arXiv:2601.01201v1 [math.FA] 3 Jan 2026

关于上半平面 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{C}_+)$ 上的 Cesàro 算子的说明

VALENTIN V. ANDREEV, MIRON B. BEKKER, JOSEPH A. CIMA

摘要。我们研究上半平面中 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{C}_+)$ 上的 Cesàro 算子，其中 $1 < p < \infty$。在 [3] 中，已证明对于所有 $1 < p < \infty$，算子 $V = {}^{2}{}_{(p-1)}{}_{p}\quad C - I$ 的谱位于单位圆上；而在 [1] 中，本文作者证明了对于 $p = 2$，算子 V 是酉的。本文证明，对于 $1 < p < \infty$，$p \neq 2$，算子 V 的范数严格大于一。

MSC2020： 47B38, 30H10, 47B32

上半平面 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{C}_+)$ 上的 Cesàro 算子在 [3]中首次引入，其定义式为

$$(Cf)(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(\zeta)d\zeta, \quad f \in H^p(C_+). \tag{1}$$

在 [3] 中证明了，对于 $1 < p \leq \infty$，算子 C 在 $H^p(\mathbb{C}_+)$ 上有界；对于 $1 < p < \infty$，其谱 $\sigma(C)$ 由下式给出

$$\sigma(C) = \{w : |w - \frac{p}{2(p-1)}| = \frac{p}{2(p-1)}\}. \tag{2}$$

[3] 的作者还证明，算子 C 的点谱为空。

定义算子 V，其作用于 $H^p(C_+)$，公式如下

$$V = \frac{2(p-1)}{p}C - I. \tag{3}$$

根据谱映射定理，V 的谱是单位圆，

$$\sigma(V) = \{w : |w| = 1\}. \tag{4}$$

在 [1] 中，本文作者证明了，对于 $p = 2$，算子 V 在 $H^2(C_+)$ 上是酉的。关于 $H^2(\mathbb{C}_+)$ 上 Cesàro 算子的更多性质，见 [2]。

由于对于所有 $p \in (1, \infty)$，V 的谱半径都等于 1，因此我们有 $\|V\|_p \geq 1$，其中 $\|V\|_p$ 表示将 V 视为作用于 $H^p(\mathbb{C}_+)$ 上的算子时的范数。

定理 1。 设 V 在 $H^p(\mathbb{C}_+)$ $(1 < p < \infty)$ 上的算子由公式 (1) 和(3) 定义。如果 $p \neq 2$，则 $\|V\|_p > 1$。

证明。为证明该定理，我们给出一个向量 f，它对所有 $p \in (1, \infty)$都属于$H^p(\mathbb{C}_+)$，并证明对于所有这样的 p $\|Vf\|_p \geq \|f\|_p$，等号仅在 $p = 2$时成立。

Put

$$f_t(z) = \frac{-it}{(-it - z)^2}, \quad t > 0.$$

函数 f_t 属于 H^p，且

$$\|f_t\|_p^p = \frac{1}{t^{p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^p} dx = \frac{1}{t^{p-1}} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-\frac{1}{2} + p)}{\Gamma(p)}. \tag{5}$$

Then

$$(Cf_t) = \frac{1}{-it - z}$$

and

$$(Vf_t)(z) = \frac{2(p-1)}{p} \frac{-i\gamma t - z}{(-it - z)^2},$$

其中 $\gamma = \gamma(p) = \frac{2-p}{2}(p-1)$。简单计算可得

$$\|Vf_t\|_p^p = \frac{1}{t^{p-1}} \left[\frac{2(p-1)}{p}\right]^p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+\gamma^2)^{p/2}}{(x^2+1)^p} dx. \tag{6}$$

由于 $\gamma(p) = 0$ 仅在 $p = 2$ 时成立，因此可得

$$\|Vf_t\|_p^p \geq \frac{1}{t^{p-1}} \left[\frac{2(p-1)}{p}\right]^p 2 \int_0^{\infty} \frac{x^p}{(x^2+1)^p} dx =$$

$$\frac{1}{t^{p-1}} 2\sqrt{\pi} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \frac{\Gamma(\frac{p}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2} + 1)}$$

等号仅在 $p = 2$ 时成立。因此

$$\|Vf_t\|_p^p / \|f_t\|^p \geq 2 \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \frac{\Gamma(\frac{p}{2} + \frac{1}{2})\Gamma(p)}{\Gamma(\frac{p}{2} + 1)\Gamma(p - \frac{1}{2})}$$

Put

$$\Phi(p)=\frac{2(p-1)^{p-1}}{p^{p-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+p\right)}. \tag{7}$$

Then

$$\Phi(p)=\frac{4(p-1)^{p-1}}{p^p}\frac{\Gamma(\frac{p}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(p)}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(p-\frac{1}{2})}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(p-1)^{p-1}\left(\frac{2}{p}\right)^p\frac{\Gamma^2(\frac{p}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(p-\frac{1}{2})}.$$

对两边取对数导数，得到

$$\frac{\Phi'(p)}{\Phi(p)}=\ln\left(2(1-\frac{1}{p})\right)+\frac{\Gamma'(\frac{p}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2}+\frac{1}{2})}-\frac{\Gamma'(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(p-\frac{1}{2})}.$$

利用伽马函数对数导数的著名表示式，可得

$$\frac{\Phi'(p)}{\Phi(p)}=\ln\left(2(1-\frac{1}{p})\right)+(1-\frac{p}{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+p-1/2)(n+p/2+1/2)}. \tag{8}$$

特别地，我们看到 $\Phi'(2)=0$ 且 $\Phi'(p)\to-\infty$，当 $p\to1^+$ 时。等式（8）右侧的级数在 p 上对 $p>1$ 一致收敛，因此可以逐项求导。于是

$$\frac{\Phi''(2)}{\Phi(2)}=\frac{d}{dp}\left(\frac{\Phi'(p)}{\Phi(p)}\right)(2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3/2)^2}=$$

$$\frac{1}{2}\left(1-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(5-\frac{\pi^2}{2}\right),$$

其中我们用到了以下著名公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

因此，$\Phi''(2)>0$，且 $p=2$ 是函数 Φ 的最小值。由（7）可知，$\Phi(2)=1$。进一步分析表明，函数Φ 在 $p>2$ 时单调递增。

References

[1] Valentin V. Andreev、Miron B. Bekker、JosephA. Cima，上半平面中的 *Hardy* 空间上的 *Cesàro* 算子，《乌克兰数学杂志》第77卷第6期，934–941页（2025年）；https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.19627。

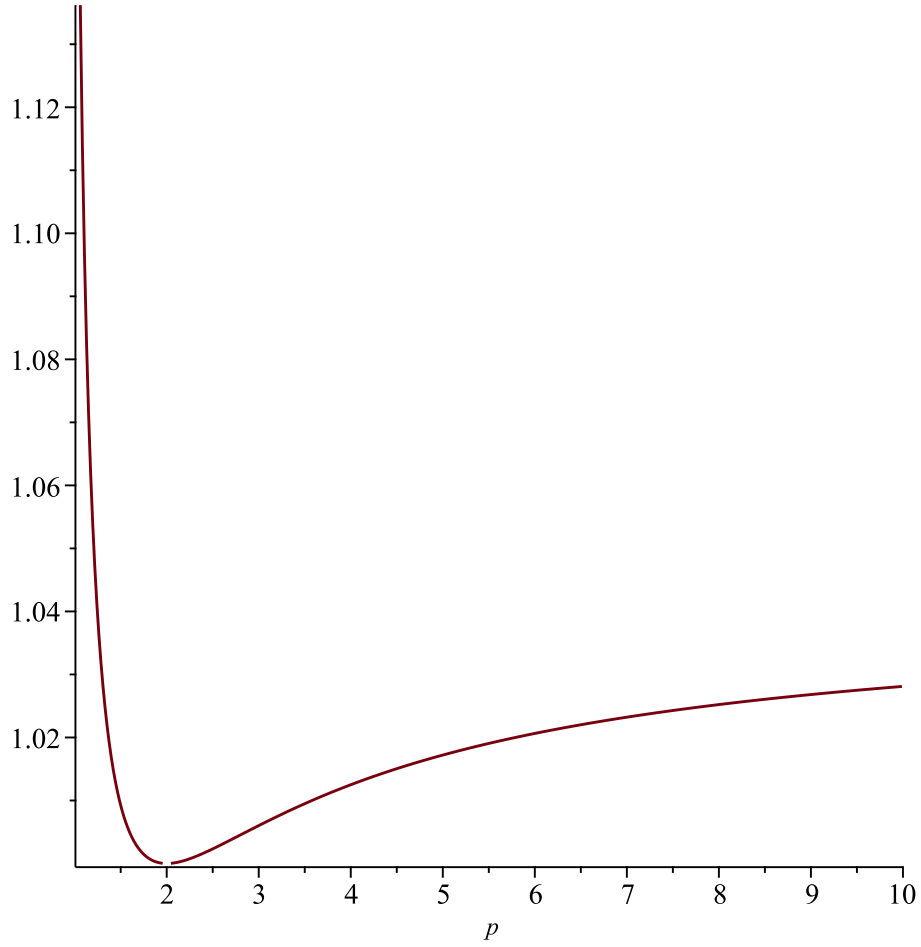

图 1. $\Phi(p)$ 对于 $1.05 \leq p \leq 10$

[2] Valentin V. Andreev、Miron B. Bekker、Joseph A. Cima，上半平面上的 *Cesàro* 算子是循环的。即将发表于美国数学会会议录。[3] Athanasios G. Arvanitidis 和 Aristomenis G. Siskakis半平面上的 *Cesàro* 算子，《加拿大数学通报》第56卷第2期，2013年，第229–240页 http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2011-153-7VALENTIN V. ANDREEV 数学系，拉马尔大学，博蒙特，德克萨斯州，美国；*vvandreev8@gmail.com*MIRON B. BEKKER 数学系，匹兹堡大学约翰斯敦分校，约翰斯敦，宾夕法尼亚州，美国，*bekker@pitt.edu*JOSEPH A. CIMA 数学系，北卡罗来纳大学教堂山分校，菲利普斯楼，教堂山，北卡罗来纳州，美国，*cima@email.unc.edu*