arXiv:2601.01197v1 [math.FA] 3 Jan 2026

Fock 空间上的绝对可和汉克尔算子与 Berger-Coburn现象

胡张健与吕晓芬

Abstract. 本文针对 $1 \le p, r < \infty$ 刻画了使诱导汉克尔算子 H_f 成为从 Fock空间 F^p_α 到 L^p_α的 r-可和算子的符号 f。主要结果表明，H_f 的 r-可和范数等价于 f的 IDA$^{\kappa,p}$-范数，其中κ 是由 p 和 r确定的正数，IDA空间的定义见文献 [13]。作为应用，我们讨论 Fock 空间上 r-可和汉克尔算子的 Berger-Coburn现象。

1. Introduction

函数空间及其相关算子的研究长期以来一直是复分析与算子理论的核心主题。其中，Fock 空间（又称 Segal-Bargmann空间）尤为重要，因为它与量子力学、时频分析和复几何有着深刻的联系。

对于 $0 < p < \infty$、 $\alpha > 0$，空间 L^p_α 由所有满足以下条件的可测函数 f 组成

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^p \, e^{-\frac{\alpha p}{2}|z|^2} dv(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

其中， dv 是 $\mathbb{C}^n$上的Lebesgue体积测度。经典福克空间F^p_α 是L^p_α的子集，定义为

$$F^p_\alpha = L^p_\alpha \cap H(\mathbb{C}^n),$$

2010 数学学科分类。主要分类47B35；次要分类30H25。关键词。绝对可和算子、汉克尔算子、Fock空间。胡张健受国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12171150）；吕晓芬受国家自然科学基金委员会（项目编号：12171150、12431005）和浙江省自然科学基金委员会（项目编号：LMS26A010001）资助。

其中， $H(\mathbb{C}^n)$是 $\mathbb{C}^n$上所有全纯函数的集合。而 F^∞_α是满足以下条件的 $f \in H(\mathbb{C}^n)$的集合

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} |f(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} < \infty.$$

显然， L^p_α 和 F^p_α 在范数$\|\cdot\|_{p,\alpha}$ 下都是巴拿赫空间，其中 $p \geq 1$。更多信息请参见 [23] 。

一种自然的推广是用某些一致凸权 φ替代高斯权。更具体地，令

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$$

为一个实值函数，并且存在正常数 m 和 M，使得海森矩阵$_{\mathbb{R}}\,\varphi$（即实海森矩阵）满足

$$m\mathrm{E} \leq \mathrm{Hess}_{\mathbb{R}}\,\varphi(x) = \left(\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)^{2n}_{j,k=1} \leq M\mathrm{E}, \tag{1.1}$$

其中，E是 $2n\times 2n$单位矩阵。这里，对于对称矩阵 A和 B，记号 $A \leq B$ 表示 $B - A$ 是半正定的。显然，若 $\varphi(z) = \frac{\alpha}{2}|z|^2$，则 φ 满足（1.1）。这意味着 [11, 12, 13] 中的理论适用于当前情形。正如 [13], 中的论证所示，一个常见的例子是 $\varphi(z) = |z|^2 - \frac{1}{2}\log(1 + |z|^2)$，它给出了文献 [5]研究的所谓 Fock-Sobolev 空间。

记 $K(\cdot,\cdot)$ 为 F^2_α 的伯格曼核，并记 k_z为 F^2_α 的归一化再生核。众所周知，

$$K(w,z) = e^{\alpha\langle w,z\rangle} \text{ and } k_z(w) = e^{\alpha\langle w,z\rangle}/e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}, \qquad z, w \in \mathbb{C}^n.$$

注意，集合

$$\mathrm{Span}\{k_z : z \in \mathbb{C}^n\}$$

在 $p \geq 1$ 中关于 F^p_α 稠密。

本文关注汉克尔算子。设 $\mathcal{S}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上满足以下条件的所有可测函数 f 的族: 对每个 $z \in \mathbb{C}^n$均有 $fk_z \in \cup_{p\geq 1}L^p_\alpha$ 。给定 $f \in \mathcal{S}$，汉克尔算子 H_f 在 F^p_α 上稠密定义为

$$H_f g = fg - P(fg),$$

其中 P 为正交投影，定义为

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{\alpha\langle z,w\rangle} f(w) e^{-\alpha|w|^2} dv(w).$$

汉克尔算子是全纯函数空间理论中线性算子的一个重要模型。在过去几十年中，这类算子在 Fock 空间上的各种背景下得到了研究。例如，在 Zhu 的著作中， [23], 汉克尔算子 H_f 及其在经典福克空间 F^2_α 上带有某类符号 f的情形已得到深入研究。对于权函数 φ ，

(1.1)，Hu和Virtanen [13]最近获得了关于 f 的刻画，其中所诱导的汉克尔算子 H_f 从 F^p_φ 到L^q_φ 是有界的（或紧的），当 $0 < p$时，$q < \infty$；他们还讨论了 F^2_φ 上的汉克尔算子的 Schatten类，并在 [11, 12]中得到了 Berger-Coburn现象。然而，绝对可和汉克尔算子的理论仍未得到发展。

现在我们引入 r-求和算子的概念。设X 和 Y是巴拿赫空间，且 $1 \le r < \infty$。若算子 $T\colon X \to Y$ 将 X 中的弱 r- 可和序列映射为 Y中的绝对 r-可和序列，即存在常数$C \ge 0$，使得对任意有限序列 $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$，都有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\|_Y^r\right)^{1/r} \le C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^r\right)^{1/r}, \qquad (1.2)$$

其中， X^* 表示 X的对偶空间，而 $B_{X^*} = \{x^* \in X^* \colon \|x^*\| \le 1\}$是 X^* 的闭单位球（赋予弱-$*$ 拓扑）。

我们将用 $\Pi_r(X, Y)$表示从X 到 Y的所有 r-求和算子组成的集合。 T的 r-求和范数记为 $\pi_r(T\colon X \to Y)$，是使不等式 (1.2) 始终成立的最佳常数 C。以下若不致混淆，我们将 $\pi_r(T\colon X \to Y)$简写为 $\pi_r(T)$。

r-可和算子的理论源于 Grothendieck 在 20 世纪 50 年代的开创性工作。他的诸多深刻贡献之一，是奠基性地证明了，任何从 ℓ^1 到 ℓ^2 的有界线性算子都是绝对可和的。20 世纪 60 年代末，人们对这一类算子的兴趣显著回升，其结构性质开始在泛函分析框架内得到系统研究。Pietsch 取得了一项重大进展，他提出了关键的因子分解定理，此后该定理成为分析这类算子的基石。与此同时，Lindenstrauss 和 Pe-lczy´nski [17]阐明了可和算子与巴拿赫空间几何结构之间的深刻联系。此后的数十年间，这一理论不断丰富，若干有影响力的专著便是明证，其中包括 [7, 15, 19, 20]。

在近期的一项进展中，Lef`evre 和 Rodr´ıguez-Piazza [16] 在 $p > 1$的情形下，并对所有 $r \ge 1$，完整刻画了 Hardy 空间上 $r$-可和的 Carleson 嵌入 $H^p$ 。He、Jreis、Lef`evre 和 Lou 将研究转向[9]中的 Bergman空间情形。Chen、He 和 Wang 研究了加权Bergman空间上的绝对可和 Carleson 嵌入。Hu 和 Wang [14] 讨论了

Fock空间上的r-可和 Toeplitz算子。Fan 等人研究了不同指数 p 和 q 下作用于 p-加权 Bergman空间与q-加权勒贝格空间之间的大汉克尔算子和小汉克尔算子。值得注意的是，在 Bergman空间情形下，只要 $s > t > 0$ 和 $\alpha > -1$，连续嵌入$A^s_\alpha \hookrightarrow A^t_\alpha$ 就成立。相比之下，在 Fock 空间情形下，不存在这样的连续嵌入。

对于 $z \in \mathbb{C}^n$ 和 $r > 0$, $B(z,r) = \{w \in \mathbb{C}^n : |w - z| < r\}$. 假设 $1 \le p < \infty$，并且假设 $f \in \mathcal{S}$。对于 $r > 0$，定义函数 $G_{p,r}(f)$ 为

$$G_{p,r}(f)(z) = \inf_{h \in H(B(z,r))} \left(\frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |f(w) - h(w)|^p dv(w) \right)^{1/p}.$$

其中， $H(B(z,r))$ 表示 $B(z,r)$ 中全纯函数的集合。

如 [13], 中所示，令空间 $\mathrm{IDA}^{s,p}_r$为所有满足以下条件的 $f \in L^p_{\mathrm{loc}}$ 构成的族

$$\|f\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}_r} := \left(\int_{\mathbb{C}^n} G_{p,r} f(z)^s dv(z) \right)^{1/s} < \infty.$$

根据 [13, 推论 3.10], ，对于 $1 \le p < \infty$和 $0 < s \le \infty$，我们知道 $\mathrm{IDA}^{s,p}_r$不依赖于 r，也就是说， r的不同取值给出等价的半范数$\|G_{p,r} f\|_{L^s}$。为简便起见，我们记 $G_p(f) = G_{p,1}(f)$，并记 $\mathrm{IDA}^{s,p} = \mathrm{IDA}^{s,p}_1$。

本文将完整刻画 $f \in \mathcal{S}$ ，使得对于所有 $1 \le p, r < \infty$，汉克尔算子 H_f 从 Fock 空间 F^p_α 到 L^p_α是r-可和的。为此，记p' 为 p的共轭指数，并令 $\kappa = \kappa(p,r)$ 为

$$\kappa = \begin{cases} 2, & \text{if } 1 \le p \le 2 \text{ and } r \ge 1; \\ p', & \text{if } p \ge 2 \text{ and } 1 \le r \le p'; \\ r, & \text{if } p \ge 2 \text{ and } p' \le r \le p; \\ p, & \text{if } p \ge 2 \text{ and } p \le r < \infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

符号 $A \simeq B$ 表示 $A \lesssim B \lesssim A$，而 $A \lesssim B$ 表示存在一个常数 $C > 0$，它与相关变量无关，使得 $A \le CB$。下面给出主要结果。

定理1.1. 对于 $1 \le p$、 $r < \infty$ 和 $f \in \mathcal{S}$，则 $H_f \in \Pi_r(F^p_\alpha, L^p_\alpha)$ 当且仅当 $f \in \mathrm{IDA}^{\kappa,p}$。此外，我们有

$$\pi_r(H_f : F^p_\alpha \to L^p_\alpha) \simeq \|f\|_{\mathrm{IDA}^{\kappa,p}}.$$

本文结构安排如下。第 2 节汇集后续章节将用到的一些预备知识。第 3 节

将用于证明关于 Fock 空间上 r-求和汉克尔算子的主要结果。我们将根据 p 和 r 的取值，分几种不同情形展开证明。第 4 节将研究 Fock 空间上绝对求和汉克尔算子的 Berger-Coburn现象。

2. Some preliminaries

本节介绍主定理证明中所用的一些基本预备知识。首先，我们给出一些记号。

设 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}^n$中的一个序列。对于 $r>0$，若球 $\{B(a_k,r)\}_{k=1}^{\infty}$ 覆盖 $\mathbb{C}^n$，且对于某个 $b>0$，$\{B(a_k,br)\}_{k=1}^{\infty}$ 两两不相交，则称 $\{a_k\}$ 是一个 r-格。按照标准处理，对于 $c\geq 1$，存在某个整数 N，使得每个 $z\in\mathbb{C}^n$ 至多属于 $\{B(a_k,cr)\}$中的N 个球。等价地，

$$1\leq\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{B(a_k,cr)}(z)\leq N. \tag{2.1}$$

现在我们来介绍一些向量值序列空间，相关内容可见 [7]。设 $1\leq p<\infty$ 和 X 是巴拿赫空间。称 X 中的向量序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为强 p-可和的（记作 $\{x_k\}\in\ell_p^{\text{strong}}(X)$），如果相应的标量序列 $\{\|x_k\|_X\}_{k=1}^{\infty}$属于 l^p，其自然范数定义为

$$\|\{x_k\}\|_p^{\text{strong}}:=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_X^p\right)^{1/p}.$$

强 p-可求和性指的是 X上的强拓扑（或范数拓扑）。那么，弱拓扑的自然类比是什么？若向量序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 属于 X，且对每个$x^*\in X^*$，标量序列 $\{\langle x^*,x_k\rangle\}\in l^p$ p-可求和，则称其为弱 p-可求和（记作 $\{x_k\}\in\ell_p^{\text{weak}}(X)$）。当然，$\ell_p^{\text{weak}}(X)$是一个巴拿赫空间，其范数为

$$\|\{x_k\}\|_p^{\text{weak}}:=\sup\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x^*,x_k\rangle|^p\right)^{1/p}:x^*\in B_{X^*}\right\}.$$

对于巴拿赫空间 X 和 Y，令 $\mathcal{B}(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的所有有界线性算子的集合。对于 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$，这一对应关系

$$\hat{T}:\{x_k\}_k\mapsto\{Tx_k\}_k$$

总会诱导出一个从 $\ell_p^{\text{weak}}(X)$ 到 $\ell_p^{\text{weak}}(Y)$ 的有界线性算子，以及一个从 $\ell_p^{\text{strong}}(X)$ 到 $\ell_p^{\text{strong}}(Y)$ 的有界线性算子。此外,

$$\|T\|_{X\to Y} = \|\hat{T}\|_{\ell_p^{\text{weak}}(X)\to\ell_p^{\text{weak}}(Y)} = \|\hat{T}\|_{\ell_p^{\text{strong}}(X)\to\ell_p^{\text{strong}}(Y)},$$

可在 [7, 第 34]页找到。

自然会问，$\hat{}T$是否从 $\ell_p^{\text{weak}}(X)$ 到 $\ell_p^{\text{strong}}(Y)$ 有界。由 [7, 命题 2.1], 可知

$$T \in \Pi_p(X,Y) \text{ if and only if } \hat{T} \in \mathcal{B}(\ell_p^{\text{weak}}(X) \to \ell_p^{\text{strong}}(Y))$$

with

$$\pi_p(T : X \to Y) \simeq \|\hat{T}\|_{\ell_p^{\text{weak}}(X)\to\ell_p^{\text{strong}}(Y)}.$$

更一般地，对于 $1 \le p,\ q < \infty$，算子 $T\colon X \to Y$ 称为 $(q,\ p)$-可和的，如果诱导算子 $\hat{}T$ 从 $\ell_p^{\text{weak}}(X)$ 到$\ell_q^{\text{strong}}(Y)$ 有界。此类算子构成一个向量空间，记为

$$\Pi_{q,p}(X,Y),$$

在范数下，这是一个巴拿赫空间

$$\pi_{q,p}(T : X \to Y) := \|\hat{T}\|_{\ell_p^{\text{weak}}(X)\to\ell_q^{\text{strong}}(Y)}.$$

一个标准刻画表明，有界线性算子 T属于 $\Pi_{q,\ p}(X,\ Y)$ 当且仅当存在常数 $K \ge 0$ 使得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\|_Y^q\right)^{1/q} \le K \cdot \sup\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x^*, x_k\rangle|^p\right)^{1/p} : x^* \in B_{X^*}\right\}$$

对每个有限集 $\{x_1,\dots,x_n\} \subset X$均成立。此外，$\pi_{q,\ p}(u)$ 等于满足此条件的最小常数 K。显然,

$$\Pi_{p,p}(X,Y) = \Pi_p(X,Y).$$

由 [7], 我们还知道

(1) 对于 $1 \le p < \infty$，勒贝格空间 $L^p(\Omega\ \mu)$ 的余型为 $\max\{p,2\}$。见第219页;

(2) 对于 $1 \le p < q < \infty$，$\Pi_p(X,\ Y) \subset \Pi_q(X,\ Y)$，其中 $\pi_q(T) \le \pi_p(T)$ 对于 $T \in \Pi_p(X,\ Y)$。见第39页;

(3) 对于巴拿赫空间 X 和 Y，如果 X 和 Y 的余型均为 2,

$$\Pi_r(X,Y) = \Pi_1(X,Y)$$

具有等价性 $\pi_r(T) \simeq \pi_1(T)$，其中 $1 \le r < \infty$。参见推论 11.16;

(4) 对于巴拿赫空间 X 和 Y，如果 Y 具有余型 $q \in [2, \infty)$，那么

$$\Pi_r(X, Y) \subset \Pi_{q,2}(X, Y)$$

对所有 $1 \leq r < \infty$ 均成立。特别地，若 Y 的余型为 2，则对于任意巴拿赫空间 X 及所有 $2 < r < \infty$，$\Pi_r(X, Y) = \Pi_2(X, Y)$。参见定理 11.13。

下面给出一些供后文使用的引理。引理 2.1 和引理 2.3 可见于 [7]。引理 2.2 出自 [10, 引理 2.4]。这些结果共同确立了证明主定理所需的框架，该定理将 H_f 的 r-求和范数与 IDA$^{s,\ p}$-范数联系起来。

引理 2.1 (Khintchine 不等式)。设 $\{\gamma_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ 是定义在 $[0, 1]$, 上的一列拉德马赫函数，且设 $0 < p < \infty$。那么，对于任意有限个复数 $\{c_j\}_{j=1}^{n}$，有

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \gamma_j(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \simeq \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \right)^{1/2}.$$

引理 2.2. 设 $\{c_j\}_{j=1}^{\infty} \in l^p$ 满足 $0 < p < \infty$，且 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}^n$是一个 r-格。定义

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j k_{z_j}(z), \qquad z \in \mathbb{C}^n.$$

则 $g \in F_\alpha^p$ 满足

$$\|g\|_{p,\alpha} \lesssim \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^p \right)^{1/p}.$$

引理 2.3 (Pietsch 支配定理)。假设 $1 \leq r < \infty$，并设 X、Y 均为巴拿赫空间。算子 $T: \ X \to Y$ 是 r-可和的，当且仅当存在一个正则博雷尔概率测度σ 定义在闭单位球 B_{X^*} 上，使得对所有 $x \in X$，均有

$$\|T(x)\|_Y \leq \pi_r(T) \left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^r d\sigma(x^*) \right)^{1/r}.$$

假设 $1 \leq p < \infty$，并设 μ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的正博雷尔测度。空间 $L_\alpha^p($ $d\mu)$ 是所有 μ-可测函数 f 在 $\mathbb{C}^n$ 上组成的族，满足

$$\|f\|_{L_\alpha^p(d\mu)} = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^p e^{-\frac{\alpha p}{2}|z|^2} d\mu(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

在 [10], 中，我们讨论了关于 μ 的一些刻画：嵌入算子 Id 从 F^p_α 到 $L^p_\alpha(d\mu)$ 有界或紧，当且仅当其平均函数 $\widehat{\mu}$ 或 t-Berezin 变换 $\widetilde{\mu}_t$ $(t>0)$ 满足相应条件，其中

$$\widehat{\mu}(z)=\frac{\mu(B(z,1))}{|B(z,1)|}\quad\text{and}\quad\widetilde{\mu}_t(z)=\int_{\mathbb{C}^n}|k_z(w)|^te^{-\frac{\alpha t}{2}|w|^2}d\mu(w)$$

对于 $z\in\mathbb{C}^n$。现在我们可以陈述从 F^p_α 到 $L^p_\alpha(d\mu)$的绝对可和嵌入算子的性质。

命题2.4 (绝对可和Carleson嵌入)。 假设 μ 是 $\mathbb{C}^n$上的一个正博雷尔测度。令 $1\le p<\infty$，并令 κ如(1.3)所示。那么嵌入算子$\mathrm{Id}\in\Pi_r\left(F^p_\alpha, L^p_\alpha(d\mu)\right)$ 当且仅当对任意 $t>0$)，有 $\widehat{\mu}\in L^{\kappa/p}(dv)$ (或 $\widetilde{\mu}_t\in L^{\kappa/p}(dv)$)。 此外，

$$\pi_r\left(\mathrm{Id}:F^p_\alpha\to L^p_\alpha(d\mu)\right)\simeq\|\widehat{\mu}\|^{1/p}_{L^{\kappa/p}}\simeq\|\widetilde{\mu}_t\|^{1/p}_{L^{\kappa/p}}.$$

证明。 $L^{\kappa/p}$-范数在 $\widehat{\mu}$ 与 $\widetilde{\mu}_t$ 之间的等价性由 [10,定理2.8]得出。类似于 [4] 或 [9], 中的证明，我们可以证明 $1<p<\infty$情形下的结论。现在我们处理 $p=1$的情形。首先，假设 $\widehat{\mu}\in L^2(\mathbb{C}^n)$。考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} F^1_\alpha & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & L^1_\alpha(d\mu) \\ {\scriptstyle\mathrm{Id}}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle\mathrm{Id}} & \\ F^2_\alpha & & \end{array}$$

由 [10, 定理 2.8], 可知， μ是一个(2,1) Fock-Carleson测度，因而

$$\|\,\mathrm{Id}\,\|_{F^2_\alpha\to L^1_\alpha(d\mu)}\lesssim\|\widehat{\mu}\|_{L^2}\,.$$

由于

$$\pi_1(\mathrm{Id}:F^1_\alpha\to F^2_\alpha)\lesssim\|\,\mathrm{Id}\,\|_{F^1_\alpha\to F^2_\alpha}<\infty,$$

我们得到

$$\pi_1(\mathrm{Id}:F^1_\alpha\to L^1_\alpha(d\mu))\lesssim\pi_1(\mathrm{Id}:F^1_\alpha\to F^2_\alpha)\cdot\|\,\mathrm{Id}\,\|_{F^2_\alpha\to L^1_\alpha(d\mu)}\lesssim\|\widehat{\mu}\|_{L^2}.$$

反过来，假设 π_1(Id : $F^1_\alpha\to L^1_\alpha(d\mu)$) $<\infty$。注意，在配对$F^1_\alpha{}^*=F^\infty_\alpha$下

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{C}^n}f(w)\overline{g(w)}e^{-\alpha|w|^2}dv(w).$$

根据Pietsch支配定理，存在一个概率测度σ定义在$B_{(F^1_\alpha)^*}$上，使得对所有 $g\in F^1_\alpha$，我们得到

$$\|\mathrm{Id}(g)\|_{L^1_\alpha(d\mu)}\le\pi_1\left(\mathrm{Id}:F^1_\alpha\to L^1_\alpha(d\mu)\right)\int_{B_{(F^1_\alpha)^*}}|\langle h,g\rangle|\,d\sigma(h).$$

设 $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 l^2中的任意复数序列。固定正整数m，定义随机函数

$$g_t(w) = \sum_{j=1}^{m} c_j \gamma_j(t) k_{z_j}(w), \quad w \in \mathbb{C}^n, \tag{2.2}$$

其中， $\{\gamma_j(t)\}$ 是拉德马赫函数序列，且 $\{z_j\}$ 是 $\mathbb{C}^n$上的δ-格， $\delta > 0$ 足够小。因此， $g_t \in F_\alpha^1$ 和

$$\|g_t\|_{F_\alpha^1} \lesssim \sum_{j=1}^{m} |c_j|.$$

根据 F_α^∞的再生核性质，我们有

$$\int_{B_{(F_\alpha^1)^*}} |\langle h, g_t\rangle| \, d\sigma(h) = \int_{B_{F_\alpha^\infty}} \left| \sum_{j=1}^{m} c_j \gamma_j(t) h(z_j) e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2} \right| d\sigma(h).$$

利用欣钦不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_{B_{F_\alpha^\infty}} |\langle h, g_t\rangle| \, d\sigma(h) \right) dt &= \int_{B_{F_\alpha^\infty}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{m} c_j \gamma_j(t) h(z_j) e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2} \right| dt \right) d\sigma(h) \\
&\leq \int_{B_{F_\alpha^\infty}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| c_j h(z_j) e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2} \right|^2 \right)^{1/2} d\sigma(h) \\
&\lesssim \int_{B_{F_\alpha^\infty}} \|h\|_{\infty,\alpha} \left(\sum_{j=1}^{m} |c_j|^2 \right)^{1/2} d\sigma(h) \\
&\leq \|\{c_j\}\|_{l^2} .
\end{aligned}$$

另一方面，欣钦不等式和 (2.1) 表明

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \|\mathrm{Id}(g_t)\|_{L^1_\alpha(\mu)}\, dt \\
&\simeq \int_{\mathbb{C}^n} \left(\sum_{j=1}^m \left| c_j k_{z_j}(w) \right|^2 \right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} d\mu(w) \\
&\geq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^\infty \int_{B(z_k,\delta)} \left(\sum_{j=1}^m |c_j|^2 \left| k_{z_j}(w) \right|^2 \right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} d\mu(w) \\
&\geq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m |c_j| \int_{B(z_j,\delta)} \left| e^{\alpha\langle w, z_j\rangle} \right| e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2} e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} d\mu(w) \\
&\geq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m |c_j|\, \mu(B(z_j,\delta)) \cdot \inf_{w\in B(z_j,\delta)} e^{-\frac{\alpha}{2}|w-z_j|^2} \\
&\geq \frac{C}{N} \sum_{j=1}^m |c_j|\, \widehat{\mu}_\delta(z_j).
\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{j=1}^m |c_j|\, \widehat{\mu}_\delta(z_j) \lesssim \pi_1\left(\mathrm{Id} : F^1_\alpha \to L^1_\alpha(d\mu)\right) \|\{c_k\}\|_{l^2}.$$

令 $m \to \infty$，由对偶性可得

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \widehat{\mu}_\delta(z_j)^2 \right)^{1/2} \lesssim \pi_1\left(\mathrm{Id} : F^1_\alpha \to L^1_\alpha(d\mu)\right).$$

再次使用 [10, 定理 2.8]，可得

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} |\widehat{\mu}(w)|^2\, dv(w) \right)^{1/2} \simeq \left(\sum_{j=1}^\infty \widehat{\mu}_\delta(z_j)^2 \right)^{1/2} \lesssim \pi_1\left(\mathrm{Id} : F^1_\alpha \to L^1_\alpha(d\mu)\right).$$

因此，

$$\pi_1\left(\mathrm{Id} : F^1_\alpha \to L^1_\alpha(d\mu)\right) \simeq \|\widehat{\mu}\|_{L^2}.$$

注意到，F^1_α 和 $L^1_\alpha(d\mu)$ 都具有余型 2，因此

$$\pi_r\left(\mathrm{Id} : F^1_\alpha \to L^1_\alpha(d\mu)\right) \simeq \pi_1\left(\mathrm{Id} : F^1_\alpha \to L^1_\alpha(d\mu)\right) \simeq \|\widehat{\mu}\|_{L^2}$$

对于 $1 < r < \infty$。证明至此完成。 □

3. Proof of Theorem 1.1

定理1.1的证明将在本节接下来的三个定理中给出。

定理3.1. 假设 $f \in \mathcal{S}$。令 $1 \leq p < \infty$，并令 κ 如(1.3)所示。若 $f \in \mathrm{IDA}^{\kappa,p}$，则汉克尔算子 $H_f\colon F^p_\alpha \to L^p_\alpha$ 是 r-可和的。此外，我们有

$$\pi_r(H_f : F^p_\alpha \to L^p_\alpha) \lesssim \|f\|_{\mathrm{IDA}^{\kappa,p}}.$$

证明. 首先，假设 $f \in \mathrm{IDA}^{\kappa,p}$，则对所有 $\tau > 0$, $G_{p,\tau}(f) \in L^\infty(dv)$ 且$G_{p,\tau}(f) \in L^\kappa(dv)$。定理3.8]的证明表明，存在 f_1 和 f_2，使得 $f = f_1 + f_2$ 满足

$$\|M_{p,1}\left(\overline{\partial} f_1\right)\|_{L^\kappa} + \|M_{p,1}\left(f_2\right)\|_{L^\kappa} \lesssim \|G_{p,\tau}(f)\|_{L^\kappa} \tag{3.1}$$

对于某个 $\tau > 0$，其中

$$M_{p,1}\left(f\right)(z) = \left(\frac{1}{|B(z,1)|}\int_{B(z,1)} |f|^p dv\right)^{1/p}.$$

根据 Hu 和 Virtanen 在第2062页的结果 [13], ，我们知道 H_f 从 F^p_α到 L^p_α 是有界的，并且对于任意 $g \in F^p_\alpha$,

$$\|H_{f_1}(g)\|_{p,\alpha} \lesssim \left\|g\left|\overline{\partial} f_1\right|\right\|_{p,\alpha} \text{ and } \|H_{f_2}(g)\|_{p,\alpha} \lesssim \|f_2 g\|_{p,\alpha}.$$

由此可得

$$\pi_r(H_{f_1}) \lesssim \pi_r\left(M_{\left|\overline{\partial} f_1\right|}\right) \text{ and } \pi_r\left(H_{f_2}\right) \lesssim \pi_r\left(M_{f_2}\right),$$

其中 M_f表示逐点乘子，即 $M_f g = fg$。令

$$d\mu_1 = \left|\overline{\partial} f_1\right|^p dv \text{ and } d\mu_2 = |f_2|^p dv.$$

由命题2.4可得

$$\pi_r\left(M_{\left|\overline{\partial} f_1\right|}\right) = \pi_r\left(\mathrm{Id} : F^p_\alpha \to L^p_\alpha(d\mu_1)\right) \simeq \|\widehat{\mu}_1\|^{1/p}_{L^{\kappa/p}} \simeq \|M_{p,1}\left(\overline{\partial} f_1\right)\|_{L^\kappa}$$

and

$$\pi_r\left(M_{f_2}\right) = \pi_r\left(\mathrm{Id} : F^p_\alpha \to L^p_\alpha(d\mu_2)\right) \simeq \|\widehat{\mu}_2\|^{1/p}_{L^{\kappa/p}} \simeq \|M_{p,1}\left(f_2\right)\|_{L^\kappa}.$$

(3.1) 得出

$$\pi_r\left(H_f\right) \leq \pi_r\left(H_{f_1}\right) + \pi_r\left(H_{f_2}\right) \lesssim \|G_{p,\tau}\left(f\right)\|_{L^\kappa} \simeq \|f\|_{\mathrm{IDA}^{\kappa,p}}.$$

证明完毕。 □

定理 3.2. 假设 $1 \leq p < 2$，并假设 H_f : $F^p_\alpha \to L^p_\alpha$ 是r-可和的，其中某个 $r \geq 1$。那么 $f \in \mathrm{IDA}^{2,p}$。此外，我们有

$$\|f\|_{\mathrm{IDA}^{2,p}} \lesssim \pi_r(H_f : F^p_\alpha \to L^p_\alpha).$$

证明. 假设 H_f 是 r-可和的。由于当 $1 \le p < 2$ 时， F^p_α 和 L^p_α 都具有余型 2， [7, 推论 11.16] 表明

$$H_f \in \Pi_r(F^p_\alpha, L^p_\alpha) = \Pi_p(F^p_\alpha, L^p_\alpha) = \Pi_1(F^p_\alpha, L^p_\alpha)$$

具有等价性

$$\pi_r(H_f) \simeq \pi_p(H_f) \simeq \pi_1(H_f).$$

设 $\{c_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $l^{\frac{2p}{2-p}}$ 中任意一个复数序列。假设 $\{\gamma_j(t)\}$ 是一列拉德马赫函数，且 $\{z_j\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个 δ-格，其中 $\delta > 0$ 足够小。固定正整数 m，定义随机函数如下式（2.2）。则 $g_t \in F^p_\alpha$ 和

$$\|g_t\|_{p,\alpha} \lesssim \left(\sum_{j=1}^m |c_j|^p \right)^{1/p}.$$

So

$$\int_0^1 \|H_f(g_t)\|^p_{p,\alpha}\, dt \le \|H_f\|^p_{F^p_\alpha \to L^p_\alpha} \|g_t\|^p_{p,\alpha} < \infty.$$

利用 Fubini 定理和 Khintchine 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \|H_f(g_t)\|^p_{p,\alpha}\, dt \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^m c_j \gamma_j(t) H_f(k_{z_j})(w) \right|^p dt \right) e^{-\frac{\alpha p}{2}|w|^2} dv(w) \\
&\simeq \int_{\mathbb{C}^n} \left(\sum_{j=1}^m |c_j|^2 |H_f(k_{z_j})(w)|^2 \right)^{p/2} e^{-\frac{\alpha p}{2}|w|^2} dv(w) \\
&\ge \sum_{j=1}^m |c_j|^p \int_{B(z_j, 2\delta)} |H_f(k_{z_j})(w)|^p e^{-\frac{\alpha p}{2}|w|^2} dv(w).
\end{aligned}$$

众所周知， $\inf_{w \in B(z, 2\delta)} |k_z(w)| e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} > 0$，这表明

$$\frac{P(f k_{z_j})}{k_{z_j}} \in H(B(z_j, 2\delta))$$

对所有 j 均成立。于是得到

$$G_{p,2\delta}(f)(z_j)^p \lesssim \int_{B(z_j, 2\delta)} |H_f(k_{z_j})(w)|^p e^{-\frac{\alpha p}{2}|w|^2} dv(w).$$

因此，

$$\sum_{j=1}^{m}|c_j|^pG_{p,2\delta}(f)(z_j)^p\lesssim\int_0^1\|H_f(g_t)\|_{p,\alpha}^p\,dt<\infty.$$

另一方面，根据关于 r-可和算子的 Pietsch 支配定理，存在一个概率测度 σ 定义在 $(F_\alpha^p)^*=F_\alpha^{p'}$ 的单位球上（记为 $B_{F_\alpha^{p'}}$），使得

$$\begin{aligned}\|H_f(g_t)\|_{p,\alpha}^p&\le\pi_p(H_f)^p\cdot\left(\int_{B_{F_\alpha^{p'}}}|\langle h,g_t\rangle|^p\,d\sigma(h)\right)\\&\simeq\pi_r(H_f)^p\cdot\int_{B_{F_\alpha^{p'}}}\left|\sum_{j=1}^m c_j\gamma_j(t)h(z_j)e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2}\right|^p d\sigma(h).\end{aligned}$$

最后一个等式源于$F_\alpha^{p'}$ 的再生核的性质。因此，

$$\begin{aligned}&\int_0^1\|H_f(g_t)\|_{p,\alpha}^p dt\\&\le\pi_r(H_f)^p\cdot\int_{B_{F_\alpha^{p'}}}d\sigma(h)\int_0^1\left|\sum_{j=1}^m c_j\gamma_j(t)h(z_j)e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2}\right|^p dt\\&\simeq\pi_r(H_f)^p\cdot\int_{B_{F_\alpha^{p'}}}\left(\sum_{j=1}^m|c_j|^2|h(z_j)|^2e^{-\alpha|z_j|^2}\right)^{\frac{p}{2}}d\sigma(h).\end{aligned}$$

注意，$\frac{p'}{2}=\frac{p}{2-p}\ (p-1)\ge1$ 且 $\frac{p}{2-p}$ 是 $\frac{p'}{2}$ 的共轭指数。由 Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^m|c_j|^2|h(z_j)|^2e^{-\alpha|z_j|^2}\right)^{\frac{p}{2}}\\&\le\left[\sum_{j=1}^m\left(|h(z_j)|^2e^{-\alpha|z_j|^2}\right)^{\frac{p'}{2}}\right]^{\frac{2}{p'}\cdot\frac{p}{2}}\left(\sum_{j=1}^m|c_j|^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{\frac{2-p}{p}\cdot\frac{p}{2}}\\&=\left[\sum_{j=1}^m\left|h(z_j)e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2}\right|^{p'}\right]^{\frac{p}{p'}}\left(\sum_{j=1}^m|c_j|^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{\frac{2-p}{2}}\end{aligned}$$

由于 $\{z_j\}$ 是 $\mathbb{C}^n$上的一个 δ-格，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\left|h(z_j)e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2}\right|^{p'} &\lesssim \sum_{j=1}^{m}\int_{B(z_j,\delta)}\left|h(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^{p'}dv(w)\\ &\leq N\int_{\mathbb{C}^n}\left|h(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^{p'}dv(w).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_0^1\|H_f(g_t)\|_{p,\alpha}^p dt &\lesssim \pi_r(H_f)^p\cdot\int_{B_{F_\alpha^{p'}}}\|h\|_{p',\alpha}^p\cdot\left(\sum_{j=1}^{m}|c_j|^{\frac{2p}{2-p}}\right)^{\frac{2-p}{2}}d\sigma(h)\\ &\leq \pi_r(H_f)^p\cdot\|\{c_j\}_{j=1}^m\|_{l^{\frac{2p}{2-p}}}^p.\end{aligned}$$

结合上述统计量，我们得出

$$\sum_{j=1}^{m}|c_j|^pG_{p,2\delta}(f)(z_j)^p\lesssim\int_0^1\|H_f(g_t)\|_{p,\alpha}^p dt\lesssim\pi_r(H_f)^p\|\{c_j\}_{j=1}^{\infty}\|_{l^{\frac{2p}{2-p}}}^p.$$

注意，$\frac{2}{p}$ 是 $\frac{2}{2-p}$的共轭指数。取 $m\to\infty$, 由对偶性可得

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}G_{p,2\delta}(f)(z_j)^2\right)^{1/2}\lesssim\pi_r(H_f).$$

根据定义，我们有

$$G_{p,\delta}(f)(z)\lesssim G_{p,2\delta}(f)(w),\quad z\in B(w,\delta).\tag{3.2}$$

我们有

$$\int_{\mathbb{C}^n}G_{p,\delta}(f)^2dv\leq\sum_{j=1}^{\infty}\int_{B(z_j,\delta)}G_{p,\delta}(f)^2dv\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}G_{p,2\delta}(f)(z_j)^2.$$

这表明

$$\int_{\mathbb{C}^n}G_p(f)^2dv\simeq\int_{\mathbb{C}^n}G_{p,\delta}(f)^2dv\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}G_{p,2\delta}(f)(z_j)^2\lesssim\pi_r(H_f)^2.$$

证明完毕。 □

定理 3.3. 设 $p\geq 2$，并令 κ 如 *(1.3)* 所示。若 $H_f:\ F_\alpha^p\to L_\alpha^p$ 是 r-求和的，则 $f\in\mathrm{IDA}^{\kappa,\,p}$。此外，我们有

$$\|f\|_{\mathrm{IDA}^{\kappa,\,p}}\lesssim\pi_r(H_f:F_\alpha^p\to L_\alpha^p).$$

证明。我们将证明分为三种情况。

情形 1: $1 \le r \le p'$.

假设 $H_f \in \Pi_r(F^p_\alpha, L^p_\alpha)$，那么 $\pi_{p'}(H_f) \le \pi_r(H_f) < \infty$，因为

$$\Pi_r(F^p_\alpha, L^p_\alpha) \subseteq \Pi_{p'}(F^p_\alpha, L^p_\alpha) \text{ for } 1 \le r \le p'.$$

对于任意 δ-格 $\{z_j\}$ 以及任意固定整数 $m > 0$，我们知道 $\left\{k_{z_j}\right\}_{j=1}^m$ 是 F^p_α中的有限序列。根据 p'-可和算子的定义，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \|H_f(k_{z_j})\|^{p'}_{p,\alpha} &\le \pi_{p'}(H_f)^{p'} \cdot \sup_{h\in B_{F^{p'}_\alpha}} \sum_{j=1}^m \left|\langle h, k_{z_j}\rangle\right|^{p'} \\ &\lesssim \pi_r(H_f)^{p'} \cdot \sup_{h\in B_{F^{p'}_\alpha}} \sum_{j=1}^m \left|h(z_j)e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2}\right|^{p'},\end{aligned}$$

最后一个不等式来自 $F^{p'}_\alpha$ 的再生核性质。注意,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \left|h(z_j)e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2}\right|^{p'} &\lesssim \sum_{j=1}^m \frac{1}{|B(z_j,\delta)|}\int_{B(z_j,\delta/2)} \left|h(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^{p'} dv(w) \\ &\le N\int_{\mathbb{C}^n} \left|h(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^{p'} dv(w) \le N\end{aligned}$$

对于 $h \in B_{F^{p'}_\alpha}$。这意味着

$$\sum_{j=1}^m \|H_f(k_{z_j})\|^{p'}_{p,\alpha} \lesssim \pi_r(H_f)^{p'}.$$

另一方面，类似于定理 3.2 的证明，我们得到

$$\begin{aligned}\|H_f(k_{z_j})\|^{p'}_{p,\alpha} &\ge \left(\int_{B(z_j,2\delta)} \left|k_{z_j}f(w) - P(k_{z_j}f)(w)\right|^p e^{-\frac{\alpha p}{2}|w|^2} dv(w)\right)^{p'/p} \\ &\simeq \left(\frac{1}{|B(z_j,2\delta)|}\int_{B(z_j,2\delta)} \left|f(w) - \frac{P(k_{z_j}f)(w)}{k_{z_j}(w)}\right|^p dv(w)\right)^{p'/p} \\ &\ge G_{p,2\delta}(f)(z_j)^{p'}.\end{aligned}$$

这些表明

$$\sum_{j=1}^m G_{p,2\delta}(f)(z_j)^{p'} \lesssim \sum_{j=1}^m \|H_f(k_{z_j})\|^{p'}_{p,\alpha} \lesssim \pi_r(H_f)^{p'}.$$

令 $m\to\infty$，由（3.2）可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}^n} G_p(f)^{p'}dv &\le \sum_{j=1}^{\infty}\int_{B(z_j,\delta)} G_{p,\delta}(f)^{p'}dv\\ &\lesssim \sum_{j=1}^{\infty} G_{p,2\delta}(f)(z_j)^{p'}\\ &\lesssim \pi_r(H_f)^{p'}<\infty.\end{aligned}$$

情形 2：　$p'\le r\le p$。

假设 $H_f:\ F^p_\alpha\to L^p_\alpha$ 是 r-求和的。与情形 1 中的证明类似，我们得到

$$\int_{\mathbb{C}^n} G_p(f)^r dv \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} G_{p,2\delta}(f)(z_j)^r \lesssim \pi_r(H_f)^r<\infty,$$

其中 $\{z_j\}$ 是 $\mathbb{C}^n$上的一个 δ-格。

情形 3：　$p\le r<\infty$。

假设 $H_f\in\Pi_r(F^p_\alpha,\ L^p_\alpha)$。由于 L^p_α 的余型为 $p\ge 2$，由 [7, 定理 **11**.13] 可知，$H_f:\ F^p_\alpha\to L^p_\alpha$ 是 $(p,\ 2)$-求和的，并且

$$\pi_{p,2}(H_f)\lesssim \pi_r(H_f).$$

根据 $\Pi_{p,2}(F^p_\alpha, L^p_\alpha)$ 的定义，对于任意固定整数 m，我们可知

$$\left(\sum_{j=1}^m \|H_f(k_{z_j})\|^p_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \pi_{p,2}(H_f)\cdot \sup_{g\in B_{F^{p'}_\alpha}}\left(\sum_{j=1}^m |\langle g,k_{z_j}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\{z_j\}$ 是一个 δ 格点，且 $\delta>0$ 足够小。由于对于 $p\ge 2$，$0<p'/2\le 1$，我们知道

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^m \|H_f(k_{z_j})\|^p_{p,\alpha}\right)^{\frac{p'}{p}} &\le \pi_{p,2}(H_f)^{p'}\cdot\left[\sup_{h\in B_{F^{p'}_\alpha}}\left(\sum_{j=1}^m \left|\langle h,k_{z_j}\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{p'}\\ &\le \pi_r(H_f)^{p'}\cdot\sup_{h\in B_{F^{p'}_\alpha}}\sum_{j=1}^m \left|\langle h,k_{z_j}\rangle\right|^{p'}\\ &\simeq \pi_r(H_f)^{p'}\cdot\sup_{h\in B_{F^{p'}_\alpha}}\sum_{j=1}^m \left|h(z_j)e^{-\frac{\alpha}{2}|z_j|^2}\right|^{p'}\\ &\lesssim \pi_r(H_f)^{p'}.\end{aligned}$$

另一方面，与情形 1 中的证明类似，我们有

$$G_{p,2\delta}(f)(z_j)^p\lesssim \|H_f(k_{z_j})\|^p_{p,\alpha}.$$

因此,

$$\sum_{j=1}^{m} G_{p,2\delta}(f)(z_j)^p \lesssim \sum_{j=1}^{m} \|H_f(k_{z_j})\|_{p,\alpha}^p \lesssim \pi_r(H_f)^p.$$

令 $m \to \infty$，我们得到

$$\int_{\mathbb{C}^n} G_p(f)^p dv \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} G_{p,2\delta}(f)(z_j)^p \lesssim \pi_r(H_f)^p < \infty.$$

□

4. Berger-Coburn phenomenon

本节考察 Fock 空间上绝对可和汉克尔算子的 Berger-Coburn 现象（BCP）。BCP 指的是这样一种性质：对于有界符号 f，汉克尔算子H_f 属于给定的算子理想 $\mathcal{M}$，当且仅当 $H_{\bar{f}}$ 也属于 $\mathcal{M}$。形式上，对于算子理想 $\mathcal{M}$，若

$$H_f \in \mathcal{M} \iff H_{\bar{f}} \in \mathcal{M}, \quad \forall f \in L^\infty,$$

详情见 [11] 。

Berger 和 Coburn 在 [3], 、Hagger 和 Virtanen 在 [8] 以及 Zhu 在 [23] 中，针对经典福克空间上的紧算子确立了 BCP。关于 Schatten类, Bauer 在 [2], 、Xia 和 Zheng 在 [22], 、Hu 和 Virtanen 在 [11], 、Asghari、Hu 和 Virtanen 在 [1]中讨论了 BCP。Xia 在 [21]中给出了一个属于 L^∞的函数反例，表明 H_f 可以是迹类，而 $H_{\bar{f}}$ 却不是。

在绝对可和算子理想的 BCP 背景下，我们需要命题 4.1。该命题给出了空间 $\mathrm{IDA}^{s,p}$ 中函数的一个关键范数估计，我们认为它本身也很有价值。

命题 4.1。 设 $1 < s < \infty, 1 \le p < \infty$。对于 $f \in L^\infty(\mathbb{C}^n) \cap \mathrm{IDA}^{s,p}$，有

$$\|\overline{f}\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}} \lesssim \|f\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}}.$$

证明。 对于满足 $\|f\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}} < \infty$, [13, 的 $f \in L^\infty(\mathbb{C}^n)$, 引理 3.6] 给出了如下分解 $f = f_1 + f_2$

$$f_1 = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \psi_j \in C^2(\mathbb{C}^n) \quad \text{and} \quad f_2 = f - f_1,$$

其中 h_j 和 ψ_j 的定义见 [13]中的引理 3.5。此外，对于任意$z \in \mathbb{C}^n$，我们有

$$\left|\overline{\partial} f_1(z)\right| + M_{p,r/2}(\overline{\partial} f_1)(z) + M_{p,r/2}(f_2)(z) \lesssim G_{p,2r}(f)(z).$$

对于 $1 \le p < \infty$，由 [13] 的估计式 (3-20) 和 [13, 的推论 3.10]，我们可以选取某个 $\tau > 0$，使得

$$\|M_{p,r}(\overline{\partial} f_1)\|_{L^s} + \|M_{p,r}(f_2)\|_{L^s} \lesssim \|G_{p,\tau}(f)\|_{L^s} \simeq \|f\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}}.$$

因此,

$$\|M_{p,r}(\overline{\partial} f_1)\|_{L^s} \lesssim \|f\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}}.$$

注意， $f_1 \in C^2 \cap L^\infty$。与 [11], 中的证明类似，我们断言

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} M_{p,r/4}(\overline{\partial}\, \overline{f_1})^s dv \right)^{1/s} \lesssim \|f\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}}. \tag{4.1}$$

事实上，与 [12, 第 6012], 页一样，存在 F 和 H，使得 $\partial f_1 = F + \overline{H}$, 其中

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{h_j} \cdot \overline{\partial}\, \psi_j, \quad H = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \cdot \overline{\partial}\, \overline{h_j}.$$

采用与 [11], 中估计 $\left|\partial f_1\right|$ 相同的证明，我们得到

$$|F(z)| \lesssim G_{p,2r}(f)(z).$$

对于 $1 < s < \infty$，由 [11, 引理 7.1], 可得

$$\|H\|_{L^s} \le \|\overline{\partial}\, \overline{f_1}\|_{L^s} + \|F\|_{L^s} \lesssim \|\overline{\partial} f_1\|_{L^s} + \|F\|_{L^s} \lesssim \|f\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}}.$$

按照 [12], 中的证明，我们得到 (4.1)。根据 [13,定理 3.8], ，我们有

$$M_{p,r/4}(\overline{\partial} f_1) + M_{p,r/4}(f_2) \in L^s. \tag{4.2}$$

此外,

$$\|f\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}} \simeq \inf \left\{ \left\| M_{p,\, r/4}(\overline{\partial} f_1) \right\|_{L^s} + \left\| M_{p,\, r/4}(f_2) \right\|_{L^s} \right\},$$

其中，下确界取遍所有满足 (4.2) 的可能分解 $f = f_1 + f_2$。由于

$$\left\| M_{p,\, r/4}(f_2) \right\|_{L^s} = \left\| M_{p,\, r/4}(\overline{f_2}) \right\|_{L^s},$$

(4.1) 和 [13, 推论 3.10] 给出

$$\|\overline{f}\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}} \le \left\| M_{p,\, r/4}(\overline{\partial}\, \overline{f_1}) \right\|_{L^s} + \left\| M_{p,\, r/4}(\overline{f_2}) \right\|_{L^s} \lesssim \|f\|_{\mathrm{IDA}^{s,p}}.$$

□

注：如果 $0 < s \le 1$，命题 4.1 的结论未必成立。为说明这一点，我们考虑 $n = 1$ 的情形，并定义 $f(z)$ 为

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{if } |z| \ge 1; \\ 0, & \text{if } |z| < 1. \end{cases}$$

经简单计算可得 $f \in \mathrm{IDA}^{s,\,p}$，而 $f \notin \mathrm{IDA}^{s,\,p}$ 对所有$p \geq 1$均成立。

注意到，$\kappa > 1$ 正如（1.3）中所述，如果 $1 \leq p < \infty$ 和 $r \geq 1$。结合上述定理1.1和命题 4.1，我们得到以下定理。

定理4.2。设 $1 \leq p < \infty$、$r \geq 1$。则对于Π_r（F^p_α、L^p_α），*BCP*成立，即对于 $f \in L^\infty(\mathbb{C}^n)$，$H_f \in \Pi_r$（$F^p_\alpha$、$L^p_\alpha$）当且仅当$H_f \in \Pi_r$（$F^p_\alpha$、$L^p_\alpha$），并且满足范数估计

$$\pi_r(H_f) \simeq \pi_r(H_{\overline{f}}).$$

5. FINAL REMARK

从证明中可以清楚看出，我们的结果同样适用于加权Fock空间 F^p_φ，其中 φ 满足条件（1.1）。同时，正如 [6, 18], 中所介绍的，倍增Fock空间是 F^p_α在 $n = 1$情形下的某种推广。我们相信，通过对证明进行适当修改，我们的方法可以推广到倍增Fock空间。

REFERENCES

[1] G. Asghari、Z. Hu 和 J. A. Virtanen，倍增 Fock 空间上的 Schatten 类 Hankel 算子与 Berger-Coburn现象，J. Math. Anal. Appl. 540 (2024), 128596, 32 页。[2] W. Bauer，Segal-Bargmann空间上的 Hilbert-Schmidt Hankel算子，Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 2989-2996。[3] C. A. Berger 和 L. A. Coburn，Segal-Bargmann空间上的 Toeplitz算子，Trans. Amer. Math. Soc. 301 (1987), 813-829。[4] J. L. Chen、B. He 和 M. F. Wang，带有 A_∞型权的加权Fock空间上的绝对可和 Carleson 嵌入，J. Operator Theory, 2025, arXiv: 2505.16109。[5] H. R. Cho 和 K. H. Zhu，Fock-Sobolev空间及其 Carleson测度，J. Funct. Anal. 263 (2012)(8), 2483-2506。[6] M. Christ，关于∂ 方程在 $\mathbb{C}$中的加权 L^2 范数，J. Geom. Anal. 1(1991), 193-230。[7] J. Diestel、H. Jarchow 和 A. Tonge，Absolutely Summing Operators，剑桥大学出版社，剑桥，1995。[8] R. Hagger 和 J. A. Virtanen，具有有界符号的紧 Hankel 算子，J. Operator Theory 86 (2021), 317-329。[9] B. He、J. Jreis、P. Lef`evre 和 Z. Lou, Bergman空间上的绝对可和 Carleson 嵌入，Adv. Math. 439 (2024), 109495。[10] Z. J. Hu 和 X. F. Lv，Fock空间上的 Toeplitz算子 $F^p(\varphi)$，Integral Equations Oper. Theory 80 (2014)(1), 33-59。[11] Z. J. Hu 和 J. A. Virtanen, Segal-Bargmann空间上的 Schatten 类 Hankel 算子与 Berger-Coburn现象, Trans. Amer. Math. Soc. 375 (2022), 3733-3753。

[12] Z. J. Hu 和 J. A. Virtanen, 《“Segal-Bargmann空间上的 Schatten 类 Hankel 算子与 Berger-Coburn现象”的勘误》, Trans. Amer. Math. Soc. 376 (2023), 6011-6014。[13] Z. J. Hu 和 J. A. Virtanen, Fock空间上的 IDA 与 Hankel 算子, 《分析与偏微分方程》16 (2023), 2041-2077。[14] Z. J. Hu 和 E. M. Wang, Fock空间上的绝对可和 Toeplitz 算子, 2025, arXiv: 2509.19967。[15] D. Li 和 H. Queff´elec, 《巴拿赫空间导论: 分析与概率》, 第 1–2 卷, 剑桥高等数学研究丛书 166–167, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2018。[16] P. Lef`evre 和 L. Rodr´ıguez-Piazza, Hardy 空间上的绝对可和 Carleson 嵌入, Adv. Math. 340 (2018), 532-587。[17]J. Lindenstrauss 和 A. Pe-lczy´nski, $\mathcal{L}_p$空间上的绝对可和算子及其应用, 《数学研究》29 (1968), 275-326。[18] N. Marco、X. Massaneda 和 J. Ortega-Cerd`a, 整函数的插值与采样序列, 《几何与泛函分析》13((2003), 862-914。[19] A. Pe-lczy´nski, 解析函数的巴拿赫空间与绝对可和算子, CBMS 数学区域会议系列 30, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1977。[20] P. Wojtaszczyk, 分析学家的 Banach 空间, 剑桥高等数学研究丛书 25, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1991。[21] J. Xia, Fock 空间上 Hankel 算子的 Berger-Coburn现象, 《复分析与算子理论》17 (2023), 论文编号 35。[22] J. Xia 和 D. Zheng, 标准差与 Segal-Bargmann空间上的 Schatten 类 Hankel 算子, 《印第安纳大学数学杂志》53 (2004), 1381-1399。[23] K. H. Zhu, Fock 空间上的分析, 数学研究生教材 263, 施普林格, 纽约, 2012。

Zhangjian Hu, Department of Mathematics, Huzhou University, Huzhou313000, China电子邮箱地址: huzj@zjhu.edu.cn

Xiaofen Lv, Department of Mathematics, Huzhou University, Huzhou313000, China电子邮箱地址: lvxf@zjhu.edu.cn