^K(i)\Big)^2\ell_N(i)$，其中 $c_N^K(i) = \sum_{j=1}^{K} Q_N(j,i)$。然后我们改写为

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{V}ar_\theta(\mathcal{A}^{u,3}_{N,K})\\
&= \frac{(\mu A^{N,K}_{\infty,\infty})^2}{K^4\Delta^2t^2}\mathbb{V}ar_\theta\Big[\int_0^{ut}\Big(\sum_{j=1}^{N}c_N^K(j)(M_s^{j,N}-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})\Big)^2 ds\Big]\\
&= \frac{(\mu A^{N,K}_{\infty,\infty})^2}{K^4\Delta^2t^2}\int_0^{ut}\int_0^{ut}\mathbb{C}ov_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{N}c_N^K(i)(M_s^{i,N}-M^{i,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})\Big)^2,\Big(\sum_{j=1}^{N}c_N^K(j)(M_{s'}^{j,N}-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s')})\Big)^2\Big]dsds'\\
&= \frac{(\mu A^{N,K}_{\infty,\infty})^2}{K^4\Delta^2t^2}\int_0^{ut}\int_0^{ut}\sum_{1\le i,i',j,j'\le N}\mathbb{C}ov_\theta\Big[c_N^K(i)c_N^K(i')(M_s^{i,N}-M^{i,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})(M_s^{i',N}-M^{i',N}_{\phi_{t,\Delta}(s)}),\\
&\qquad\qquad c_N^K(j)c_N^K(j')(M_{s'}^{j,N}-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s')})(M_{s'}^{j',N}-M^{j',N}_{\phi_{t,\Delta}(s')})\Big]dsds'\\
&= \frac{(\mu A^{N,K}_{\infty,\infty})^2}{K^4\Delta^2t^2}\int_0^{ut}\int_0^{ut}\Big(\mathbf{1}_{\{|s-s'|>3\Delta\}}+\mathbf{1}_{\{|s-s'|\le 3\Delta\}}\Big)\sum_{1\le i,i',j,j'\le N}\\
&\qquad\mathbb{C}ov_\theta\Big[c_N^K(i)c_N^K(i')(M_s^{i,N}-M^{i,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})(M_s^{i',N}-M^{i',N}_{\phi_{t,\Delta}(s)}),\\
&\qquad\qquad c_N^K(j)c_N^K(j')(M_{s'}^{j,N}-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s')})(M_{s'}^{j',N}-M^{j',N}_{\phi_{t,\Delta}(s')})\Big]dsds'.
\end{aligned}
$$

但在 $\Omega_{N,\ K}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,i',j,j'=1}^{N}\int_0^{ut}\int_0^{ut}\mathbf{1}_{\{|s-s'|\le 3\Delta\}}\mathbb{C}ov_\theta\Big[c_N^K(i)c_N^K(i')(M_s^{i,N}-M^{i,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})(M_s^{i',N}-M^{i',N}_{\phi_{t,\Delta}(s)}),\\
&\qquad\qquad c_N^K(j)c_N^K(j')(M_{s'}^{j,N}-M^{j,N}_{\phi_{t,\Delta}(s')})(M_{s'}^{j',N}-M^{j',N}_{\phi_{t,\Delta}(s')})\Big]dsds'\\
\le&\int_0^{ut}\int_0^{ut}\mathbf{1}_{\{|s-s'|\le 3\Delta\}}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{N}c_N^K(i)(M_s^{i,N}-M^{i,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})\Big)^4\Big]^{\frac12}\\
&\times\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{N}c_N^K(i)(M_{s'}^{i,N}-M^{i,N}_{\phi_{t,\Delta}(s')})\Big)^4\Big]^{\frac12}dsds'\\
\le&\int_0^{ut}\int_0^{ut}\mathbf{1}_{\{|s-s'|\le 3\Delta\}}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{N}(c_N^K(i))^2(Z_s^{i,N}-Z^{i,N}_{\phi_{t,\Delta}(s)})\Big)^2\Big]^{\frac12}\\
&\times\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^{N}(c_N^K(i))^2(Z_{s'}^{i,N}-Z^{i,N}_{\phi_{t,\Delta}(s')})\Big)^2\Big]^{\frac12}dsds'\\
\le&C\int_0^{ut}\int_0^{ut}\mathbf{1}_{\{|s-s'|\le 3\Delta\}}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(K\Big(\bar Z_s^{N,K}-\bar Z^{N,K}_{\phi_{t,\Delta}(s)}\Big)+\frac{K^2}{N}\Big(\bar Z_s^{N}-\bar Z^{N}_{\phi_{t,\Delta}(s)}\Big)\Big)^2\Big]^{\frac12}\\
&\qquad\times\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(K\Big(\bar Z_{s'}^{N,K}-\bar Z^{N,K}_{\phi_{t,\Delta}(s')}\Big)+\frac{K^2}{N}\Big(\bar Z_{s'}^{N}-\bar Z^{N}_{\phi_{t,\Delta}(s')}\Big)\Big)^2\Big]^{\frac12}dsds'\\
\le&Ct\Delta^3K^2.
\end{aligned}
$$

根据引理 30], 的证明中的第 [13, 步，我们已经得到，当 $|s-s'|\geq 3\Delta$， 时， t

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}ov_\theta[(M_s^{i,N}-M_{\phi_{t,\Delta}(s)}^{i,N})(M_s^{i',N}-M_{\phi_{t,\Delta}(s)}^{i',N}),(M_{s'}^{j,N}-M_{\phi_{t,\Delta}(s')}^{j,N})(M_{s'}^{j',N}-M_{\phi_{t,\Delta}(s')}^{j',N})]\\ \leq& C(\mathbf{1}_{\{i=i'\}}+\mathbf{1}_{\{j=j'\}})t^{1/2}\Delta^{1-q}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sum_{i,i',j,j'=1}^{N}\int_0^t\int_0^t\mathbf{1}_{\{|s-s'|\geq 3\Delta\}}\mathbb{C}ov_\theta\Big[c_N^K(i)c_N^K(i')\Big(M_s^{i,N}-M_{\phi_{t,\Delta}(s)}^{i,N}\Big)\Big(M_s^{i',N}-M_{\phi_{t,\Delta}(s)}^{i',N}\Big),\\ &\qquad\qquad c_N^K(j)c_N^K(j')\Big(M_{s'}^{j,N}-M_{\phi_{t,\Delta}(s')}^{j,N}\Big)\Big(M_{s'}^{j',N}-M_{\phi_{t,\Delta}(s')}^{j',N}\Big)\Big]dsds'\\ \leq&\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}Ct^{5/2}\Delta^{1-q}\Big(\sum_{i=1}^{N}(c_N^K(i))^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{N}c_N^K(i)\Big)^2\leq CK^3t^{5/2}\Delta^{1-q}.\end{aligned}$$

综上，在 $\Omega_{N,\ K}$

$$\mathbb{V}ar_\theta(\mathcal{A}_{N,K}^{u,3})\leq\frac{1}{K^4\Delta^2t^2}\Big(\mu A_{\infty,\infty}^{N,K}\Big)^2\Big(\frac{K^3t^{5/2}}{\Delta^{q-1}}+t\Delta^3K^2\Big)\leq C\Big(\frac{K\sqrt{t}}{\Delta^{q+1}}+\frac{\Delta}{t}\Big),$$

这是因为在 $\Omega_{N,\ K}$, $|\ell_N(i)|\leq C$ 对所有 $1\leq i\leq N$，以及 (20) 均成立。

注意到 $A^{N,\ \infty\ ,\ \infty}=\sum_{j=1}^{K}\Big(c_N^K(j)\Big)^2\ell_N(j)$ 且 $\int_0^{ut}(s-\phi_{t,\ \Delta}(s))ds=\frac{u\Delta t}{2}$，在 $\Omega$ 上有$_{N,\ K}$,

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbb{E}_\theta[\mathcal{A}_{N,K}^{u,3}]-\frac{u(\mu A_{\infty,\infty}^{N,K})^2}{2K^2}\Big|\\ =&\frac{1}{\Delta tK^2}\Big|\mu A_{\infty,\infty}^{N,K}\int_0^{ut}\sum_{j=1}^{N}\Big\{\Big(c_N^K(j)\Big)^2\mathbb{E}_\theta\Big[Z_s^{j,N}-Z_{\phi_{t,\Delta}(s)}^{j,N}\Big]\Big\}ds-\frac{u\Delta t(\mu A_{\infty,\infty}^{N,K})^2}{2}\Big|\\ =&\frac{1}{\Delta tK^2}\Big|\mu A_{\infty,\infty}^{N,K}\int_0^{ut}\sum_{j=1}^{N}\Big\{\Big(c_N^K(j)\Big)^2\mathbb{E}_\theta\Big[Z_s^{j,N}-Z_{\phi_{t,\Delta}(s)}^{j,N}-\mu(s-\phi_{t,\Delta}(s))\ell_N(j)\Big]\Big\}ds\Big|.\end{aligned}$$

由 (20) 和 [13,引理 16-(ii)], 可得

$$\Big|\mathbb{E}_\theta[\mathcal{A}_{N,K}^{u,3}]-\frac{u(\mu A_{\infty,\infty}^{N,K})^2}{2K^2}\Big|\leq\frac{C}{\Delta^q}.$$

汇总前面的所有计算，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\big[\mathcal{L}_{N,K}^{t,\Delta}(.),\mathcal{L}_{N,K}^{t,\Delta}(.)\big]_u-\frac{2u(\mu A_{\infty,\infty}^{N,K})^2}{K^2}\Big|\Big]\\ \leq&4\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big\{\Big|\mathcal{A}_{N,K}^{u,1}\Big|+\Big|\mathcal{A}_{N,K}^{u,2}\Big|+\mathbb{V}ar_\theta(\mathcal{A}_{N,K}^{u,3})^{\frac{1}{2}}+\Big|\mathbb{E}_\theta[\mathcal{A}_{N,K}^{u,3}]-\frac{u(\mu A_{\infty,\infty}^{N,K})^2}{2K^2}\Big|\Big\}\Big]\\ \leq&\frac{C}{K\Delta}+C\sqrt{\frac{\Delta}{t}}+\frac{C}{\sqrt{N}}+\frac{C}{t^q}+C\Big(\frac{K\sqrt{t}}{\Delta^{q+1}}+\frac{\Delta}{t}\Big)^{\frac{1}{2}}+\frac{C}{\Delta^q}\\ \leq&C\Big(\frac{1}{K\Delta}+\frac{1}{\sqrt{N}}+\Big(\frac{K\sqrt{t}}{\Delta^{q+1}}\Big)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{\Delta}{t}}\Big).\end{aligned}$$

证明完毕。 □

接下来，我们证明命题 6.7。

命题 *6.7* 的证明。直接应用引理 6.8、命题 6.9 和引理 4.5 可得

$$\frac{K}{\sqrt{t\Delta_t}}(\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta_t,t,v})_{v\geq 0} \xrightarrow{d} \mu\sqrt{2}\Big(\frac{1-\gamma}{(1-\Lambda p)}+\frac{\gamma}{(1-\Lambda p)^3}\Big)(B_{2v}-B_v)_{v\geq 0},$$

如所需。 □

6.3. **定理 6.1 的证明**。我们回顾一下， $\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta_t t,\cdot,\cdot,v}$ 在式 (13) 中定义，并注意到 $\mathbb{X}^{N,K}_{2\Delta_t t,\cdot,1} = \mathbb{X}^{N,K}_{\Delta_t t,\cdot,12}$。由命题 6.7 可知

$$\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\frac{N}{t}\Big(-\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta_t,t,1}+2\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta_t,t,\frac{1}{2}}\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(0,6\mu^2\Big(\frac{1-\gamma}{(1-\Lambda p)}+\frac{\gamma}{(1-\Lambda p)^3}\Big)^2\Big).$$

由命题 6.3，我们得出

$$\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|-D^{N,K,3}_{\Delta_t,t}+2D^{N,K,3}_{2\Delta_t,t}-2\frac{N}{t}\mathbb{X}^{N,K}_{2\Delta_t,t,1}+\frac{N}{t}\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta_t,t,1}\Big|\Big]\leq \frac{CK}{N\Delta_t}+\frac{C\sqrt{K}}{\sqrt{N\Delta_t}}+\frac{Ct^{\frac{3}{4}}\sqrt{K}}{\Delta_t^{1+\frac{q}{2}}}.$$

因此，由引理 6.2，我们得到如下依概率收敛：当 $(N,\ K,\ t)\to(\infty,\ \infty,\ \infty)$，且 $\frac{K}{N}\to\gamma\leq 1$ 和 $\frac{1}{\sqrt{K}}+\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}+\frac{N}{t\sqrt{K}}+Ne^{-c_{p,\Lambda}K}\to 0$时，的极限

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\Big(\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t,t}-\mathcal{X}^{N,K}_{\infty,\infty}\Big)$$

等于.....的极限

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\Big\{-D^{N,K,3}_{\Delta_t,t}+2D^{N,K,3}_{2\Delta_t,t}\Big\},$$

而这又等于.....的极限

$$\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\frac{N}{t}\Big(-\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta_t,t,1}+2\mathbb{X}^{N,K}_{\Delta_t,t,\frac{1}{2}}\Big);$$

最终，这在分布意义下收敛到 $\mathcal{N}\Big(0,6\mu^2\Big(\frac{1-\gamma}{1-\Lambda p()}+\frac{\gamma}{(1-\Lambda p)^3}\Big)^2\Big)$。

## 7. Proof of the main result

本节给出第 2 节所述主要结果的证明。首先，我们回顾第 2 节中定义的估计量 $\varepsilon^{N,K}_t$，$\mathcal{V}^{N,K}_t$ 和 $\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t t,\cdot}$，以及函数

$$\Psi^{(3)}(u,v,w)=\frac{u^2(1-\sqrt{\frac{u}{w}})^2}{v+u^2(1-\sqrt{\frac{u}{w}})^2} \quad \text{if } u>0,\ v>0,\ w>0 \quad \text{and} \quad \Psi^{(3)}(u,v,w)=0 \text{ otherwise,}$$

and

$$\hat{p}_{N,K,t}:=\Psi^{(3)}(\varepsilon^{N,K}_t,\mathcal{V}^{N,K}_t,\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t,t}), \quad \text{with } \Delta_t=(2\lfloor t^{1-4/(q+1)}\rfloor)^{-1}t.$$

现在我们开始证明定理 2.1。

定理 *2.1* 的证明。可以直接验证，$\Psi^{(3)}\Big(\frac{\mu}{1-\Lambda p},\frac{(\mu\Lambda)^2p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2},\frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}\Big)=p$. 根据中值定理，存在一些向量 $\boldsymbol{C^i_{N,K,t}}$，对于 $i=1,2,3,$，它们位于

$(\varepsilon^{N}_{\cdot,t}{}^{K}, \mathcal{V}^{N}_{\cdot,t}{}^{K}, \mathcal{X}^{N}_{\cdot,\Delta_t}{}^{K}_{t,})$ 与 $\boldsymbol{C}:=\Big(\frac{\mu}{1-\Lambda p}, \frac{(\mu\Lambda)^2 p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}, \frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}\Big)$，使得

$$\begin{aligned}\hat{p}_{N,K,t}-p =&\Psi^{(3)}(\varepsilon_t^{N,K}, \mathcal{V}_t^{N,K}, \mathcal{X}_{\Delta_t,t}^{N,K})-p\\ =&\Psi^{(3)}(\varepsilon_t^{N,K}, \mathcal{V}_t^{N,K}, \mathcal{X}_{\Delta_t,t}^{N,K})-\Psi^{(3)}\Big(\frac{\mu}{1-\Lambda p}, \frac{(\mu\Lambda)^2 p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}, \frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}\Big)\\ =&\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial u}(\boldsymbol{C^1_{N,K,t}})\Big(\varepsilon_t^{N,K}-\frac{\mu}{1-\Lambda p}\Big)+\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial v}(\boldsymbol{C^2_{N,K,t}})\Big(\mathcal{V}_t^{N,K}-\frac{(\mu\Lambda)^2 p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big)\\ &+\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial w}(\boldsymbol{C^3_{N,K,t}})\Big(\mathcal{X}_{\Delta_t,t}^{N,K}-\frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}\Big).\end{aligned}$$

由 [21, 第 10], 节首段可知，当$(N,K,t)\to(\infty,\infty,\infty)$且 $\frac{1}{\sqrt{K}}+\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}+\frac{N}{t\sqrt{K}}+Ne^{-c_p,\Lambda K}\to 0$时，$(\varepsilon^{N}_{,t}{}^{K}, \mathcal{V}^{N}_{,t}{}^{K}, \mathcal{X}^{N}_{,\Delta_t}{}^{K}_{t,})$依概率收敛于$\boldsymbol{C}$。因此，三个向量$\boldsymbol{C}^i_{N,K,t}$, $i=1,2,3$均收敛至 $\boldsymbol{C}:=\Big(\frac{\mu}{1-\Lambda p}, \frac{(\mu\Lambda)^2 p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}, \frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}\Big)$依概率收敛。

我们定义如下函数：从 $D':=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3:\ w>u>0\ and\ v>0\}$ 到 $\mathbb{R}^3$

$$\Psi^{(1)}(u,v,w)=u\sqrt{\frac{u}{w}},\quad \Psi^{(2)}(u,v,w)=\frac{v+(u-\Psi^{(1)})^2}{u(u-\Psi^{(1)})}.$$

那么，在 $D'$ 上，我们有 $\Psi^{(3)}(u,\ v,\ w)=\frac{1-u^{-1}\Psi^{(1)}}{\Psi^{(2)}}$。

经过一系列繁琐但直接的计算可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial v}(\boldsymbol{C})=0,\quad \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial w}(\boldsymbol{C})=\frac{-(1-\Lambda p)^3}{2},\quad \frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial v}(\boldsymbol{C})=\frac{(1-\Lambda p)^2}{\mu^2\Lambda p},\\ &\frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial w}(\boldsymbol{C})=\Big\{\frac{-2\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial w}}{u}+\frac{\Psi^{(2)}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial w}}{(u-\Psi^{(1)})}\Big\}(\boldsymbol{C})=\frac{(1-\Lambda p)^4(2p-1)}{2\mu p},\\ &\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial v}(\boldsymbol{C})=-\frac{\frac{\Psi^{(2)}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial v}}{u}+(1-\frac{\Psi^{(1)}}{u})\frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial v}}{(\Psi^{(2)})^2}(\boldsymbol{C})=-\frac{(1-\Lambda p)^2}{(\mu\Lambda)^2},\\ &\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial w}(\boldsymbol{C})=-\frac{\frac{\Psi^{(2)}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial w}}{u}+(1-\frac{\Psi^{(1)}}{u})\frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial w}}{(\Psi^{(2)})^2}(\boldsymbol{C})=\frac{(1-\Lambda p)^4(1-p)}{\mu\Lambda}.\end{aligned}$$

情形 *1.* 主导项为 $\frac{1}{\sqrt{K}}$，即当 $[\frac{1}{\sqrt{K}}]/[\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}+\frac{N}{t\sqrt{K}}]\to\infty$时，我们写作

$$\begin{aligned}\sqrt{K}\Big(\hat{p}_{N,K,t}-p\Big)=&\sqrt{K}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial u}(\boldsymbol{C^1_{N,K,t}})\Big(\varepsilon_t^{N,K}-\frac{\mu}{1-\Lambda p}\Big)\\ &+\sqrt{K}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial v}(\boldsymbol{C^2_{N,K,t}})\Big(\mathcal{V}_t^{N,K}-\frac{(\mu\Lambda)^2 p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big)\\ &+\sqrt{K}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial w}(\boldsymbol{C^3_{N,K,t}})\Big(\mathcal{X}_{\Delta_t,t}^{N,K}-\frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}\Big).\end{aligned}$$

根据引理 4.1、5.1 和 4.4 以及定理 6.1，我们得到

$$\sqrt{K}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial u}(\boldsymbol{C^1_{N,K,t}})\Big(\varepsilon_t^{N,K}-\frac{\mu}{1-\Lambda p}\Big)+\sqrt{K}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial w}(\boldsymbol{C^3_{N,K,t}})\Big(\mathcal{X}_{\Delta_t,t}^{N,K}-\frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}\Big)\xrightarrow{d}0.$$

接下来，我们注意到，当 $(N,\ K,\ t)\ \to(\infty,\ \infty,\ \infty)$ 时，

$$\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial v}(\boldsymbol{C^2_{N,K,t}})\longrightarrow-\frac{(1-\Lambda p)^2}{(\mu\Lambda)^2}\quad \textit{in probability.}$$

因此，由定理 4.2 和 5.2，我们得出

$$\sqrt{K}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial v}(\boldsymbol{C^2_{N,K,t}})\Big(\mathcal{V}_t^{N,K}-\frac{(\mu\Lambda)^2p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\Big(0,p^2(1-p)^2\Big),$$

这进而意味着

$$\sqrt{K}\Big(\hat{p}_{N,K,t}-p\Big)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\Big(0,p^2(1-p)^2\Big).$$

情形 *2.* 主导项为 $\frac{N}{t\sqrt{K}}$，即当 $[\frac{N}{t\sqrt{K}}]/[\frac{1}{\sqrt{K}}+\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}]\to\infty$ 时，我们写作

$$\begin{aligned}\frac{t\sqrt{K}}{N}\Big(\hat{p}_{N,K,t}-p\Big)=&\frac{t\sqrt{K}}{N}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial u}(\boldsymbol{C^1_{N,K,t}})\Big(\varepsilon_t^{N,K}-\frac{\mu}{1-\Lambda p}\Big)\\&+\frac{t\sqrt{K}}{N}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial v}(\boldsymbol{C^2_{N,K,t}})\Big(\mathcal{V}_t^{N,K}-\frac{(\mu\Lambda)^2p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big)\\&+\frac{t\sqrt{K}}{N}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial w}(\boldsymbol{C^3_{N,K,t}})\Big(\mathcal{X}_{\Delta_t,t}^{N,K}-\frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}\Big).\end{aligned}$$

同样，根据引理 4.1、5.1 和 4.4 以及定理 6.1，我们得到

$$\frac{t\sqrt{K}}{N}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial u}(\boldsymbol{C^1_{N,K,t}})\Big(\varepsilon_t^{N,K}-\frac{\mu}{1-\Lambda p}\Big)+\frac{t\sqrt{K}}{N}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial w}(\boldsymbol{C^3_{N,K,t}})\Big(\mathcal{X}_{\Delta_t,t}^{N,K}-\frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}\Big)\xrightarrow{d}0.$$

最后，利用定理 4.2 和 5.2，我们发现

$$\frac{t\sqrt{K}}{N}\Big(\hat{p}_{N,K,t}-p\Big)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\Big(0,\frac{2(1-\Lambda p)^2}{\mu^2\Lambda^4}\Big).$$

情形 *3.* 主导项为 $\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}$，即当 $[\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}]/[\frac{1}{\sqrt{K}}+\frac{N}{t\sqrt{K}}]\to\infty$ 和 $\frac{K}{N}\to\gamma\le1$ 时。利用引理 4.1、5.1 以及定理 4.2 和 5.2，我们得到

$$\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\Big\{\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial u}(\boldsymbol{C^1_{N,K,t}})\Big(\varepsilon_t^{N,K}-\frac{\mu}{1-\Lambda p}\Big)+\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial v}(\boldsymbol{C^2_{N,K,t}})\Big(\mathcal{V}_t^{N,K}-\frac{(\mu\Lambda)^2p(1-p)}{(1-\Lambda p)^2}\Big)\Big\}\xrightarrow{d}0.$$

应用引理 4.4 可得

$$\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial w}(\boldsymbol{C^3_{N,K,t}})\Big(\mathcal{X}_{\infty,\infty}^{N,K}-\frac{\mu}{(1-\Lambda p)^3}\Big)\xrightarrow{d}0.$$

因此，只需分析

$$\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial w}(\boldsymbol{C^3_{N,K,t}})\Big(\mathcal{X}_{\Delta_t,t}^{N,K}-\mathcal{X}_{\infty,\infty}^{N,K}\Big).$$

由于

$$\frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial w}(\boldsymbol{C^3_{N,K,t}})\longrightarrow\frac{(1-\Lambda p)^4(1-p)}{\mu\Lambda}\quad \textit{in probability,}$$

并由定理 6.1，最终得出

$$\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}\Big(\hat{p}_{N,K,t}-p\Big)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{6(1-p)^2}{\Lambda^2}\Big((1-\gamma)(1-\Lambda p)^3+\gamma(1-\Lambda p)\Big)^2\right).$$

□

接下来，我们来证明命题 2.4。

命题 *2.4* 的证明。我们注意到，对于情形 $p=0$，定理 6.1 的结论仍然成立（且不再需要 $\frac{K}{N}$ 的极限）。可以直接验证，$\bar{\ell}_N^K=1$、$\mathcal{V}^{N,K}_\infty=0$ 和 $\mathcal{X}^{N,K}_{\infty,\infty}=\mu$. 定义

$$f(u,v,w):=\frac{u(w-u)}{w+\sqrt{wu}}\quad when\ u>0,\ w>0\qquad \text{and } f=0 \text{ otherwise.}$$

由 [21, 引理 7.3],

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}(\varepsilon_t^{N,K}-\mu)\longrightarrow 0\quad in\ probability.$$

因此，应用定理 6.1，可得

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}(\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t,t}-\varepsilon_t^{N,K})\xrightarrow{d}\mathcal{N}\Big(0,2\mu^2\Big).$$

由 [21, 引理 7.3、推论 9.9]，当 $(N,K,t)\to(\infty,\infty,\infty)$ 且 $\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}+\frac{N}{t\sqrt{K}}+Ne^{-c_{p,\wedge}K}\to 0$ 时，$\varepsilon^{N,K}_t$ 和 $\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t,t}$ 均依概率收敛于 $\mu$。因此，

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta_t}}f(\varepsilon_t^{N,K},\mathcal{V}_t^{N,K},\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t,t})\xrightarrow{d}\mathcal{N}\Big(0,\frac{\mu^2}{2}\Big).$$

由定理 5.2，可得

$$\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{t\sqrt{K}}{N}\mathcal{V}_t^{N,K}\xrightarrow{d}\mathcal{N}\Big(0,2\mu^2\Big).$$

因此，若 $[\frac{N}{t\sqrt{K}}]/[\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}]^2\to\infty$，则

$$\Big[\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}\Big]^{-2}\Big|\mathcal{V}_t^{N,K}\Big|\longrightarrow\infty\ in\ probability.$$

由于 $\Psi^{(3)}(u,v,w)=\frac{f^2}{v+f^2}1_{\{v>0\}}$，可得

$$\hat{p}_{N,K,t}=\Psi^{(3)}(\varepsilon_t^{N,K},\mathcal{V}_t^{N,K},\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t,t})\xrightarrow{d}0.$$

另一方面，当 $\Big[\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}\Big]^2/[\frac{N}{t\sqrt{K}}]\to\infty$ 时，我们有

$$\Big[\frac{N}{K}\sqrt{\frac{\Delta_t}{t}}\Big]^{-2}\Big|\mathcal{V}_t^{N,K}\Big|\longrightarrow 0\ in\ probability.$$

因此，

$$\frac{f^2(\varepsilon_t^{N,K},\mathcal{V}_t^{N,K},\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t,t})}{\mathcal{V}_t^{N,K}+f^2(\varepsilon_t^{N,K},\mathcal{V}_t^{N,K},\mathcal{X}^{N,K}_{\Delta_t,t})}\longrightarrow 1\ in\ probability,$$

这在以下条件成立时成立

$$\mathbb{P}\Big(\mathcal{V}_t^{N,K}>0\Big)\longrightarrow\frac{1}{2}.$$

因此，$\hat{}p_{N,K,t}\xrightarrow{d}X.$

□

## Appendix A. Proof of Lemma 3.4

**A.1. 引理 3.4 (i) 的证明。** 由 $\mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N}] = \int_0^t \mathbb{E}_\theta[\lambda_s^{i,N}]ds$ 可知，直接计算可得

$$\max_{i=1,\dots,N} \mathbb{E}_\theta[\lambda_t^{i,N}] = \mu + \max_{i=1,\dots,N} \Big\{ \sum_{j=1}^N A_N(i,j) \int_0^t \phi(t-s)\mathbb{E}_\theta[\lambda_s^{j,N}]ds \Big\}.$$

定义 $a_N(t) := \sup_{0\le s\le t} \max_{i=1,\dots,N} \mathbb{E}_\theta[\lambda_s^{i,N}]$. 在事件 $\Omega_{N,K}$ 上，我们有 $\Lambda \max_{i=1,\dots,N}\{\sum_{j=1}^N A_N(i,j)\} \le a < 1$。由于 $\Lambda = \int_0^\infty \phi(s)ds$，因此

$$a_N(t) \le \mu + a_N(t)a,$$

这立即推出所需结果。

对于第二部分，回顾第 3.2 节中 $M^{i,N}_t$ 的定义，我们有 $M^{i,N}_t = Z^{i,N}_t - \int_0^t \lambda^{i,N}_s ds$。将式 (3) 中定义的强度过程 $\lambda^{i,N}_t$ 表示为

$$\lambda_t^{i,N} = \mu + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \theta_{ij} \int_0^t \phi(t-s)dM_s^{j,N} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \theta_{ij} \int_0^t \phi(t-s)\lambda_s^{j,N}ds.$$

应用闵可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\Big[(\lambda_t^{i,N})^2\Big]^{\frac12} \le \mu &+ \mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \theta_{ij} \int_0^t \phi(t-s)dM_s^{j,N}\Big)^2\Big]^{\frac12} \\ &+ \mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \theta_{ij} \int_0^t \phi(t-s)\lambda_s^{j,N}ds\Big)^2\Big]^{\frac12}.\end{aligned} \tag{21}$$

利用 (8) 和 $0 \le \theta_{ij} \le 1$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \theta_{ij} \int_0^t \phi(t-s)dM_s^{j,N}\Big)^2\Big]^{\frac12} &= \frac{1}{N}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{j=1}^N \int_0^t \Big(\theta_{ij}\phi(t-s)\Big)^2 dZ_s^{j,N}\Big]^{\frac12} \\ &= \frac{1}{N}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{j=1}^N \int_0^t \Big(\theta_{ij}\phi(t-s)\Big)^2 \lambda_s^{j,N}ds\Big]^{\frac12} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{N}}\Big[\int_0^t \Big(\phi(t-s)\Big)^2 \max_{j=1,\dots,N} \mathbb{E}_\theta[\lambda_s^{j,N}]ds\Big]^{\frac12}.\end{aligned}$$

由引理 3.4-(i) 的第一部分以及假设 ($H(q)$)，可得

$$\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \theta_{ij} \int_0^t \phi(t-s)dM_s^{j,N}\Big)^2\Big]^{\frac12} \le \frac{C}{\sqrt{N}}. \tag{22}$$

现在，对式 (21) 的第三项应用闵可夫斯基不等式，得到

$$\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \theta_{ij} \int_0^t \phi(t-s)\lambda_s^{j,N}ds\Big)^2\Big]^{\frac12} \le \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \theta_{ij} \int_0^t \phi(t-s)\mathbb{E}_\theta\Big[(\lambda_s^{j,N})^2\Big]^{\frac12}ds.$$

因此，

$$\max_{i=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta\Big[(\lambda_t^{i,N})^2\Big]^{\frac{1}{2}} \le \mu + \frac{C}{\sqrt{N}} + \max_{i=1,\dots,N}\Big\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\int_0^t \phi(t-s)\mathbb{E}_\theta\Big[(\lambda_s^{j,N})^2\Big]^{\frac{1}{2}}ds\Big\}.$$

定义 $b_N(t) := \sup_{0\le s\le t}\max_{i=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta\big[(\lambda^{i,N}_s)^2\big]^{\frac{1}{2}}$，则有

$$b_N(t) \le \mu + \frac{C}{\sqrt{N}} + \Lambda \max_{i=1,\dots,N}\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\}b_N(t).$$

回想一下，$A_N(i,j) = \frac{1}{N}\theta_{ij}$，且在 $\Omega_{N,K}$ 上，$\Lambda\max_{i=1,\dots,N}\{\sum_{j=1}^{N}A_N(i,j)\} \le a < 1$，由此可得

$$b_N(t) \le \mu + C + ab_N(t),$$

这就完成了证明。

A.2. **引理 3.4 (ii) 的证明**。从定义 $\boldsymbol{\ell}_N = Q_N\mathbf{1}_N = (I-\Lambda A_N)^{-1}\mathbf{1}_N$ 出发，可得 $\boldsymbol{\ell}_N = \mathbf{1}_N + \Lambda A_N\boldsymbol{\ell}_N$. 回想式 (3)，并记 $\Lambda = \int_0^t\phi(t-s)ds + \int_t^\infty\phi(s)ds$，可得

$$\lambda_t^{i,N} - \mu\ell_N(i) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\Big(\int_0^t\phi(t-s)dZ_s^{j,N} - \mu\ell_N(j)\int_0^t\phi(t-s)ds\Big) - \frac{\mu}{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\ell_N(j)\int_t^\infty\phi(s)ds.$$

应用闵可夫斯基不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\lambda_t^{i,N} - \mu\ell_N(i)\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \le& \mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\Big(\int_0^t\phi(t-s)dZ_s^{j,N} - \mu\ell_N(j)\int_0^t\phi(t-s)ds\Big)\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &+ \mu\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\ell_N(j)\int_t^\infty\phi(s)ds\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

与引理 3.4-(i) 的证明相同，我们利用第 3.2 节中定义的过程 $M^{i,N}_{\cdot,t}$，重新表述上述不等式右端的第一项。此外，由于 $\ell_N(j)$ 在 $\Omega_{N,K}$ 上一致有界，因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\lambda_t^{i,N} - \mu\ell_N(i)\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \le& \mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\int_0^t\phi(t-s)dM_s^{j,N}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &+ \mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}\int_0^t\phi(t-s)|\lambda_s^{j,N} - \mu\ell_N(j)|ds\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} + C\int_t^\infty\phi(s)ds.\end{aligned}$$

定义 $F^{N,K}_t := \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\mathbb{E}_\theta[(\lambda^{i,N}_t - \mu\ell_N(i))^2]^{\frac{1}{2}}$。利用式(22)和闵可夫斯基不等式，我们得到

$$\begin{aligned}F_t^{N,K} \le& \frac{1}{KN}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{K}\theta_{ij}\int_0^t\phi(t-s)\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\lambda_s^{j,N} - \mu\ell_N(j)\Big|^2\Big]^{\frac{1}{2}}ds + C\int_t^\infty\phi(s)ds + \frac{C}{\sqrt{N}}\\ \le& \int_0^t\frac{N}{K}|||I_KA_N|||_1\phi(t-s)F_s^{N,N}ds + C\int_t^\infty\phi(s)ds + \frac{C}{\sqrt{N}}.\end{aligned}$$

利用 $N|||I_K A_N|||_1 = \max_{j=1,\dots,N} \sum_{i=1}^K \theta_{ij}$ 以及 $\Omega_N$ 上的界 $\frac{N}{K}|||I_K A_N|||_1 \le a/\Lambda$，$K$，我们得到

$$F_t^{N,K} \le \int_0^t \frac{a}{\Lambda}\phi(t-s)F_s^{N,N}ds + C\int_t^\infty \phi(s)ds + \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

定义 $g_N(t) := C\int_t^\infty \phi(s)ds + \frac{C}{\sqrt{N}}$，则在 $\Omega_{N,K}$ 上，对所有 $K = 1, \dots, N$，

$$F_t^{N,K} \le \int_0^t \frac{a}{\Lambda}\phi(t-s)F_s^{N,N}ds + g_N(t). \tag{23}$$

由假设 $(H(q))$，即 $\int_0^\infty (1+s^q)\phi(s)ds < \infty$，可得 $g_N(t) \le C(\frac{1}{t^q} \wedge 1) + CN^{-1/2}$。此外，根据引理 3.4-(i) 以及 $\ell_N(j)$ 在 $\Omega_{N,K}$，上的一致有界性，我们推得 $\sup_{t\ge 0} F^{N,N}_t \le C$，从而 $\int_0^t (\frac{a}{\Lambda})^n \phi^{*n}(t-s)F^{N,N}_s ds \le Ca^n \to 0$ 当 $n \to \infty$. 因此，迭代应用 (23)（先对某个固定的 $K \in \{1,\dots,N\}$ 使用一次，之后始终取 $K = N$），可得在 $\Omega_{N,K}$ 上，

$$\begin{aligned}
F_t^{N,N} \le& \sum_{n\ge 1}\int_0^t \Big(\frac{a}{\Lambda}\Big)^n \phi^{*n}(t-s)g_N(s)ds + g_N(t)\\
\le& \sum_{n\ge 1}\int_0^{\frac{t}{2}} \Big(\frac{a}{\Lambda}\Big)^n \phi^{*n}(t-s)g_N(s)ds + \sum_{n\ge 1}\int_{\frac{t}{2}}^t \Big(\frac{a}{\Lambda}\Big)^n \phi^{*n}(t-s)g_N(s)ds + g_N(t)\\
\le& C\sum_{n\ge 1}\int_{\frac{t}{2}}^t \Big(\frac{a}{\Lambda}\Big)^n \phi^{*n}(s)ds + g_N\Big(\frac{t}{2}\Big)\sum_{n\ge 1}\int_0^\infty \Big(\frac{a}{\Lambda}\Big)^n \phi^{*n}(s)ds + g_N(t),
\end{aligned}$$

因为 $g_N$ 是非递增且有界的。回顾 $\int_0^\infty \phi^{*n}(s)ds = \Lambda^n$，并且如[13, 引理 15-(ii) 的证明],中所示,

$$\int_r^\infty \phi^{*n}(u)du \le Cn^q\Lambda^n r^{-q},$$

我们得出结论（因为 $a \in (0,1)$）

$$F_t^{N,N} \le C\Big(\frac{t}{2}\Big)^{-q}\sum_{n\ge 1} n^q a^n + g_N\Big(\frac{t}{2}\Big)\frac{a}{1-a} + g_N(t) \le \frac{C}{t^q} + \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

证明完毕。

**A.3. 引理 3.4 (iii)&(iv) 的证明。** 我们将证明限制在部分 (iii)，因为部分 (iv) 的论证几乎完全相同。由 (7) 回顾可知

$$U_t^{i,N} = \sum_{n\ge 0}\int_0^t \phi^{*n}(t-s)\sum_{j=1}^N A_N^n(i,j)M_s^{j,N}ds.$$

我们对 $s \le 0$ 设定 $\phi(s) = 0$。区分 $n = 0$ 和 $n \ge 1$ 两种情况，利用 $A_N^0(i,j) = \mathbf{1}_{\{i=j\}}$ 以及闵可夫斯基不等式可推出，在 $\Omega_{N,K}$ 上，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta[(U_t^{i,N} - U_s^{i,N})^4]^{\frac{1}{4}} \le& \mathbb{E}_\theta[(M_t^{i,N} - M_s^{i,N})^4]^{\frac{1}{4}}\\
&+ \sum_{n\ge 1}\int_0^t \Big(\phi^{*n}(t-u) - \phi^{*n}(s-u)\Big)\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{j=1}^N A_N^n(i,j)M_u^{j,N}\Big)^4\Big]^{\frac{1}{4}}du.
\end{aligned}$$

对于第一项（$n=0$），应用 (8) 和 Burkholder 不等式可得

$$\mathbb{E}_\theta[(M_t^{i,N}-M_s^{i,N})^4] \leq C\mathbb{E}_\theta\Big[(Z_t^{i,N}-Z_s^{i,N})^2\Big].$$

由 [13, 引理 16-(iii)], 在 $\Omega_{N,K}$ 上可得，$\max_{i=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta[(Z^{i,}{}_t{}^N - Z^{i,}{}_s{}^N)^2] \leq C(t-s)^2$, ，因此

$$\mathbb{E}_\theta[(M_t^{i,N}-M_s^{i,N})^4] \leq C(t-s)^2. \tag{24}$$

对于第二项 ($n\geq 1$)，再次应用 (8) 和 Burkholder 不等式可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{j=1}^N A_N^n(i,j)M_u^{j,N}\Big)^4\Big] \leq& C\mathbb{E}_\theta\Big[\Big([\sum_{j=1}^N A_N^n(i,j)M^{j,N},\sum_{j=1}^N A_N^n(i,j)M^{j,N}]_u\Big)^2\Big]\\
\leq& C\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{j=1}^N (A_N^n(i,j))^2 Z_u^{j,N}\Big)^2\Big]\\
=& C\sum_{j,j'=1}^N (A_N^n(i,j))^2(A_N^n(i,j'))^2\mathbb{E}_\theta[Z_u^{j,N}Z_u^{j',N}].
\end{aligned}$$

由柯西-施瓦茨不等式，$\mathbb{E}_\theta[Z_u^{j,N}Z_u^{j',N}] \leq \sqrt{\mathbb{E}_\theta[(Z^{j,}{}_u{}^N)^2]\mathbb{E}_\theta[(Z^{j',}{}_u{}^N)^2]}$，，并由 [13,引理 16-(iii)], 可得 $\max_{i=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta[(Z^{i,}{}_u{}^N)^2] \leq Cu^2$。因此,

$$\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{j=1}^N A_N^n(i,j)M_u^{j,N}\Big)^4\Big] \leq C\Big(\sum_{j=1}^N (A_N^n(i,j))^2\Big)^2u^2 \leq C\Big(\sum_{j=1}^N A_N^n(i,j)\Big)^4u^2 \leq C|||A_N|||_\infty^{4n}u^2.$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty \Big(\phi^{*n}(t-u)-\phi^{*n}(s-u)\Big)\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^N A_N^n(i,j)M_u^{j,N}\Big)^4\Big]^{\frac{1}{4}}du\\
\leq& C\sum_{n\geq 1}|||A_N|||_\infty^n\int_0^t\sqrt{u}\Big(\phi^{*n}(t-u)-\phi^{*n}(s-u)\Big)du\\
\leq& C(t-s)^{1/2}\sum_{n\geq 1}\Lambda^n|||A_N|||_\infty^n \leq C(t-s)^{1/2}.
\end{aligned}$$

To 为了证明第二个不等式，我们使用以下估计，该估计对所有 $n\geq 1$ 均成立:

$$\begin{aligned}
\int_0^t\sqrt{u}(\phi^{*n}(t-u)-\phi^{*n}(s-u))du =& \int_0^t\sqrt{t-u}\phi^{*n}(u)du - \int_0^s\sqrt{s-u}\phi^{*n}(u)du\\
\leq& \int_0^s[\sqrt{t-u}-\sqrt{s-u}]\phi^{*n}(u)du + \int_s^t\sqrt{t-u}\phi^{*n}(u)du\\
\leq& 2\sqrt{t-s}\int_0^\infty\phi^{*n}(u)du \leq 2\Lambda^n\sqrt{t-s}.
\end{aligned}$$

此外，在 $\Omega_{N,K}$ 上，我们有 $\Lambda|||A_N|||_\infty \leq a<1$。这就完成了 (iii) 的第一部分证明。

对于第二部分，根据引理 3.3-(ii)，结合 $K = N$ 和 $r = \infty$，我们回顾可得 $\max_{i=1,\dots,N} \mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N} - Z_s^{i,N}] \le C(t-s)$ 在 $\Omega_{N,N} \supset \Omega_{N,K}$ 上成立，因此

$$\max_{i=1,\dots,N} \mathbb{E}_\theta[(Z_t^{i,N} - Z_s^{i,N})^4] \le 8\Big\{ \max_{i=1,\dots,N} \mathbb{E}_\theta[Z_t^{i,N} - Z_s^{i,N}]^4 + \max_{i=1,\dots,N} \mathbb{E}_\theta[(U_t^{i,N} - U_s^{i,N})^4] \Big\} \le C(t-s)^4$$

正如所需。

## Appendix B. Proof of Lemma 4.3

回忆一下，$\mathbf{X}_N^K = (X_N^K(i))_{i=1,\dots,N}$ 满足 $X_N^K(i) = (L_N(i) - \bar{L}_N^K)\mathbf{1}_{\{i \le K\}}$，其中 $L_N(i) := \sum_{j=1}^N A_N(i,j) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \theta_{ij}$，并且 $\bar{L}_N^K := \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K L_N(i)$ 和 $\boldsymbol{X}_N := \boldsymbol{X}_N^N$ 在第 3.1 节中定义。这里，$(\theta_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ 是一族独立同分布的《伯努利》$(p)$ 随机变量，$\boldsymbol{x}_N^K = (x_N^K(i))_{i=1,\dots,N}$ 满足 $x_N^K(i) = (\ell_N(i) - \bar{\ell}_N^K)\mathbf{1}_{\{i \le K\}}$，且 $\boldsymbol{x}_N$ 在第 3.1 节中定义。

**B.1. 引理 4.3 (i) 的证明。** 由于 $(\theta_{ij})_{i,\ j=1,\ \dots\dots,\ N}$ 是独立同分布的《伯努利》$(p)$ 随机变量。根据对称性，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|(I_K A_N)^T \mathbf{X}_N^K\|_2^2] &= \frac{K}{N^2}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^K \theta_{j1}(L_N(j) - \bar{L}_N^K)\Big)^2\Big] \\ &\le \frac{2K}{N^2}\Big\{\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^K \theta_{j1}(L_N(j) - p)\Big)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^K \theta_{j1}(p - \bar{L}_N^K)\Big)^2\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

一方面，由于 $\bar{L}_N^K = \frac{1}{NK}\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N \theta_{ij}$ 与 $(\theta_{ij})_{i,\ j=1,\ \dots\dots,\ N}$ 是独立同分布的《伯努利》$(p)$ 随机变量，且由于 $\theta_{j1} \le 1$，可直接得出

$$\frac{K}{N^2}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^K \theta_{j1}(p - \bar{L}_N^K)\Big)^2\Big] \le \frac{K^3}{N^2}\mathbb{E}[(p - \bar{L}_N^K)^2] \le \frac{CK^2}{N^3}.$$

另一方面，记 $L_N(j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \theta_{ji} = \frac{1}{N}\big(\sum_{i=2}^N \theta_{ji} + \theta_{j1}\big)$，可得

$$\begin{aligned}&\frac{K}{N^2}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^K \theta_{j1}(L_N(j) - p)\Big)^2\Big] \\ \le &\frac{2K}{N^4}\Big\{\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^K \sum_{i=2}^N \theta_{j1}(\theta_{ji} - p)\Big)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^K \theta_{j1}(\theta_{j1} - p)\Big)^2\Big]\Big\} \\ \le &\frac{4K}{N^4}\Big\{\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^K \sum_{i=2}^N (\theta_{j1} - p)(\theta_{ji} - p)\Big)^2\Big] + p^2\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^K \sum_{i=2}^N (\theta_{ji} - p)\Big)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^K \theta_{j1}(\theta_{j1} - p)\Big)^2\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

利用独立且中心化的族 $\{(\theta_{ji}-p)\ i=2,\dots,N, j=1,\dots,K\}$，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=2}^{N}(\theta_{j1}-p)(\theta_{ji}-p)\Big)^2\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[\sum_{j,j'=1}^{K}\sum_{i,i'=2}^{N}(\theta_{j1}-p)(\theta_{j'1}-p)(\theta_{ji}-p)(\theta_{ji'}-p)\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=2}^{N}(\theta_{j1}-p)^2(\theta_{ji}-p)^2\Big]\le CNK.
\end{aligned}$$

类似地，我们有 $\mathbb{E}[(\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=2}^{N}(\theta_{ji}-p))^2]\le CNK$。此外，由于 $\theta_{j1}\le 1$ 和 $|\theta_{j1}-p|\le 1$，我们得到 $\mathbb{E}[(\sum_{j=1}^{K}\theta_{j1}(\theta_{j1}-p))^2]\le CK^2$。因此，$\frac{K}{N^2}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{K}\theta_{j1}\underline{L_N}(j)-p)\Big)^2\Big]\le CK^2/N^3$，如所要求。

B.2. **引理 4.3 (ii) 的证明**。根据第 3.1 节中$\mathbf{X}_N$ 和$\mathbf{X}_N^K$ 的定义，我们有

$$(I_K A_N\mathbf{X}_N,\mathbf{X}_N^K)=\sum_{i,j=1}^{K}A_N(i,j)X_N(j)X_N^K(i).$$

由于 $A_N(i,\ j)=\frac{1}{N}\theta_{ij}$和 $\sum_{i=1}^{K}X_N^K(i)=\sum_{i=1}^{K}(L_N(i)-\bar{L}_N^K)=0$，我们有

$$\begin{aligned}
(I_K A_N\mathbf{X}_N,\mathbf{X}_N^K)=&\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)X_N(j)X_N^K(i)\\
=&\frac{1}{N}\Big[\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)(L_N(j)-p)X_N^K(i)+(p-\bar{L}_N)\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)X_N^K(i)\Big]\\
=&\frac{1}{N}\Big[\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)(L_N(j)-p)(L_N(i)-p)+(p-\bar{L}_N^K)\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)(L_N(j)-p)\\
&+(p-\bar{L}_N)\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)(L_N(i)-p)+(p-\bar{L}_N)(p-\bar{L}_N^K)\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)\Big].
\end{aligned}$$

我们首先分析第一项。回忆一下，$L_N(i):=\sum_{j=1}^{N}A_N(i,j)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{ij}$，于是得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)(L_N(j)-p)(L_N(i)-p)\Big)^2\Big]\\
=&\frac{1}{N^4}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i,j=1}^{K}\sum_{m,n=1}^{N}(\theta_{ij}-p)(\theta_{jm}-p)(\theta_{in}-p)\Big)^2\Big]\\
=&\frac{1}{N^4}\mathbb{E}\Big[\sum_{i,j,i',j'=1}^{K}\sum_{m,n,m',n'=1}^{N}(\theta_{ij}-p)(\theta_{jm}-p)(\theta_{in}-p)(\theta_{i'j'}-p)(\theta_{j'm'}-p)(\theta_{i'n'}-p)\Big]\le\frac{CK^2}{N^2},
\end{aligned}$$

由于族 $\{(\theta_{ij}-p)\ i,j=1,\dots,N\}$ 是独立同分布、中心化且有界的。

对于第二项，应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$\mathbb{E}\Big[\Big|(p-\bar{L}_N^K)\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)(L_N(j)-p)\Big|\Big]\le\frac{1}{N}\mathbb{E}[(p-\bar{L}_N^K)^2]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i,j=1}^{K}\sum_{k=1}^{N}(\theta_{ij}-p)(\theta_{jk}-p)\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

由于一方面，我们有，因此该量有上界 $\sqrt{\frac{K}{N}}$，

$$\mathbb{E}[(p-\bar{L}_N^K)^2]=\frac{1}{N^2K^2}\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{N}(\theta_{ij}-p))^2]=\frac{\mathbb{E}[(\theta_{11}-p)^2]}{NK}\le\frac{C}{NK},\tag{25}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i,j=1}^{K}\sum_{k=1}^{N}(\theta_{ij}-p)(\theta_{jk}-p)\Big)^2\Big]\\=&\mathbb{E}\Big[\sum_{i,j,i',j'=1}^{K}\sum_{k,k'=1}^{N}(\theta_{ij}-p)(\theta_{i'j'}-p)(\theta_{jk}-p)(\theta_{j'k'}-p)\Big]\le CNK^2.\end{aligned}$$

对于第三项，根据（25），我们有 $\mathbb{E}[(p-\bar{L}_N)^2]=\mathbb{E}[(p-\bar{L}_N^N)^2]\le\frac{C}{N^2}$。应用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\Big|(p-\bar{L}_N)\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)(L_N(i)-p)\Big|\Big]\\\le&\frac{1}{N}\mathbb{E}[(p-\bar{L}_N)^2]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i,j=1}^{K}\sum_{k=1}^{N}(\theta_{ij}-p)(\theta_{ik}-p)\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\\le&\frac{1}{N}\sqrt{\frac{C}{N^2}}\mathbb{E}\Big[\sum_{i,j,i',j'=1}^{K}\sum_{k,k'=1}^{N}(\theta_{ij}-p)(\theta_{ik}-p)(\theta_{i'j'}-p)(\theta_{i'k'}-p)\Big]^{\frac{1}{2}}\\\le&\frac{1}{N}\sqrt{\frac{C}{N^2}}\sqrt{K^2N+K^4}=C\frac{K}{N^{3/2}}+C\frac{K^2}{N^2}\le C\frac{K}{N}.\end{aligned}$$

最后，我们分析最后一项。注意，$\mathbb{E}[(\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p))^2]=\mathbb{E}[\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)^2]=CK^2$ 且 $\mathbb{E}[(p-\bar{L}_N^K)^4]=\frac{1}{N^4K^4}\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{N}(\theta_{ij}-p))^4]\le\frac{C}{N^2K^2}$。因此，再次应用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\Big|(p-\bar{L}_N)(p-\bar{L}_N^K)\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)\Big|\Big]\\\le&\mathbb{E}[(p-\bar{L}_N)^4]^{\frac{1}{4}}\mathbb{E}[(p-\bar{L}_N^K)^4]^{\frac{1}{4}}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i,j=1}^{K}(\theta_{ij}-p)\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\\le&C\Big(\frac{1}{N^4}\Big)^{1/4}\Big(\frac{1}{N^2K^2}\Big)^{1/4}\sqrt{K^2}=\frac{\sqrt{K}}{N\sqrt{N}}\le C\frac{K}{N}.\end{aligned}$$

综上，前面的论证完成了证明。

B.3. **引理 4.3 (iii) 的证明**。回忆一下，$\boldsymbol{x}_N^K=(x_N^K(i))_{i=1,\dots,N}$，其中 $x_N^K(i)=(\ell_N(i)-\bar{\ell}_N^K)\mathbf{1}_{\{i\le K\}}$，并且 $\mathbf{X}_N^K$, $\ell_N(i)$, $\bar{\ell}_N^K$和 $\bar{\ell}_N$在第 3.1 节中定义。这里，$\mathcal{A}_N$定义于 (5)。对于任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^N$, $a>0$，不难验证以下基本等式

$$\big|\|\boldsymbol{x}\|_2^2-a^2\|\boldsymbol{y}\|_2^2-\|\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{y}\|_2^2\big|=2\big|a\big(\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\big)\big|.$$

于是，令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_N^K$、$\boldsymbol{y}=\mathbf{X}_N^K$和 $a=\Lambda\bar{\ell}_N$，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}\Big|\Big(\|\boldsymbol{x}_N^K\|_2^2-(\Lambda\bar{\ell}_N)^2\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big)-\|\boldsymbol{x}_N^K-\Lambda\bar{\ell}_N\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big|\Big]\\&=2\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}\Big|\Lambda\bar{\ell}_N\big(\boldsymbol{x}_N^K-\Lambda\bar{\ell}_N\mathbf{X}_N^K,\mathbf{X}_N^K\big)\Big|\Big].\end{aligned}$$

根据 [21, 引理 5.11]，，有

$$\boldsymbol{x}_N^K-\Lambda\bar{\ell}_N\boldsymbol{X}_N^K=\Lambda I_KA_N(\boldsymbol{x}_N-\Lambda\bar{\ell}_N\boldsymbol{X}_N)-\frac{\Lambda}{K}(I_KA_N\boldsymbol{x}_N,\mathbf{1}_K)\mathbf{1}_K+\bar{\ell}_N\Lambda^2I_KA_N\boldsymbol{X}_N.$$

由于 $X_N^K(i)=(L_N(i)-\bar{L}_N^K)\mathbf{1}_{\{i\le K\}}$，且 $\mathbf{1}_K$是一个分量为 $\mathbf{1}_K(i)=\mathbf{1}_{\{1\le i\le K\}}$的向量，因此 $(\mathbf{1}_K,\mathbf{X}_N^K)=\sum_{i=1}^K X_N^K(i)=0$。因此，

$$(\boldsymbol{x}_N^K-\Lambda\bar{\ell}_N\mathbf{X}_N^K,\mathbf{X}_N^K)=\Lambda(I_KA_N(\boldsymbol{x}_N-\Lambda\bar{\ell}_N\mathbf{X}_N),\mathbf{X}_N^K)+\Lambda^2\bar{\ell}_N(I_KA_N\mathbf{X}_N,\mathbf{X}_N^K):=e_{N,K,1}+e_{N,K,2}.$$

应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}e_{N,K,1}]=&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}\Lambda\Big((\boldsymbol{x}_N-\Lambda\bar{\ell}_N\mathbf{X}_N),(I_KA_N)^T\mathbf{X}_N^K\Big)\Big]\\\le&\Lambda\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}\|\boldsymbol{x}_N-\Lambda\bar{\ell}_N\mathbf{X}_N\|_2^2\Big]^{\frac12}\mathbb{E}\Big[\|(I_KA_N)^T\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big]^{\frac12}.\end{aligned}$$

根据 [21, 引理 5.11]，，第一项 $\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}\|\boldsymbol{x}_N-\Lambda\bar{\ell}_N\mathbf{X}_N\|_2^2\Big]$有界于 $CN^{-1}$，而引理 4.3-(i) 给出了第二项的界，因此得到

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}\cap\mathcal{A}_N}e_{N,K,1}]\le\frac{CK}{N^2}.$$

此外，$\ell_N$ 在 $\Omega_{N,K}$ 上有界（由引理 3.2 可知），且引理 4.3-(ii) 意味着

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}e_{N,K,2}]\le\frac{CK}{N^2},$$

由此完成证明。

B.4. **引理 4.3 (iv) 的证明**。回顾 [13, 命题 14]，有 $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Omega_N^1}|\bar{\ell}_N-\frac{1}{1-\Lambda p}|^2]\le\frac{C}{N^2}$. 此外，引理 3.2 保证 $\ell_N$ 在 $\Omega_{N,K}$上以常数 $C$ 为界。另外，可以验证（参见例如 [21, 公式 (9)]）$\mathbb{E}[\frac{N^2}{K^2}\|\boldsymbol{X}_N^K\|_2^4]\le C$。结合柯西–施瓦茨不等式，这些结果意味着

$$\begin{aligned}&\sqrt{K}\frac{N}{K}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|(\bar{\ell}_N)^2-\Big(\frac{1}{1-\Lambda p}\Big)^2\Big|\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2\Big]\\\le&C\sqrt{K}\mathbb{E}\Big[\frac{N^2}{K^2}\|\boldsymbol{X}_N^K\|_2^4\Big]^{\frac12}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\bar{\ell}_N-\frac{1}{1-\Lambda p}\Big|^2\Big]^{\frac12}\le\frac{C\sqrt{K}}{N}\le\frac{C}{\sqrt{N}}.\end{aligned}$$

为完成证明，只需证明 $\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sqrt{K}[\frac{N}{K}\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2-p(1-p)]\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,p^2(1-p)^2)$.由于 $\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}$依概率收敛于 1，只需验证 $\sqrt{K}[\frac{N}{K}\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2-p(1-p)]\xrightarrow{d}$

$\mathcal{N}(0, p^2(1-p)^2)$. 现在注意到

$$\|\mathbf{X}_N^K\|_2^2 = \sum_{i=1}^K (L_N(i) - \bar{L}_N^K)^2 = \sum_{i=1}^K (L_N(i) - p)^2 - K(p - \bar{L}_N^K)^2.$$

如引理 4.3-(ii) 的证明所示，我们有 $\mathbb{E}[(p - \bar{L}_N^K)^2] \leq \frac{C}{NK}$，因此 $\sqrt{K}\frac{N}{K}\mathbb{E}[K(p - \bar{L}_N^K)^2] \leq \frac{C}{\sqrt{K}}$。因此，剩下需要证明的是

$$\xi_{N,K} := \sqrt{K}\Big[\frac{N}{K}\sum_{i=1}^K (L_N(i) - p)^2 - p(1-p)\Big] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p^2(1-p)^2).$$

回顾 $L_N(i) = N^{-1}\sum_{j=1}^N \theta_{ij}$，直接计算可得

$$\xi_{N,K} = \frac{1}{N\sqrt{K}}\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^N [(\theta_{ij} - p)^2 - p(1-p)] + \frac{1}{N\sqrt{K}}\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^N\sum_{j'=1, j'\neq j}^N (\theta_{ij} - p)(\theta_{ij'} - p).$$

由于变量 $(\theta_{ij} - p)^2 - p(1-p)$ 是均值为零且方差有限的独立同分布变量，中心极限定理蕴含 $\frac{1}{\sqrt{NK}}\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^N[(\theta_{ij} - p)^2 - p(1-p)]$ 依分布收敛。因此，~~第一~~项依概率趋于 0。对于第二项，再次应用中心极限定理可得

$$\frac{1}{N\sqrt{K}}\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^N\sum_{j'=1, j'\neq j}^N (\theta_{ij} - p)(\theta_{ij'} - p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p^2(1-p)^2),$$

至此，证明完成。

## Appendix C. convolution of $\phi$

我们首先给出两个关于第 1.5 节中引入的函数 $\phi$ 的卷积的引理。这些引理将有助于证明引理 6.4 和 6.6。

**引理 C.1.** 考虑满足以下条件的 $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)\, \Lambda = \int_0^\infty \phi(s)ds < \infty$，并且对某个$q \geq 1$, 有 $\int_0^\infty s^q\phi(s)ds < \infty$. 。那么，对所有 $n \geq 1$ 和 $r \geq 1$,

$$\int_r^\infty \sqrt{s}\phi^{*n}(s)ds \leq C\Lambda^n n^q r^{\frac{1}{2}-q} \quad and \quad \int_0^\infty \sqrt{s}\phi^{*n}(s)ds \leq C\sqrt{n}\Lambda^n.$$

证明。我们引入一些独立同分布随机变量 $X_1, X_2, \ldots$，其密度为 $\Lambda^{-1}\phi$，并令 $S_0 = 0$，同时对所有 $n \geq 1$, 令 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$。根据闵可夫斯基不等式，并由假设可知 $\mathbb{E}[X_1^q] = \Lambda^{-1}\int_0^\infty s^q\phi(s)ds < \infty$，因此得到 $\mathbb{E}[S_n^q] \leq n^q\mathbb{E}[X_1^q] \leq Cn^q$。于是,

$$\int_r^\infty \sqrt{s}\phi^{*n}(s)ds = \Lambda^n\mathbb{E}[\sqrt{S_n}\mathbf{1}_{\{S_n \geq r\}}] \leq \Lambda^n r^{\frac{1}{2}-q}\mathbb{E}[S_n^q] \leq \Lambda^n n^q r^{\frac{1}{2}-q}\mathbb{E}[X_1^q] \leq C\Lambda^n n^q r^{\frac{1}{2}-q}.$$

对于第二部分，我们写作

$$\int_0^\infty \sqrt{s}\phi^{*n}(s)ds = \Lambda^n\mathbb{E}[\sqrt{S_n}] \leq \sqrt{n}\Lambda^n\sqrt{\mathbb{E}[X_1]} \leq C\sqrt{n}\Lambda^n$$

根据柯西-施瓦茨不等式。 □

**引理 C.2.** 在与引理 *C.1* 相同的条件下，对于 $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $r \geq 1$，我们有:

$$\Big|\int_0^t \phi^{*n}(s)ds - \Lambda^n\Big| \leq n\Lambda^{n-1}\int_{\frac{t}{n}}^\infty \phi(s)ds.$$

证明。考虑具有密度 $\phi(s)/\Lambda$ 的 $n$ 个独立同分布随机变量 $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$，并记

$$\Big|\int_0^t \phi^{*n}(s)ds - \Lambda^n\Big| = \Lambda^n\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^n X_i \geq t\Big) \leq \Lambda^n\mathbb{P}\Big(\max_{i=1,\dots,n} X_i \geq t/n\Big) \leq n\Lambda^n\mathbb{P}(X_1 \geq t/n),$$

由此完成证明。 □

## Appendix D. Proof of Lemmas 6.4 & 6.6

**D.1. 引理 6.4 (i) 的证明。** 我们在集合 $\Omega_{N,\ K}$上进行。回顾 (8)。由 [13, 引理 16-(iii)]和柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[(M^{j,N}_{(a\Delta-s)} - M^{j,N}_{a\Delta})(M^{j',N}_{(a\Delta-s')} - M^{j',N}_{a\Delta})] &\leq \mathbf{1}_{\{j=j'\}}\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{a\Delta} - Z^{j,N}_{(a\Delta-s)}]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{a\Delta} - Z^{j,N}_{(a\Delta-s')}]^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \mathbf{1}_{\{j=j'\}}\sqrt{ss'}.\end{aligned}$$

From 引理 C.1，我们已经有 $\int_r^\infty \sqrt{u}\phi^{*n}(u)du \leq C\Lambda^n n^q r^{\frac{1}{2}-q}$. 回顾 (18)，我们得到 n

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[(B^{N,K}_{a\Delta})^2] &= \frac{1}{K^2}\sum_{i,i'=1}^K\sum_{j,j'=1}^N\sum_{n,m\geq 1}\int_\Delta^{a\Delta}\int_\Delta^{a\Delta}\phi^{*n}(s)\phi^{*m}(s')A^n_N(i,j)A^m_N(i',j')\\ &\qquad\times\mathbb{E}_\theta[(M^{j,N}_{(a\Delta-s)} - M^{j,N}_{a\Delta})(M^{j',N}_{(a\Delta-s')} - M^{j',N}_{a\Delta})]dsds'\\ &\leq \frac{CN}{K^2}\Big(\sum_{n,m\geq 1}|||I_KA_N|||_1^2|||A_N|||_1^{n+m-2}\int_\Delta^\infty\int_\Delta^\infty\sqrt{ss'}\phi^{*n}(s)\phi^{*m}(s')dsds'\Big)\\ &\leq \frac{C}{N}\Big(\sum_{n\geq 1}n^q\Lambda^n|||A_N|||_1^{n-1}\Big)^2\Delta^{1-2q} \leq \frac{C}{N}\Delta^{1-2q},\end{aligned}$$

其中 最后一个不等式成立，是因为在 $\Omega_{N,\ K}$, $\Lambda|||A_N|||_1 \leq a < 1$ 和 $\sum_{n\geq 1} n^q a^{n-1} < \infty$上。

**D.2. 引理 6.4 (ii) 的证明。** 回忆式 (17)，我们写作

$$C^{N,K}_{a\Delta} = \sum_{n\geq 1}\int_0^\Delta \phi^{*n}(s)O^{N,K,n}_{s,s,a\Delta},$$

其中，对于 $r \geq 0$ 和 $0 \leq s \leq a\Delta$,

$$O^{N,K,n}_{r,s,a\Delta} := \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K\sum_{j=1}^N A^n_N(i,j)(M^{j,N}_{(a\Delta-s)} - M^{j,N}_{a\Delta-s+r}).$$

固定 $s$时， $\{O^{N,K,n}_{r,s,a\Delta}\}_{r\geq 0}$ 是关于滤过（$\mathcal{F}_{a\Delta-s+r}$）$_{r\geq 0}$的鞅。由（8），我们有 $[M^{i,N}, M^{j,N}]_t = \mathbf{1}_{\{i=j\}}Z^{i,\ N}_{\cdot,\ t}$。因此，对于 $n \geq 1$，在 $\Omega_{N\perp,\ K}$,

$$\begin{aligned}[O^{N,K,n}_{\cdot,s,a\Delta}, O^{N,K,n}_{\cdot,s,a\Delta}]_r =& \frac{1}{K^2}\sum_{j=1}^N\Big(\sum_{i=1}^K A^n_N(i,j)\Big)^2(Z^{j,N}_{a\Delta-s+r} - Z^{j,N}_{a\Delta-s})\\ \leq& \frac{N}{K^2}|||I_KA^n_N|||_1^2(\bar{Z}^N_{a\Delta-s+r} - \bar{Z}^N_{a\Delta-s})\\ \leq& \frac{N}{K^2}|||I_KA_N|||_1^2|||A_N|||_1^{2n-2}(\bar{Z}^N_{a\Delta-s+r} - \bar{Z}^N_{a\Delta-s}).\end{aligned}$$

由于 $|||I_K A_N|||_1^2 \le \frac{1}{\Lambda^2}\frac{K^2}{N^2}$在 $\Omega_{N上，K}$，我们得到

$$[O^{N,K,n}_{.,s,a\Delta}, O^{N,K,n}_{.,s,a\Delta}]_r \le \frac{C}{N}|||A_N|||_1^{2n-2}(\bar{Z}^N_{a\Delta-s+r} - \bar{Z}^N_{a\Delta-s}).$$

应用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式可得，在 $\Omega_{N,K}$ 上，

$$\mathbb{E}_\theta[(O^{N,K,n}_{r,s,a\Delta})^4] \le 4\mathbb{E}_\theta\Big[\Big([O^{N,K,n}_{,s,a\Delta}, O^{N,K,n}_{,s.a\Delta}]_r\Big)^2\Big] \le \frac{C|||A_N|||_1^{4n-4}}{N^2}\mathbb{E}_\theta[(\bar{Z}^N_{a\Delta-s+r} - \bar{Z}^N_{a\Delta-s})^2].$$

根据 [13, 引理 16-(iii)], ，我们已经有 $\sup_{i=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta[(Z^{i,\ N}_{\ t} - Z^{i,\ N}_{\ s})^2] \le C(t-s)^2$. 结合引理 C.1 的第二部分和闵可夫斯基不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta[(C^{N,K}_{a\Delta})^4]^{\frac{1}{4}} \le& \sum_{n\ge1}\int_0^\Delta \phi^{*n}(s)\mathbb{E}_\theta[(O^{N,K,n}_{s,s,a\Delta})^4]^{\frac{1}{4}}ds\\
\le& \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n\ge0}|||A_N|||_1^n\int_0^\Delta \sqrt{s}\phi^{*(n+1)}(s)ds\\
\le& \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n\ge0}\sqrt{n+1}\,\Lambda^{n+1}|||A_N|||_1^n \le \frac{C}{\sqrt{N}}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。

D.3. **引理 6.4 (iii) 的证明**。因为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}ov_\theta[(C^{N,K}_{a\Delta} - C^{N,K}_{(a-1)\Delta})^2, (C^{N,K}_{b\Delta} - C^{N,K}_{(b-1)\Delta})^2]\\
=&\frac{1}{K^4}\sum_{i,k,i',k'=1}^{K}\sum_{j,l,j',l'=1}^{N}\sum_{m,n,m',n'\ge1}\int_0^\Delta\int_0^\Delta\int_0^\Delta\int_0^\Delta \phi^{*n}(s)\phi^{*m}(s)\phi^{*n'}(s')\phi^{*m'}(s')\\
&\times A^n_N(i,j)A^m_N(k,l)A^{n'}_N(i',j')A^{m'}_N(k',l')\\
&\times \mathbb{C}ov_\theta[(M^{j,N}_{(a\Delta-s)} - M^{j,N}_{a\Delta} - M^{j,N}_{((a-1)\Delta-s)} + M^{j,N}_{(a-1)\Delta})\\
&\qquad\times (M^{j',N}_{(a\Delta-s')} - M^{j',N}_{a\Delta} - M^{j',N}_{((a-1)\Delta-s')} + M^{j',N}_{(a-1)\Delta}),\\
&\quad (M^{l,N}_{(b\Delta-r)} - M^{l,N}_{b\Delta} - M^{l,N}_{((b-1)\Delta-r)} + M^{l,N}_{(b-1)\Delta})\\
&\qquad\times (M^{l',N}_{(b\Delta-r')} - M^{l',N}_{b\Delta} + (M^{l',N}_{((b-1)\Delta-r')} - M^{l',N}_{(b-1)\Delta})]dsdrds'dr'.
\end{aligned}$$

定义 $\zeta^{j,\ N}_{a\Delta,\ s} := M^{j,\ N(a\Delta-s)}_{-}M^{j,\ N}_{a\Delta}$对于 $0\le s\le\Delta.$，我们重写为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}ov_\theta[(M^{j,N}_{(a\Delta-s)} - M^{j,N}_{a\Delta} - M^{j,N}_{((a-1)\Delta-s)} + M^{j,N}_{(a-1)\Delta})\\
&\qquad\times (M^{j',N}_{(a\Delta-s')} - M^{j',N}_{a\Delta} - M^{j',N}_{((a-1)\Delta-s')} + M^{j',N}_{(a-1)\Delta}),\\
&\quad (M^{l,N}_{(b\Delta-r)} - M^{l,N}_{b\Delta} - M^{l,N}_{((b-1)\Delta-r)} + M^{l,N}_{(b-1)\Delta})\\
&\qquad\times (M^{l',N}_{(b\Delta-r')} - M^{l',N}_{b\Delta} + (M^{l',N}_{((b-1)\Delta-r')} - M^{l',N}_{(b-1)\Delta})]\\
=&\mathbb{C}ov_\theta[(\zeta^{j,N}_{a\Delta,s} - \zeta^{j,N}_{(a-1)\Delta,s})(\zeta^{j',N}_{a\Delta,s'} - \zeta^{j',N}_{(a-1)\Delta,s'}), (\zeta^{l,N}_{b\Delta,r} - \zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'} - \zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})].
\end{aligned}$$

由于 $0\le s,s',r,r'\le\Delta,$，我们有

$$\mathbb{E}_\theta[\zeta^{j,N}_{(a-1)\Delta,s}\zeta^{j',N}_{a\Delta,s'}] = \mathbb{E}_\theta[\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}\zeta^{j',N}_{(a-1)\Delta,s'}] = \mathbb{E}_\theta[\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r}\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}] = \mathbb{E}_\theta[\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'}] = 0.$$

不失一般性，假设 $a-b\geq 4$ 和 $s\leq s'$。首先，注意到

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}ov_\theta[\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}\zeta^{j',N}_{(a-1)\Delta,s'},(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})]\\ =&\mathbb{E}_\theta\Bigg[\mathbb{E}_\theta\Big[\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}|\mathcal{F}_{(a-1)\Delta}\Big]\zeta^{j',N}_{(a-1)\Delta,s'}\\ &\times\Big((\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})-\mathbb{E}_\theta\Big[(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})\Big]\Big)\Bigg]=0.\end{aligned}$$

基于同样的理由，我们也得到

$$\mathbb{C}ov_\theta[\zeta^{j,N}_{(a-1)\Delta,s}\zeta^{j',N}_{a\Delta,s'},(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})]=0.$$

若 $j\neq j'$，协方差为零，因为

$$\mathbb{E}_\theta[(\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}-\zeta^{j,N}_{(a-1)\Delta,s})(\zeta^{j',N}_{a\Delta,s'}-\zeta^{j',N}_{(a-1)\Delta,s'})|\mathcal{F}_{b\Delta}]=0.$$

现在假设 $j=j'$，则

$$\begin{aligned}\mathcal{K}:=&\mathbb{C}ov_\theta[(\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}-\zeta^{j,N}_{(a-1)\Delta,s})(\zeta^{j',N}_{a\Delta,s'}-\zeta^{j',N}_{(a-1)\Delta,s'}),(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})]\\ =&\mathbb{C}ov_\theta[(\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}\zeta^{j',N}_{a\Delta,s'}+\zeta^{j,N}_{(a-1)\Delta,s}\zeta^{j',N}_{(a-1)\Delta,s'}),(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})].\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}_\theta[\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}\zeta^{j,N}_{a\Delta,s'}|\mathcal{F}_{a\Delta-s'}]=\mathbb{E}_\theta[(M^{j,\ N}_{a\Delta})^2-(M^{j,\ N}_{a\Delta-s})^2|\mathcal{F}_{a\Delta-s'}]$，并且像往常一样 $(M^{j,\ N}_{a\Delta})^2-(M^{j,\ N}_{a\Delta-s})^2=2\int_{a\Delta-s}^{a\Delta}M^{j,\ N}_{\tau-}dM^{j,\ N}_\tau+Z^{j,\ N}_{a\Delta}-Z^{j,\ N}_{a\Delta-s}$。我们注意到 $\mathbb{E}_\theta\big[\int_{a\Delta-s}^{a\Delta}M^{j,N}_{\tau-}d\bar{M}^{j,N}_\tau|\mathcal{F}_{a\Delta-s}\big]=0$。此外，由于 $a-b\geq 4$，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}ov_\theta[(M^{j,N}_{a\Delta})^2-(M^{j,N}_{a\Delta-s})^2,(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})]\\ =&\mathbb{C}ov_\theta[Z^{j,N}_{a\Delta}-Z^{j,N}_{a\Delta-s},(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})].\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{K}=&\mathbb{C}ov_\theta[Z^{j,N}_{a\Delta}-Z^{j,N}_{a\Delta-s}+Z^{j,N}_{(a-1)\Delta}-Z^{j,N}_{(a-1)\Delta-s},(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})]\\ =&\mathbb{C}ov_\theta[U^{j,N}_{a\Delta}-U^{j,N}_{a\Delta-s}+U^{j,N}_{(a-1)\Delta}-U^{j,N}_{(a-1)\Delta-s},(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})].\end{aligned}$$

回顾一下，$\beta_n(x,z,r)=\phi^{\star n}(z-r)-\phi^{\star n}(x-r)$。我们可以写成

$$U^{i,N}_{a\Delta}-U^{i,N}_{a\Delta-s}=\sum_{n\geq 0}\int_0^{a\Delta}\beta_n(a\Delta-s,a\Delta,r)\sum_{j=1}^N A^n_N(i,j)M^{j,N}_r dr=R^{i,N}_{a\Delta,a\Delta-s}+T^{i,N}_{a\Delta,a\Delta-s},$$

其中

$$\begin{aligned}R^{i,N}_{a\Delta,a\Delta-s}=&\sum_{n\geq 0}\int_{(a-1)\Delta-s}^{a\Delta}\beta_n(x,z,r)\sum_{j=1}^N A^n_N(i,j)(M^{j,N}_r-M^{j,N}_{(a-1)\Delta-s})dr,\\ T^{i,N}_{a\Delta,a\Delta-s}=&\sum_{n\geq 0}\Big(\int_{(a-1)\Delta-s}^{a\Delta}\beta_n(x,z,r)dr\Big)\sum_{j=1}^N A^n_N(i,j)M^{j,N}_{(a-1)\Delta-s}\\ &+\sum_{n\geq 0}\int_0^{(a-1)\Delta-s}\beta_n(x,z,r)\sum_{j=1}^N A^n_N(i,j)M^{j,N}_r dr.\end{aligned}$$

给定 $\mathcal{F}_{b\Delta}$ 时， $R^{i,N}_{a\Delta,a\Delta-s}$ 的条件期望为零。因此,

$$\mathcal{K}=\mathbb{C}ov_\theta[T^{i,N}_{a\Delta,a\Delta-s}+T^{i,N}_{(a-1)\Delta,(a-1)\Delta-s},(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})].$$

参照 [13] 中引理 30 的证明步骤 1（注意， $T^{i,N}_{a\Delta,a\Delta-s}$ 与 $X^{i,N}_{a\Delta-s,a\Delta}$在 [13] 中一致），我们有 $\sup_{i=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta[(T^{i,N}_{a\Delta,a\Delta-s})^4]\le Ct^2\Delta^{-4q}.$。由于 $r\le\Delta$，且根据 [13, 引理 16-(iii)]，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})^4]^{\frac14}&\le\mathbb{E}_\theta[(M^{l,N}_{(b\Delta-r)}-M^{l,N}_{b\Delta})^4]^{\frac14}+\mathbb{E}_\theta[(M^{l,N}_{((b-1)\Delta-r)}-M^{l,N}_{(b-1)\Delta})^4]^{\frac14}\\&\le C\sqrt{\Delta},\end{aligned}$$

因此，再次应用 [13,引理 16-(iii)] ,

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}|\le&\{\mathbb{E}_\theta[(T^{i,N}_{a\Delta,a\Delta-s})^2]^{\frac12}+\mathbb{E}_\theta[(T^{i,N}_{(a-1)\Delta,(a-1)\Delta-s})^2]^{\frac12}\}\\&\times\mathbb{E}_\theta[(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})^4]^{\frac14}\mathbb{E}_\theta[(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})^4]^{\frac14}\\\le&Ct^{1/2}\Delta^{-q}\Delta.\end{aligned}$$

此外，根据对称性，我们得出，对于 $|a-b|\ge4$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}ov_\theta[(\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}-\zeta^{j,N}_{(a-1)\Delta,s})(\zeta^{j',N}_{a\Delta,s'}-\zeta^{j',N}_{(a-1)\Delta,s'}),(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})(\zeta^{l',N}_{b\Delta,r'}-\zeta^{l',N}_{(b-1)\Delta,r'})]\\\le&C\Big(\mathbf{1}_{\{l=l'\}}+\mathbf{1}_{\{j=j'\}}\Big)\sqrt{t}\Delta^{1-q}.\end{aligned}$$

回忆 $\Omega_{N,K}$ 的定义，我们有

$$|||I_KA_N^n|||_1\le|||I_KA_N|||_1|||A_N|||_1^{n-1}\le\frac{CK}{N}|||A_N|||_1^{n-1},$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}ov_\theta[(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta})^2,(C^{N,K}_{b\Delta}-C^{N,K}_{(b-1)\Delta})^2]\\\le&\frac{C\sqrt{t}\Delta^{1-q}}{K^4}\sum_{i,k,i',k'=1}^{K}\sum_{j,l,j',l'=1}^{N}\sum_{m,n,m',n'\ge1}\Lambda^{n+m+n'+m'}A_N^n(i,j)A_N^m(k,l)A_N^{n'}(i',j')A_N^{m'}(k',l')\\&\qquad\times\Big(\mathbf{1}_{\{l=l'\}}+\mathbf{1}_{\{j=j'\}}\Big)\\\le&\frac{C\sqrt{t}\Delta^{1-q}}{K^4}N^3\sum_{m,n,m',n'\ge1}\Lambda^{n+m+n'+m'}|||I_KA_N^n|||_1|||I_KA_N^m|||_1|||I_KA_N^{n'}|||_1|||I_KA_N^{m'}|||_1\\\le&\sum_{n,m,n',m'\ge1}\frac{1}{K^4}N^3\Big(\frac{K}{N}\Big)^4\Lambda^4(\Lambda|||A_N|||_1)^{n+m+n'+m'-4}\frac{C\sqrt{t}}{\Delta^{q-1}}\le\frac{C\sqrt{t}}{N\Delta^{q-1}}.\end{aligned}$$

证明至此完成。

D.4. 引理 6.6 (i)&(ii) 的证明。回忆 $c_N^K(j)=\sum_{i=1}^K Q_N(i,j)$，其中 $Q_N=\sum_{n\ge0}\Lambda^nA_N^n$。提醒一下， $\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}=\frac1K\sum_{i=1}^K X^{i,N}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$, $\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$ 和 $X^{i,N}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$ 分别在 (14) 和 (16) 中定义。我们首先改写

$$\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}=\frac1K\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{K}\sum_{n\ge0}\Lambda^nA_N^n(i,j)(M^{j,N}_{a\Delta}-M^{j,N}_{(a-1)\Delta}).$$

然后，利用 (8) 和引理 C.2，我们在 $\Omega_{N,\ K}$ 上有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{E}_\theta[(\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2]\\
\le&\frac{2}{K^2}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{j=1}^N\Big\{\sum_{n\ge0}\sum_{i=1}^K\Big(\int_0^{a\Delta}\phi^{*n}(a\Delta-s)ds-\Lambda^n\Big)A^n_N(i,j)\Big\}M^{j,N}_{a\Delta}\Big|^2\Big]\\
&+\frac{2}{K^2}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\sum_{j=1}^N\Big\{\sum_{n\ge0}\sum_{i=1}^K\Big(\int_0^{(a-1)\Delta}\phi^{*n}((a-1)\Delta-s)ds-\Lambda^n\Big)A^n_N(i,j)\Big\}M^{j,N}_{(a-1)\Delta}\Big|^2\Big]\\
=&\frac{2}{K^2}\sum_{j=1}^N\Big\{\sum_{n\ge0}\sum_{i=1}^K\Big(\int_0^{a\Delta}\phi^{*n}(a\Delta-s)ds-\Lambda^n\Big)A^n_N(i,j)\Big\}^2\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{a\Delta}]\\
&+\frac{2}{K^2}\sum_{j=1}^N\Big\{\sum_{n\ge0}\sum_{i=1}^K\Big(\int_0^{(a-1)\Delta}\phi^{*n}((a-1)\Delta-s)ds-\Lambda^n\Big)A^n_N(i,j)\Big\}^2\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{(a-1)\Delta}]\\
\le&\frac{2}{K^2}\sum_{j=1}^N\Big\{\sum_{n\ge1}n\int_{(a\Delta)/n}^\infty\phi(s)ds\Lambda^{n-1}|||I_KA^n_N|||_1\Big)\Big\}^2\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{a\Delta}]\\
&+\frac{2}{K^2}\sum_{j=1}^N\Big\{\sum_{n\ge1}n\int_{(a-1)\Delta/n}^\infty\phi(s)ds\Lambda^{n-1}|||I_KA^n_N|||_1\Big\}^2\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{(a-1)\Delta}].
\end{aligned}
$$

注意到在 $\Omega_{N,K}$, $|||I_KA^n_N|||_1\le|||I_KA_N|||_1|||A_N|||_1^{n-1}\le\binom{CK}{N}|||A_N|||_1^{n-1}$ 上，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{E}_\theta[(\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2]\\
&\le\frac{C}{N^2}\sum_{j=1}^N\Big\{\sum_{n\ge1}n\int_{(a\Delta)/n}^\infty\phi(s)ds\Lambda^{n-1}|||A_N|||_1^{n-1}\Big)\Big\}^2\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{a\Delta}]\\
&+\frac{C}{N^2}\sum_{j=1}^N\Big\{\sum_{n\ge1}n\int_{(a-1)\Delta/n}^\infty\phi(s)ds\Lambda^{n-1}|||A_N|||_1^{n-1}\Big\}^2\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{(a-1)\Delta}]\\
\le&\frac{C}{N^2}\sum_{j=1}^N\Big\{\sum_{n\ge1}n^{1+q}(a\Delta)^{-q}\int_0^\infty s^q\phi(s)ds\Lambda^{n-1}|||A_N|||_1^{n-1}\Big)\Big\}^2\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{a\Delta}]\\
&+\frac{C}{N^2}\sum_{j=1}^N\Big\{\sum_{n\ge1}n^{1+q}[(a-1)\Delta]^{-q}\int_0^\infty s^q\phi(s)ds\Lambda^{n-1}|||A_N|||_1^{n-1}\Big\}^2\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_{(a-1)\Delta}]\\
\le&\frac{C}{N^2(a\Delta)^{2q}}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{j=1}^NZ^{j,N}_{a\Delta}\Big]+\frac{C}{N^2((a-1)\Delta)^{2q}}\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{j=1}^NZ^{j,N}_{(a-1)\Delta}\Big]\\
\le&\frac{C}{N}\Big[\frac{1}{(a\Delta)^{2q-1}}+\frac{1}{((a-1)\Delta)^{2q-1}}\Big].
\end{aligned}
$$

最后一个不等式使用了 $\max_{j=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta[Z^{j,N}_t]\le Ct$，它在 $r=\infty$ 下由引理 3.3-(i) 证明，从而恰好得到 (i)。对于 $q\ge2$，级数 $\sum_{a=1}^\infty a^{1-2q}<+\infty$, 由此得出 (ii)。

D.5. **引理 6.6 (iii)&(iv) 的证明**。回顾 (14) 和 (8) 中 $\mathcal{Y}^{N,K}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta}$ 的定义，并应用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，我们在 $\Omega_{N,K}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^4\Big]\\
\leq&\frac{4}{K^4}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}_\theta\Big[\sum_{j=1}^N\Big(c_N^K(j)\Big)^2(Z^{j,N}_{a\Delta}-Z^{j,N}_{(a-1)\Delta})\Big]^2\right]\\
=&\frac{4}{K^4}\mathbb{E}\left[\sum_{j,j'=1}^N\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big(c_N^K(j')\Big)^2\mathbb{E}_\theta\Big[(Z^{j,N}_{a\Delta}-Z^{j,N}_{(a-1)\Delta})(Z^{j',N}_{a\Delta}-Z^{j',N}_{(a-1)\Delta})\Big]\right]\\
\leq&\frac{4}{K^4}\mathbb{E}\left[\sum_{j,j'=1}^N\Big(c_N^K(j)\Big)^2\Big(c_N^K(j')\Big)^2\mathbb{E}_\theta\Big[(Z^{j,N}_{a\Delta}-Z^{j,N}_{(a-1)\Delta})^2\Big]^{1/2}\mathbb{E}_\theta\Big[(Z^{j',N}_{a\Delta}-Z^{j',N}_{(a-1)\Delta})^2\Big]^{1/2}\right].
\end{aligned}$$

根据 [13, 引理 16-(iii)], , 我们已经得到，在 $\Omega_{N,K}$ 上，$\sup_{i=1,\dots,N}\mathbb{E}_\theta[(Z^{i,N}_t-Z^{i,N}_s)^2]\leq C(t-s)^2$。此外，由 (20) 可得，在 $\Omega_{N,K}$ 上，

$$\sum_{j=1}^N\big(c_N^K(j)\big)^2=\Big(\sum_{j=1}^K\big(c_N^K(j)\big)^2+\sum_{j=K}^N\big(c_N^K(j)\big)^2\Big)\leq CK.$$

因此，

$$\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^4\Big]\leq\frac{C\Delta^2}{K^2},$$

由此完成了 (iii) 的证明。根据引理 6.6-(i)&(iii)，并利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{K}{\sqrt{\Delta t}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\bar{\mathcal{X}}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|\Big]\\
\leq&\frac{K}{\sqrt{\Delta t}}\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^4\Big]^{\frac14}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\bar{\mathcal{X}}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^2\Big]^{\frac12}\\
\leq&\frac{C\sqrt{K}}{\Delta^{q-\frac12}\sqrt{Nt}}\sum_{a=\frac{t}{\Delta}}^{\frac{2t}{\Delta}}a^{\frac12-q}\leq\frac{C\sqrt{K}}{\Delta^{q-\frac12}\sqrt{Nt}}.
\end{aligned}$$

最后一步中，我们用到了对于 $q\geq2$，级数 $\sum_{a=1}^\infty a^{\frac12-q}$ 收敛这一事实。

D.6. **引理 6.6 (v) 的证明**。回顾 $\bar\Gamma^{N,K}{}_{(a-1)\Delta,a\Delta}=C^{N,K}{}_{a\Delta}+B^{N,K}{}_{a\Delta}-C^{N,K}{}_{(a-1)\Delta}-B^{N,K}{}_{(a-1)\Delta}$，其中 $C^{N,K}{}_{a\Delta}$ 和 $B^{N,K}{}_{a\Delta}$ 分别在 (17) 和 (18) 中定义。记

$$\begin{aligned}
&\bar\Gamma^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\bar{\mathcal{X}}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\\
=&\bar\Gamma^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(\bar{\mathcal{X}}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})+\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\bar\Gamma^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\\
=&\bar\Gamma^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(\bar{\mathcal{X}}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})+\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(C^{N,K}_{a\Delta}+B^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta}-B^{N,K}_{(a-1)\Delta}).
\end{aligned}$$

结合引理 6.6-(i) 和 6.4-(i)&(ii)，应用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big(\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big)\Big|\Big]^2\\
\leq&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^2\Big]\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}(\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})^2\Big]\\
=&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^2\Big]\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big(C^{N,K}_{a\Delta}+B^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta}-B^{N,K}_{(a-1)\Delta}\Big)^2\Big]\\
\leq&4\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^2\Big]\\
&\times\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big\{\Big(C^{N,K}_{a\Delta}\Big)^2+\Big(B^{N,K}_{a\Delta}\Big)^2+\Big(C^{N,K}_{(a-1)\Delta}\Big)^2+\Big(B^{N,K}_{(a-1)\Delta}\Big)^2\Big\}\Big]\\
\leq&\frac{C}{N}\Big[(a\Delta)^{1-2q}+\Big((a-1)\Delta\Big)^{1-2q}\Big]\Big(\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\Delta^{1-2q}\Big)\\
\leq&\Big[(a\Delta)^{1-2q}+\Big((a-1)\Delta\Big)^{1-2q}\Big]\frac{C}{N^2}.
\end{aligned}$$

类似　地，再次利用柯西–施瓦茨不等式以及引理 6.4-(i) 和 6.6-(iii)，我们有　e

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(B^{N,K}_{a\Delta}-B^{N,K}_{(a-1)\Delta})\Big|\Big]^2\\
\leq&\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^2\Big]\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(B^{N,K}_{a\Delta}-B^{N,K}_{(a-1)\Delta}\Big)^2\Big]\\
\leq&\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^4\Big]^{1/2}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(B^{N,K}_{a\Delta}-B^{N,K}_{(a-1)\Delta}\Big)^2\Big]\leq\frac{C}{NK\Delta^{2q-2}}.
\end{aligned}$$

接下来，我们考虑项 $\mathcal{Y}^{N,\ K}_{(a-1)\Delta,\ a\Delta}(C^{N,\ \ K}_{a\Delta}-C^{N,\ K}_{(a-1)\Delta})$。回顾在 (14) 中定义的 $\mathcal{Y}^{N,\ K}_{(a-1)\Delta,\ a\Delta}$ 以及在 (17) 中定义的$C^{N,\ K}_{a\Delta}$，我们写作

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta})=\frac{1}{K^2}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j,j'=1}^{N}\sum_{n\geq1}\int_0^\Delta\phi^{*n}(s)A^n_N(i,j)c^K_N(j')\\
(M^{j,N}_{a\Delta-s}-M^{j,N}_{a\Delta}-M^{j,N}_{(a-1)\Delta-s}+M^{j,N}_{(a-1)\Delta})(M^{j',N}_{a\Delta}-M^{j',N}_{(a-1)\Delta}).
\end{aligned}$$

对于 $1\leq j,\ j',\ l,\ l'\leq N$和 $a,\ b\in\{t/(2\Delta)+1,\ ...,\ 2t/\Delta\}$，我们令

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{a,b}(j,j',l,l'):=&\mathbb{C}ov_\theta[(M^{j,N}_{a\Delta-s}-M^{j,N}_{a\Delta}-M^{j,N}_{(a-1)\Delta-s}+M^{j,N}_{(a-1)\Delta})(M^{j',N}_{a\Delta}-M^{j',N}_{(a-1)\Delta}),\\
&(M^{l,N}_{b\Delta-s}-M^{l,N}_{b\Delta}-M^{l,N}_{(b-1)\Delta-s}+M^{l,N}_{(b-1)\Delta})(M^{l',N}_{b\Delta}-M^{l',N}_{(b-1)\Delta})].
\end{aligned}$$

根据 [13, 引理 16-(iii)], ，显然，在不对 $(a,\ b)$ 施加任何条件的情况下，在 $\Omega_{N,\ K}$

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{T}_{a,b}(j,j',l,l')|\\
\leq&\Big\{\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(M^{j,N}_{a\Delta}-M^{j,N}_{(a-1)\Delta}\Big)^4\Big]^{\frac14}+\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(M^{j,N}_{a\Delta-s}-M^{j,N}_{(a-1)\Delta-s}\Big)^4\Big]^{\frac14}\Big\}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(M^{j',N}_{a\Delta}-M^{j',N}_{(a-1)\Delta}\Big)^4\Big]^{\frac14}\\
&\Big\{\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(M^{l,N}_{b\Delta}-M^{l,N}_{(b-1)\Delta}\Big)^4\Big]^{\frac14}+\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(M^{l,N}_{b\Delta-s}-M^{l,N}_{(b-1)\Delta-s}\Big)^4\Big]^{\frac14}\Big\}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(M^{l',N}_{b\Delta}-M^{l',N}_{(b-1)\Delta}\Big)^4\Big]^{\frac14}\\
\leq&C\Delta^2,
\end{aligned}$$

以及$\mathbf{1}_{\{\#\{j,j',l,l'\}=4\}}|\mathcal{T}_{a,\ b}(j,\ \ j',\ \ l,\ \ l')|=0.$

现在考虑 $a-b\geq 4$ 的情形。回想一下， $\zeta^{j,\ N}_{a\Delta,\ s}:=M^{j,\ N(a\Delta-s)}_{-}M^{j,\ N}_{a\Delta}$对于 $0\leq s\leq\Delta$。那么，

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{a,b}(j,j',l,l')=&\mathbb{C}ov_\theta[(\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}-\zeta^{j,N}_{(a-1)\Delta,s})\zeta^{j',N}_{a\Delta,\Delta},(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})\zeta^{l',N}_{b\Delta,\Delta}]\\=&\mathbb{C}ov_\theta[\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}\zeta^{j',N}_{a\Delta,\Delta},(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})\zeta^{l',N}_{b\Delta,\Delta}].\end{aligned}$$

采用与引理 6.4 的证明相同的策略，我们得到

$$\begin{aligned}&|\mathbb{C}ov_\theta[\zeta^{j,N}_{a\Delta,s}\zeta^{j',N}_{a\Delta,\Delta},(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})\zeta^{l',N}_{b\Delta,\Delta}]|\\=&|\mathbb{C}ov_\theta[T^{j,N}_{a\Delta,(a-1)\Delta},(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})\zeta^{l',N}_{b\Delta,\Delta}]|\\\leq&\{\mathbb{E}_\theta[(T^{j,N}_{a\Delta,(a-1)\Delta})^2]^{\frac12}\}\mathbb{E}_\theta[(\zeta^{l,N}_{b\Delta,r}-\zeta^{l,N}_{(b-1)\Delta,r})^4]^{\frac14}\mathbb{E}_\theta[(\zeta^{l',N}_{b\Delta,\Delta})^4]^{\frac14}\\\leq&Ct^{1/2}\Delta^{1-q}.\end{aligned}$$

因此，由对称性，对于 $|a-b|\geq 4$, $|\mathcal{T}_{a,b}(j,j',l,l')|\leq C\Big(\mathbf{1}_{\{l=l'\}}+\mathbf{1}_{\{j=j'\}}\Big)\sqrt{t}\Delta^{1-q}$. 于是，对于 $|a-b|\geq 4$,，仍有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\mathbb{C}ov_\theta\Big[\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta}),\mathcal{Y}^{N,K}_{(b-1)\Delta,b\Delta}(C^{N,K}_{b\Delta}-C^{N,K}_{(b-1)\Delta})\Big]\Big|\Big]\\=&\frac{1}{K^4}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\sum_{i,i'=1}^{K}\sum_{l,l',j,j'=1}^{N}\sum_{n,n'\geq1}\int_0^\Delta\int_0^\Delta\phi^{*n}(s)\phi^{*n'}(s')A^n_N(i,j)A^{n'}_N(i',l)\\&\qquad\qquad\times c^K_N(j')c^K_N(l')\mathcal{T}_{a,b}(j,j',l,l')dsds'\Big|\Big]\\\leq&\frac{t^{1/2}}{K^4\Delta^{q-1}}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\sum_{j=1}^{N}\Big(c^K_N(j)-1\Big)c^K_N(j)\Big|\Big|\sum_{l=1}^{N}c^K_N(l)\Big|\sum_{n\geq1}N\Lambda^n|||I_KA_N|||_1|||A_N|||_1^{n-1}\Big]\\\leq&\frac{Ct^{1/2}}{K\Delta^{q-1}}.\end{aligned}$$

最后一步由 (20) 得出，该式意味着在 $\Omega_{N,K}$, $\sum_{j=1}^{N}\left(c^K_N(j)\right)^2\leq CK$ 上成立；此外，利用在 $\Omega_{N,K}$, $|||I_KA_N|||_1\leq\frac{K}{N}$, $|\sum_{l=1}^{N}c^K_N(l)|=K|\bar{\ell}^K_{N\perp}|\leq CK$. 上成立这一事实

接下来，当 $|a-b|\leq 4$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\Big|\mathbb{C}ov_\theta\Big[\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta}),\mathcal{Y}^{N,K}_{(b-1)\Delta,b\Delta}(C^{N,K}_{b\Delta}-C^{N,K}_{(b-1)\Delta})\Big]\Big|\Big]\\\leq&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{V}ar_\theta\Big[\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta})\Big]\Big]^{\frac12}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{V}ar_\theta\Big[\mathcal{Y}^{N,K}_{(b-1)\Delta,b\Delta}(C^{N,K}_{b\Delta}-C^{N,K}_{(b-1)\Delta})\Big]\Big]^{\frac12}\\\leq&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\Big|^4\Big]^{\frac14}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta}\Big)^4\Big]^{\frac14}\mathbb{E}_\theta\Big[\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(b-1)\Delta,b\Delta}\Big|^4\Big]^{\frac14}\\&\qquad\qquad\times\mathbb{E}_\theta\Big[\Big(C^{N,K}_{b\Delta}-C^{N,K}_{(b-1)\Delta}\Big)^4\Big]^{\frac14}\Big]\\\leq&\frac{C\Delta}{NK}.\end{aligned}$$

最后，

$$\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{V}ar_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta})\Big]\Big]\leq\frac{Ct}{NK}+\frac{Ct^{5/2}}{K\Delta^{q+1}}.$$

综上，我们得出结论：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\frac{K}{N}\sqrt{\frac{t}{\Delta}}\frac{N}{t}\Big|\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\mathbb{E}_\theta[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}]\Big|\Big]\\
\leq&C\frac{K}{\sqrt{\Delta t}}\Big\{\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\Big(\Big|\bar{\Gamma}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(\bar{X}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}-\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta})\Big|\\
&+\Big|\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(B^{N,K}_{a\Delta}-B^{N,K}_{(a-1)\Delta})\Big|\Big)\Big]+\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\Omega_{N,K}}\mathbb{V}ar_\theta\Big[\sum_{a=\frac{t}{\Delta}+1}^{\frac{2t}{\Delta}}\mathcal{Y}^{N,K}_{(a-1)\Delta,a\Delta}(C^{N,K}_{a\Delta}-C^{N,K}_{(a-1)\Delta})\Big]\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}\\
\leq&\frac{CK}{N\Delta^q\sqrt{t}}+\frac{C\sqrt{tK}}{\Delta^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{N}}+\frac{C\sqrt{K}}{\sqrt{N\Delta}}+\frac{Ct^{\frac{3}{4}}\sqrt{K}}{\Delta^{1+\frac{q}{2}}}.
\end{aligned}$$

Th证明结束。fi i h d

## Acknowledgements

我们谨向 N. Fournier 和 S. Delattre 致以诚挚的谢意，感谢他们对本研究给予的宝贵支持。若没有他们富有洞见的想法和耐心指导，这项工作便不可能完成。

## References

1. E. Bacry、S. Delattre、M. Hoffmann 和 J. F. Muzy, *Modeling microstructure noise with mutually exciting point processes* **13** 2013 65 77 ，《定量金融》（），–。2.， *Some limit theorems for Hawkes processes and applications to financial statistics*，《随机过程及其应用》**123**（2013年），2475–2499。3. E. Bacry 和 J. F. Muzy, *Second order statistics characterization of Hawkes processes and non-parametricestimation*，arXiv 预印本（2014年），arXiv:1401.0903。4. L. Bauwens 和 N. Hautsch, *Modelling financial high frequency data using point processes*，《金融时间序列手册》，2009年，第953–979页。5. C. Blundell、K. A. Heller 和 J. F. Beck, *Modeling reciprocating relationships with Hawkes processes*，《神经信息处理系统进展》，2012年。6. P. Br´emaud 和 L. Massouli´e, *Stability of nonlinear Hawkes processes*，《概率年刊》**24**（1996年），第3期，1563–1588。7. P. Br´emaud、L. Massouli´e 和 A. Ridolfi, *Power spectra of random spike fields and related processes*，《应用概率进展》**37**（2005年），第4期，1116–1146。8. J. Chevallier, *Mean-field limit of generalized Hawkes processes*，《随机过程及其应用》**127**（2017年），第12期，3870–3912。9. J. Chevallier、E. L¨ocherbach 和 G. Ost, *Inferring the dependence graph density of binary graphical models inhigh dimension*，arXiv 预印本（2024年），arXiv:2406.07066，即将在《统计年刊》发表。10. J. Chevallier 和 G. Ost, *Community detection for binary graphical models in high dimension*，arXiv 预印本 arXiv:2411.15627（2024年）。11. L. Coutin、B. Massat 和 A. R´eveillac, *Normal approximation of functionals of point processes: Application to Hawkes processes* 2024 2407 19806 ，arXiv 预印本（），arXiv:。。12. D. J. Daley 和 D. Vere-Jones, *An introduction to the theory of point processes*，第2版，第I卷，Springer-Verlag，2003年。

13. S. Delattre 和 N. Fournier, *Statistical inference versus mean field limit for Hawkes processes*, 《电子统计学杂志》**10** （2016年），1223–1295。14. Sylvain Delattre、Nicolas Fournier 和 Marc Hoffmann, *Hawkes processes on large networks*, 《应用概率年刊》**26** 3449317 15 2016 1，216 261（），第 – 期。MR 。G. Gusto 和 S. Schbath, *FADOE: a statistical method to detect favored or avoided distances between occur-rences of motifs using the Hawkes model*, 《统计学在遗传学与分子生物学中的应用》**4** （2005年）文章24，16. N. R. Hansen、P. Reynaud-Bouret 和 V. Rivoirard, *Lasso and probabilistic inequalities for multivariate point processes* **21** 2015 1, 83 143 ，《伯努利》（），第 – 期。17. A. G. Hawkes, *Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes* **58** 1971 1, ，《生物计量学》83 90（），第 – 期。18. C. Hillairet、L. Huang、M. Khabou 和 A. R´eveillac, *The Malliavin-Stein method for Hawkes functionals*, 《ALEA拉丁美洲概率与数理统计杂志》**19** （2022年），第2期，1293–1328。19. J. Jacod 和 A. N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, 第2版，Springer-Verlag，2003年。20. M. Khabou 和 L. Coutin, *Functional approximation of the marked Hawkes risk process*, arXiv 预印本（2024年），arXiv:2409.06276。21. C. Liu, *Statistical inference for a partially observed interacting system of Hawkes processes*, 《随机过程及其应用》**130** （2020年），第9期，5636–5694。22. C. Liu、L. Xu 和 A. Zhang, *Scaling limits for supercritical nearly unstable Hawkes processes*, 《应用概率杂志》（2025年），即将发表，doi:10.1017/jpr.2025.10047。23. X. Lu 和 F. Abergel, *High-dimensional Hawkes processes for limit order books: modelling empirical analysis , and numerical calibration* **18** 2018 2, 249 264 ，《定量金融》（），第 – 期。24. G. O. Mohler、M. B. Short、P. J. Brantingham、F. P. Schoenberg 和 G. E. Tita, *Self-exciting point process modelling of crime* **106** 2011 493, 100 108 ，《美国统计学会杂志》（），第 – 期。25. M. E. J. Newman、D. J. Watts 和 S. H. Strogatz, *Random graph models of social networks*, 《美国国家科学院院刊》**99** （2002年），增刊1，第2566–2572页。26. Y. Ogata, *The asymptotic behaviour of maximum likelihood estimators for stationary point processes*, 《统计数学研究所年刊》**30** （1978年），第1期，243–261。27. M. B. Raad 和 E. L¨ocherbach, *Stability for Hawkes processes with inhibition*, 《概率电子通信》**25** （2020年），1–9，第33号论文。28. Jakob Gulddahl Rasmussen, *Bayesian inference for Hawkes processes*, 《Methodology and Computing in Applied Probability》**15**（2013 3085883 29 3，623 642 ），第 – 期。MR 。29. P. Reynaud-Bouret、V. Rivoirard、F. Grammont 和 C. Tuleau-Malot, *Goodness-of-fit tests and nonparametric adaptive estimation for spike train analysis*, 《数学神经科学杂志》**4** （2014年），文章3。30. P. Reynaud-Bouret、V. Rivoirard 和 C. Tuleau-Malot, *Inference of functional connectivity in neurosciences via Hawkes processes* 1 2013 ，第 st 届 IEEE全球信号与信息处理大会，。31. P. Reynaud-Bouret 和 S. Schbath, *Adaptive estimation for Hawkes processes: application to genome analysis*, 《统计年刊》**38** （2010年），第5期，2781–2822。32. A. Simma 和 M. I. Jordan, *Modeling events with cascades of Poisson processes*, 技术报告，加州大学伯克利分校，2010年，EECS-2010-109。33. J. Wu、T. Zheng 和 J. Curley, *Markov-modulated Hawkes processes for sporadic and bursty event occurrences*, arXiv 预印本（2019年），arXiv:1903.03223。34. L. Xu 和 A. Zhang, *Scaling limit for supercritical nearly unstable Hawkes processes with heavy tail*, arXiv 预印本（2025年），arXiv:2504.16737。35. K. Zhou、H. Zha 和 L. Song, *Learning triggering kernels for multi-dimensional Hawkes processes*, 第30届国际机器学习会议论文集，2013年。

School of mathematical sciences, Beihang University, PR China
*Email address*: xuliping.p6@gmail.com

School of mathematical sciences, Beihang University, PR China
*Email address*: anzhang@buaa.edu.cn

Delft Institute of Applied Mathematics, EEMCS, TU Delft, 2628 Delft, The Netherlands
*Email address*: LIUCG92@gmail.com