arXiv:2601.01211v1 [math.CO] 3 Jan 2026

德尔塔定理：忠实正交图表示的维数界

H. TRACY HALL

Abstract. 1987年，前原宏猜想，每个图都可以用一组向量表示；当这些向量不正交时，就认为它们相邻（即该图的一种 *faithful orthogonal representation* ），且表示所在的维数等于该图最小度的补数。尽管未能证明这一猜想，L`asl`o Lov`asz、Michael Saks 和 Alexander Schrijver 证明，在额外假设这些向量处于一般位置的情况下，维数等于点连通度的补数既足以实现表示，也是可能达到的最佳结果。本文证明了 Maehara 的猜想，以及组合矩阵理论中独立提出的相关猜想；其中最强的一项$\delta(G) \leq \nu(G)$指出，最小顶点度是具有模式 G 且满足强阿诺德性质的正定矩阵最大零度的下界。带有各种矩阵限制的零度问题，是图的逆特征值问题（IEPG）的一个重要子类。

我们引入名称 *greedegree* ，用于表示最大基数搜索（MSC）排序所能达到的最大最终度数；换言之，这种排序会贪心地最大化与此前选定顶点的邻接关系。我们引入名称*upper-zero generic* ，用于描述对角线非零的对称矩阵，其任意一列中对角线上方的零所对应的行构成线性无关集。本文证明，总能找到某个图的忠实正交表示，使其格拉姆矩阵为上三角零泛型，且表示维数等于该图贪心度的补数。

1. 引言

正交表示最初由 L´aszl´o L´ovasz 于 1979 [14]引入，用于研究图的香农容量，此后也被应用于例如量子信息论等领域 [1]。对于一个有 n 个顶点的任意图 G ，确定其忠实正交表示可能达到的最小维数是一个困难的问题，相关部分成果已有大量文献。本文定义了一类顶点排序及其相应的目标维数，并证明一种已有的概率构造以概率 1 成功。由此得到的维数界验证了前原宏等人长期以来的猜想。

固定一个具有 G 个 n 顶点的图。用欧几里得空间中的向量表示 G的顶点，称为 G 的正交表示，如果

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 05C50；次分类号 05C62、15A29。

Key words and phrases. Strong Arnold、贪心度、Delta 猜想、最小秩、最大重数、IEPG、组合矩阵理论、图、最小度、正交表示、LSS、上三角零泛型、前原猜想、最大基数搜索、MCS、贪心排序、悬挂花园图、花园、NP 完全、可满足性。本研究的部分工作是在访问杨百翰大学期间，为美国数学研究所开展的。作者感谢 AIM、BYU 和美国国家科学基金会的支持。

顶点对非邻接意味着相应表示向量正交；若反向蕴含也成立，则称这种正交表示为忠实的。两两点积构成的矩阵是该表示的格拉姆矩阵。即使表示顶点所用环境空间的维数可能不同，格拉姆矩阵相同的表示也被视为等价表示。等价表示的表示向量张成空间维数相同，且等于格拉姆矩阵的秩。用 n 减去张成空间维数，得到正交表示的余维数，它等于其格拉姆矩阵的零度。G 的忠实正交表示所能达到的最大余维数，等于组合矩阵理论中的图参数 M+(G)；该参数与 M(G) 一同构成图的逆特征值问题（IEPG）中的一个重要子问题。第 46]章 [9,概述了 IEPG 及相关的矩阵论图参数。

关于点连通度 $\kappa(G)$ 的余维数界见于 L`aszl`o Lov`asz、Michael Saks 和 Alexander Schrijver（以下简称 LSS）的研究[12, 13] 。他们提出了一种正交表示的概率构造。将 LSS 构造应用于维数为 $n-\kappa(G)$的欧几里得空间时，他们证明，以概率 1 得到的表示既是忠实的，也处于一般位置。反过来，他们证明， $\kappa(G)$是同时满足忠实性和一般位置要求的表示所能达到的最大余维数。不要求一般位置时，相关结果较少，但他们提到一个涉及最小顶点度 $\delta(G)$ 的猜想。该猜想归于 Maehara，提出于 1987年：每个图 G都有一个余维数为 $\delta(G)$ 的忠实正交表示，这等价于命题 $\delta(G) \leq$M+(G)。后来，组合矩阵理论中出现了一个相关猜想，称为 Delta 猜想，它是独立提出的 [8]。它在一个方面较弱：前原猜想要求矩阵为半正定，而 Delta 猜想只要求矩阵为实对称矩阵。

当前结果确立了猜想中的界。已证明的界在两个方面强于前原猜想：第一，所得余维数通常更大，其大小由一个图参数给出；该参数将在下文介绍，并命名为“最大贪心最终度”（或“贪心度”） G，记作 $^g\Delta(G)$。第二，已证明的界之所以更强，还在于涉及一个被称为强阿诺德假设或强阿诺德性质（以下简称 SAP）的条件。Yves Colin de Verdi´ere 在定义图参数 $\mu(G)$ [5, 6] 时，将该条件引入了组合矩阵理论。SAP 可以被理解为要求一个矩阵具有泛型性，但这是在特定技术意义下的泛型性，并且受到指定低秩和指定稀疏模式的约束，而这两者本身都不是泛型条件。对于这样的矩阵，人们可能要求的最强“泛型”意义是一般位置；然而根据 LSS 的逆向结果，在余维数 $\delta(G)$ 下，一般位置是不可能的，因此当不等式 $\kappa(G) \leq \delta(G)$ 严格成立时，在余维数 $^g\Delta(G)$ 下也同样不可能。在 SAP 的弱泛型要求与一般位置的强泛型要求之间，将引入一种强度居中的泛型要求，并将满足该中间要求的矩阵称为“上三角零泛型”。本文将证明，总能找到余维数 $^g\Delta(G)$下的表示，使其格拉姆矩阵为上三角零泛型，因此也具有 SAP 所要求意义下的泛型性。这不仅足以证明前原猜想，也足以证明强Delta猜想 [2], ，后者

要求一个满足 SAP 的半正定矩阵。在当前结果解决的三个既有猜想中，最弱的一个——Delta 猜想——或许是组合矩阵理论文献中最为人熟知的猜想，并已促成了一些部分结果 [3, 4]。

证明方法首先从 LSS 的概率构造入手，并以保持对称性的方式对其进行完全参数化，同时引入冗余自由度。尽管这样得到的多项式在完整写出时规模大得难以处理，但可以通过引入一种称为悬挂花园图的构造来驾驭这些多项式；这种构造在某种程度上让人想到 Vaughan Jones [10]的平面代数，但总体上更为简单。表示的忠实性要求这些多项式中的某些多项式在一般参数取值下非零。借助这些图，根据某种单项式项序，可以验证所需的多项式在首项中不存在抵消。通过仔细核算来证明多元多项式首项中不存在抵消，这种方法此前已有应用，例如 Daan Krammer 在其证明 [11]中展示了如何用多项式矩阵给出的辫群 Lawrence–Krammer表示是忠实的。

本文结构安排如下：
第 2 节给出基本定义和必要的背景知识。
第 3 节介绍 LSS 构造及其已知结果，并介绍 LSS 的一种略微修改形式，称为均匀 LSS，它可能以弱或强的方式成功。随后，本节通过示例介绍相关术语，为陈述主要结果做好准备。

第 4 节介绍悬挂花园构造，并详细说明其许多性质。

第 5 节专门讨论那些刻画均匀 LSS 的悬挂花园，包括当 G具有 MCS 或贪心排序时的结构，进而提出唯一单项式引理，并用它证明主要结果。

第 6以一些可能的推广 结束。
A节通过从 3-SAT 归约，证明新的组合界贪心度 $q\Delta(G)$ 一般而言是 NP 困难的。

1.1. 致谢。作者感谢组合矩阵理论界在最初提出这些结果与最终将其写成文稿之间漫长间隔中的耐心等待。

本研究的部分工作是在访问杨百翰大学期间为美国数学研究所开展的。作者感谢 AIM、BYU 和美国国家科学基金会给予的支持。

作者感谢 Raphael Loewy 最初将其引入这一问题，感谢 Leslie Hogben 等人的鼓励，以及他们提供的演讲和讨论机会；也感谢 Virginia 和 Barry Wood 接待作者，使写作得以最后冲刺。

2. Background

2.1. 符号与约定。按照引言中固定的选择，G 是一个具有 n 个顶点的简单无向图。我们还将通过将顶点集 V标记为一个列表（v_1，……， v_n）来固定顶点的排序；某些构造将取决于这一排序，矩阵和向量中的顶点与行列索引之间隐含的对应关系也将如此。有时会

考虑同一图 G的不同顶点排序；为此，我们假定顶点已重新标记，使得 v_1 现在是新排序中的第一个顶点， v_2 是第二个，依此类推。

边 $\{v_i, v_j\}$ 缩写为 v_iv_j。图 G 中的邻接由 $v_i \sim v_j$表示，非邻接由 $v_i \not\sim v_j$ 表示。边集合与 G 互为补集的图记为 G。顶点 v_i 的度 $\deg(v_i)$ 是满足$v_i \sim v_j$的顶点 v_j 的数量，而 G 中顶点的最小度和最大度分别记为 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$。图的点连通度记为$\kappa(G)$。由子集 $S \subseteq V(G)$诱导的 G 的子图记为 $G[S]$。

单位矩阵记为 I。给定方阵 A， A 在指标集合 S 上的主子矩阵记为 $A[S]$。假设 G 的 n 个顶点通过函数 $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^d$表示为某个环境维数 d 中的列向量，其输出收集为一个大小为 $d \times n$、$R = [r_{ij}] = [\varphi(v_0)\ \dots \varphi(v_{n-1})]$. 的结果矩阵。矩阵 A的转置记为 $A^\top$。 φ 的格拉姆矩阵为 $R^\top R$，将其命名为 $T = [t_{ij}]$，其中 t_{ij} 是内积 $\varphi(v_i)^\top\varphi(v_j)$。

2.2.正交表示和忠实正交表示。如果对于图 G 中任意不同的顶点 v_i 和 v_j，当 $v_i \not\sim v_j$ 时，它们在 φ 下的像的内积 t_{ij} 均为 0，则映射 φ 称为 G 的正交表示。（对于任意图 G，定义在 n 个顶点上的零映射提供了 G 的一个正交表示的平凡例子。）此外，如果每个向量 φ（v_i）的长度均为 1，则 φ 称为标准正交表示，此时 T 是一个相关矩阵。同一个图的两个表示当且仅当具有相同的格拉姆矩阵 T 时，才被视为等价；换言之，当且仅当它们的像是等距的。该正交表示的余维数是 T 的零度，至少为 $n - d$；当 φ 的像张成 $\mathbb{R}^d$ 时取等号。

当蕴含关系双向成立时，正交表示或标准正交表示称为忠实的：在忠实正交表示中，满足 $t_{ij} = 0$ 的不同顶点对 i 和 j 恰好就是满足 $v_i \not\sim v_j$ 的顶点对，因此，该表示中的向量通过格拉姆矩阵 T 的非对角元素中非零内积的模式，完全确定了 G 。

对于给定的图 G ，目标是构造一个余维数尽可能大的忠实正交表示。事实证明，这与组合矩阵理论中的最大半正定零度问题直接相关。

定义 2.1. 设 G 是一个有 n 个顶点的图。 G的最大半正定零度记作 $\mathrm{M}_+(G)$，它是满足以下条件的所有矩阵 $A = [a_{ij}]$ 中零度的最大值：

(1) $n \times n$ 阶矩阵 A 是对称半正定的；(2) 当 $v_i \not\sim v_j$ 属于 G时， $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ 成立；(3) 当 $v_i \sim v_j$ 属于 G时， $i \neq j$, $a_{ij} \neq 0$ 成立。

观察 2.2. 定义 *2.1* 中关于 A 的条件等价于以下说法：

(1) 存在一个由 n 个向量组成的欧几里得排列，其格拉姆矩阵为 A。*(2)* 该向量排列是 G的正交表示。*(3)* 该正交表示是忠实的。

由于余维数由格拉姆矩阵的零度给出，因此 G 的忠实正交表示所能达到的最大余维数恰好是 $\mathrm{M}_+(G)$。

最大半正定零度是最大零度的一种特殊情形。

定义 2.3。 设 G 是一个有 n个顶点的图。 G的最大零度 记作 M(G)，定义为满足以下条件的所有矩阵 $A = [a_{ij}]$ 中最大的零度：

(1) 大小为 $n \times n$ 的矩阵 A 是实对称矩阵；(2) 对于 $i \neq j$，当 $v_i \not\sim v_j$ 属于 G时， $a_{ij} = 0$ 成立；(3) 对于 $i \neq j$，当 $v_i \sim v_j$ 属于 G时， $a_{ij} \neq 0$ 成立。

与最大零度问题等价、或许引用更广泛的问题是最小秩问题。图 G 的最小秩 mr(G)的定义使其满足 $\mathrm{mr}(G) + \mathrm{M}(G) = n$。

例 2.4 （拉普拉斯表示）。 为了最终构造一个具有高余维数的忠实正交表示，考虑一种简单的构造方法很有启发性，它总能得到一个余维数至少为一的忠实正交表示。拉普拉斯表示 $\varphi_{\mathcal{L}}$ 是一个从V 到 $\mathbb{R}^{|E|}$的映射，其中 G 的边已编号为 1 到 $|E|$ ，且每条边都指定了一个定向。（不同的定向会得到等距表示，因此定向的选择是任意的。）列向量 $\varphi_{\mathcal{L}}(v_i)$中，对于每条与 v_i相邻且从其指向外的边，对应的元素为 -1 ；对于每条与 v_i相邻且指向它的边，对应的元素为 1；其他元素为 0。等价地，在结果矩阵 R中，对应于一条定向为（v_i， v_j）的边的行 k 仅有两个非零元素，即 $r_{ki} = -1$ 和 $r_{kj} = 1$。若 $v_i \not\sim v_j$，则 $\varphi_{\mathcal{L}}(v_i)$与 $\varphi_{\mathcal{L}}(v_j)$的支撑集不相交，且这些向量正交；若 $v_i \sim v_j$ ，则这些向量的内积为 -1。环境维数 $d = |E|$ 通常远大于 n，因此在此情形下， $n - d$ 并不是余维数的有用下界。不过要注意，所有 n 表示向量之和为零，这意味着 T 有一个非平凡零向量，且余维数至少为一。（事实上，拉普拉斯表示的余维数恰好等于 G的连通分支数。）

3. Statements of results

本节将回顾一系列与正交表示的余维数相关的猜想，讨论正交表示的 LSS 概率构造及其一种称为均匀 LSS 的推广，并给出若干定义，以便陈述主要结果。

3.1. 余维数猜想。

一般而言，M+(G) 难以精确确定，但已有一些组合界。1987年，Maehara 猜想忠实正交表示的最大余维数存在一个下界。

前原猜想 (Maehara，出处见 [12])。 对于任意简单图 G，都存在一种忠实正交表示，其余维数至少为最小度。等价地，以下不等式总是成立：

$$\delta(G) \leq \mathrm{M}_+(G).$$

3.1.1. 一个来自组合矩阵理论的猜想。还有一些与 Maehara 猜想密切相关的猜想，它们独立地（但稍晚一些）在组合矩阵理论界中出现。

2006年10月，美国数学研究所（AIM）举办了一场关于组合矩阵理论的研讨会 [8], ，探讨的议题包括最大零度问题。在这次研讨会上，有人提出一个猜想：对于实数域或其他无限域，图的最小度应当是其最大零度的一个下界。这个不等式后来被称为 Delta 猜想。[1]部分结果包括：Delta 猜想对所有二分图 [4] 或二分图的补图 [3]都成立。

Delta 猜想 (Barioli等人 [8])。 对于任意简单图 G，以下不等式成立：

$$\delta(G) \leq \mathrm{M}(G).$$

前原猜想假设存在一个正交表示，其格拉姆矩阵为正定矩阵；该猜想蕴含 Delta 猜想。

3.1.2. 关于强阿诺德性质的猜想。 SAP由Colin de Verdi`ère于1990年引入组合矩阵理论，用于定义参数 $\mu(G)$ [5], ；该参数具有若干引人注目的性质，例如，当且仅当 $\mu(G) \leq 4$ 时，图是平面图。

SAP本质上涉及某些矩阵空间的横截性，但通常用一个等价的代数陈述来表述。逐项积（也称为Hadamard积或Schur积）记作 $A \circ B$。

定义 3.1。 如果实对称 $n \times n$ 矩阵 A 满足以下三个方程，且唯一满足这些方程的实对称矩阵 X 仅为零矩阵，则称该矩阵具有强阿诺德性质 （SAP）：

$$A \circ X = 0, \quad I \circ X = 0, \quad \text{and } AX = 0$$

是矩阵 $X = 0$。

将范围限制为具有 SAP 的矩阵，对于零度参数可能会产生有益的结果。参数 $\nu(G)$ 就是其中之一，此处将其定义为正交表示相关的参数。

定义 3.2。 给定一个图 G， $\nu(G)$ 是 G的忠实正交表示 φ 所能达到的最大余维数，且其格拉姆矩阵 φ 具有 SAP。

图参数 $\nu(G)$与 $\mu(G)$ 一样，具有图子式单调性，这意味着只要 F 是 G [7][2] 的某个子图的收缩，就有$\nu(F) \leq \nu(G)$。不等式 $\nu(G) \leq$ M+(G) 暗示了一个可能比 Maehara 的猜想更强的猜想。

强Delta猜想 (Barioli等人 [2])。 对于任意简单图 G，以下不等式成立：

$$\delta(G) \leq \nu(G).$$

主要结果将蕴含强Delta猜想，而强Delta猜想蕴含Maehara猜想，Maehara猜想又蕴含Delta 猜想。

---

[1]尽管名称中的“Delta”一词首字母大写，但该猜想涉及的是最小度 $\delta(G)$，而非最大度 $\Delta(G)$。有时它也被称为“δ-猜想”。[2]在最初证明 $\nu(G)$ 具有图子式单调性时，该参数被称为 $a(G)$，即图的“代数宽度”。

3.2. **LSS 构造**。 最早提及Maehara猜想的文献是LSS对余维问题的一项研究，他们成功地证明：在一般位置这一附加约束下， $\kappa(G)$恰好是最大余维数。

定义 3.3。 G到 $\mathbb{R}^d$ 的表示 φ 处于一般位置，当且仅当对于任意满足 $|S| = k \leq d$ 的子集 $S \subseteq V(G)$， S 在 φ 下的像是由 k 个向量构成的线性无关集合。

定理 3.4 (LSS [12, 13])。 若 G 是一个有 n 个顶点的简单图，则以下条件等价：

(1) 图 G 是$(n-d)$-连通的。*(2)* 图 G 在 $\mathbb{R}^d$中有一个处于一般位置的正交表示。*(3)* 图 G 在 $\mathbb{R}^d$ 中有一个标准正交表示，使得对每个顶点 v，与 v 不相邻的顶点所对应的向量线性无关。

尽管根据此定理，条件(2)或条件(3)可能成立时的余维数相同，但某个特定的忠实正交表示可能满足条件(3)，而不满足条件(2)。

LSS 构造具有概率性，并取决于所选的顶点排序$V = (v_1, \ldots, v_n)$。对于每个顶点 v_j，记 W_j为V 的保序子列，其中包含所有既排在 v_j之前又不与其相邻的顶点，其总数记为 $k = k(v_j)$：

$$W_j = (w_1, w_2, \ldots, w_k) := (v_i \in V \mid i < j \text{ and } v_i \not\sim v_j).$$

如果 v_j 排在其所有相邻顶点之前，那么 W_j 将是空列表 ()，且$k(v_j) = 0$。我们将沿用记号 W_j，而 $k(v_j) = |W_j|$ 将在后文发挥作用。LSS 构造按顺序选择表示向量，因此，特别是在选择 $\varphi(v_j)$之前，表示 $\varphi(w_1)$到 $\varphi(w_k)$都已选定。记 S_j 为它们张成空间的正交补：

$$S_j := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \forall w_i \in W_j, \mathbf{x}^\top \varphi(w_i) = 0\}.$$

LSS 构造只需从 S_j中随机[3] 选择 $\varphi(v_j)$。

请注意， V 的排序使随机选择的方式具有不对称性：对于满足 $i < j$的 $i \not\sim j$，用于选择 $\varphi(v_j)$的子空间 S_j 取决于 $\varphi(v_i)$，但较早的子空间 S_i 不取决于较晚的选择 $\varphi(v_j)$。

定理 3.4 保证在某些维数下存在正交表示，但不一定存在忠实正交表示。不过，同一篇著作中的一个配套定理确实保证了这一点。

定理 3.5 (LSS [12, 13])。 如果 G 是一个有 n 个顶点且 G 是$(n-d)$连通的简单图，那么对顶点的任意排序， $\mathbb{R}^d$ 中的 *LSS* 构造都以概率 1得到一个忠实正交表示。

推论 3.6。 对于任意简单图 G， $\kappa(G) \leq \mathrm{M}+(G)$ 成立。

推论 3.7。 对于任意简单图 G, κ（G） 是 G 的一般位置忠实正交表示的最大余维数。

[3]例如，当 S_j 非平凡时，可以从 S_j 单位球面上的哈尔测度中均匀随机选取。其他合理的选择也会产生相同的定性行为。

尽管 LSS 构造本身很直接，但它在 n向量族上所产生的概率分布却有些微妙。例如， [12] 最初的论证错误地假设，在所需空间中的向量族分布与顶点排序的选择无关。事实上，且足以满足要求的是，当表示的余维数至多为$\kappa(G)$时，不同排序下的分布具有相同的零测集 [13], 。

通过计算自由度，或许可以推想到前原猜想。在维数为 $d = n - \delta(G)$ 时，子空间 S_j 的维数至少为

$$d - \Delta(\overline{G}) = d - (n - \delta(G) - 1) = d - d + 1 = 1,$$

因此，例如，在维数为 $n-\delta(G)$的空间中进行 LSS 构造，以概率 1 将得到由非零向量构成的表示，这些向量可以缩放为标准正交表示。问题在于所得表示是否忠实，或者换句话说，能否避免额外且不需要的正交关系。下一个例子说明，确保子空间 S_j 非平凡，虽足以保证标准正交表示存在，却不足以保证忠实表示存在。

例3.8. 考虑由四个顶点 $P_4 = (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4)$ 构成的有序路径，并设 G 是 P_4 的补图；它同样是一条由四个顶点构成的路径，但邻接关系不同，分别为 $v_1 \sim v_3$、$v_1 \sim v_4$和 $v_2 \sim v_4$。在笛卡尔平面 $\mathbb{R}^2$中执行 LSS，尝试得到一个标准正交表示 φ。顶点列表W_1 为空，因此 S_1 就是 $\mathbb{R}^2$的全部。不失一般性（至多相差一个正交旋转），选择

$$\varphi(v_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^\top.$$

非邻接 $v_1 \not\sim v_2$ （或等价地，G中的邻接 $v_1 \sim v_2$ ）给出$W_2 =(v_1)$，因此 $S_2^{\perp}$的维数为 1，从而唯一确定了其取向（差一个符号）的选择：

$$\varphi(v_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top.$$

类似地， $W_3 =(v_2)$给出维数为 1 的 S_3 ，并将其确定为（差一个符号）：

$$\varphi(v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^\top,$$

之后， $W_4 =(v_3)$给出维数为 1 的 S_4 ，并将其确定为（差一个符号）：

$$\varphi(v_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top.$$

在每个阶段，至多只有一个先前的不相邻顶点，因此总是可以选择一个非零向量。但除第一次选择外，其余每次选择都完全受限（仅符号可变）；无论第一次如何选择， $\varphi(v_4)$最终都会与 $\varphi(v_1)$正交，而 $v_4 \sim v_1$ 属于 G。虽然可以构造标准正交表示，却无法避免出现非预期的正交关系；在维数 $d = 2$ 下的表示永远不是忠实的——这与维数 $d = n - \delta(G)\ = 3$下的情况不同，在那里拉普拉斯表示是忠实的。人们早已认识到，要证明前原猜想，需要采用比单纯维数计数更精妙的方法。

3.3. **均匀 LSS 与弱成功**。 在 LSS 构造中，每个向量$\varphi(v_j)$所选自的子空间 S_j 的维数至少为 $d-|W_j|$；当表示 W_j 的向量线性无关时，其维数恰为 $d-|W_j|$ 。 S_j 的维数可能随先前的随机选择而变化，这一事实为实现 LSS 构造的一致参数化带来了障碍。通过在表示 W_j 的向量线性相关时坚持选择 $\varphi(v_j)=\mathbf{0}$ ，一种称为均匀*LSS*的构造克服了这一障碍。当表示 W_j 的向量线性无关，但这样的向量共有 d 个时，它们的正交补 S_j 是平凡的，因此也必须选择 $\varphi(v_j)=\mathbf{0}$。无论哪种情况，选择零向量都可能造成连锁后果，因为这个零向量会使之后任何包含它的集合都线性相关。对于给定的环境维数 d、顶点排序（v_1、.....、 v_n）和索引 j，在均匀 LSS 下使所有选择 $\varphi(v_j)$均为非零向量的条件集合——也就是说，表示 W_j的向量线性无关且 $|W_j|<d$ 始终成立——其发生概率不是 0 就是 1。若其发生概率为 1，即对所有 j都有 $\varphi(v_j)\neq\mathbf{0}$ ，则称采用排序（v_1、.....、 v_n）的均匀 LSS 在维数 d 下弱成功。

3.4. **强成功与均匀 LSS**。 为了使均匀 LSS 弱成功并同时产生忠实表示，需要采用更强的成功判据。对于每个分别选取的 i 、 $i<j$ 和 $v_i\sim v_j$ （特别是指 $v_i\notin W_j$），将 v_i （可能顺序不一）附加到长度为 $k=k(v_j)$ 的列表 W_j 中，并将扩展后的列表记为

$$W_{j;i}=(w_1,\ldots,w_k;v_i).$$

如果均匀 LSS 弱成功，那么以概率 1，表示 W_j 的向量将线性无关；但是，当 $\varphi(v_i)$ 是这些向量的线性组合时，从 S_j 中选取的 $\varphi(v_j)$ 将与 $\varphi(v_i)$ 正交，尽管它们在 G 中相邻，这意味着该表示并不忠实。假设均匀 LSS 确实弱成功，那么对于每个满足 $v_i\sim v_j$ 的 $i<j$ ，表示 $W_{j;i}$ 的向量要么以概率 0 线性无关，要么以概率 1 线性无关。如果均匀 LSS 弱成功，并且此外每个 $W_{j;i}$ 都以概率 1 产生线性无关向量，那么就称均匀 LSS 强成功。

命题 3.9。 *给定一个具有 n 个顶点的图 G、顶点排序 $(v_1,\ldots,v_n)$ 以及环境维数 d，均匀 LSS 强成功当且仅当*

- *均匀 LSS 弱成功，且*
- *均匀 LSS 以概率 1 生成一个忠实的正交表示。*

证明。 假设均匀 LSS 弱成功，并且对于每个 j 以及每个满足 $v_i\sim v_j$ 和 $v_i\notin W_j$ 的 $i<j$ ，均以概率 1 找到一个不与 $\varphi(v_i)$ 正交的 $\varphi(v_j)$。由此可直接推出，表示 W_j 的线性无关向量（它们都与 $\varphi(v_j)$ 正交）的张成空间中不包含 $\varphi(v_i)$，因此表示 $W_{j;i}$ 的向量也线性无关。

反过来，如果均匀 LSS 强成功，那么根据定义，它也弱成功，这就解决了第一个子句。称 $S_{j;i}$ 为 $W_{j;i}$ 中向量张成空间的正交补。若均匀 LSS 强成功，则子空间 $S_{j;i}$ 的维数为 $d-|W_{j;i}|$，且该结论以概率 1 成立。和之前一样，称 S_j

W_j 中向量张成空间的正交补。若均匀 LSS 至少弱成功，则子空间 S_j 的维数为 $d - |W_j|$。给定

$$d - |W_j| = d - (|W_{j;i}| - 1) = (d - |W_{j;i}|) + 1,$$

由此可知，当在 S_j 中随机选取 $\varphi(v_j)$ 时，从余维一子空间 $S_{j;i}$ 中选取的概率为 0，因此均匀 LSS 选取的表示以概率1是忠实的。□

上面的例3.8 展示了均匀 LSS 弱成功但未能强成功的情形：在选取最后一个表示向量 $\varphi(v_4)$ 时，表示 $W_4 = (v_3)$ 的向量集以概率1线性无关；但对于相邻顶点对 $v_1 \sim v_4$，表示 $W_{4;1} = (v_3; v_1)$ 的向量集以概率1线性相关，相应地，$\varphi(v_4)$ 被选取为与 $\varphi(v_1)$ 正交，因而该表示并不忠实。

3.5. **弱于一般位置但强于 SAP**。当均匀 LSS 强成功时，这将以概率1推出：表示不仅是忠实的，而且所得的 Gram 矩阵满足某种一般性条件，而该条件又蕴含 SAP。

定义 3.10。 若实对称矩阵 A 的对角元均非零，且在 A的每一列中，对角线以上的零所对应的行构成 A的一个线性无关行集，则称 A 为上三角零泛型。

命题 3.11（强成功蕴含上三角零泛型）。 给定一个图 G及其顶点排序 $(v_1, \ldots, v_n)$，若环境维数为 d 的均匀 *LSS* 强成功，则所得表示以概率1 为忠实表示，且其格拉姆矩阵 A 为上三角零泛型。

证明。 在整个证明中，凡是陈述某个条件成立，实际含义都是该条件以概率 1 成立。

均匀 LSS 至少弱成功这一事实意味着 $\varphi(\sigma_j)$ 不为 0，因此 A 的对角元 $a_{jj} = \varphi(v_j)^\top \varphi(v_j)$ 均不为 0。根据命题 3.9，均匀 LSS 强成功时表示是忠实的，这意味着 A 第 j 列中对角元以上的零恰好对应于满足 $v_i \in W_j$的那些指标 i。由于表示 W_j 的向量线性无关，子矩阵 $A[W_j]$ 可逆，因此这些行构成 A的一个线性无关行集。由于 j 是任意的，每一列中对角线以上的零所对应的行都构成 A的一个线性无关行集，这意味着 A 是上三角零泛型。□

定理 3.12（上三角零泛型蕴含 SAP）。 给定一个上三角零泛型的实对称矩阵A， A 满足强阿诺德性质。

证明。 设大小为 $n \times n$ 的实对称 A 是上三角零泛型，并设 X 是满足 $A \circ X = 0$（这意味着 $I \circ X = 0$）和 $AX = 0$ 的一个 $n \times n$ 实对称矩阵。为导出矛盾，假设 X 不是零矩阵，并令 j 为 X 中非零列$\mathbf{x}j$ 的最大索引。由 X 的对称性以及事实 $I \circ X = 0$，$\mathbf{x}j$ 的支撑严格位于 X 的对角线上方；又由事实 $A \circ X = 0$，$\mathbf{x}j$ 的支撑位于 A 的第 j 列中对角线上方的零元素位置。由于 A 是上三角零泛型，这组索引对应于 A 的一个线性无关的行集；并且由 A 的对称性，

它也对应于 A 的一个线性无关的列集。因此， $A\mathbf{x}j$（即 $AX = 0$ 的第 j 列）既是零向量，又是 A 的一个线性无关列集的非零线性组合。由矛盾法可得， X 实际上是零矩阵，这表明 A 满足 SAP。□

定义 3.13. 设 G 是一个具有 n 个顶点的图。 G 的最大半正定上零度记为 $\mathrm{M}_+^{\mathrm{u}}(G)$，它是满足以下条件的所有矩阵 $A = [a_{ij}]$ 中零度的最大值：

(1) A 是一个 $n \times n$ 阶实对称半正定矩阵；(2) 存在一个置换矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是上三角零泛型；(3) 对于 $i \neq j$，当 $v_i \not\sim v_j$ 属于 G 时， $a_{ij} = 0$ 成立；(4) 对于 $i \neq j$，当 $v_i \sim v_j$ 属于 G 时， $a_{ij} \neq 0$ 成立。

命题 3.14. 对于任意简单图 G，$\mathrm{M}_+^{\mathrm{u}}(G) \leq \nu(G)$ 成立。

证明。 设 A 是一个零度为 $\mathrm{M}_+^{\mathrm{u}}(G)$ 且满足定义 3.13 假设的矩阵。根据定理 3.12，矩阵 $P^{-1}AP$ 满足 SAP；由于 SAP 具有置换不变性， A 也满足 SAP，因此 A 本身就是一个零度足以证明 $\mathrm{M}_+^{\mathrm{u}}(G) \leq \nu(G)$ 的矩阵。□

3.6. **贪心度**。 主要结果将表明，具有上三角零泛型格拉姆矩阵的忠实正交表示不仅存在于余维数等于 $\delta(G)$ 的情形，也存在于余维数等于一种新度参数的情形；该参数称为 G的贪心度，一般可能大于 $\delta(G)$。

最大基数搜索 (MCS) [16] 会访问图的每个顶点一次，并受以下约束：每次选择的新顶点，都必须与此前访问过的顶点有尽可能多的邻接关系。这个过程也可以等价地看作逐个添加顶点来构建图，形成一系列嵌套的导出子图；此时，MCS 约束意味着每个新顶点都必须贪心地使每个阶段新增的边数达到最大。基于这一观点，本文通常将图的 MCS 排序称为贪心排序。要严谨地表述贪心排序，需要引入一套术语，既涵盖阶段 i实际添加的边数，也涵盖因选择顶点 v_j 而非 v_i所能添加的所有其他边数。

定义 3.15。 给定一个排序 $V(G) = (v_1, \ldots\ldots, v_n)$ 以及满足 $1 \leq i \leq j \leq n$ 的整数 i 和 j，v_j 在阶段 i 的局部度是 $G[\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}]$ 与 v_j 之间的边数，或者换句话说，是集合 $\{v_h v_j \in E$ 的大小： $h < i\}$。

定义 3.16。 如果对于所有 $1 \leq i \leq j \leq n$， v_i 在阶段 i 的局部度至少与 v_j 在阶段 i的局部度一样大，则称排序 $V(G) = (v_1, \ldots\ldots, v_n)$ 为 MCS 或贪心。

与许多其他被称为“贪心”的算法一样，最大化约束只在每一步局部起作用，同一张图的两种贪心排序在中间阶段诱导出的边总数可能不同。不过，这种局部约束确实会带来一些全局倾向：使早期阶段更稠密，将低度顶点推迟到过程后期，并选择一个度特别低的顶点作为排序中的最后一个顶点。尤其值得关注的是，这些全局倾向能在多大程度上被规避，衡量标准是最后一个顶点的度相对较高。例如，对于 $n \geq 2$ 任何一个低度顶点，只需将其选为第一个顶点，就能避免它成为最后一个顶点。同样，

对于 $n \geq 3$ 任何一对相邻的低度顶点，只需在最大基数搜索中先后访问它们，就能避免它们成为最后一个顶点。

定义 3.17。 对于一个 G 简单图， G 的最大贪心最终度或 G的贪心度（记作 $^g\Delta(G)$），是对 G的所有贪心排序而言，排序中最终顶点的度的最大值。

注 3.18。 已知 [15] 在 G的任意最大基数搜索中，所有阶段中先前访问过的相邻顶点数的最大值，是 G的树宽下界，记作 tw(G)。由此可知，在贪心排序末尾可以添加的边数的最大值同样给出了一个下界，

$$^g\Delta(G) \leq \mathrm{tw}(G).$$

例 3.19。 设 T 为一棵具有 $n \geq 2$ 个顶点的树。 T 中度最低的顶点是度为 1 的顶点，并且其中必然有一个会成为任意贪心排序中的最终顶点，因为在每个中间阶段，尤其是在倒数第二个阶段，诱导子图始终是连通的。因此 $^g\Delta(T) = 1$。

显然的界为 $\delta(G) \leq {}^g\Delta(G) \leq \Delta(G)$，在正则图的情况下，两种情形下等号均成立。通常，上界不等式无法避免取严格不等号，但在某些情况下（树除外），至少也可以使下界不等式取严格不等号。目前尚无比穷举搜索效果更好的、用于获得较大最终度数的一般策略；A节中证明，计算$^g\Delta(G)$是一个 NP 困难问题。事实上，文中还进一步证明：对于任意一对不相邻的顶点，判定它们能否同时不作为排序中的最终顶点，是 NP 困难的。

3.7. **主要结果陈述**。到目前为止，本节的大部分内容可以概括为两串不等式

$$\kappa(G) \leq \delta(G) \leq {}^g\Delta(G)$$

and

$$\mathrm{M}^{\mathrm{u}}_{+}(G) \leq \nu(G) \leq \mathrm{M}_{+}(G) \leq \mathrm{M}(G).$$

将在第5.6节证明的主定理，将使这两串不等式能够合并为一串不等式。

定理 3.20 (主定理)。设 G 是一个简单图，其 n 个顶点 $V(G) =(v_1, \ldots, v_n)$ 按贪心排序排列，并设 $d = n -$ 度(v_n)。那么，在 $\mathbb{R}^d$ 上的$(v_1, \ldots, v_n)$ 均匀 *LSS* 强收敛。

结合主定理、命题 3.11 和定理 3.12，可推出以下推论。

推论3.21. 对于任意简单图 G, $^g\Delta(G) \leq \mathrm{M}^{\mathrm{u}}_{+}(G)$.

推论3.22. 强*Delta*猜想成立。

推论 3.23. 前原猜想成立。

推论 3.24。 *Delta* 猜想成立。

注 3.25。参数 $^g\Delta(G)$ 不是子图单调的，但基于 SAP 的零度参数（如 $\nu(G)$）具有子图单调性。这可以改进下界：如果 G' 是 G 的一个子图，通过显示 $^g\Delta(G') > {}^g\Delta(G)$ 破坏单调性，那么

$$^g\Delta(G') \le \nu(G') \le \nu(G)$$

给出的界严格强于 $^g\Delta(G) \le \nu(G)$。

4. 悬挂花园构造

4.1. 参数化。 目标是使用自由变量，对均匀 LSS 过程中作出的所有随机选择进行完整参数化，这些自由变量编码了各阶段作出的选择。过程结束时，矩阵 R 的每个条目 r_{ij} ——也就是说，每个向量 $\varphi(v_j)$ 的每个条目 i ——以及整体格拉姆矩阵 T 的每个条目 t_{ij} ，都将成为一组独立交换变量上的（规模庞大、复杂的）整数系数多项式。悬挂花园构造将以图示方式组织这些大型多项式，从而便于推理主要结果。

4.2. 排序与依赖关系。 假设 G 具有固定的排序

$$V(G) = (v_1, \dots, v_n).$$

目前尚不假设该排序是贪心的（不过稍后会作此假设）。 G 的相邻顶点在 LSS 构造中不会直接相互影响，而非相邻顶点 $i \not\sim j$ 之间则存在一种取决于排序的不对称关系：对于 $i < j$，若有 $v_i \in W_j$ 但没有 $v_j \notin W_i$，则较早选出的 $\varphi(v_i)$ 会对较晚选出的 $\varphi(v_j)$ 施加正交约束，但反之则不会。均匀 LSS 对 $\varphi(v_j)$ 施加的正交约束数量记为 k，回顾一下

$$k(v_j) = |W_j|.$$

4.3. 独立与依赖节点变量。 每个顶点 v_1、v_2、v_3、.....的 G 都会产生一类 α、β、γ、.....节点变量，其中每个变量都关联一个$k = k(v_j)$，该关联确定了等于 $k+1$ 的元数（参数个数）。一类节点变量是一个交替函数

$$\{1, \dots, d\}^{k+1} \to \mathbb{R}.$$

该函数的参数是索引，所得变量使用下标记法而非函数记法表示。例如，假设 $k(v_3) = 2$ 产生了一类 γ、元数为 $2+1$ 的节点变量。将三个索引参数应用于交替函数γ时，不写作 $\gamma(s, t, u)$，而写作

$$\gamma_{s,t;u}.$$

（或许有必要解释一下：为什么将元数 3 表示为总和 $2+1$，以及为什么在 γ的最后一个下标前放置分号？这些选择预示着，在花园图中，交替函数（例如 γ）的最后一个参数是特殊的。）独立节点变量 是指下标严格递增的节点变量。因此，一个节点变量类中的自由变量数或独立自由度为 $\binom{d}{k+1}$。例如， $d = 4$ 将给出上述类 γ中的以下独立节点变量：

$$\gamma_{1,2;3}, \gamma_{1,2;4}, \gamma_{1,3;4}, \text{ and } \gamma_{2,3;4}.$$

确定节点变量类的函数必须具有交替性，其含义等价于以下两个约束：

（1）任何索引重复的节点变量，其值都为 0；例如，

$$\gamma_{3,1;3} := 0.$$

（2）任何索引各不相同但未按递增顺序排列的节点变量，都是一个依赖节点变量，其值要么直接等于一个独立节点变量，要么等于其否定，符号由将各参数置于有序位置的置换的符号决定。例如，

$$\begin{aligned} \gamma_{2,1;3} &:= -\gamma_{1,2;3} \\ \text{and} \quad \gamma_{4,1;3} &:= \gamma_{1,3;4} \end{aligned}$$

是两个依赖节点变量。

4.4. I 型和 II 型花园。一个悬挂花园图（或简称花园，）呈矩形，由导管连接各种内部组成部分，如图 1（I 型悬挂花园）和图 2（II 型悬挂花园）所示。每条导管的下端都连接到至少一个内部组件的上边界，并且几乎每条导管都形成一条垂直连接，同时还连接到另一个内部组件的下边界。唯一的例外是花园中最上方的一条导管。最上方的导管连接如下：

- I型花园有一条最上方的导管，它从矩形花园的上边界伸出，形成一个单独的外部连接。
- II 型花园的最上方导管是一条 $\cap$连接，连接两个内部组件的上边界。II 型花园没有外部连接。

4.5. 内部组件与导管的放置。 花园中的每个内部组件有两种可能的形式：

- 输入框 是图中的一个矩形空白区域，有一条导管从其上边界垂直伸出。输入按从左到右的顺序编号为 $\mathcal{I}_1$ 至 $\mathcal{I}_q$，编号依据并非其物理位置，而是按字典序排列，且分支较高者优先。

- 节点 是一个圆角矩形，其标签是某个节点变量类的名称（例如， α， β， γ，..... ）。每个节点都有一条导管从其上边界垂直伸出。此外，对于元数为 $k+1$ 的节点变量类，该节点的下边界有 k 条垂直向下延伸的导管，从左到右编号为导管 1 至 k。上方导管编号为导管 $k+1$。同一个花园中的多个节点可以标记为同一节点变量类，而名称相同的节点也具有相同的元数。

4.6. 输入匹配、导管索引和赋值。花园中 q 内部输入框的垂直位置并不重要，重要的只是它们的排序 $\mathcal{I}_1$，.....，$\mathcal{I}_q$。如果每个输入 $\mathcal{I}_j$ 都已配有一个输入向量 $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^d$，则称花园是匹配的。（不含内部输入框的花园 $q = 0$无需选择任何向量即可自然地视为匹配的。）如果每条导管（包括最上方的导管）都标有集合中的一个索引，则称匹配的花园是已编索引的

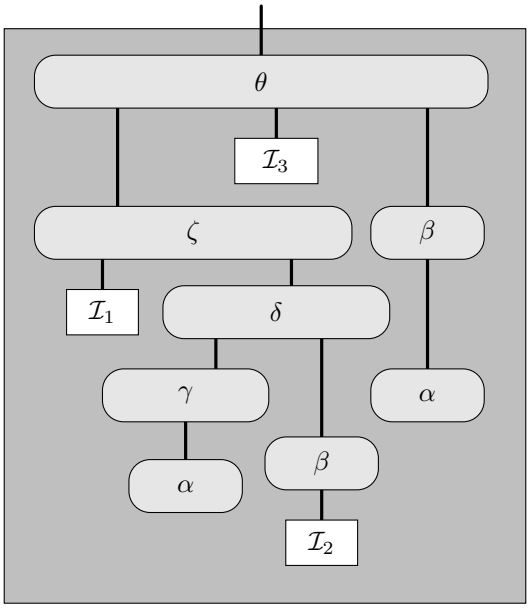


FIGURE 1. I型悬挂花园图

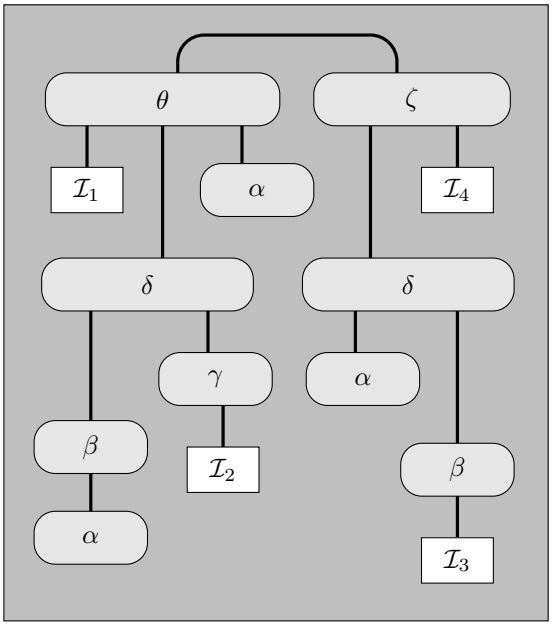


FIGURE 2. II 型悬挂花园图

$\{1, \ldots, d\}$。带指标匹配花园的赋值 计算为以下因子 的乘积：

- 每个内部输入框 $\mathcal{I}_j$ 的上边缘都连接着一个索引标签为 i的导管，并且已配有输入向量$\mathbf{x}_j$。该输入框贡献一个因子，即向量$\mathbf{x}_j$的第 i 个分量。
- 每个内部节点都标有一个节点变量类的名称，例如 α，其元数为 $k+1$。它有 k条下导管，其索引标签依次为（从左到右）s_1 至 s_k，并有一条索引标签为 s_{k+1}的上导管。该内部节点贡献一个因子，其值等于节点变量求值

$$\alpha_{s_1,\dots,s_k;s_{k+1}},$$

  该求值可能是一个独立节点变量、一个求值为带符号独立节点变量的依赖节点变量，或者在某个索引重复时为 0。
- I型带指标匹配花园的上边界有一条向外延伸的导管，其索引标签为 i。这条最上方的连接贡献一个向量因子，其值等于$\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^d$的第 i个标准基向量。
- 带标签匹配花园的整体赋值是所有贡献因子的乘积；对于 I型花园，该乘积是 $\mathbb{R}^d$ 中的单支撑向量，而对于 II 型花园，则是一个标量。

注意，每当某个内部节点具有两个索引标签相同的相邻导管（可能包括其上方编号为 $k+1$ 的导管）时，带指标匹配花园的整体赋值为零（即，I型中的零向量，或 II 型中的标量 0）。

观察 4.1。 *I*型或 *II* 型带指标匹配花园的赋值关于匹配中的每个输入向量都是多线性的。

4.7. **作为向量函数的花园**。 每个具有 q 个输入框的 I型花园 g 都可以作为一个从向量 q 元组映射到向量的函数，

$$g : \left(\mathbb{R}^d\right)^q \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

类似地，每个具有 q 个输入框的 II 型花园 g 都可以作为一个从向量 q元组映射到标量的函数，

$$g : \left(\mathbb{R}^d\right)^q \longrightarrow \mathbb{R}.$$

在这两种情况下，令 p 表示花园中的导管总数（包括最上方的导管）。函数在输入 $\mathbf{x}_1$、.....、 $\mathbf{x}_q$ 上的值，是通过依次将输入向量与输入框进行匹配，然后对带指标匹配花园的导管所有可能的索引方式（共 d^p 种）下的每个赋值求和得到的。

观察 4.2. 带指标匹配花园图的赋值多线性性可推广为：由 *I* 型或 *II* 型悬挂花园图定义的函数关于所有输入均为多线性的。

4.8. **零输入花园作为向量或标量**。 具有 $q = 0$ 个输入框的花园给出一个定义域为单点的函数，因此可以直接求值。I型零输入花园表示 $\mathbb{R}^d$中的一个向量，其每个分量都是关于独立节点变量的整数多项式。II 型零输入花园表示一个标量，该标量是关于独立节点变量的整数多项式。

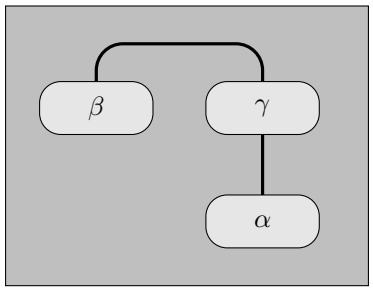


FIGURE 3. 一个 II 型零输入悬挂花园，其求值结果是关于线性无关节点变量的整数多项式。

例4.3。 考虑图3所示的II 型零输入花园。这里只有两条导管。最上方的导管左端连接到一个标签为 β、元数为 $0+1$的节点，右端连接到一个标签为 γ、元数为 $1+1$的节点。其下方 γ 是一个标签为 α、元数为 $0+1$的节点。取 $d=2$。为这对导管编制索引并得到标量赋值共有四种可能方式。这些赋值的和，

$$0+\alpha_1\gamma_{2;1}\beta_2+\alpha_2\gamma_{1;2}\beta_1+0=(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\gamma_{1;2},$$

正如所承诺的，它是关于线性无关节点变量的整数多项式。

观察4.4。 *II* 型零输入花园的标量多项式，以及 *I* 型零输入花园的向量分量多项式，具有如下多齐次性：对于多项式中的每个单项式，来自给定类 α 的线性无关节点变量的总次数，等于花园中标记为 α的节点数量。

4.9. **悬挂花园图的复合**。 I 型悬挂花园图形状合适，包括其最上方的导管，因此可以放入另一个悬挂花园图（I 型或 II 型）的一个输入框中。随后擦除原输入框的边界，所得结果便是一个新的花园，称为原外层花园与内层花园的复合 。图4展示了这样的复合，其中虚线表示原输入框的边界，内层花园被放入该输入框中。

观察 4.5。 花园的复合就是函数复合。

例4.6。 在图4中，复合的外部花园有三个输入框，表示函数 $f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)$。其输入框的顺序为 $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\mathcal{I}_3$，其中 $\mathcal{I}_2$ 容纳内部花园。复合的内部花园有两个输入框，表示函数 $g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$。复合花园有四个输入框，表示函数

$$h(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4)=f(\mathbf{x}_1,g(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3),\mathbf{x}_4).$$

复合赋予悬挂花园拟运算子的结构。这个拟运算子让人联想到 Vaughan F. R. Jones 的平面代数（并且部分受其启发） [10], 不过，在这个简单的设置中并不需要平面代数的全部强大功能，因此相应的构造也更为简单。例如，花园中没有环、涉及阴影区域和非阴影区域的奇偶性考量，也没有非平凡的平面同痕。均匀 LSS 只需要一个普通拟运算子。

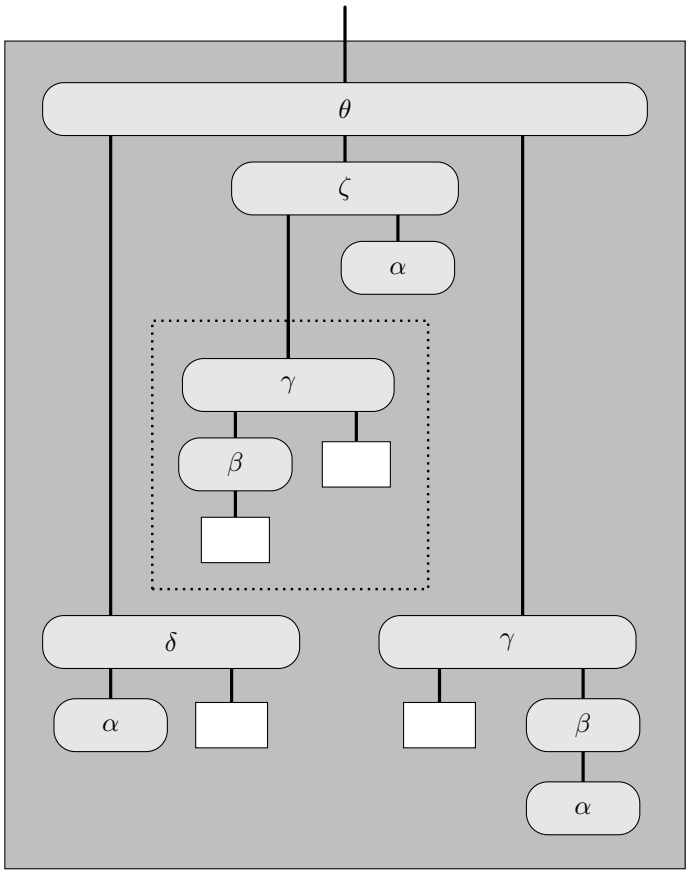


FIGURE 4. 悬挂花园图的复合

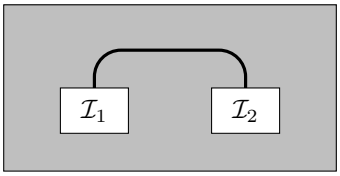


FIGURE 5. 没有内部节点的唯一 II 型悬挂花园图表示内积函数。

任何悬挂花园图都可以通过复合由更简单的花园构造出来，直到花园中至多有一个内部组件是节点。

4.10. **简单构件**。

4.10.1. 零节点，*II* 型。 如图 5 所示，最简单的 II 型花园有两个输入框、没有内部节点，以及一条位于最上方的导管。

观察 4.7。 由没有内部节点的 *II* 型悬挂花园图表示的函数是内积，

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x_2}) = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2.$$

4.10.2. 零节点，*I*型。 最简单的 I 型花园有一个输入框、没有节点，以及一条位于最上方的导管。它表示恒等函数，

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

当与它复合时，无论将它作为复合中的内花园还是外花园，都会使其他任何花园保持不变。

4.10.3. 一个节点，*II* 型。 给定一个由节点变量构成的类 α，其元数为 $k+1$，根据该节点放在最上方导管的左侧还是右侧，有两种方式可以构造仅含此内部节点的 II 型悬挂花园图。将 α 放在左侧较为方便；将由此得到的花园记作 g_α。图 6 展示了元数为 $2+1$ 的 α 所对应的 g_α。将 α 放在左侧时，围绕 α 的导管固定排序 (1，……， k； $k+1$) 与 $q = k+1$ 个输入框的排序 ($\mathcal{I}_1$，……， $\mathcal{I}_{k+1}$) 相对应。稍微滥用一下记号，也将 g_α 所表示的函数记作

$$g_\alpha(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}).$$

命题4.8。 对于任意一类 α 节点变量，函数

$$g_\alpha : \left(\mathbb{R}^d\right)^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

是一个交错多重线性函数。

证明。 根据观察4.2，多重线性性显然成立。考虑花园 g_α 的两个匹配 A 和 B，它们的区别仅在于交换了两个输入框$\mathcal{I}_i$ 和 $\mathcal{I}_j$的输入向量。给定 A的一种指标编排，考虑将导管 i 和 j的索引标签互换后得到的 B 的指标编排。由于 α 是关于其索引的交替函数，并且对于 A 和 B，提取的向量分量相同，因此，经过指标编排的 B 的赋值是经过指标编排的 A的赋值的相反数。对 A 的导管所有可能的指标编排求和时，在每种情况下对 B 应用相同的索引互换，所得的也是对 B的导管所有可能的指标编排求和。因此， B 表示的标量值是 A表示的标量值的相反数，并且 g_α 是一个交错多重线性函数，证毕。□

备注 4.9。 在最上方导管右侧（而非左侧）有一个内部节点 α 的唯一 II 型花园，在 k 为偶数时表示相同的函数 g_α，在 k 为奇数时表示函数 $-g_\alpha$（它也是一个交错多重线性函数）。

推论 4.10。 如果 g_α 的 $k+1$ 个输入之间存在线性相关，则该函数的值为 0。

4.10.4. 单个节点，*I*型。给定一个元数为 $k+1$ 的节点变量类 α，构造一个仅含此内部节点的 I 型悬挂花园图的方法是唯一的。作为一个函数，它从 $\mathbb{R}^d$ 接收 k 个输入，并生成一个同样属于 $\mathbb{R}^d$ 的向量。将这个花园及其关联函数都称为 φ_α。在复合运算下，只有一个节点的 I 型花园是构造更复杂悬挂花园图的核心工具。再参考图 6， g_α 可以看作花园的复合

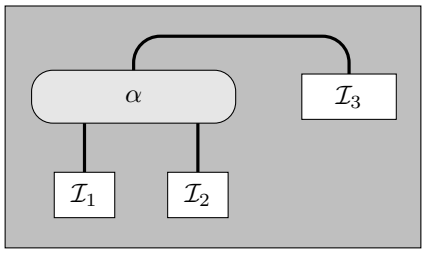


FIGURE 6. 元数为 $2+1$ 的花园 g_α，用于 α。

，其中 φ_α 被插入内积花园的左侧输入中。

命题 4.11。给定一个由 k 个向量组成的元组 $W = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$，$\varphi_\alpha(W)$ 的输出与 W 的张成空间正交。

证明。假设 $\mathbf{y}$ 属于 W 的张成空间。那么根据推论 4.10，

$$g_\alpha(W; \mathbf{y}) = 0.$$

另一方面，根据观察 4.7 和观察 4.5，

$$g_\alpha(W; \mathbf{y}) = \varphi_\alpha(W)^\top \mathbf{y}.$$

□

悬挂花园图示的既定目的是为 LSS 构造提供参数化，而命题 4.11 表明，花园的核心工具确实可用于选取一个与某些先前选定的向量集合正交的向量。

例 4.12。在三维空间 $d = 3$ 中，设 α 是元数为 $2+1$、具有一个来自 $\binom{3}{2+1} = 1$ 的唯一独立自由变量的节点变量类。那么 φ_α 是叉积的倍数，

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x_2}) = \alpha_{1,2;3}\left(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\right).$$

既定目标的另一方面是，参数化应以自由的可交换变量集合中的多项式表示，即独立节点变量。

观察 4.13。如果 φ_α 的每个输入都是一个向量，且其各项都是独立节点变量上的整系数多项式，那么输出也将是一个向量，其各项都是独立节点变量上的整系数多项式，包括 α 的节点变量。输出向量多项式的总多重次数等于输入向量多项式多重次数之和，再加上独立节点变量 α 的度1 。

最后，目标不仅是对 LSS 进行参数化，尤其还要对一致的 LSS 进行参数化；这要求当先前选定的向量线性相关时，$\varphi(v_j) = \mathbf{0}$。

命题 4.14。假设 k 元组 $W = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ 中的向量线性相关。那么 $\varphi_\alpha(W) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$。

证明。 令 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ 为任意一个向量。由推论 4.10、观察 4.7 和观察 4.5，可得：

$$\varphi_\alpha(W)^\top \mathbf{y} = 0.$$

但唯一与所有$\mathbf{y}$ 正交的向量是零向量 $\varphi_\alpha(W) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$。 □

现在，讨论将悬挂花园图作为均匀 LSS 的一种参数化所需的工具已经齐备。

5. LSS gardens, greedy orderings, and non-cancellation

5.1. 仅限 LSS 花园。 先稍作回顾背景，以便进入这一阶段：

回想第 4.1 节中提出的目标：通过将表示矩阵 R 和格拉姆矩阵 $T = [t_{ij}] = R^\top R$ 的各项表示为自由交换变量上的多项式，来参数化均匀 LSS。

回顾第 3.2 节中的记号

$$W_j = (w_1, w_2, \ldots, w_k) := (v_i \in V \mid i < j \text{ and } v_i \not\sim v_j),$$

其中 $k(v_j) = |W_j|$.

回顾第 4.3 节，每个 G 的顶点 v_1，v_2，v_3，... 都应与节点变量的某个特定类 α，β，γ，... 相关联。为使这种关联更加明确，将与 v_j 相关联的节点变量类记为 $\alpha(v_j)$，例如可得

$$\alpha(v_1) = \alpha; \quad \alpha(v_2) = \beta, \quad \alpha(v_3) = \gamma,$$

依此类推。 $\alpha(v_j)$ 的元数为 $k(v_j) + 1$。

例 5.1。 给定带有 $d = 4$ 的 $k(v_6) = 2$，与 v_6 相关联的元数为 $2 + 1$ 的自由独立节点变量可写为

$$\alpha(v_6)_{1,2;3},\ \alpha(v_6)_{1,2;4},\ \alpha(v_6)_{1,3;4},\ \text{and } \alpha(v_6)_{2,3;4}.$$

从这一点开始，所考虑的唯一悬挂花园将是专门用于建模均匀 LSS 的悬挂花园。

定义 5.2。 一个*LSS* 花园 是满足以下约束的悬挂花园图：

- 不存在输入框。
- 对于 I型，顶端节点标记为 G 中某个顶点的节点类。
- 对于 II 型，两个顶端节点都标记为 G 中顶点的节点类。

- 对于花园中标签为 $\alpha(v_j)$ 的任意节点 A，考虑其对应的非相邻前驱有序列表 $W_j = (w_1, \ldots\ldots, w_k)$。然后， A 的下导管（其数量为 $k = k(v_j)$）必须**依次**连接到标签为

$$\alpha(w_1), \ldots, \alpha(w_k).$$

这些约束仅为以下对象给出了精确的递归定义：

- n I型花园，– 表示均匀 LSS 期间选取的向量 $\varphi(v_j)$，– 其中每个向量都是表示矩阵 R 的列 j，

- 和 n^2 个 II 型花园，– 它们是 I型 LSS 花园的两两内积，– 也是格拉姆矩阵 $T = R^\top R$ 的条目 t_{ij}。

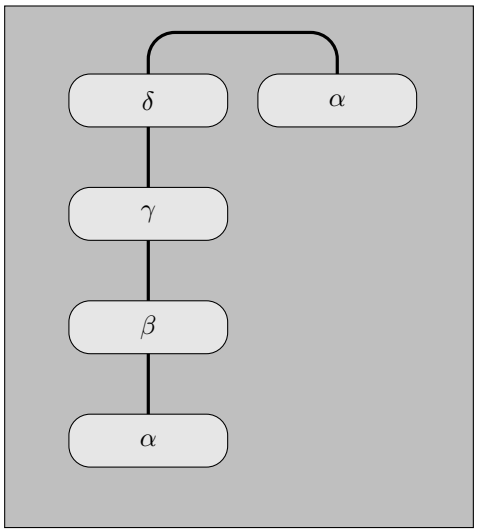


FIGURE 7. 例3.8 和例 5.4 的悬挂花园图。

由于只有当 v_i 严格先于 v_j 时， v_i 才能属于 W_j ，因此递归确实会终止；但经过反复分支后，整个图中的节点数可能会随 n呈指数增长。

命题 5.3。 设 g 是一个 *II* 型 *LSS* 花园，其顶层节点标签为 $\alpha(v_j)$和 $\alpha(v_i)$， $i < j$, 且 v_j 和 v_i 在 G中不相邻。那么 g 的取值为标量0。

证明。 这由节点的交替性质和命题4.8可得：称标记为 $\alpha(v_i)$的顶层节点及其整个下游部分为 A。此外，在标记为 $\alpha(v_j)$的顶层节点正下方某处还有一个标记为$\alpha(v_i)$的节点；称这个较低的副本及其整个下游部分为 B。于是 A 和 B 完全相同，表示同一个向量，代入交替函数后结果为 0。

这也可以更直接地看出：对于 g 的任意导管指标编排，只要 A 上方和 B 上方的导管标签不同，就考虑这样一个置换：交换这两个导管标签，并将 A 下部的所有标签与 B下部对应的所有标签一并交换。这个置换在所有能产生非零单项式的导管指标编排方式之间建立双射；对于每一对这样的方式，其赋值单项式完全相同，唯一区别是相邻于标记为 $\alpha(v_j)$的节点的导管标签交换导致符号改变。求和时，这些单项式两两抵消，最终标量值为 0；这正是正交表示的格拉姆矩阵中 t_{ij} 对应的结果，其中 G 的向量 v_j 和 v_i 不相邻。□

5.2. **会出什么问题?** 完成了对均匀 LSS 的完整参数化后，值得重新审视例3.8：其中均匀 LSS 确实给出了正交表示，甚至弱意义上也成功了，但在强意义上并未成功。这将从花园和多项式的角度说明，若要保证存在余维为 $^g\Delta(G)$ 的忠实正交表示，就必须设法避免哪类问题。

例 5.4。和之前一样，所考虑的图 G 是 P_4的补图，它是 P_4 的另一个副本，但采用了一种特殊的顶点排序，使得每个向量选择 $\varphi(v_j)$ 只需受与紧邻前一个向量正交这一条件约束。失败发生在维数 $d = 2$ 中，格拉姆矩阵中出问题的元素为 t_{41}；它本应表示 G的一条边，但 LSS 却强制其取值为 0。图 7 所示的与元素 t_{41} 对应的悬挂花园应能检测到这一现象。请注意，没有任何节点拥有多于一条下导管，因此均匀 LSS 至少在维数$d = 2$下弱意义上是成功的。特别是，可以用某些方式为这个零输入花园的导管编索引，从而得到一个非零单项式。确切地说，这样做恰好有两种方式。如果最上方的导管标记为索引 1，那么其他所有导管的索引都必须交替排列，从而得到赋值

$$\alpha_1\,\delta_{2;1}\,\gamma_{1;2}\,\beta_{2;1}\,\alpha_2 = \alpha_1\,\alpha_2\,\beta_{1;2}\,\gamma_{1,2}\,\delta_{1;2}.$$

另一方面，如果最上方的导管标记为索引 2，那么其余导管的索引也必须交替排列，从而得到赋值

$$\alpha_2\,\delta_{1;2}\,\gamma_{2;1}\,\beta_{1;2}\,\alpha_1 = -\alpha_1\,\alpha_2\,\beta_{1;2}\,\gamma_{1,2}\,\delta_{1;2}.$$

仅有的两个非零单项式彼此抵消，因此总体上得到 $t_{41} = 0$ 。

人们很容易认为，上述例子规模很小，因此这种抵消只是“偶然”现象，在足够大或足够复杂的例子中不会出现。然而，确实存在复杂得多的例子——例如，几乎任何关于线性几何中有限配置的关联定理都会产生这类例子——其中数量多得多、规模也大得多的非零单项式，仍会协同作用，恰好两两抵消。要保证得到忠实的正交表示，就必须有某种机制彻底避免这种棘手的两两湮灭。

如前所述，起作用的机制将来自以下因素的结合：

- 贪心顶点排序，以及
- 在适当的单项式序中的首项唯一性。

5.3. **贪心排序与反贪心排序**。 从此处开始，假设顶点排序 $V(G) = (v_1, \ldots, v_n)$ 是贪心的。

有时，与其讨论 G 本身上的贪心排序，不如转而考虑其补图 $H = G$上的“_反贪心”排序。这一点尤其有用，因为所考察花园中的导管连接通常来自 G中的非邻接关系，对应于 H的边。从概念上说，每次引入一个新顶点 v_j 时， H 上的反贪心排序会尽可能少地从 H 引入新边。为使这一点更加精确，有必要重述定义 3.15——不过改为针对 H 而非 G，并采用新的记号——然后用新的记号将定义 3.16 改写为与之相反的形式。

定义 5.5. 给定一个排序 $V(H) = (v_1, \ldots\ldots, v_n)$ 以及满足 $1 \le i \le j \le n$ 的整数 i和 j， H 中 v_j 在阶段 i的局部度，记作 $k_i(v_j)$，是 H中连接 $H[\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}]$与 v_j的边数，换言之，即集合 $\{v_h v_j \in E(H) : \ h < i\}$的大小。 H 中 v_j 在其自身阶段 j的局部度，或 $k_j(v_j)$，简记为 $k(v_j)$。

注 5.6. 符号 $k(v_j)$ 看起来与一个已有的、关联图 $G = H$ 的记法相冲突，但实际上它们表示的是同一个函数

$$k(v_j) = |W_j|.$$

定义 5.7。 若排序 $V(H) = (v_1, \ldots, v_n)$ 满足对所有$1 \leq i \leq j \leq n$，弱不等式

$$k(v_i) \leq k_i(v_j)$$

成立。

观察 5.8。 给定一个简单图 G 及其补图 $H = G$，共同顶点集 $V(\overline{G}) = V(H)$ 的一个排序是 G 的贪心排序，当且仅当它是 H的反贪心排序。

观察 5.9。对于 $i < j$,

$$k_i(v_j) \leq k_j(v_j) = k(v_j)$$

总是成立。此外，若该顶点排序是 G的贪心排序（因此也是 H 的反贪心排序），

$$k(v_i) \leq k_i(v_j) \leq k(v_j)$$

也成立，并且函数 $k\,(v_j)$ 关于 j弱单调递增。

对于贪心排序， $k(v_j)$的单调性是一个原因：在确定足以使 LSS 强力成功的维数时，决定 $g\Delta(G)$的只是最后一个顶点的（最大可能）度。

5.4. **LSS 花园中的贪心结构**。定义反贪心不等式对贪心 LSS 花园的结构施加了一个关键约束。

命题 5.10。假设 G 中的顶点按贪心顺序排列，并且对于任意满足 $k = k\,(v_j)$ 的顶点 v_j，考虑以下有序列表

$$W_j = (w_1, \ldots, w_k)$$

中与 v_j不相邻的前驱。那么对于任意 $s \in \{1, \ldots, k\}$，不等式

$$k(w_s) < s$$

严格成立。

证明。 令 i 满足 $w_s = v_i$，这意味着

$$k(w_s) = k(v_i) \leq k_i(v_j)$$

必须成立，因为定义不等式使 $H = G$ 上的排序成为反贪心排序。列表$\overline{W}_j$ 的排序经过精心安排，恰好使得

$$k_i(v_j) = s - 1,$$

给予

$$k(w_s) < s$$

如所声称的。 □

推论 5.11。 在任意贪心排序图 G的 *LSS* 花园中，考虑任意标记为 $\alpha(v_j)$ 的节点及其 $k = k\,(v_j)$ 个有序子节点。对于任意 $s \in \{1, \ldots, k\}$，第 s 个子节点自身的子节点数严格少于 s 。

命题5.12。 假设 G 的顶点按贪心顺序排列，并且对于任意顶点 v_j，若满足 $k = k(v_j)$ 则考虑有序列表

$$W_j = (w_1, \ldots, w_k)$$

非相邻前驱的数量为 v_j。设 v_i 是图 G 中与 v_j 相邻的顶点（因此不出现在 W_j 中），并设 s 满足列表 W_j 中恰有 $s-1$ 个顶点在 G 的顶点排序中排在 v_i 之前。那么

$$k(v_i) < s$$

严格成立。

证明。 与前一个证明一样，

$$k(v_i) \leq k_i(v_j)$$

必须成立，并且如前所述，列表 W_j 的排序满足

$$k_i(v_j) = s - 1,$$

给出

$$k(v_i) < s$$

正如所声称的。 □

推论 5.13。 设 g 是贪心排序图 G 的一个 *II* 型 *LSS* 花园，其顶端节点标记为 $\alpha(v_j)$ 和 $\alpha(v_i)$，$i < j$，其中 $v_j \sim v_i$ 属于 G。考虑标记为 $\alpha(v_j)$ 的顶端节点及其 $k = k(v_j)$ 个有序子节点，分别为 $W_j = (w_1$、.....、$w_k)$。设 s 是将 v_i 按顺序插入列表 W_j 后所处的位置。那么，标记为 $\alpha(v_i)$ 的顶端节点的子节点数少于 s 。

5.5. **字典序项排序**。 为了证明花园多项式中的单项式并非都成对抵消，选出一个没有抵消伙伴的特定单项式会很有用；具体做法是指定一种项排序，使这个特殊单项式具有严格最高的优先级。一般原则是，按字典序，较早的顶点以及较小的数具有较高优先级。也就是说，这种排序是字典序的，既按照节点变量类

$$\alpha(v_1) > \alpha(v_2) > \cdots > \alpha(v_n),$$

并且，在每个节点变量类中，按照独立节点变量的字典序排列，索引越小，优先级越高。例如：

$$\alpha(v_3)_9 > \alpha(v_4)_{1,7;8} > \alpha(v_4)_{2,3;6} > \alpha(v_4)_{2,4;5} > \alpha(v_5)_{1,2;3}.$$

事实上（根据观察4.4），给定花园多项式中的所有单项式，在每个节点变量类中都具有相同的总次数，因此该次数不会影响优先级。字典序的意义在于：比较单项式时，只有当较早节点类中的独立节点变量之积在两侧完全相同时，后续节点类中的排序才会产生影响。

引理5.14 (唯一单项式引理**)**。 设 g 是一个 *I* 型贪心 *LSS* 花园，其顶层节点标签为 $\alpha(v_j)$ 和 $\alpha(v_i)$，$i \leq j$，且在 G 中 $v_i = v_j$ 或 $v_j \sim v_i$ 成立，并设 d 至少为 $k(v_n) + 1$。那么，在 g 的所有导管指标标记中，按字典序具有最高优先级的非零单项式唯一存在，因此没有其他非零单项式能够将其消去。

证明。 根据观察 5.9，若在贪心排序中 $d \geq k(v_n) + 1$ 成立，则对所有 $j \leq n$，$d \geq k(v_j) + 1$ 都成立，并且有足够的索引可用，因此至少在先验意义上，没有节点会被迫拥有两条索引标签相同的相邻导管。（等价地，尽管这对引理的证明并非必要，若对所有 v_j 都有 $|W_j| < d$，则选取 $\varphi(v_j)$ 所依据的子空间 S_j 的维数始终至少为 1，而且均匀 LSS 至少会弱成立。）

在考虑完整的归纳证明之前，我们先考察一些简单情形——既为了寻找模式，也为了确立归纳基例。由于排序首先按照节点变量类进行字典序排列，在标记为 $\alpha(v_2) = \beta$ 的节点周围的导管中进行的任何指标编排，都要等到标记为 $\alpha(v_1) = \alpha$ 的节点周围的所有导管都编排好索引后才会产生影响，依此类推。第一个顶点 v_1 有 $k(v_1) = 0$，且所有标记为 α 的节点的元数都是 $0 + 1$，也就是说，其上方只有一条导管。为了获得最高优先级，所有这类导管都必须标记为 1，前提是这样做能得到一个非零单项式——而这确实可行，因为 α 从不会同时标记两个互为直接兄弟节点的节点。

如果 v_1 恰好是 G 中的一个孤立顶点，那么 $k(v_2) = 1$，每个标记为 β 的节点下方都有一条标记为 1 的导管，通向一个标记为 α 的节点；每个子节点列表都以一个标记为 α 的首节点开头，且该节点上方有一条标记为 1 的导管；凡是出现标记为 β 的节点，它都将是子节点列表中的第二个节点，而根据字典序优先级，它上方的导管将标记为 2，同时避免出现两条标记为 1 的导管与 β 相邻，也避免出现两条标记为 1 的导管与上方的节点 β 相邻。由于从不会有两个兄弟节点都标记为 β，目前尚不需要使用大于 2 的索引。

不过，在大多数情况下，当 v_1 不是 G中的孤立顶点时，在贪心排序中，v_2 必须与 v_1相邻，因此 v_2 也具有元数为 $0 + 1$的 $k(v_2) = 0$。按照字典序优先级，在考虑标记为 γ的节点之前，所有标记为 β 的节点都必须被已编入索引的导管完全围绕。标记为 β 的节点最希望其唯一的上方相邻导管标记为索引1，只要这样做仍能使单项式非零即可。不过，假设某个节点（例如标记为 $\alpha(v_4) = \delta$的节点）下方同时有一个标记为 α 的节点和一个标记为 β的节点。它们的上方导管不能都标为索引1，否则这个 δ 就会有两条相邻导管带有相同的索引标签，从而使索引赋值产生零单项式。第一个标记为 α 的子节点优先，已经为其导管取得了索引1，因此第二个标记为 β 的子节点必须在其上方导管采用次选索引标签2。另一方面，凡是标记为 β 的节点作为第一个子节点时，都可以得到首选项，其上方导管的索引标签为1。

目前的模式是，任意节点下方通向 $(w_1, \ldots, w_k)$ 的下导管总是依次获得从 1 到 k 的标签。这一点将通过归纳法证明，但有一个例外：考虑两个顶端节点中值较高（或相等）的那个，标记为 $\alpha(v_j)$，其中 $k = k(v_j)$ 和 $W_j = (w_1, \ldots, w_k)$。另一个顶端节点 $i \leq j$ 的标签 $\alpha(v_i)$ 不会立即出现在下方的较低标签 $\alpha(w_s)$ 中，因为在 G 中，v_i 与 v_j 相邻（或相等）。创建一个列表

$$W'_j = (w'_1, \ldots, w'_{k+1})$$

其中，v_i 已按正确顺序插入 W_j中，并令 $v_i = w'_t$ 对应范围 $1 \leq t \leq k + 1$中的某个t。因此，除了非例外情形之外，还需证明：第一个顶层节点（标记为 $\alpha(v_j)$）的下导管从 1 到 $t - 1$ 依次获得索引标签 1 到 $t - 1$，最上方的

从 $\alpha(v_j)$到 $\alpha(v_i)$的导管获得索引标签 t，并且下导管 t到 k依次获得索引标签 $t+1$ 到 $k+1$。换言之，与顶层 $\alpha(v_j)$相邻的导管按照导管另一侧节点标签的优先级依次编为 **1** 到 $k+1$。（作为合理性检查，如果优先级相同，即 $v_i \not\sim v_j$ 位于 G 中，因此 v_i 等于某个 w_s，则解决平局的两种方式会产生两个符号相反、彼此湮灭的最高优先级单项式。）在 $v_i = v_j$的情形下，不清楚上述讨论应适用于两组下导管中的哪一组，但实际上两组之间存在完全对称：在两侧，子节点都按顺序获得从 **1** 到 k 的导管标签，而它们之间最上方的 ⌜形导管获得标签 $k+1$。

假设根据归纳法，对于某个顶点编号 v_u,$1 < u \leq n$ 之前（不包括该顶点编号），导管索引已严格按照字典序优先级分配，且迄今为止的结果始终符合所需模式。现在，按照字典序优先级，所有与标记为 $\alpha(v_u)$ 的节点相邻的导管都必须先分配索引，之后才需要考虑标记为 $\alpha(v_{u+1})$ 或更高的节点。根据归纳法，所有标签低于 $\alpha(v_u)$ 的节点，其下导管和上导管都已编入索引，并符合该模式。根据归纳法，每个标签为 $\alpha(v_u)$ 的节点，其所有下导管都已编入索引，但上导管尚未编入索引。根据归纳法，凡是标记为 $\alpha(v_u)$ 的节点作为子节点出现的地方（如果 $u = i$，也可能作为顶层节点或伪子节点出现），所有排在它之前的子节点都已按子节点顺序将其上导管编入索引。如果 $v_u = v_j$，那么标记为 $\alpha(v_j)$ 的顶层节点要么所有相邻导管都已编入索引，此时归纳过程完成；要么 $v_u = v_j = v_i$，并在将最上方的导管标记为 $k+1$ 后，归纳过程完成。考虑任意一个标记为 $\alpha(v_u)$ 的节点；称它为 C，并称其父节点为 P——或者，在 $u = i$ 且 C 为顶层节点的情况下，将其伪父节点（另一个标记为 $\alpha(v_j)$ 的顶层节点）称为 P。位于 C 上方的导管可用的最低索引，只要不会导致与 P 相邻的两条导管具有相同的索引标签，就是对应于 C 在 P 的子节点中所处数值位置的索引。根据推论 5.11 或推论 5.13，这个导管索引选择用于 C 上方的导管，也不会导致与 C 相邻的导管出现重复索引。这些正是为所有标记为 $\alpha(v_u)$ 的节点安全作出的字典序最高优先级选择，而且所有这些选择都会保留所需模式。因此，字典序强制的选择会在归纳的所有阶段持续保持所需模式。

每种情形下所作的选择都是唯一的；不存在其他导管指标编排，既能得到优先级如此之高的单项式，又能避免两个与同一节点相邻的导管具有相同索引。□

备注 5.15。已证明结构在例外情形下的列表 W'_j 与第 3.4 节中的列表 $W_{j;i}$ 完全相同，只是经过了排序；由于已证明结构中的所有其他节点变量也都已排序，因此将$W_{j;i}$ 排序所需置换的符号决定了支配单项式的符号。

5.6. **主要结果的证明**。现在，证明第 3.7 节中首次陈述的主要结果所需的一切准备工作都已就绪。下面回顾一下：

定理 3.20 (主定理)。设 G 是一个简单图，其 n 个顶点 $V(G) =(v_1, \ldots, v_n)$ 按贪心排序排列，并设 $d = n - \deg(v_n)$。那么，在 $\mathbb{R}^d$ 中对 $(v_1, \ldots, v_n)$ 运行均匀 *LSS* 会强收敛。

证明。唯一单项式引理要求 $d \geq k(v_n) + 1$，而主定理的假设满足这一条件，其中

$$k(v_n) + 1 = (n-1) - \deg(v_n) + 1 = (n-1) - (n-d) + 1 = d.$$

（这确实意味着，例如， S_n 的维数只有 1，而最后的向量选择 $\varphi(v_n)$在缩放意义下是唯一的。）

悬挂花园图通过多项式对均匀 LSS 进行参数化，其目的在于说明：对于贪心排序，当维数 d 至少为 $n-\deg(v_n)$ 时，均匀 LSS 以概率 1 产生忠实正交表示，并且强成功。它确实给出正交表示这一事实——换言之，对于 $v_j \not\sim v_i$ ，II 型悬挂花园 g 的标量值为 0——由命题 5.3 处理。其余情况涉及一个 II 型悬挂花园图 g ，其顶端节点分别标记为 $\alpha(v_j)$ 和 $\alpha(v_i)$，其中

- $v_i = v_j$，其中证明每个值 g 以概率 1 非零，即可证明每个 $\varphi(v_j)$以概率 1 是非零向量，从而确立均匀 LSS 弱成功，并且
- $v_i \sim v_j$ 在 G中，其中证明每个值 g 以概率 1 非零，就能说明格拉姆矩阵在所有应有的位置上都具有非零元素，从而证明均匀 LSS 以概率 1 产生忠实正交表示。

根据命题 3.9，证明这两点意味着均匀 LSS 强成功，这正是主要结果所需要的。在这两种情况下，唯一单项式引理证明 g的标量值是关于独立节点变量的整数多项式，且不是零多项式。均匀 LSS 从每个正交子空间 S_j 中按照某种合理的概率分布选取 $\varphi(v_j)$，作出一般性的选择，使得每个非零多项式都以概率 1 取非零值。对于上述每一种悬挂花园 g，并且同时对所有这些花园而言，其标量值以概率 1 均非零，因此在恰当的位置产生非零元素 t_{ij} ，从而证明在这些条件下，均匀 LSS 强成功，正如所要求的。□

6. Generalizations and concluding remarks

6.1. 数值 LSS。 尽管悬挂花园有助于确定 LSS 何时会成功，但它们所模拟的指数规模多项式难以用于构造实际例子。LSS 一旦奏效，就会直接奏效；我们可以轻松地通过数值方法生成具体例子，既可以使用浮点数（如果近似例子就足够），也可以使用有理数运算。

6.2. 不定正交表示。 本文主要结果中考察的均匀 LSS 版本总是会产生半正定格拉姆矩阵。在组合矩阵理论中，对于给定模式 G，要构造出零度给定的矩阵，这通常（尽管并非完全普遍）是最难的一类矩阵。给定一个对角元为 $\epsilon_i = \pm 1$ 的对角不定型 E ，可以修改悬挂花园的分析，以追踪来自 ϵ_i 的单项式符号，从而能够为具有非半正定惯性指数的格拉姆矩阵选定多项式模型。

6.3. **其他无限域**。 [8] 中认为，Delta 猜想应当可以推广到其他无限域。悬挂花园方法也应同样适用于这类推广，因为它会产生非零多项式，而在任何无限域中，这些多项式取值为非零值的情形都是一般情形。

6.4. **厄米花园**。 悬挂花园图可用于描述产生厄米矩阵而非实对称矩阵的 LSS 过程，但需注意，图中的每条导管都应定向，以体现矩阵元素与其复共轭之间的差异。给定节点周围的所有导管都应统一指向该节点或从该节点向外延伸。由于悬挂花园中的连接结构只是一棵树（而非例如平面代数中允许的更复杂拓扑），因此总能做到这一点。

6.5. **特定符号模式**。 给定任意字典序单项式序和任意有限个多项式，可以构造数量级差异很大的参数值，使得每个多项式中优先级最高的单项式支配其他所有项。特别是，这意味着该单项式的符号决定了代入求值得到的多项式的整体符号。正如注 5.15 中所述，唯一单项式引理中的支配项的符号，就是置换 P 的符号；该置换将列表 $W_{j;i}$ 排列为有序形式。通过检查格拉姆矩阵 T 的模式即可确定该符号：找到对角线上方对应的非零元素 t_{ij}；然后，执行置换 P 所需的交换次数，等于列 j 中位于 t_{ij} 下方且对角线上方的零的个数。因此，唯一单项式引理不仅能给出忠实的格拉姆矩阵，还能给出具有这种特定符号模式的忠实格拉姆矩阵——或者给出在某种独立节点变量符号取值下，由支配单项式中出现的独立节点变量所能形成的任意符号模式。

6.6. **非贪心排序的主导单项式**。唯一单项式引理的证明关键依赖于对 G 采用贪心排序，但对于模拟非贪心排序的 LSS 花园，也可以执行类似的过程——只是该过程在低维数下会失败。例如，对于图 7 中的花园，过程如下：

- 标有 α 的节点上方的两条导管都获得索引 1。
- 上方的导管 β 获得索引 2。
- 但现在，γ 上方且位于 δ 下方的导管既不能获得索引 1，也不能获得索引 2，因此需要 $d \geq 3$。

该过程确实产生了一个唯一的主导单项式，但其所在的维数严格高于朴素界

$$d \geq \max\{k(v_i) + 1\}$$

而在顶点排序为贪心排序时，该界就足够了。

对于给定的图 G 及给定的排序 $V = (v_1, \ldots\ldots, v_n)$（该排序不一定是贪心排序），按照这一过程——或其他过程——总能得到唯一支配单项式的最低维数是多少？是否存在更好的方法（更低的维数界）来确保非贪心排序下的强 LSS 能够成功？对于每个图、排序和维数，如果均匀 LSS 确实能强有力地成功，那么通过数值模拟来发现这一点，或许比尝试寻找唯一支配单项式容易得多；事实上，只要某个优先级较低的单项式没有被消去，均匀 LSS 有时或许能在足够低的维数下强有力地成功，即使优先级最高的单项式并非唯一且确实被消去。

只要某个优先级较低的单项式未被消去，即使维数足够低，优先级最高的单项式不唯一且确实被消去，也能成功。

6.7. **一般性程度**。 LSS 的结果表明，具有模式 G 的格拉姆矩阵 T，若其列完全一般（也就是说，任意一个基数不超过 T 的秩的列集合都线性无关），则其零度最多为 $\kappa(G)$，而非 $\delta(G)$ 或 ${}^g\Delta(G)$。SAP 的一般性弱于完全一般性，但已在组合矩阵理论中发挥了显著作用。再加入另一个一般性条件——上列一般。该条件足够弱，因此允许零度为 ${}^g\Delta(G)$，但仍强于 SAP，

$$ {}^g\Delta(G) \leq \mathrm{M}_{+}^{u}(G) \leq \nu. $$

人们对它究竟能比 SAP 强多少，或哪些类型的图会使相关参数值出现多大差距，知之甚少。此外，虽然 $\nu(G)$ 自动具有子式单调性，但 $\mathrm{M}_{+}^{u}(G)$ 很可能并非如此。

Appendix A. Approximate greedegree is NP-hard

其主张是，计算 ${}^g\Delta(G)$，即使只要求达到任意固定的近似精度，也是 NP 困难。首先，通过指定一个阈值度数 δ，将该问题表述为判定问题：需要判断能否构造一种贪心排序，使得所有低度 $\leq \delta$ 的顶点都在最后一个顶点之前被选出。随后，可以通过对该判定问题进行对数次重复计算，求得 ${}^g\Delta(G)$的精确值。

问题： GREEDEGREE
输入： 一个简单图 $G = (V,\ E)$和一个阈值度数 δ。**输出：**

- 若存在一种 G 的贪心排序，使其最后一个顶点的度为 $> d$，则答案为“是”。
- 若 G 的所有贪心排序中，最后一个顶点的度均为 $\leq \delta$，则答案为“否”。

将 ${}^g\Delta(G)$计算到某种较宽松的近似精度的问题，以两种方式表述为承诺问题：

问题： GREEDEGREE-FACTOR(F)（对于固定的实数近似因子 $\mathrm{F} \geq 1$）**输入：** 一个简单图 $G = (V,\ E)$ 和一个阈值度 δ。**承诺：** 若满足以下条件之一，则输入满足该承诺：

$$ {}^g\Delta(G) > \mathrm{F}\delta \quad \text{or} \quad {}^g\Delta(G) \leq \delta. $$

输出：

- 是，如果图 G 的某种顶点贪心排序以一个度严格大于 $\mathrm{F}\delta$ 的顶点结束。
- 否，如果图 G 的每种顶点贪心排序都以一个度至多为 δ 的顶点结束。
- 未指定，如果不满足该承诺。

问题： GREEDEGREE-FRACTION(ε)（对于固定的实数 $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$）
输入： 简单图 $G = (V,\ E)$。
承诺： 如果满足以下条件之一，则输入满足该承诺：

$$ \frac{{}^g\Delta(G)}{|V|} > 1 - \varepsilon \quad \text{or} \quad \frac{{}^g\Delta(G)}{|V|} \leq \varepsilon. $$

输出：

- 是，如果 G顶点的某种贪心排序以一个度严格大于 $(1-\varepsilon)|V|$ 的顶点结束。
- 否，如果 G 的每种贪心排序都以一个度至多为 $\varepsilon|V|$ 的顶点结束。
- 未指定，如果承诺不成立。

正如第 3.6 节所述，只需将任意一对相邻顶点选作第一和第二个顶点，就能避免它们同时成为贪心排序的最后一个顶点。然而，对于一对不相邻顶点，情况截然不同，这构成了下一个判定问题的难点。

问题： PAIR-AVOID
输入： 一个简单图 $G=(V,\ E)$ 以及一对顶点 $a,\ b\in V$。**输出：**

- 如果 G 的顶点存在某个贪心排序，使其末尾顶点既不是 a，也不是 b，则为 YES。
- 如果 G 的每个贪心排序要么以 a 结尾，要么以 b 结尾，则为 NO。

定理 A.1。判定问题 GREEDEGREE 是 *NP* 完全。判定问题 PAIR-AVOID 是 *NP* 完全。对于任意实数 $\mathrm{F}\geq 1$，承诺问题 GREEDEGREE-FACTOR(F) 是 *NP* 困难。对于任意实数 $0<\varepsilon\leq\frac{1}{2}$，承诺问题 GREEDEGREE-FRACTION(ε) 是 *NP* 困难。

本附录末尾给出的定理 A.1 的证明将使用一个公式图；该公式图的构造及其一些关键性质将在下文首先加以说明。

Definition A.2. A *formul*一个图h is a simple graph 构造 as follows:**输入：** 一个非平凡的合取范式布尔公式 Φ，以及近似比例$0<\varepsilon\leq\frac{1}{2}$或近似因子 $\mathrm{F}\geq 1$。
输出： 一个公式图 $G(\Phi,\ \varepsilon)$（可能以 F 为单位表示 ε），一个下阈值度数 δ，以及一个上阈值度数 Δ。

构造所得图中的顶点数记为 n。对于指定的近似比例 ε，下阈值应满足

$$\delta\leq\varepsilon n$$

并且上阈值应满足

$$\Delta\geq(1-\varepsilon)n.$$

如果要求近似因子为 $\mathrm{F}\geq 1$，则首先将其转换为近似比例

$$\varepsilon=\frac{1}{\mathrm{F}+1},$$

该比例满足 $0<\varepsilon\leq\frac{1}{2}$，并且根据上述内容，这将确保 $\Delta\geq\mathrm{F}\delta$。

设 k 为 Φ 中子句的数量，并为这些子句编号

$$\Phi=c_1\wedge c_2\wedge\cdots\wedge c_k.$$

每个子句 c_i 都是文字的析取，设其包含 w_i 个文字（即“宽度”），并且每个文字 ℓ要么是正原子 x_i，要么是某个原子的否定 $\neg x_i$。令 t 表示

任意位置出现的原子数量，因此所有可能文字构成的完整集合为

$$x_1, \neg x_1, x_2, \neg x_2, \ldots, x_t, \neg x_t.$$

不失一般性，假设同一子句中不会有同一个文字出现多次。对于每个文字 ℓ，令 $p(\ell)$（表示“出现频数”）为包含 ℓ 的子句数。令 m 表示宽度 w_i 或双倍出现频数 $2p(\ell)$ 中的最大值：

$$m = \max\{w_1, \ldots, w_k, 2p(x_1), 2p(\neg x_1), \ldots, 2p(x_t), 2p(\neg x_t)\}.$$

需要若干个填充顶点 f，顶点总数为

$$n = n(f) = 2 + 2t + 2k + f.$$

填充顶点数 f 取决于公式 Φ 和近似比例 ε；它取满足以下所有界的最小整数：

$$\begin{aligned} f &\geq m; \\ n(f) &\geq \frac{1}{\varepsilon}(2t + k); \\ n(f) &\geq \frac{1}{\varepsilon}(m + 3). \end{aligned}$$

第一个不等式与 ε 线性无关，将在定理 A.1 的证明中发挥作用。第二个和第三个不等式分别与度阈值 δ 和 Δ 有关。

G 的 n 个顶点 (Φ, ε) 命名如下：

- （2 个顶点）一个左关键顶点 a和一个右关键顶点 b。
- （$2t$ 个顶点）对于每个文字 x_i 或 $\neg x_i$，各有一个顶点；滥用记法时，这些顶点也分别命名为 x_i 或 $\neg x_i$。
- （$2k$ 个顶点）对于每个子句 c_i，都有一个左子句顶点 α_i 和一个右子句顶点 β_i。
- （f个顶点）填充顶点 y_1，……， y_f。

图 G（Φ，ε）相当稠密，因此通过指定其补图 H（Φ，ε）的邻接关系来描述较为方便，如下所示：

- 两个关键顶点 a和 b在 H中相邻。
- 对于每个原子 x_i，正文字 x_i 和负文字 $\neg x_i$ 在 H中相邻。
- 对于每个形如以下形式的子句 c_i

$$c_i = \ell_1 \vee \cdots \vee \ell_{w_i},$$

  – 左子句顶点 α_i 在 H 中与左关键顶点 a以及所有文字 $\ell_1, \ldots, \ell_{w_i}$相邻；类似地，

- 每个填充顶点 y_i 在 H 中都与两个关键顶点 a 和 b相邻。注意， m is 的选取方式恰到好处，使得 $m + 1$ 是 H中任意左子句顶点、右子句顶点或文字所能达到的最大度。

接下来需要输出一个下阈值度数 ee

$$\delta = 2t + k$$

和一个上阈值度

$$\Delta = n - m - 3.$$

命题 A.3. $G(\Phi,\varepsilon)$ 的度阈值满足

$$\delta \le \varepsilon n \quad and \quad \Delta \ge (1-\varepsilon)n$$

且 $G(\Phi, \frac{1}{\mathrm{F}+1})$ 的度阈值满足 ——

$$\Delta \ge \mathrm{F}\delta.$$

此外， $G(\Phi,\varepsilon)$ 中的每个顶点要么度不超过 δ ，要么度严格大于 Δ。

证明。 δ 和 Δ 的界直接源于以下要求

$$n(f) \ge \frac{1}{\varepsilon}(2t+k) = \frac{1}{\varepsilon}\delta$$

and

$$n(f) \ge \frac{1}{\varepsilon}(m+3) = \frac{1}{\varepsilon}(n(f)-\Delta)$$

关于填充顶点数量的要求。

接下来要证明，顶点的度确实受下界和上界阈值的约束。统计 $H(\Phi,\varepsilon)$中的非邻接关系，可得 $G(\Phi,\varepsilon)$中每个顶点的度数如下:

- 每个关键顶点（a 或 b）的度为
$$n-f-k-2 \;=\; 2t+k = \delta.$$
- 每个文字 ℓ 的度为
$$n-2p_\ell-2 \;>\; n-m-3 = \Delta.$$
- 每个子句顶点 α_i 或 β_i 的度为
$$n-w_i-2 \;>\; n-m-3 = \Delta.$$
- 每个填充顶点 f_i 的度为
$$n-3 \;>\; n-m-3 = \Delta.$$

□

由于 $^{g}\Delta(G)$ 总是 G 的某个顶点的度，命题 A.3 对承诺问题有影响。

推论 A.4。 对于 GREEDEGREE-FACTOR(F)， 对 （G（Φ、 $\frac{1}{\mathrm{F}+1}$)—δ） 满足该承诺。

推论 A.5. 对于 GREEDEGREE-FRACTION(ε)，图 $G(\Phi,\varepsilon)$ 满足该承诺。

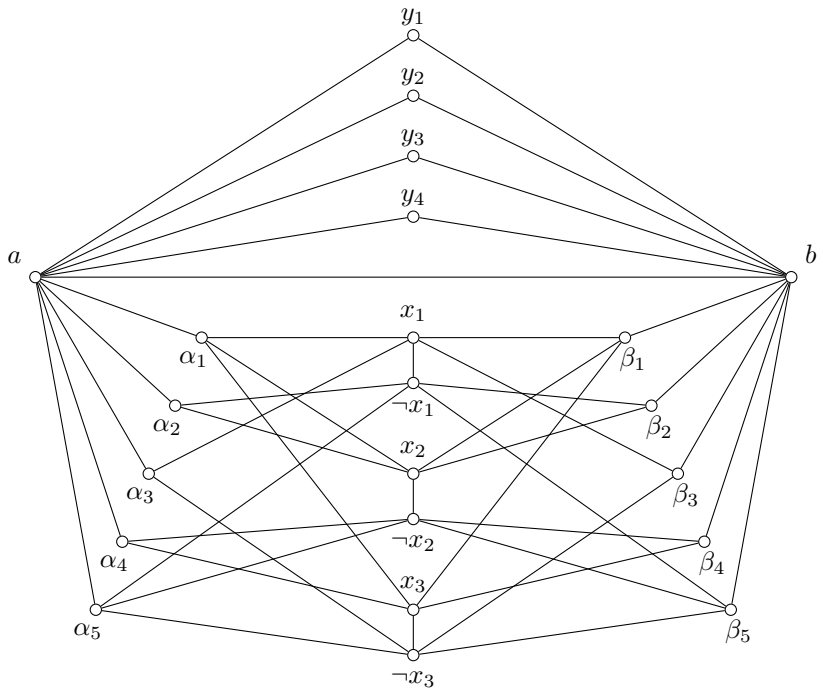
下面举例说明。

例 A.6. 取合取范式的布尔公式 Φ

$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$, 一个公式的简单但非平凡的例子，该公式没有满足赋值。（中间三个子句的循环蕴含使三个原子逻辑等价，但根据第一个和最后一个子句，它们之中必须既有真原子，也有假原子。）这给出 $k=5$, $w_i \in \{2,3\}$, $t=3$, $p(\ell) \in \{2\}$，以及$m = \max\{2,3,2(2)\} = 4$。取平凡的近似因子 $\mathrm{F}=1$，得到

$$\varepsilon = \frac{1}{\mathrm{F}+1} = \frac{1}{2}.$$

FIGURE 8. 例 A.6 的补图 $H(\Phi,\ 1/2)$。



填充顶点的数量 f 应为满足下式的最小整数

$$\begin{aligned} f &\geq m = 4; \\ n(f) = 18 + f &\geq \frac{1}{\varepsilon}(2t + k) = 2(11); \\ n(f) = 18 + f &\geq \frac{1}{\varepsilon}(m + 3) = 2(7). \end{aligned}$$

前两个约束重合，共给出 $f = 4$ 个填充顶点，顶点总数为 $n = 22$。$G(\Phi,\ 1/2)$ 的顶点如下：

- $a,\ b$,
- $x_1,\ \neg x_1,\ x_2,\ \neg x_2,\ x_3,\ \neg x_3$,
- $\alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \alpha_4,\ \beta_4,\ \alpha_5,\ \beta_5$,
- y_1, y_2, y_3，以及 y_4.

低度阈值和高度阈值分别为 $\delta = 2t + k = 11$ 和$\Delta = n - m - 3 = 15$，这反映了这样一个事实：a 和 b 的度为 11，而其他顶点中最小的度为 16。

具有 22 个顶点的补图 $H(\Phi,\ 1/2)$ 如图 8 所示。

正如稀疏补图 $H = G$ 比稠密图G更容易描绘一样，讨论 H 上的反贪心排序，也比讨论 G上的贪心排序更容易。第 5.3 节介绍了反贪心排序。

观察 A.7。图 G的任意贪心排序都以某个局部极大团开头。图 H 的任意反贪心排序都以某个局部极大独立集开头。

定理 A.1 的证明。要证明 GREEDEGREE 和 PAIR-AVOID 属于 NP，需要分别为它们提供一个证书。顶点排序本身就很容易作为证书；我们可以在多项式时间内检验它是否为贪心排序，并且对于GREEDEGREE，检验其最终度数是否为 $> \delta$ ；或者对于 PAIR-AVOID，检验其末尾顶点是否不是 a或 b。证明承诺问题 GREEDEGREE-FACTOR(F) 和 GREEDEGREE-FRACTION(ε) 为 NP 困难，从而证明 GREEDEGREE为 NP 完全，是通过从 SAT归约而来；所用构造还实现了将 PAIR-AVOID 从 SAT归约，从而进一步证明 PAIR-AVOID 为 NP 完全。给定任意一个非平凡的合取范式布尔公式 Φ，定义 A.2 中的构造会生成一个有 n 个顶点的图 $G = G(\Phi, \varepsilon)$，其补图为$H = H(\Phi, \varepsilon)$，以及阈值度数 δ 和 Δ ，使得 G 恰有两个低度顶点a 和 b ，其度数为 $\delta \leq \varepsilon n$，所有其他顶点的度数都严格大于$\Delta \geq \text{F}\delta = (1 - \varepsilon)n$。根据推论 A.4，数对 (G, δ) 满足 GREEDEGREE-FACTOR(F) 所要求的承诺；根据推论 A.5，图 G 同样满足 GREEDEGREE-FRACTION(ε) 所要求的承诺。所要证明的是，对于每个承诺问题，以及满足 G 的 PAIR-AVOID 和数对 (a, b)，答案为 YES 当且仅当 Φ 有满足赋值。

在每个情形中，对于答案为“是”的情况，所提出的挑战是：找到 G 的贪心顶点排序，使得两个低度顶点 a 和 b 都在排序中的最后一个顶点之前被选中。等价地，在补图 H 中，挑战是找到一种反贪心顶点排序，使得 a 和 b 都不在最后被选中；困难在于，在 H 中它们是两个高度顶点，必须与其他总体度较低的顶点竞争，才能尽早被选中，尽管反贪心局部策略会优先选择邻接计数较低的顶点。在下文讨论这一挑战时，邻接关系、度和局部度始终都将在补图 H 的语境下考虑。回顾一下，在 H（Φ, ε）中，每个左子句顶点、右子句顶点或文字的度至多为 $m + 1$。

首先假设 Φ 确实具有满足赋值（$\ell_1, \ldots, \ell_t$），其中每个文字 ℓ_i 要么是 x_i，要么是 $\neg x_i$。注意，顶点 $S = \{a, \ell_1, \ldots, \ell_t\}$ 在 H 中构成一个独立集，由此可知，序列（$a, \ell_1, \ldots, \ell_t$）是反贪心排序的一个有效起始部分。$b$ 能否接下来被选中？在 S 中，它仅与 a 相邻，因此其局部度为 1。当且仅当 S 之外没有其他局部度为 0 的顶点时，它才能接下来被选中。每个右子句顶点 β_i 都至少与满足赋值中的一个文字相邻。V（H）$\setminus S$ 中的其他每个顶点，要么与 a 相邻，要么是一个在 S 中与其相反文字相邻的文字。由此可知，任何接下来被选中的顶点的局部度至少为 1，这意味着 b 确实可以接下来被选中，而不是被推迟到排序末尾。当 Φ 具有满足赋值时，每个承诺问题以及 PAIR-AVOID 的答案都是“是”。

现在假设 Φ没有任何满足赋值，并考察 H的反贪心排序的各种可能性，目标是说明a 或 b 中的一个必然会被最后选中。根据观察 A.7，此类排序必须以一个局部极大独立集 S开头，而该集合不可能同时包含相邻顶点 a 和 b。不失一般性，假设 $b \notin S$。

情况 1： $a \in S$。由于不存在满足赋值（ℓ_1，.....，ℓ_t），局部极大独立集 S 必须至少包含一个右子句顶点β_i。 b的局部度至少为 2，因为它同时与 a 和 β_i相邻，

但每个填充顶点 y_i 的局部度仅为 1，并且在选择 b之前始终如此。因此，必须先选择所有填充顶点，然后才能选择 b ；之后， b 的局部度至少为 $f+2$。根据定义 A.2，在构造 H （ Φ， ε ）时，对 f 的第一个约束是

$$f \geq m,$$

因此，一旦所有填充顶点都被迫选中， b 的局部度至少为 $m+2$。但所有其他剩余顶点的总次数至多为 $m+1$，因此在任意阶段其局部度至多为 $m+1$ 。在 $a \in S$ 的情况下，第二个高度顶点 b 必然会在反贪心排序中最后被选中，因此两个承诺问题的答案均为 NO， PAIR-AVOID 的答案也为 NO。

情况 2： $a \notin S$ 和 $b \notin S$。由于 S 是局部极大的，它必定包含每个填充顶点 y_i。由于每个文字独立集都表示某个赋值的子集，且没有任何赋值满足条件，因此必定存在 Φ 的某个子句 c_i ，使得 α_i 和 β_i 都属于 S。从 S 开始，持续反贪心地选择顶点，直到选中 a 或 b 之一；不失一般性，设选中的是 a。从那时起，b 的局部度——它与每个填充顶点、β_i 以及 a 都相邻——将如前所述至少为 $m+2$，而其他任何剩余顶点的度都不会超过 $m+1$。与前面一样，第二个高度顶点 b 必然会在反贪心排序中最后被选中，因此两个承诺问题的答案均为 NO， PAIR-AVOID 的答案也为 NO。

该论断已得到验证：对于每个承诺问题，承诺均得到满足；对于每个承诺问题和 PAIR-AVOID，当且仅当 Φ存在满足赋值时，答案为 YES。因此，对于任意 $f \geq 1$ ，承诺问题GREEDEGREE-FACTOR(f) 均为 NP 困难；对于任意 $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ ，承诺问题GREEDEGREE-FRACTION(ε) 均为 NP 困难；判定问题 GREEDEGREE 为 NP 完全；判定问题 PAIR-AVOID 为 NP 完全。□

References

[1] N. Alon 和 L. Lov´asz, *Unextendible product bases*, 《组合理论杂志 A 辑》**95** (2001)，第 1 期，169–179。MR 1840483 (2002d:15032) [2] Francesco Barioli、Wayne Barrett、Shaun M. Fallat、H. Tracy Hall、Leslie Hogben、Bryan Shader、P. van den Driessche 和 Hein van der Holst, *Parameters related to tree-width, zeroforcing, and maximum nullity of a graph*, 《图论杂志》**72** (2013)，第 2 期，146–177。[3] Francesco Barioli、Shaun M. Fallat、H. Tracy Hall、Daniel Hershkowitz、Leslie Hogben、Hein van der Holst 和 Bryan Shader, *On the minimum rank of not necessarily symmetric matrices: a preliminary study* **18** 2009 126 145 2482070 ，电子线性代数杂志（），–。MR (2010e:05176) [4] Avi Berman、Shmuel Friedland、Leslie Hogben、Uriel G. Rothblum 和 Bryan Shader, *An upper bound for the minimum rank of a graph* **429** 2008 ，线性代数及其应用（），第 7 期，1629 1638 2444348 2009 05162 –。MR (f:) [5] Yves Colin de Verdi`ere, *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, 《组合理论杂志 B 辑》**50** (1990年)，第 1 期，11–21。MR 1070462 (91m:05068) [6] , *On a new graph invariant and a criterion for planarity*, 《图结构理论》（华盛顿州西雅图，1991），《当代数学》，第 147 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993年，第 137–147 页。MR 1224700 (94h:05023) [7] , *Multiplicities of eigenvalues and tree-width of graphs*, 《组合理论杂志 B 辑》**74** (1998)，第 2 期，121–146。MR 1654157 (99m:05103) [8] Barioli等人, *Spectra of families of matrices described by graphs, digraphs, and sign patterns*，研讨会于2006年10月23日至27日在帕洛阿尔托的美国数学研究所举行。（ 2006年）。

[9] L. Hogben, *Handbook of linear algebra, second edition*, 《离散数学及其应用》，CRC 出版社，2016年。[10] Vaughan F. R. Jones, *Planar algebras, I*，arXiv:math.QA/9909027，1999年。[11] Daan Krammer, *Braid groups are linear*，《数学年刊》**155** (2002)，第 1 期，131–156。[12] L. Lov´asz、M. Saks 和 A. Schrijver, *Orthogonal representations and connectivity of graphs*，线性代数及其应用**114/115** (1989)，439–454，Alan J. Hoffman 纪念专辑。MR 986889 (90k:05095)[13] *A correction: "Orthogonal representations and connectivity of graphs" [Linear Algebra Appl.* **114 115** *(1989) 439–454; MR0986889 (90k:05095)]* **313** /，，线性代数及其应用（2000），第 1–3 期，101–105。MR 1770359 (2001g:05070) [14] L´aszl´o Lov´asz, *On the Shannon capacity of a graph*，IEEE 信息论汇刊**25** (1979)，第 1 期，1–7。MR 514926 (81g:05095)[15] Brian Lucena, *A new lower bound for tree-width using maximum cardinality search*，《SIAM 离散数学杂志》**16** (2003)，第 3 期，345–353。[16] Robert E. Tarjan 和 Mihalis Yannakakis, *Simple linear-time algorithms to test chordalityof graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs*，《SIAM 计算杂志》**13** (1984)，第 3 期，566–579。

Email address: h.tracy@gmail.com