arXiv:2601.01193v1 [math.CO] 3 Jan 2026

# 图的邻接-直径矩阵

S. P. Leka Amruthavarshini*和 R. Rajkumar†

数学系，甘地格拉姆农村学院（视同大学），

印度泰米尔纳德邦甘地格拉姆 *624 302*。

**摘要**

直径为 $d$的连通图 $G$ 的邻接-直径矩阵（AD矩阵），记为 $AD(G)$，是一个以 $G$ 的顶点为索引的矩阵，其中 $AD(G)$的第（$i$，$j$）个元素在 $d_G(v_i, v_j) = 1$时为 1，在 $d_G(v_i, v_j) = d$时为 $d$，否则为 0；其中$d_G(v_i, v_j)$表示 $G$中顶点 $v_i$ 和$v_j$ 之间的距离。我们确定了路、圈和双星图的AD矩阵的谱，并求出了连通图的AD矩阵行列式。我们利用AD矩阵特征多项式的系数和特征值刻画了一类二部图。我们建立了AD矩阵特征值与若干图不变量之间的界，并在构成图满足特定条件时，确定了通过联图、字典序积和笛卡尔积运算构造的图的AD矩阵的谱。

**关键词：** 图、邻接-直径矩阵、谱、图乘积**MSC：** 05C12, 05C50, 05C69, 05C15, 05C76

## 1 引言

我们只考虑无向、简单且有限的图。设 $G$ 是一个图，其顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，边集为 $E(G)$。若 $v_i$ 和 $v_j$ 在 $G$ 中相邻，则记作 $v_i \sim v_j$。邻接矩阵 $A(G)$ 是一个 0–1 矩阵，其行和列对应于 $G$ 的顶点。对于 $i$，$j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，当且仅当 $v_i$ 和 $v_j$ 相邻时，$(i, j)$-元素为 1。此定义可推广到边权函数为 $w : E(G) \to \mathbb{R}^+$ 的带权图，只需将 $A(G)$ 的 $(i, j)$-元素定义为 $w(e)$，其中 $e = \{v_i, v_j\} \in E(G)$。设 $G$ 是一个直径为 $d$ 的连通图。对于满足 $1 \leq k \leq d$ 的每个整数 $k$，第 $k$ 个邻接

*电子邮箱：lekaamrutha@gmail.com

†电子邮箱：rrajmaths@yahoo.co.in（通讯作者）

矩阵 $A_k(G)$ 是 $0-1$ 矩阵，当且仅当 $d_G(v_i, v_j) = k$ 时，其 $(i, j)$-元素为 1；其中 $d_G(v_i, v_j)$ 表示顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 之间的距离，即 $v_i$ 和 $v_j$ 之间最短路径的长度。注意， $A_1(G) = A(G)$。 $G$ 的距离矩阵 $D(G)$ 是一个以 $G$ 的顶点为索引的矩阵；对于 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$， $D(G)$ 的 $(i, j)$-元素为 $d_G(v_i, v_j)$。显然， $D(G) = \sum_{k=1}^{d} kA_k(G)$。

关于图的邻接矩阵及其谱的研究已有大量文献。有关更多细节，参见 [3, 5] 。距离矩阵是另一种重要的矩阵，能够为图的度量和谱特征提供有价值的洞见。它具有广泛的应用，包括化学、分子生物学、心理学以及其他各种科学领域。关于该矩阵及其变体的更多细节，参见 [1, 2, 8, 13]。最近，De Ville 在 [6]中引入了广义距离矩阵的概念。具有直径 $d$ 的连通 $G$ 的广义距离矩阵定义为矩阵 $\mathcal{M}(f; G)$，其元素由 $\mathcal{M}(f; G)_{v_i, v_j} = f(d_G(v_i, v_j))$定义，其中 $f$是定义在 $\{0, 1, \ldots, d\}$上的实值函数。研究表明，包括邻接矩阵、拉普拉斯矩阵和距离矩阵在内的若干熟知矩阵，都是这一构造的特殊实例。此外，该论文还介绍了该矩阵的谱性质在生态学竞争模型以及快速混合马尔可夫链中的应用。

现在，我们定义直径为 $d$ 的连通图$G$的邻接-直径矩阵 （或***AD*矩阵**）。它记作 $AD(G)$，定义如下：

$$AD(G) = A(G) + dA_d(G).$$

等价地，对于 $i, j = 1, 2, \ldots, n$，若 $d_G(v_i, v_j) = 1$，则 $AD(G)$ 的 $(i, j)$ 元素为 1；若$d_G(v_i, v_j) = d$，则为 $d$；否则为 0。注意， $AD(G)$ 是广义距离矩阵的一种特殊情形，其对应函数为 $f$，满足 $f(1) = 1$、 $f(d) = d$，且对每个 $i = 2, 3, \ldots, d-1$，均有 $f(i) = 0$ 。引入 AD 矩阵是为了探究图的直径与其他不变量之间的关系，并考察矩阵的特征值、特征向量和特征多项式如何与图的直径及相关结构性质相互作用。

注意， $d = 1$ 当且仅当 $AD(G) = A(G) = D(G)$ 且 $G = K_n$。若 $d = 2$，则$AD(G) = D(G)$；反过来， $AD(G) = D(G)$ 当且仅当 $d \in \{1, 2\}$。

我们为 $G$ 赋予一个带权图 $\mathcal{G}_G$，定义如下：其顶点集与 $G$的顶点集相同，且当且仅当 $d_G(v_i, v_j) = 1$或 $d_G(v_i, v_j) = d$时，两个顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 分别由一条权为 1 或 $d$ 的边 $e_{ij}$ 连接。显然， $A(\mathcal{G}_G) = AD(G)$。

现在回顾一些定义和记号。在图 $G$中，顶点$v$ 的度 $d(v)$是与其关联的边数。如果 $G$ 中的所有顶点的度 $r$都相同，则称 $G$ 为 $r$-正则图。在带权图 $G$中，顶点 $v$ 的加权度定义为与 $v$关联的边的权之和。称带权图 $G$ 为

度为 $r$ 的加权正则图，或称 $r$-加权正则图，如果 $G$ 的每个顶点的加权度均为$r$。通常， $P_n$、$C_n$和 $K_n$ 分别表示顶点数均为 $n$ 的路、圈和完全图。顶点数为 $n$ 的星图记作 $S_n$。双星图$S_{n_1,n_2}$由两个不相交的星图 $S_{n_1}$ 和 $S_{n_2}$ 构造而成，再用一条边连接它们的中心。如果一个图的顶点集 $V$ 可以划分为两个子集 $V_1$ 和 $V_2$ ，使得 $G$ 的每条边都连接 $V_1$ 中的一个顶点与$V_2$中的一个顶点，则称该图为二部图。如果图 $G$ 可以画在平面上且边彼此不相交，则称其为平面图。在连通图 $G$ 中，如果两个顶点之间的距离等于 $G$的直径，则称这两个顶点对径。图 $G$ 的色数 $\chi(G)$是对 $G$ 的顶点进行着色、且确保任意两个相邻顶点颜色不同所需的最少颜色数。图 $G$ 的团数 $\omega(G)$是 $G$中极大完全子图的顶点数。距离正则图是一种正则图，其中对于任意顶点 $u$ 和 $v$，与 $u$的距离为 $j$ 且与 $v$ 的距离为$k$ 的顶点数，仅取决于 $j$、 $k$以及 $u$ 与 $v$之间的距离。

设 $M$ 为一个 $n \times n$ 矩阵。 $M$ 的迹记为 $\mathrm{tr}(M)$，其特征多项式记为 $\Phi_M(x)$。 $M$ 的特征值记为 $\lambda_i(M)$，其中 $i$ =1，2，……，$n$；这些特征值构成的多重集称为 $M$ 的谱，记为 Spec($M$)。对于两个实 $n \times n$ 矩阵 $A_1$ 和 $A_2$，若存在一个向量 $X \in \mathbb{R}^n$ ，使得 $A_i X = \lambda_i X$ 对 $i = 1$，2 成立，则称 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是 $A_1$ 和 $A_2$ 的余特征值。我们用 $I_n$ 表示 $n \times n$ 单位矩阵，用**1** 表示 $n \times 1$ 全一向量，用**0** 表示零矩阵。

本文其余部分安排如下：第 2 节计算路径、圈和双星图的 AD 矩阵的谱。第 3 节求出连通图的 AD 矩阵的行列式。此外，我们引入一类特殊的二部图，称为直径二部图，并利用特征多项式的系数和 AD 矩阵的特征值刻画这一类图。第 4 节建立 AD 矩阵的特征值与各种图不变量之间的界。第 5 节确定由联图、字典序积和笛卡尔积运算得到的 AD 矩阵的谱。

## 2 一些图的AD矩阵的谱

我们将图 $G$ 的AD矩阵的谱称为其邻接-直径谱（或*AD*-谱）。我们首先计算路径图 $P_n$ 的AD矩阵的特征多项式。

**定理2.1.** ***(i)*** $AD(P_2)$ 的特征多项式为 $x^2 - 1$。

*(ii)* 对于 $n \geq 3$, $AD(P_n)$ 的特征多项式为

$$\Phi_n(x) - (n-1)^2\Phi_{n-2}(x) + 2(1-n),$$

$_n$其中 $\Phi_n(x) = \prod_{k=1}^{} \left(x - 2\cos \frac{\pi k}{n+1}\right)$。

证明。 (i). 由于 $P_2 = K_2$, 结果显而易见。

(ii). 对于 $n \geq 3$, $P_n$ 的直径为 $n-1$。对$P_n$的顶点进行适当重新标记后，我们得到

$$AD(P_n) = \begin{bmatrix} 0 & n-1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$AD(P_n)$的特征多项式为

$$\begin{aligned} \Phi_{AD(P_n)}(x) &= \det\left(xI_n - AD(P_n)\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} B & C \\ C^T & xI_{n-2} - A(P_{n-2}) \end{bmatrix}\right) \\ &= \det(xI_{n-2} - A(P_{n-2})) \times \det\left(B - C(xI_{n-2} - A(P_{n-2}))^{-1}C^T\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $B = \begin{bmatrix} x & 1-n \\ 1-n & x \end{bmatrix}$ and $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

为方便起见，对于所有 $n$，我们记 $\Phi_n(x) := \Phi_{A(P_n)}(x)$，并且已知（参见 [3, 定理 3.7]）

$$\Phi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(x - 2\cos\tfrac{\pi k}{n+1}\right). \tag{2.2}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned} &\det\left(B - C(xI_{n-2} - A(P_{n-2}))^{-1}C^T\right) \\ &= \det\left(B - \left(C\ \tfrac{1}{\Phi_{n-2}(x)}\operatorname{adj}(xI_{n-2} - A(P_{n-2}))C^T\right)\right) \\ &= \det\left(B - \tfrac{1}{\Phi_{n-2}(x)}\begin{bmatrix} \Phi_{n-3}(x) & 1 \\ 1 & \Phi_{n-3}(x) \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} x - \frac{\Phi_{n-3}(x)}{\Phi_{n-2}(x)} & (1-n) - \frac{1}{\Phi_{n-2}(x)} \\ (1-n) - \frac{1}{\Phi_{n-2}(x)} & x - \frac{\Phi_{n-3}(x)}{\Phi_{n-2}(x)} \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(x^2 - n^2 + 2n - 1\right) - \tfrac{2x(\Phi_{n-3}(x))}{\Phi_{n-2}(x)} + \tfrac{(\Phi_{n-3}(x))^2 - 1}{(\Phi_{n-2}(x))^2} + \tfrac{2(1-n)}{\Phi_{n-2}(x)}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

将 (2.2) 和 (2.3) 代入 (2.1)，得到

$$\Phi_{AD(P_n)}(x) = \left(x^2 - n^2 + 2n - 1\right)\Phi_{n-2}(x) - 2x\Phi_{n-3}(x) + \frac{(\Phi_{n-3}(x))^2-1}{\Phi_{n-2}(x)} + 2(1-n). \quad (2.4)$$

众所周知，路 $P_n$的邻接矩阵的特征多项式与第二类切比雪夫多项式之间存在如下关系： $\Phi_n(x) = U_n(\frac{x}{2})$，例如参见 [5]。若 $t = \frac{x}{2}$，则有 $\Phi_{n-2}(x) = U_{n-2}(t)$， $\Phi_{n-3}(x) = U_{n-3}(t)$。 -

由于 $U_n(t)$ 满足恒等式 $U_k^2(t) - U_{k-1}(t)U_{k+1}(t) = 1$ [14, 式（3）21], 对于 $k = n-3$, 我们得到 $\Phi_{n-3}^2(x) - \Phi_{n-4}(x)\Phi_{n-2}(x) = 1$。这意味着项 $\frac{(\Phi_{n-3}(x))^2-1}{(\Phi_{n-2}(x))^2}$ 等于$\Phi_{n-4}(x)$。于是（2.4）变为:

$$\Phi_{AD(P_n)}(x) = \left(x^2 - n^2 + 2n - 1\right)\Phi_{n-2}(x) - 2x\Phi_{n-3}(x) + \Phi_{n-4}(x) + 2(1-n) \quad (2.5)$$

此外， $U_n(t)$ 满足递推关系 $U_k(t) = 2tU_{k-1}(t) - U_{k-2}(t)$ [9, 式（1.6a、1.6b）],，其中 $U_0(t) = 1, U_1(t) = 2t$。于是，对于 $k = n-2$、 $k = n-1$ 和 $k = n$，我们分别得到 $\Phi_{n-4}(x) = x\Phi_{n-3}(x) - \Phi_{n-2}(x)$、 $\Phi_{n-3}(x) = x\Phi_{n-2}(x) - \Phi_{n-1}(x)$ 以及 $\Phi_n(x) = x\Phi_{n-1}(x) - \Phi_{n-2}(x)$。将这些代入（2.5），得到

$$\begin{aligned}
\Phi_{AD(P_n)}(x) &= \left(x^2 - n^2 + 2n - 1\right)\Phi_{n-2}(x) - 2x\Phi_{n-3}(x) + x\Phi_{n-3}(x) - \Phi_{n-2}(x) + 2(1-n) \\
&= \left(x^2 - n^2 + 2n - 2\right)\Phi_{n-2}(x) - x\Phi_{n-3}(x) + 2(1-n) \\
&= \left(x^2 - n^2 + 2n - 2\right)\Phi_{n-2}(x) - x^2\Phi_{n-2}(x) + x\Phi_{n-1}(x) + 2(1-n) \\
&= -\Phi_{n-2}(x) - (n-1)^2\Phi_{n-2}(x) + x\Phi_{n-1}(x) + 2(1-n) \\
&= \Phi_n(x) - (n-1)^2\Phi_{n-2}(x) + 2(1-n).
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

以下结果确定了圈图的 AD-谱 t.

**定理2.2.** 对于 $n \geq 3$，有

$$Spec(AD(C_n)) = \begin{cases} \left\{2\cos\frac{2\pi k}{n} + \frac{n}{2}\cos\pi k \,:\, k = 1, 2, \ldots, n\right\}, & \text{if } n \text{ is even;} \\ \left\{2\cos\frac{2\pi k}{n} + (n-1)\cos\pi k \;\cos\frac{\pi k}{n} : \, k = 1, 2, \ldots, n\right\}, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

证明。注意，当 $n$ 为偶数时， $C_n$ 的直径为 $\frac{n}{2}$；当 $n$ 为奇数时，直径为 $\frac{n-1}{2}$。此外，矩阵 $AD(C_n)$ 是循环矩阵：若 $n$ 为奇数，其第一行的非零元素为 $c_1 = c_{n-1} = 1$ 和 $c_{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}$；若 $n$ 为偶数，其第一行的非零元素为 $c_1 = c_{n-1} = 1$ 和 $c_{\frac{n-1}{2}} = c_{\frac{n+1}{2}} = \frac{n-1}{2}$。已知，对于第一行为 $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ 的 $n \times n$ 阶循环矩阵 $C$, 其特征值 $\lambda_k$ 为

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j\,\omega_n^{jk}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

其中 $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是一个本原 $n$ 次单位根。

假设 $n$ i 为偶数。 $k = 0,1 \ldots, n-1$ 的 $\lambda_k$ 特征值由下式给出：

$$\lambda_k = \omega^k + (\omega^k)^{n-1} + \tfrac{n}{2}(\omega^k)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{2\pi ik}{n}} + e^{-\frac{2\pi ik}{n}} + \tfrac{n}{2}(e^{\frac{2\pi ik}{n}})^{\frac{n}{2}} = 2\cos\tfrac{2\pi k}{n} + \tfrac{n}{2}\cos\pi k.$$

假设 $n$ 为奇数。对于 $k = 0,1 \ldots, n-1$， $AD(C_n)$的 $\lambda_k$ 特征值由下式给出：

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \omega^k + (\omega^k)^{n-1} + \left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left((\omega^k)^{\frac{n-1}{2}} + (\omega^k)^{\frac{n+1}{2}}\right) \\
&= \omega^k + \omega^{-k} + \left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left\{(\omega^k)^{\frac{n}{2}}\left((\omega^k)^{\frac{-1}{2}} + (\omega^k)^{\frac{1}{2}}\right)\right\} \\
&= 2\cos\tfrac{2\pi k}{n} + \left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left\{e^{\pi ik}\left(e^{-\frac{\pi ik}{n}} + e^{\frac{\pi ik}{n}}\right)\right\} \\
&= 2\cos\tfrac{2\pi k}{n} + (n-1)\left\{\cos\pi k\,\cos\tfrac{\pi k}{n}\right\}
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

双星图$S_{n_1,n_2}$ 的 AD 矩阵的特征多项式由以下结果描述。

**定理 2.3**。 $AD(S_{n_1,n_2})$ 的特征多项式为

$$x^{n_1+n_2-4}\left(x^4 - (9n_1n_2 - 8n_1 - 8n_2 + 8)\,x^2 + 4\,(n_1n_2 - n_1 - n_2 + 1)\right).$$

证明。 通过适当地排列$S_{n_1,\ n_2}$的顶点，可以看出

$$AD(S_{n_1,n_2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & J_{1\times(n_1-1)} & \mathbf{0}_{1\times(n_2-1)} \\ 1 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(n_1-1)} & J_{1\times(n_2-1)} \\ J_{(n_1-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(n_1-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(n_1-1)\times(n_1-1)} & 3J_{(n_1-1)\times(n_2-1)} \\ \mathbf{0}_{(n_2-1)\times 1} & J_{(n_2-1)\times 1} & 3J_{(n_2-1)\times(n_1-1)} & \mathbf{0}_{(n_2-1)\times(n_2-1)} \end{bmatrix}.$$

由于$\mathbf{0}_{(n_1-1)\times(n_1-1)}$（分别为$\mathbf{0}_{(n_2-1)\times(n_2-1)}$）的每一行的行和均为 0，向量$\mathbf{1}_{(n_1-1)\times 1}$ （分别为$\mathbf{1}_{(n_2-1)\times 1}$）是对应于特征值 0 的特征向量。假设其余的特征向量 $X_i$ for $i = 2$、3、...、$n_1 - 1$ （分别为 $Y_j$ for $j = 2$、3、...、$n_2 - 1$）均选取为与$\mathbf{1}_{(n_1-1)\times 1}$ （分别为$\mathbf{1}_{(n_2-1)\times 1}$）正交。则$\begin{bmatrix}0 & 0 & X_i^T & \mathbf{0}_{1\times(n_2-1)}\end{bmatrix}^T$(resp.$\begin{bmatrix}0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(n_1-1)} & Y_j^T\end{bmatrix}^T$) 是 $AD(S_{n_1,n_2})$中对应于特征值 0 的特征向量。

这意味着，对于 $i = 2, 3, \ldots, n_1 - 1$，以及对于 $j = 2, 3, \ldots, n_2 - 1$，向量 $\begin{bmatrix}0 & 0 & X_i & \mathbf{0}_{1\times(n_2-1)}\end{bmatrix}^T$ 和$\begin{bmatrix}0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(n_1-1)} & Y_j\end{bmatrix}^T$ 是 $AD(S_{n_1,n_2})$ 对应于重数分别为 $n_1 - 2$ 和 $n_2 - 2$ 的特征值 0 的特征向量。因此，0 是 $AD(S_{n_1,n_2})$ 的特征值，重数为 $n_1 + n_2 - 4$。这样，我们得到了 $n_1 + n_2 - 4$ 个特征值。所有这些特征向量都与 $\begin{bmatrix}1 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(n_1-1)} & \mathbf{0}_{1\times(n_2-1)}\end{bmatrix}^T$、$\begin{bmatrix}0 & 1 & \mathbf{0}_{1\times(n_1-1)} & \mathbf{0}_{1\times(n_2-1)}\end{bmatrix}^T$、$\begin{bmatrix}0 & 0 & J_{1\times(n_1-1)} & \mathbf{0}_{1\times(n_2-1)}\end{bmatrix}^T$以及$\begin{bmatrix}0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(n_1-1)} & J_{1\times(n_2-1)}\end{bmatrix}^T$正交。

因此，由这四个向量张成的空间与由 $AD(S_{n_1,n_2})$ 的其余四个特征向量张成的空间相同。因此，$AD(S_{n_1,n_2})$ 的其余特征向量具有如下形式

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 J_{1\times(n_1-1)} & \alpha_4 J_{1\times(n_2-1)} \end{bmatrix}^T$$

对于某些 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \neq (0, 0, 0, 0)$。若 $\beta$ 是 $AD(S_{n_1,\ n_2})$ 的一个特征值，对应的特征向量为 $X$，则

$$AD(S_{n_1,n_2})X = \beta X,$$

这等价于以下方程组

$$\begin{bmatrix} -\beta & 1 & n_1-1 & 0 \\ 1 & -\beta & 0 & n_2-1 \\ 1 & 0 & -\beta & 3(n_2-1) \\ 0 & 1 & 3(n_1-1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

上述方程组有非平凡解，当且仅当左侧的方阵是非奇异的。因此，$AD(S_{n_1,\ n_2})$ 的其余四个特征值就是该矩阵的特征值

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & n_1-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & n_2-1 \\ 1 & 0 & 0 & 3(n_2-1) \\ 0 & 1 & 3(n_1-1) & 0 \end{bmatrix}$$

其特征多项式为 $x^4 - (9n_1n_2 - 8n_1 - 8n_2 + 8)\ x^2 + 4\,(n_1n_2 - n_1 - n_2 + 1)$。证明完毕。

□

# 3 行列式

**定义 3.1**。设 $G$ 是一个连通图。$G$中的顶点集 $P$（其中 $|P| \geq 3$）称为 $G$ 的邻接-直径循环，如果 $P$ 中的顶点可以按循环排列，使得每对相邻顶点要么相邻，要么互为对径。

$\mathcal{S} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ 对 $V(G)$的一个子集所作的划分，若其每个部分 $P_i$ 满足以下条件之一，则称为 $G$ 的邻接-直径划分：(i) $P_i$ 的大小为 $\geq 3$，且是 $G$的一个邻接-直径圈；(ii) $P_i$ 的大小为 2，且其顶点相邻或对径。

此外，如果 $\mathcal{S}$ 是 $V(G)$的一个划分，则称其为 $G$的生成邻接-直径划分。

令 $p(\mathcal{S})$ 和 $p_1(\mathcal{S})$ 分别表示 $\mathcal{S}$中大小为 2 和 $\geq 3$ 的 $G$ 邻接-直径划分的部分数。

**例 3.1.** 对于图 $G$，如图1所示，$\{\{1,7\},\{2,3,5,6\}\}$ 是 $G$的邻接-直径划分，而 $\{\{1,3,5\},\{2,6\},\{7,4\}\}$ 是 $G$的生成邻接-直径划分。

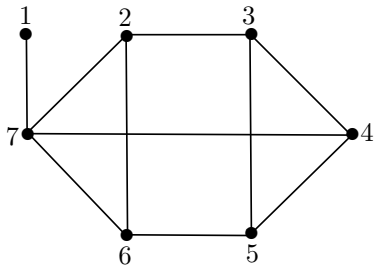



图1：图 $G$

**引理 3.1**。设 $G$ 是一个至少有三个顶点的连通图。在关联加权图 $\mathcal{G}$ 中，长度为 $k$ 的圈与 $G$中的长度为 $k$ 的邻接-直径圈之间存在一一对应关系。

证明。设 $G$ 的直径为 $d$。给定 $\mathcal{G}$中的一个圈 $C_{\mathcal{G}}$，按循环顺序遍历它。$C_{\mathcal{G}}$ 的每条边要么是单位权边，对应于 $G$中的邻接（一条边）；要么是权为$d$ 的边，对应于 $G$中的一对对径顶点。将 $C_{\mathcal{G}}$ 中的每条权为$d$ 的边替换为 $G$中对应的一对对径顶点，并将单位边按通常的邻接边解释，即可得到 $G$ 中的一个圈，该圈在邻接和对径跳跃之间交替，这恰好是 $G$ 中的一个邻接-直径圈。反过来，$G$ 中的任意邻接-直径圈都包含 $G$中的邻接和对径关系；将每个对径关系收缩为一条权为$d$的边，即可得到 $\mathcal{G}$中的唯一一个圈。这两个构造互为逆过程，从而建立了双射。建立双射后，圈长的奇偶性在此对应关系下得以保持。

□

所谓的初等子图，是指 $\mathcal{G}_G$ 的一个子图（其边权为 1 或 $d$），且其分支均为圈或边。

以下结果直接由本节前面讨论的事实得出。

**推论 3.1.** 设 $G$是一个直径为 $d$的连通图。$\mathcal{S} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ 的邻接-直径划分与 $\mathcal{G}_G$ 的一个初等子图之间存在一一对应关系，该初等子图有 $k$ 个分支（每个分支的边权为1 或 $d$）；当 $|P_i| \geq 3$时，其分支为圈；当 $|P_i| = 2$时，其分支为边。

现在我们来确定连通图的 AD矩阵的行列式。

**定理 3.1.** 设 $G$ 是一个顶点集为 $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ 且直径为 $d$的连通图。则

$$\det(AD(G)) = \sum (-1)^{n-p(\mathcal{S})-p_1(\mathcal{S})} 2^{p_1(\mathcal{S})} d^{2a(\mathcal{S})+a_1(\mathcal{S})}, \tag{3.1}$$

其中，求和遍及 $G$ 的所有生成邻接-直径划分 $\mathcal{S}$ 。这里，$a(\mathcal{S})$ 和 $a_1(\mathcal{S})$ 分别表示 $\mathcal{S}$ 中大小为2 的各个部分 $P_i$ 中对跖顶点对的数量，以及 $\geq 3$ 中对跖顶点对的数量。

证明。 我们考虑 $G$ 的关联加权图 $\mathcal{G}_G$ 。令 $A\left(\mathcal{G}_G\right) = \left(d_{ij}\right)$ 。我们有

$$\det(A(\mathcal{G}_G)) = \sum_{\pi} sgn(\pi) d_{1\pi(1)} \ldots d_{n\pi(n)}, \tag{3.2}$$

其中，求和 遍及 $\{1, 2 \ldots, n\}$ 上的所有排列 $\pi$。考虑一个非零项

$$d_{1\pi(1)} \ldots d_{n\pi(n)}.$$

由于 $\pi$ 可以分解为圈，因此这样的项对应于 $\pi$ 的某个 2-圈（$ij$），它表示连接 $i$ 和 $j$、权为 1 的边或 $d$，以及一些高阶圈，这些圈对应于 $\mathcal{G}_G$ 中的圈。（注意，对于任意 $i$， $\pi\left(i\right) \neq i$ 。）因此，求和中的每个非零项都来自 $\mathcal{G}_G$ 的一个初等加权子图。设项 $d_{1\pi(1)} \ldots d_{n\pi(n)}$ 对应于 $\mathcal{G}_G$ 的初等子图 $\mathcal{H}$。那么， $\pi$ 的符号由下式给出，

$$sgn(\pi) = (-1)^{n-\text{number of cycles in } \pi},$$

等于 $(-1)^{n-c(\mathcal{H})-c_1(\mathcal{H})}$，其中， $c(\mathcal{H})$ 和 $c_1(\mathcal{H})$ 分别表示 $\mathcal{H}$ 中边分支的数量和循环分支的数量。每个生成初等子图$\mathcal{H}$ 在求和中贡献 $2^{c_1(\mathcal{H})}$ 项，因为 $\mathcal{G}_G$ 中的每个圈都可以通过两种不同的方式与一个循环置换相关联。在 $\mathcal{H}$ 中，某些边分支的权可能为 $d$，这会对式 (3.2) 中的求和贡献 $d^{2t(\mathcal{H})}$ ，其中 $t(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 中权为 $d$的边分支数量。此外， $\mathcal{H}$ 的某些循环分支可能包含权为 $d$的边，这会对式 (3.2) 中的求和贡献 $d^{t_1(\mathcal{H})}$ ，其中 $t_1(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$的所有循环分支中权为 $d$ 的边的数量。因此，结合这些观察，式 (3.2) 变为

$$\det(A(\mathcal{G}_G)) = \sum (-1)^{n-c(\mathcal{H})-c_1(\mathcal{H})} 2^{c_1(\mathcal{H})} d^{2t(\mathcal{H})+t_1(\mathcal{H})}, \tag{3.3}$$

其中，求和遍及 $\mathcal{H}$ 的所有生成初等子图。根据推论 3.1， $\mathcal{G}_G$ 的每个生成初等子图 $\mathcal{H}$ 都对应于 $G$ 的一个生成邻接 - 直径划分 $\mathcal{S}$。此外，显然 $\mathcal{H}(= p)\ \mathcal{S}(\ c_1)$，$\mathcal{H}(=)p_1(\mathcal{S})$，$\mathcal{H}$ $(= a)\ \mathcal{S}(\ t_1)$，且 $\mathcal{H}(= a_1)\mathcal{S}(\ AD)$。由于 $G(= A)\ \mathcal{G}_G()$，将这些信息代入 (3.3)，即可得到所需结果。

□

例3.2. 对于星图 $S_4$ ，其中心顶点为 1，悬挂顶点为 2、3、4，其生成邻接-直径划分为 $\mathcal{S}_1 = \{\{1,2,3,4\}\}$、$\mathcal{S}_2 = \{\{1,2,4,3\}\}$、$\mathcal{S}_3 = \{\{1,3,2,4\}\}$、$\mathcal{S}_4 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$、$\mathcal{S}_5 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$ 和 $\mathcal{S}_6 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$。注意，对于 $i = 1$、2、3 以及 $j = 4$、5、6，$p(\mathcal{S}_i) = a(\mathcal{S}_i) = p_1(\mathcal{S}_j) = a_1(\mathcal{S}_j) = 0$；对于 $i = 1$、2、3 以及 $j = 4$、5、6，$p(\mathcal{S}_i) = p_1(\mathcal{S}_j) = a(\mathcal{S}_j) = 1$；对于 $i = 1$、2、3，$a_1(\mathcal{S}_i) = 2$。将这些值代入 (3.1)，得到

$$\det(AD(S_4)) = 3\,(-1)^3\,2^1\,2^2 + 3\,(-1)^2\,2^0\,2^{2(1)} = -12.$$

这与直接计算 $AD(G$ 的行列式一致 ).

**例3.3.** 考虑具有 $n\ (\geq 2)$ 个顶点的路径图 $P_n$。我们证明

$$\det(AD(P_n)) = \begin{cases} 2(n-1), & \text{if } n \text{ is odd;} \\ -1, & \text{if } n = 2; \\ (n-2)^2, & \text{if } n = 4k \text{ for } k = 1,2,\ldots; \\ -n^2, & \text{if } n = 4k+2 \text{ for } k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

显然， $P_n$ 的直径为 $n-1$。我们假设 $V(P_n) = \{1,2,\ldots,n\}$ 且 $E(P_n) = \{\{i,i+1\}: i = 1, 2, \ldots\ldots, n-1\}$。我们分三种情况进行讨论。

情况*1*。假设 $n$ 是奇数。

在这种情况下， $P_n$ 以 $\mathcal{S} = \{\{1,2,\ldots,n\}\}$ 为其唯一的生成邻接-直径划分，并且 $p(\mathcal{S}) = a(\mathcal{S}) = 0$ 且 $p_1(\mathcal{S}) = a_1(\mathcal{S}) = 1$，将这些代入 (3.1)，得

$$\det(AD(P_n)) = (-1)^{n-1}\,2^1\,(n-1)^1 = 2(n-1).$$

情况*2*。假设 $n$ 是偶数。

令 $n = 2$。$P_2$ 的唯一生成邻接-直径划分为 $\mathcal{S} = \{\{1,2\}\}$，且$p(\mathcal{S}) = a(\mathcal{S}) = 1$ 和 $p_1(\mathcal{S}) = a_1(\mathcal{S}) = 0$。于是由 (3.1)，得到

$$\det(AD(P_2)) = (-1)^{2-1}\,2^0\,1^2 = -1.$$

令 $n = 4k$ 或 $n = 4k+2$，其中 $k = 1, 2, \ldots$。无论哪种情况， $P_n$ 的生成邻接-直径划分如下： $\mathcal{S}_1 = \{\{1,2,\ldots,n\}\}, \mathcal{S}_2 = \{\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{n-1,n\}\}$ 和 $\mathcal{S}_3 = \{\{1,n\},\{2,3\},\ldots,\{n-2,n-1\}\}$。这里 $p(\mathcal{S}_1) = a(\mathcal{S}_1) = p_1(\mathcal{S}_2) = a(\mathcal{S}_2) = a_1(\mathcal{S}_2) = p_1(\mathcal{S}_3) = a(\mathcal{S}_3) = 0$, $p_1(\mathcal{S}_1) = a_1(\mathcal{S}_1) = a_1(\mathcal{S}_3) = 1$ 和 $p(\mathcal{S}_2) = p(\mathcal{S}_3) = \frac{n}{2}$。

当 $n = 4k$ 对 $k = 1, 2, \ldots$ 应用这些式子时，将其代入（3.1），可得

$$\det(AD(P_n)) = (-1)^{n-1}\,2^1\,(n-1)^1 + (-1)^{n-\frac{n}{2}} + (-1)^{n-\frac{n}{2}}\,(n-1)^2 = (n-2)^2.$$

类似地，当 $n = 4k+2$ 对于 $k = 1, 2, \ldots\ldots$ 时，由 (3.1) 可得

$$\det(AD(P_n)) = (-1)^{n-1}\,2^1\,(n-1)^1 + (-1)^{n-\frac{n}{2}} + (-1)^{n-\frac{n}{2}}\,(n-1)^2 = -n^2.$$

**定理 3.2**。设 $G$ 是一个具有 $n$ 个顶点且直径为 $d$的连通图。设

$$\Phi_{AD(G)}(\lambda) = \det(\lambda I - AD(G)) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

为 $AD(G)$的特征多项式。于是

$$c_k = \sum(-1)^{p(\mathcal{S})+p_1(\mathcal{S})}2^{p_1(\mathcal{S})}d^{2a(\mathcal{S})+a_1(\mathcal{S})}, \tag{3.4}$$

其中求和遍及 $G$的所有具有 $k$ 个顶点的邻接-直径划分 $\mathcal{S}$，对每个 $k = 1$、2、...、 $n$。

证明。 注意，数$(-1)^k c_k$ 是 $AD(G)$的所有 $k \times k$ 阶主子式之和，$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$。由定理 3.1,

$$c_k = (-1)^k \sum(-1)^{k-p(\mathcal{S})-p_1(\mathcal{S})}2^{p_1(\mathcal{S})}d^{2a(\mathcal{S})+a_1(\mathcal{S})},$$

其中求和遍及 $G$ 的所有具有 $k$ 个顶点的邻接-直径划分 $\mathcal{S}$，对每个 $k = 1$、 2、 ...、 $n$。因此， $c_k = \sum(-1)^{p(\mathcal{S})+p_1(\mathcal{S})}2^{p_1(\mathcal{S})}d^{2a(\mathcal{S})+a_1(\mathcal{S})}$。注意， $c_1 = 0$。 □

**注 3.1**。 现在应用定理 3.2，得到 $c_2$ 和 $c_3$ 的显式表达式。(i) $G$ 的双顶点邻接-直径划分形式为 $\mathcal{S}_1 = \{\{v_i, v_j\}\}$，其中 $v_i \sim v_j$；或为 $\mathcal{S}_2 = \{\{v_i, v_j\}\}$，其中 $d_G(v_i,\ v_j) = d$。

对于这两种类型，我们有 $p(\mathcal{S}_1) = p(\mathcal{S}_2) = a(\mathcal{S}_2) = 1$， $p_1(\mathcal{S}_1) = p_1(\mathcal{S}_2) = a(\mathcal{S}_1) = a_1(\mathcal{S}_1) = a_1(\mathcal{S}_2) = 0$。将这些值代入 (3.4)，得到

$$c_2 = \sum(-1)^1\,2^0\,d^0 + \sum(-1)^1\,2^0\,d^{2(1)},$$

其中，第一个和第二个求和分别遍历形如 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 的所有邻接–直径划分。因此,

$$c_2 = -(|E(G)| + kd^2),$$

其中， $k$ 表示 $G$ 中无序对跖顶点对的数量。

（ii）具有三个顶点的 $G$ 的邻接-直径划分分为以下四种类型： $\mathcal{S}_1 = \{\{v_i, v_j, v_k\}\}$，其中 $v_i \sim v_j$、 $v_j \sim v_k$ 和 $v_i \sim v_k$； $\mathcal{S}_2 = \{\{v_i, v_j, v_k\}\}$，其中 $v_i \sim v_j$、 $v_j \sim v_k$ 和 $d_G(v_i, v_k) = d$； $\mathcal{S}_3 = \{\{v_i, v_j, v_k\}\}$，其中 $v_i \sim v_j$、 $d_G(v_j, v_k) = d$ 和 $d_G(v_i, v_k) = d$； $\mathcal{S}_4 = \{\{v_i, v_j, v_k\}\}$，其中 $d_G(v_i, v_j) = d$、 $d_G(v_j, v_k) = d$ 和 $d_G(v_i, v_k) = d$。

对于 $i = 1,\ 2,\ 3$，我们有 $p(\mathcal{S}_i) = a(\mathcal{S}_i) = a_1(\mathcal{S}_1) = 0$, $p_1(\mathcal{S}_i) = a_1(\mathcal{S}_2) = 1$，其中 $a_1(\mathcal{S}_3) = 2$ 和 $a_1(\mathcal{S}_4) = 3$。将这些代入 (3.4)，得到

$$c_3 = \sum(-1)^1\,2^1\,d^0 + \sum(-1)^1\,2^1\,d^1 + \sum(-1)^1\,2^1\,d^2 + \sum(-1)^1\,2^1\,d^3$$

其中这四个求和分别对应于 $G$ 的形如 $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$,$\mathcal{S}_3$ 和 $\mathcal{S}_4$ 的邻接-直径划分。因此，

$$c_3 = -2(k_0 + k_1 d + k_2 d^2 + k_3 d^3),$$

其中，对于 $s \in \{0,1,2,3\}$， $k_s$ 是具有恰好 $s$ 个对径点对、且其余 $3-s$ 对点之间距离为 1 的无序三元组 $\{v_i, v_j, v_k\}$ 的数量。注意， $k_0$ 是 $G$ 中三角形的数量。

注意，谱图论中许多关于无权图邻接矩阵谱的结果，无需任何修改即可直接推广到加权图。在接下来的结果中，我们将使用这些事实，而不再每次明确说明这种推广。

利用 $AD(G) = A(\mathcal{G}_G)$ 这一事实，并注意到 $G$ 的邻接-直径循环可视为 $\mathcal{G}_G$ 中的圈（参见引理 3.1），我们直接由 $[3,$ 推论 3.11$]$，得到下一个结果。

**推论 3.2**。 设 $G$ 是一个含有 $n$ 个顶点的连通图。令

$$\Phi_{AD(G)}(\lambda) = \det(\lambda I - AD(G)) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

为 $AD(G)$ 的特征多项式。假设 $c_3 = c_5 = \cdots = c_{2k-1} = 0$。则 $G$ 不含长度为 $i$、$3 \le i \le 2k-1$ 的奇数长度邻接直径圈。此外， $G$ 中长度为 $2k+1$ 的邻接直径圈的数量为 $-\frac{1}{2}c_{2k+1}$。

## 3.1 直径二部图

现在我们介绍一类特殊的二部图。

**定义 3.2**。 如果一个连通图 $G$ 是二分图，其二分划分为 $(V_1, V_2)$，且同一部分中的任意两个顶点都不对径，则称其为直径二分 图。

**引理 3.2**。 一个连通二部图是直径二部图，当且仅当其直径$d$ 为奇数。

证明。 设 $G$ 是一个二分划分为 $(V_1, V_2)$ 且直径为 $d$ 的连通二部图。由于$G$ 是二部图，同一部分中的任意一对顶点之间的距离 $V_i$ 都是偶数，因为二部图中的任意一条路都会在两个部分之间交替经过。

如果 $d$ 是奇数，则同一部分中的任意两个顶点之间的距离都不可能为 $d$，因此 $G$是直径二部图。

如果 $d$ 是偶数，那么任意一对顶点 $x$， $y$，其 $d_G(x, y) = d$ 必定属于同一个二部划分类（因为它们之间的距离为偶数）。因此，同一部分中有两个顶点互为对径，所以 $G$ 不是直径二分的。 □

**定理 3.3**。 设 $G$ 是一个至少有三个顶点的连通图。则下列条件等价。

(i) $G$是直径二分图

(ii) $\mathcal{G}_G$ 是二部图

(iii) $G$ 中的所有邻接直径圈均为偶长度

证明。 设 $G$ 的直径为 $d$。带权图 $\mathcal{G}_G$ 由 $G$ 得到：取 $G$的一个副本并为其边赋予单位权重，然后在 $G$ 中的每一对对径顶点之间添加一条权为 $d$的新边。

**(i) ⇔ (ii)**：假设 $G$ 是直径二分图。根据引理 3.2， $d$ 为奇数。因此，任意一对对径顶点不可能同时出现在 $G$的二分划分的同一部分中。所以，新添加的权为 $d$的边的两个端顶点必定位于不同的部分中。因此$\mathcal{G}_G$ 是二部图。反向重复上述论证，即可得到逆命题部分的证明。

**(ii) ⇔ (iii)**：根据引理 3.1， $\mathcal{G}$ 是二部图（ $\mathcal{G}$ 中的每个圈均为偶长度）当且仅当 $G$ 中的每个邻接–直径圈均为偶长度。 □

由于 $AD(G) = A(\mathcal{G}_G)$，结合定理 3.3 和定理 3.14]，可直接得到下一个结果。

**定理 3.4**。 设 $G$ 是一个有 $n$个顶点的连通图。则以下条件等价。

(i) $G$是直径二分图；

(ii)若 $\Phi_{AD(G)}(\lambda) = det(AD(G) - \lambda I) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$是 $AD(G)$的特征多项式，则 $c_{2k+1} = 0, k = 0, 1, \ldots$；

(iii) $AD(G)$ 的特征值关于原点对称。

# 4 一些图不变量与界

**定义 4.1.** 设 $G$ 是一个直径为 $d$的连通图。图 $G$中顶点 $u$ 的直径度 记作 $d_G(u)$，或简记为 $d(u)$，表示图 $G$ 中满足 $d_G(u, v) = d$的顶点 $v$ 的数量，即，

$$\hat{d}(u) = |\{v \in V(G) : d_G(u, v) = d\}|.$$

^ ^我们分别用 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 表示 $G$ 各顶点直径度的最大值和最小值。 $G$ 的直径度总和记为 $d(G)$，即 $G$ 各顶点直径度之和，即：

$$\hat{d}(G) = \sum_{v \in V(G)} \hat{d}(v).$$

**例4.1**。 图2所示的图 $G$ 各顶点的直径度分别为 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}d(v_1) = 0$, $d(v_2) = 0$, $d(v_3) = 1$, $d(v_4) = 0$, $d(v_5) = 0$, 以及 $d(v_6) = 1$。而 $G$ 的直径度为 $\hat{}\hat{}\hat{} d(G) = 0+0+1+0+0+1 = 2$。此外, $\delta(G) = 0$ 和 $\Delta(G) = 1$。

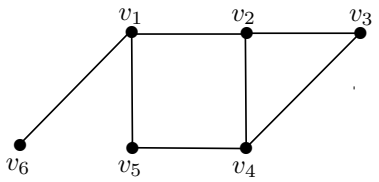



图2：图 $G$

**引理 4.1.** 设 $G$是一个具有 $n$ 个顶点、 $m$条边且直径为 $d$的连通图。设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 为 $AD(G)$的特征值。那么

(i) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 0$;

(ii) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = 2m + d^2\hat{}d(G)$。

证明。 (i) 由于 $AD(G)$的迹为0，结论（i）得证。

(ii) 令 $AD(G) =(d_{ij})$。那么

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = tr(AD(G))^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}d_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\Big(d(v_i) + d^2\hat{d}(v_i)\Big) = 2m + d^2\hat{d}(G)$$

证明完毕。 □

$AD(G)$的最大特征值称为 $G$的邻接-直径谱半径（或AD谱半径）。

**定理4.1**。 设 $G$ 是一个具有 $n$ 个顶点、 $m$ 条边且直径为 $d$的连通图。设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 是 $AD(G)$ 的特征值。则

$$\lambda_1 \leq \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)(2m + d^2\hat{d}(G))}.$$

$\lambda_1 = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$，从而 $n$证明。 由引理4.1(i)，我们有 $\sum_{i=2}^{n}\lambda_i = 0$。因此,

$$\lambda_1 \leq \sum_{i=2}^{n}|\lambda_i|. \tag{4.1}$$

利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\left(\sum_{i=2}^{n}|\lambda_i|\right)^2 \leq (n-1)\sum_{i=2}^{n}\lambda_i^2. \tag{4.2}$$

由引理 4.1(ii)，并利用 (4.1)、(4.2)，可得

$$2m + d^2\hat{d}(G) - \lambda_1^2 = \sum_{i=2}^{n}\lambda_i^2 \geq \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n}|\lambda_i|\right)^2 \geq \frac{\lambda_1^2}{n-1}.$$

因此

$$2m + d^2\hat{d}(G) \geq \lambda_1^2\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \lambda_1^2\left(\frac{n}{n-1}\right),$$

从而得到所需结果。 □

**定理 4.2.** 设 $G$ 是一个具有 $n$ 个顶点、 $m$ 条边且直径为 $d$ 的邻接直径二部图。设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 是 $AD(G)$ 的特征值。则

$$\lambda_n \leq \sqrt{m + \frac{1}{2}d^2\hat{d}(G)}.$$

$_n$证明. 由定理 3.4(iii)，我们知道 $\lambda_1 = -\lambda_n$ ，而引理 4.1 给出 $\sum\lambda_i^2 = 2m +_{i=1}d^2\,\hat{}\,d($ $G)$。因此 $\lambda_1^2 + \lambda_n^2 \leq 2m + d^{2\hat{}}d(G)$，从而得到 $2\lambda_n^2 \leq 2m + d^2\,\hat{}\,d(G)$。证明完毕。

□

若 $S$ 是 $G$ 的一个独立集，且其中任意两个顶点都不是对径的，则称其为 $G$ 的邻接直径独立集 （或*AD* 独立集）。 $G$ 中邻接直径独立集的最大基数记为 $\alpha_{AD}(G)$，称为 $G$ [10]的邻接直径独立数 （或*AD* 独立数）。显然，$\alpha_{AD}(G) \leq \alpha(G)$。

对于图 $G$ （如图3所示），子集 $\{v_3, v_4, v_5\}$ 是 $G$的一个 AD 独立集，也是 $G$ 中最大基数的 AD 独立集。因此，AD 独立数 $\alpha_{AD}(G)$为 $= 3$。

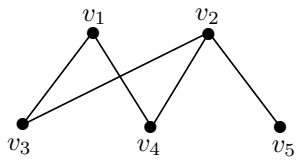



图3：图 $G$

并非每个独立集都是 AD 独立集。例如，在图3所示的图中，子集 $\{v_1, v_5\}$ 是一个独立集，但不是 AD 独立集，因为$v_1$ 和 $v_5$ 是对跖顶点。

显然， $G$ 的 AD 独立数等于$\mathcal{G}_G$的独立数。由于 $AD(G) = A(\mathcal{G}_G)$，应用 [5, 定理 3.10.1] 可得以下结果。

**定理4.3.** 设 $G$是一个有 $n$个顶点的连通图。令 $n^+$ 和 $n^-$ 分别表示 $AD(G)$ 的正特征值和负特征值的数量。那么

$$\alpha_{AD}(G) \leq \min\{n - n^+, n - n^-\}.$$

连通图 $G$ 的正常着色称为 $G$的邻接直径染色（或*AD*着色），如果任意两个对跖顶点的颜色都不同。 $G$的邻接直径色数（或*AD*色数）记为 $\chi_{AD}(G)$，是对 $G$进行邻接直径染色所需的最少颜色数。对于每种颜色，所有被赋予该颜色的顶点构成一个 AD独立集合，称为邻接直径颜色类。等价地， $\chi_{AD}(G)$是将$V(G)$划分为 AD独立子集 [11]所需的最小划分的基数。

注意，对于任意连通图 $G$, $\chi(G) \leq \chi_{AD}(G)$。例如，路径图 $P_5$有 $\chi(P_5) = 2$ 和 $\chi_{AD}(P_5) = 3$。

显然， $G$ 的 AD色数等于 $\mathcal{G}_G$的色数。由于$AD(G) = A(\mathcal{G}_G)$，直接应用 [3, 定理 3.23] 即可得到以下结果。

**定理 4.4.** 设 $G$是一个具有 $n$ 个顶点且至少有一条边的连通图。设$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 是 $AD(G)$的特征值。那么

$$\chi_{AD}(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

**推论4.1.** 设 $G$ 是一个具有 $n$ 个顶点的连通平面图。设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$是 $AD(G)$的特征值。假设 $\chi(G) = \chi_{AD}(G)$。那么 $\lambda_1 \leq -3\lambda_n$。

证明。 众所周知，每个平面图都可以用 4–种颜色着色 [4]。由此可得 $\chi_{AD}(G) \leq 4$。因此，定理 4.4 得出 $\lambda_1 \leq -3\lambda_n$。 □

有几类图满足推论4.1的条件 $\chi(G) = \chi_{AD}(G)$。例如，路 $P_{2n}$、圈 $C_n$ （ $n = 4k + 2$ 取 $k = 1$，2，..... ）以及双星。

**定义4.2**。 设 $G$ 是直径为 $d$的连通图。顶点 $v$ 在 $G$中的邻接-直径^^ ^^度 （或*AD* 度），记作 $d_G(v)$（或简记为 $d(v)$），定义为

$$\hat{\hat{d}}_G(v) = d(v) + d\hat{d}(v).$$

^^ $G$ 中顶点的 AD 度的最大值和最小值分别记作 $\Delta(G)$ ^^和 $\delta(G)$。如果 $G$ 的每个顶点都具有相同的 AD 度 $r$，则称 $G$ 为度为 $r$ 的邻接-直径正则（或*AD* 正则）图，或简记为 $r$-*AD* 正则。

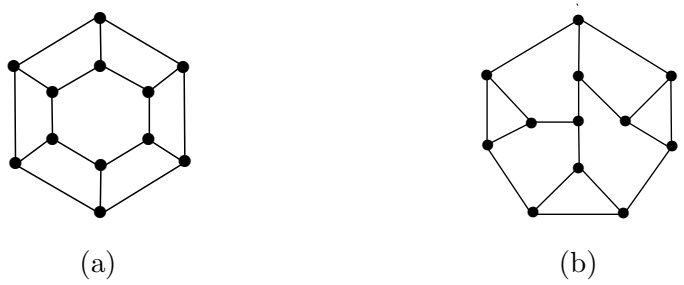
¯平均邻接-直径度 的 $G$，记作 $d_{AD}(G)$，定义为

$$\bar{d}_{AD}(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \hat{\hat{d}}_G(v).$$

观察可知， $G$ 中一个顶点的 AD 度与 $\mathcal{G}_G$中对应顶点的加权度相同。因此， $G$的最大和最小 AD 度分别与 $\mathcal{G}_G$ 的最大和最小加权度相同。于是， $G$ 是 AD 正则图，当且仅当 $\mathcal{G}_G$ 是加权正则图。此外， $G$ 的平均邻接-直径度等于 $\mathcal{G}_G$的平均加权度。

**例 4.2**。 考虑圈图 $C_6$。 $C_6$ 中的每个顶点的度为 2，直径度为 1，且 $C_6$ 的直径为 3。因此， $C_6$ 中每个顶点的 AD 度均为 5。于是，$C_6$ 是 5-AD 正则的。

**注 4.1**。 每个距离正则图都是 AD 正则的。然而，并非每个 AD 正则图都是距离正则图。例如，图 4a 所示的六角棱柱图是 AD 正则的，但不是距离正则的。此外，并非每个正则图都是 AD 正则的。例如，图 4b 所示的 Frucht 图是正则的，但不是 AD 正则的。此外，我们尚未讨论每个 AD 正则图是否也必定是正则图，也未给出 AD 正则不蕴含正则的例子。



(a) (b)

图 4：（a）六角棱柱图，（b）Frucht 图。

注意， $G$ 中每个顶点的 AD 度都等于 $\mathcal{G}_G$中对应顶点的加权度。由此，根据 [5, 命题 1.1.2] 和 [5, 定理 3.2.1], ，我们得到以下两个结果。

**命题 4.1**。 图 $G$ 是 $r$-*AD* 正则，当且仅当全一向量是 $G$ 的特征向量，对应特征值为 $r$。

**定理 4.5**。 设 $G$ 是一个有 $n$ 个顶点、直径为 $d$的连通图。设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$是 $AD$（$G$）的特征值。则

$$\hat{\hat{\delta}} \leq \bar{d}_{AD}(G) \leq \lambda_1 \leq \hat{\hat{\Delta}}.$$

当且仅当 $G$是 $AD$ 正则时，等号成立。

注意， $G$ 的平均邻接-直径度等于 $\mathcal{G}_G$的平均加权度。由于 $AD(G) = A(\mathcal{G}_G)$，根据 [5, 定理 3.5.7] ，可得到以下结果。

**定理 4.6**。 设 $G$ 是一个 $AD$ 正则图，且 （$r =$）$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 是 $AD$（$G$）的特征值。设 $H$ 是 $G$的一个导出子图，具有 $n_1$ 个顶点，平均邻接-¯直径度为 $d_{AD}$（$H$）。则

$$\frac{n_1(r-\lambda_n)}{n} + \lambda_n \leq \bar{d}_{AD}(H). \tag{4.3}$$

显然，当且仅当 $\mathcal{G}_G$ 是正则图时， $G$ 是 AD 正则。由于 $AD(G) = A(\mathcal{G}_G)$，根据 [5, 定理 3.10.2], ，可推导出以下结果。

**定理 4.7**。 若 $G$ 是一个 $AD$ 正则图，且 （$r =$）$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 是 $AD$（$G$）的特征值。则

$$\alpha_{AD}(G) \leq n\frac{-\lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}.$$

由于 $AD(G) = A(\mathcal{G}_G)$，应用 [5, 定理 3.10.3] , ，我们得到以下结果。

**定理 4.8**。 设 $G$ 为连通图。设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 为$AD$（$G$）的特征值。设 $t^-$、 $t^0$、 $t^+$ 分别表示小于、等于或大于$-1$ 的特征值个数。设 $m =$最小值$\{t^0+t^-+1, t^0+t^+, 1+\lambda_1\}$。则 $\omega$（$G$） $\leq m$。若 $m = t^0+t^-+1$且大于 $-1$ 的特征值超过 $t^0 + t^-$，则 $\omega$（$G$） $\leq m - 1$。

# 5 图乘积与 AD 谱

两个顶点不相交图 $G$ 和 $H$的联图记为 $G \vee H$，它是通过在并 $G \cup H$ 的每个 $G$ 顶点与每个$H$顶点之间添加所有可能的边得到的图。由于 $G \vee H$ 的直径为 2，因此 $G \vee H$ 的 AD 谱与 $G \vee H$的距离谱一致；当 $G$ 和 $H$ 为正则图时， [12, 定理 2] 描述了该距离谱。

两个图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 的字典序积，记作$G_1[G_2]$，是一个顶点集为 $V_1 \times V_2$ 的图。若满足 $u_iu_k \in E_1$ ，或满足（$u_i = u_k$ 且 $v_jv_\ell \in E_2$） ，则顶点 $(u_i, v_j)$ 和 $(u_k, v_\ell)$ 在 $G_1[G_2]$ 中相邻。

We 现在计算两个图的字典序积的 AD-谱 s.

**定理 5.1.** 设 $G$ 是一个有 $n$ 个顶点的连通图， $H$ 是一个有 $m$ 个顶点的 $r$-正则图。设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是 $G$ 的 ***AD*-谱**，$(r =)\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ 是 $A(H)$的谱。

***(i)*** 如果 $G[H]$ 的直径小于2，则 $G[H]$ 的 ***AD*-谱包含特征值**$m\mu_i+2m-r-2$，其重数为 $1$；还包含 $-(\lambda_j+2)$，其重数为 $n$，其中 $i = 1$、$2$、.....、 $n$； $j = 2$、$3$、.....、 $m-1$。

***(ii)*** 如果 $G[H]$的直径大于2，则 $G[H]$的 ***AD*-谱包含特征值** $m\mu_i + r$，其重数为$1$；还包含 $\lambda_j$，其重数为 $n$，其中 $i = 1$、$2$、.....、 $n$； $j = 2$、$3$、.....、 $m-1$。

证明。 (i) 由于 $G[H]$ 的直径为 2，我们有 $AD(G[H]) = D(G[H])$。 $D(G[H])$的距离谱由 [7, 定理 3.3],给出，因此结论成立。

(ii) 假设 $G[H]$ 的直径大于 2。令 $AD(G) = [d_{ij}]$。对 $G[H]$的顶点进行适当标记后，$G[H]$ 的 AD矩阵可表示如下:

$$
\begin{aligned}
AD(G[H]) &= \begin{bmatrix}
A(H) & d_{12}J_m & d_{13}J_m & \ldots & d_{1n}J_m \\
d_{21}J_m & A(H) & d_{23}J_m & \ldots & d_{2n}J_m \\
d_{31}J_m & d_{32}J_m & A(H) & \ldots & d_{3n}J_m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
d_{(n-1)1}J_m & d_{(n-1)2}J_m & d_{(n-1)3}J_m & \ldots & d_{(n-1)n}J_m \\
d_{n1}J_m & d_{n2}J_m & d_{n3}J_m & \ldots & A(H)
\end{bmatrix} \\
&= (AD(G) \otimes J_m) + (I_n \otimes A(H)).
\end{aligned}
$$

由于 $H$ 是 $r$-正则的，全一向量 $\mathbf{1}_{m\times 1}$ 是 $A(H)$的一个特征向量，对应于特征值 $r$。 $A(H)$的其余特征值 $\lambda_j$ 所对应的特征向量 $X_j$与$\mathbf{1}$正交。令 $Y_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$表示 $I_n$ 中与特征值 $1$ 相关的 $n$ 个线性无关特征向量。那么,

$$
\begin{aligned}
AD(G[H])(Y_k \otimes X_j) &= \left((AD(G) \otimes J_m) + (I_n \otimes A(H))\right)(Y_k \otimes X_j) \\
&= (AD(G)Y_k) \otimes (J_m X_j) + (I_n Y_k) \otimes (A(H)X_j) \\
&= 0 + (Y_k \otimes \lambda_j X_j) \\
&= \lambda_j (Y_k \otimes X_j).
\end{aligned}
$$

因此，对于每个 $j = 2$，$3$、.....、 $m$，向量 $Y_k \otimes X_j$（对于 $k = 1$，$2$、.....、 $n$）都是 $AD(G[H])$ 对应于特征值 $\lambda_j$ 的特征向量。设 $Z_i$ 是对应于

$AD(G)$ 的特征值 $\mu_i$ 的特征向量，其中 $i = 1$，2 、.....、 $n$。则

$$\begin{aligned} AD(G[H])(Z_i \otimes \mathbf{1}_m) &= ((AD(G) \otimes J_m) + (I_n \otimes A(H)))\,(Z_i \otimes \mathbf{1}_m) \\ &= (AD(G)Z_i) \otimes (J_m\mathbf{1}_m) + (I_nZ_i) \otimes (A(H)\mathbf{1}_m) \\ &= (\mu_i Z_i \otimes m\mathbf{1}_m) + (Z_i \otimes r\mathbf{1}_m) \\ &= (m\mu_i + r)(Z_i \otimes \mathbf{1}_m). \end{aligned}$$

因此， $m\mu_i + r$ 是 $AD(G[H])$的一个特征值，其特征向量为 $Z_i \otimes \mathbf{1}_m$。此外，形如 $Z_i \otimes \mathbf{1}_m$ 和 $Y_k \otimes X_j$的 $nm$ 向量线性无关。由于对应于不同特征值的特征向量线性无关，且 $AD($ $G[H])$有一个完全由特征向量组成的基，故定理得证。

□

设 $G_1 = (V_1,\ E_1)$和 $G_2 = (V_2,\ E_2)$是两个图，其顶点集分别为 $V_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$和 $V_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$。 $G_1$ 和 $G_2$的笛卡尔积记作$G_1 \square G_2$，它是一个顶点集为 $V_1 \times V_2$的图。若 $u_i = u_k$ 且 $v_jv_\ell \in E_2$，或 $u_iu_k \in E_1$ 且 $v_j = v_\ell$，则两个顶点$(u_i,\ v_j)$和$(u_k,\ v_\ell)$相邻。

Nex接下来，我们确定两个图的笛卡尔积的 AD-谱 .

**定理 5.2.** 设 $G$和 $H$ 是两个距离正则图，分别有 $n$ 和 $m$ 个顶点，并设 $G$ 和 $H$ 的直径分别记为 $d_G$ 和 $d_H$ 。设$A(G)$ 和 $A(H)$ 的谱分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 和 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$。设 $A_{d_G}(G)$ 和 $A_{d_H}(H)$ 的谱分别为 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ 和 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$，其中 $\lambda_i$ 和 $\gamma_i$（分别为 $\mu_j$ 和$\delta_j$）是 $A(G)$ 和 $A_{d_G}(G)$（分别为 $A(H)$ 和 $A_{d_H}(H)$）的余特征值，其中 $i = 1, 2, \ldots, n$（分别为 $j = 1, 2, \ldots, m$）。那么 $G \square H$ 的 AD-谱为

$$\lambda_i + \mu_j + (d_G + d_H)(\gamma_l\delta_k),$$

对于 $i, l = 1, 2, \ldots, n$ 和 $j, k = 1, 2, \ldots, m$。

证明。设 $V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ 和 $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$。设 $u = (u_1, v_1)$、 $v = (u_2, v_2)$、 $\in V(G)$ 和 $\times V(H)$。那么， $AD(G \square H)$ 的第 $(u, v)$ 个元素为

$$AD(G\square H)_{u,v} = \begin{cases} 1, & \text{if either } d_G(u_1,u_2) = 1 \text{ and } d_H(v_1,v_2) = 0 \\ & \quad \text{or } d_G(u_1,u_2) = 0, \text{ and } d_H(v_1,v_2) = 1; \\ d_G + d_H, & \text{if } d_G(u_1,u_2) = d_G \text{ and } d_H(v_1,v_2) = d_H; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

通过对 $G \square H$ 的顶点进行适当排列，我们得到

$$AD(G\square H) = (A(G) \otimes I_m) + (I_n \otimes A(H)) + (d_G + d_H)\,(A_{d_G}(G) \otimes A_{d_H}(H)). \tag{5.1}$$

由于 $G$ 和 $H$ 是距离正则的， $A_{d_G}(G)$ 和 $A_{d_H}(H)$ 可分别写作 $A_{d_G}(G) = p_{d_G}(A(G))$ 和 $A_{d_H}(H) = q_{d_H}(A(H))$，其中 $p_{d_G}(x)$ 和 $q_{d_H}(x)$ 分别是次数为 $d_G$ 和 $d_H$ 的多项式。因此，(5.1) 变为

$$AD(G\square H) = A(G\square H) + (d_G + d_H)\left(p_{d_G}(A(G)) \otimes q_{d_H}(A(H))\right).$$

设 $X_i$ 和 $Y_j$ 分别是对应于 $A(G)$的特征值 $\lambda_i$ 和$A(H)$的特征值 $\mu_j$ 的特征向量。则

$$\begin{aligned} AD(G\square H)\left(X_i \otimes Y_j\right) &= \Big(A(G\square H) + (d_G + d_H)\left(p_{d_G}(A(G)) \otimes q_{d_H}(A(H))\right)\Big)(X_i \otimes Y_j) \\ &= A(G\square H)(X_i \otimes Y_j) + (d_G + d_H)\Big(p_{d_G}(A(G)) \otimes q_{d_H}(A(H))\Big)(X_i \otimes Y_j) \\ &= (\lambda_i + \mu_j)(X_i \otimes Y_j) + (d_G + d_H)\left(p_{d_G}(\lambda_i) q_{d_H}(\mu_j)\right)(X_i \otimes Y_j) \\ &= (\lambda_i + \mu_j + (d_G + d_H)(\gamma_i \delta_j))(X_i \otimes Y_j). \end{aligned}$$

因此， $X_i \otimes Y_j$ 是 $AD(G\square H)$对应于特征值 $\lambda_i + \mu_j$ +$(d_G + d_H)(\gamma_i \delta_j)$的特征向量，得证。

□

# 致谢

第一作者获得甘地格拉姆农村学院 GRI 研究员计划的资助。

# 参考文献

[1] M. Aouchiche，P. Hansen，《图的距离谱：综述》，*Linear Algebra Appl.*,458 (2014)，301–386。

[2] M. Aouchiche, P. Hansen，《图距离矩阵的两种拉普拉斯矩阵》，线性代数及其应用，439（2013），21–33。

[3] R. B. Bapat，《图与矩阵》，第 27 卷，施普林格，纽约，2010。

[4] J.A. Bondy, U. S. R. Murty，《图论及其应用》，麦克米伦，伦敦，1976。

[5] D. M.Cvetkovi´c, P. Rowlinson, S. Simi´c，《图谱理论导论》，剑桥大学出版社，剑桥，2010。

[6] L. DeVille，图的广义距离谱及其应用，*Linear Mul-tilinear Algebra*，70（2022），2425–2458。

[7] G. Indulal，图的复合的距离谱，*Ars Math. Contemp.*，2（2009），93–100[8] L. Hogben，C. Reinhart，图和有向图的距离矩阵变体的谱：综述，*La Matematica*，1（2022），186–224。[9] J. C. Mason，D. C. Handscomb，切比雪夫多项式，Charpman and Hall/CRC，2002。[10]R. Rajkumar，S. P. Leka Amruthavarshini，图的邻接直径独立性，2025（已投稿）[11] R. Rajkumar，S. P. Leka Amruthavarshini，图的邻接直径染色，2025（已投稿）[12] D. Stevanovi´c，G. Indulal，正则图复合的距离谱与能量，*Appl. Math. Lett.*，22（2009），1136–1140。[13] D. Stevanovic，A. Ilic，图的距离矩阵的谱性质，载于：分子图中的距离——理论，克拉古耶瓦茨大学，克拉古耶瓦茨，2012，第139–176页。[14] N. G. Voll，卡西尼恒等式及其相关恒等式，*Fibonacci Q.*，48（2010），197–201。