arXiv:2601.01212v1 [math.PR] 3 Jan 2026

独立根随机多项式高阶导数的收敛性

J ¨URGEN ANGST [1]，Oanh Nguyen [2] 和 Guillaume Poly [3]

Abstract. 设 μ 是 $\mathbb{C}$上的一个概率测度，并设 P_n 是一个随机多项式，其零点独立地从 μ中抽取。我们研究 P_n的高阶导数零点的渐近分布。我们证明，对于一大类测度 μ，只要导数阶数 $k = o$满足$n/\log\ n$， k阶导数的零点经验分布就会收敛回 μ 。这涵盖了所有离散测度，以及一大类满足温和维数非退化条件的测度。

我们进一步证明了一项稳健性结果：对于任意 μ，即使加入从维数非退化扰动中抽取的、比例趋于零的根，导数零点测度仍会收敛回 μ。这些结果突破了此前已知的求导阶数对数障碍，并表明，即使求导阶数随多项式次数近乎线性增长，极限根分布仍能在求导过程中保持不变。

1. Introduction

在确定性情形下，多项式的根与其导数的根之间的关系仍然错综复杂，令人惊讶。高斯–卢卡斯定理等经典结果只能给出宽泛的几何约束，而关于临界点行为的若干基本问题至今仍未解决；例如参见 [Tao22、vBLSvdW07]。由于确定性理论很难进一步推进，人们自然会转向随机性，以期揭示其中潜在的规律。在这一背景下，求导融合了所有零点的影响，因此临界点能够反映根配置的整体形态。随机多项式由此提供了一个灵活的框架，在其中这种相互作用变得适合分析，并且自然地与复分析和势理论中的思想相联系。因此，一旦给定随机根配置，理解临界点的渐近分布便既具有可处理性，也在概念上颇具吸引力。下面我们说明本文始终采用的模型，并介绍相关的主要文献。

[1] Univ Brest, CNRS UMR 6205, Laboratoire de Mathematiques de Bretagne Atlantique, F–29200 Brest, France[2] Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence, RI 02906, USA[3] Nantes Université, CNRS, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, LMJL, F–44000Nantes, France.电子邮箱地址：jurgen.angst@univ-brest.fr, oanh nguyen1@brown.edu, guillaume.poly@univ-nantes.fr.

设 μ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个概率测度，并令 $\xi_1, \xi_2, \ldots$ 为分布为 μ 的独立同分布随机变量。对每个 $n \geq 1$，定义随机多项式

$$P_n(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \xi_j).$$

根据大数定律，经验测度 $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\xi_i}$ 几乎必然收敛到 μ，当 $n \to \infty$ 时。Pemantle 和 Rivin [PR13] 猜想，P_n 的临界点经验分布也会收敛到 μ。具体而言，如果

$$\mu_{P_n'} := \frac{1}{n-1} \sum_{z \in \mathbb{C}: P_n'(z)=0} \delta_z$$

表示 P_n' 的经验测度，那么当 $n \to \infty$ 时，$\mu_{P_n'}$ 收敛到 μ。他们在额外假设 μ 具有有限 1-能量的条件下证明了这一点，而 Subramanian [Sub12] 则在 μ 支持于单位圆时证明了该结果。

Kabluchko [Kab15], 取得了重大进展，他证实了该猜想对所有概率测度 μ 均完全成立，并指出 $\mu_{P_n'}$ 在赋予依分布收敛拓扑的复概率测度空间中依概率收敛到 μ。为回答 Kabluchko 提出的问题，第一作者与第三作者和 Malicet 合作 [AMP24] 证明，事实上，$\mu_{P_n'}$ 在相同的依分布收敛拓扑下几乎必然收敛到 μ。我们指出，前者等价于对所有有界连续测试函数 φ,

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi(x)\, d\mu_{P_n'}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int_{\mathbb{C}} \varphi(x)\, d\mu(x),$$

而后者等价于

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi(x)\, d\mu_{P_n'}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} \int_{\mathbb{C}} \varphi(x)\, d\mu(x).$$

高阶导数的研究自然随之展开。对于 $1 \leq k < n$，定义 e

$$\mu_{P_n^{(k)}} := \frac{1}{n-k} \sum_{z \in \mathbb{C}: P_n^{(k)}(z)=0} \delta_z.$$

Byun、Lee 和 Reddy [BLR22] 证明，对于每个固定的 k，仍有 $\mu_{P_n^{(k)}}$依概率收敛到μ。O'Rourke 和 Steinerberger [OS21]提出了关于高阶导数的一个更广泛的猜想图景：对于 $t \in (0,1)$，$P_n^{(\lfloor tn \rfloor)}$的零点的经验测度收敛到一个确定性极限 μ_t，其对数势应满足某个偏微分方程。该偏微分方程与早期工作 [ALN22、KT22] 有关；在特殊情况下，当 μ 具有实数支撑 [HK23] 时，这一猜想已借助自由概率得到验证。在 $t = 0$的情形下，他们的预测还原为 $\mu_t = \mu$，由此得到以下猜想。

猜想 1.1。对于复平面上的所有概率测度 μ，对任意满足 $k_n = o(n)$的序列 k_n，都有：几乎必然，$\mu_{P_n^{(k_n)}}$收敛于 μ。

目前最好的结果归功于 Michelen–Vu，他们在 [MV24b] 中证明了，对所有满足 k 的 $= k_n \leq : \log 5 \quad {}^{n}\log\log n$ 时依概率收敛；并在 [MV24a] 中证明了，对所有固定的 k，都有几乎处处收敛。为了说明 $\log n$ 是这类结果的自然障碍，我们首先回顾标准分布恒等式 $\frac{1}{2\pi}\Delta \log |z-\xi| = \delta_\xi$，它将 P_n 的对数势 $\frac{1}{n}\log |P_n(z)|$ 与其经验测度联系起来：

$$\frac{1}{2\pi n}\Delta \log |P_n(z)| = \mu_{P_n}.$$

现在，如果我们考察这个商

$$S_n = S_{k,n}(z) := \frac{P_n^{(k)}(z)}{k! P_n(z)}, \tag{1}$$

上述关系给出

$$\frac{1}{2\pi n}\Delta \log |S_n(z)| = \frac{1}{n}\sum_{\xi\in\mathbb{C}:P_n^{(k)}(\xi)=0} \delta_\xi - \frac{1}{n}\sum_{\xi\in\mathbb{C}:P_n(\xi)=0} \delta_\xi = \frac{n-k}{n}\,\mu_{P_n^{(k)}} - \mu_{P_n}.$$

根据大数定律，经验测度 μ_{P_n} 收敛到 μ，当 $n \to \infty$ 时。因此，当 $k = o(n)$ 时，证明收敛 $\mu_{P_n^{(k)}} \to \mu$ 可归结为证明 $\frac{1}{n}\log |S_n(z)|$ 趋于 0。控制 $\log |S_n(z)|$ 的增长，相当于证明 $|S_n(z)|$ 的上界以及 $|S_n(z)|$ 的下界，这可以定量表述为证明

$$\mathbb{P}(|S_n(z)| \leq e^{-\varepsilon n})$$

在 $n \to \infty$ 时足够小。

此外，将 S_n 改写为

$$S_n(z) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} Y_{i_1}\dots Y_{i_k}$$

其中 $Y_i = \frac{1}{z-\xi_i}$ 相互独立同分布，我们看到 S_n 是关于随机变量Y_i的次数为 k 的多项式。这直接将该问题与独立随机变量的次数为-k 的多项式的反集中问题联系起来。

后者因其内在价值而受到研究，并应用于随机矩阵理论和子图计数等多个领域；例如，参见 Meka–Nguyen– Vu [MNV15],Kwan–Sudakov–Tran [KST19],Alon–Hefetz–Krivelevich–Tyomkyn

[AHKT20], 和 Fox–Kwan–Sauermann [FKS21]。上述列表远非穷尽。我们指出，$\log n$ 是次数的自然障碍，以下关于 $n = mk$ 个随机变量的次数为 k 的多项式示例可以说明这一点（Y_{ij}）

$$S = \sum_{i=1}^{m} Y_{i1}\dots Y_{ik} \tag{2}$$

其中 $i = 1$，……，m、$j = 1$，……，k 和 Y_{ij} 独立同分布，且其分布满足 $\mathbb{P}(Y_{ij} = 0) = q$，其中某个 $q \in$ 属于 (0，1)（例如 $q = 1/3$，且 Y_{ij} 在 $\{0, \pm 1\}$上服从均匀分布），并且 $m = (1-q)^{-k}$。这对应于 $n = k(1-q)^{-k}$ 或 $k = \Theta(\log n)$。我们有

$$\mathbb{P}(S = 0) \geq \mathbb{P}(Y_{i1}\dots Y_{ik} = 0)^m = (1-(1-q)^k)^{(1-q)^{-k}} \approx e^{-1}$$

显然，它不会趋于 0。

突破这一自然障碍后，我们的主定理表明，对于非病态测度μ，猜想 1.1 一直成立到 $k = o(n/\log n)$。在陈述定理之前，我们先回顾测度 μ 在给定点 $x \in \mathbb{C}$处的局部维数这一概念:

$$\underline{\dim}_\mu(x) := \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu(D(x,r))}{\log r}.$$

定义 1.2 (维数非退化测度)。 若存在一个测度 $\nu \le \mu$ （即对所有博雷尔集 A，均有 $\nu(A) \le \mu(A)$），以及一个正测度集 $E \subset \mathbb{C}$，使得 $\nu(E) > 0$ 对所有 $x \in E$成立，则称测度 μ 为维数非退化 。

$$\underline{\dim}_\nu(x) > 0.$$

定理 1.3 (主要定理)。 设 μ 是$\mathbb{C}$ 上概率测度空间中的一个元素，该空间赋有依分布收敛拓扑。

(1) [离散测度] 若 μ 是离散的，则对于任意序列 $k_n = o(n)$，相对于 $\mathbb{P}$几乎必然地，测度序列 $\mu_{P_n^{(k_n)}}$在 $n \to \infty$时收敛到 μ 。*(2)* [维数非退化测度]假设 μ 是维数非退化的，则对于任意序列 $k_n = o(\frac{n}{\log n})$，相对于 $\mathbb{P}$几乎必然地，测度序列 $\mu_{P_n^{(k_n)}}$在 $n \to \infty$时收敛到 μ 。

注意　　如果一个测度 μ 含有维数非退化分量，那么它 s,

$$\mu = (1-\varepsilon)\mu_0 + \varepsilon\nu, \quad \varepsilon > 0,$$

若 ν 维数非退化，则 μ自身也是维数非退化的。下面列举几个维数非退化测度的例子; 任何包含此类分量的测度也自动是维数非退化的。

(1) 不完全相对于勒贝格测度奇异的测度。若μ 并非完全奇异，根据经典的拉东－尼科迪姆定理，存在一个非负可积函数 $f \not\equiv 0$，使得 $\mu = f(z)\, dm_2 + \mu_s$，其中 m_2是 $\mathbb{C}$ 上的勒贝格测度，且 μ_s 相对于 m_2是奇异的。存在一个 $M > 0$，使得 f_M: $= f1_{f\le M} \not\equiv 0$。于是令 $\nu = f_M dm_2$和 $E = \mathbb{C}$。对于所有 $x \in \mathbb{C}$、$r > 0$，我们有

$$\nu(D(x,r)) \le \pi M r^2$$

并且当 $r < 1$时，$\log r < 0$，我们得到

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \nu(D(x,r))}{\log r} \ge \liminf_{r\to 0} \frac{\log \pi M r^2}{\log r} \ge 2 > 0$$

从而证明维数非退化性。

(2) 在正测度集合上满足局部弗罗斯特曼条件的测度。若存在常数 $s > 0$, $C > 0$，以及一个博雷尔集 $E \subset \mathbb{C}$ 满足 $\mu(E) > 0$ 使得

$$\mu(D(x,r)) \le Cr^s \quad \text{for all } x \in E \text{ and all sufficiently small } r > 0,$$

那么对所有 $x \in E$，$\dim_\mu(x) \ge s$ 。

(3)支撑于光滑曲线上的测度。 若 μ 相对于 $\mathbb{C}$中一条 C^1 曲线上的弧长测度绝对连续，则对 μ-几乎处处的 x，$\dim_\mu(x) = 1$，因此μ 是维数非退化的（例如参见 [Mat99]）。此情形下研究最多的例子之一是 μ 为单位圆上的均匀测度。

在下一个定理中，尽管它形式上已涵盖于定理 1.3 之中，我们仍将其单独陈述，因为它采用了截然不同的基本方法进行证明，并突出了反集中的一种互补机制。展示不同的方法说明了这一现象的稳健性，并进一步揭示了在测度的不同结构假设下，高阶导数的零点如何趋于稳定。若存在常数 $c_0, r_0 \in (0, \infty)$ 和 $z_0 \in \mathbb{C}$，使得对于任意博雷尔可测集 $A \in B(z_0, r_0)$，均有，我们称 μ 满足 Doeblin 条件。

$$\mu(A) \geq c_0 \mathrm{Leb}(A). \tag{3}$$

换言之，若测度 μ 包含某个圆盘上的均匀分布分量，则它满足 Doeblin 条件。

回顾测度 μ的柯西-斯蒂尔切斯变换 g_μ

$$g_\mu(z) := \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z-u} d\mu(u). \tag{4}$$

定理 1.4. 设 μ 是配备依分布收敛拓扑的 $\mathbb{C}$ 上概率测度空间中的一个元素。

(1) [Doeblin 条件] 假设 μ 满足参数为c_0、 r_0、 z_0的 ***Doeblin*** 条件。那么对于任意序列 $k_n = o(\ ^n\log n)$，相对于 $\mathbb{P}$几乎必然，测度序列 $\mu_{P_n^{(k_n)}}$在 $n \to \infty$时收敛到 μ 。
(2) [一般测度] 假设对于几乎处处（勒贝格测度）的 $z \in \mathbb{C}$， $g_\mu(z) \neq 0$ 且$\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|z-u|^2} d\mu(u) < \infty$。那么对于所有 $k = o(\sqrt{n})$，测度序列 $\mu_{P_n^{(k_n)}}$依概率收敛到 μ。

在一般情形下，对于任意概率测度 μ，我们的下一个定理表明，若通过加入一个小的维数非退化噪声对其进行扰动，即从扰动测度 $\mu_n := (1-\alpha_n)\mu + \alpha_n \nu$ 中抽取根，其中 $\alpha_n = o(1)$，且 ν 是维数非退化的，那么相应多项式 $P_n^{(k)}$的根将收敛到 μ。这一结果可视为对 [BLR22, Corollary 1.3]的补充。

定理 1.5。 设 μ 和 ν 是 $\mathbb{C}$上的两个概率测度。假设 ν 是维数非退化的。设 $\alpha_n \in (0,1)$ 是一个满足 $\lim \alpha_n = 0$且 $\lim \alpha_n \log n/n = \infty$的确定性数列。设 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 是来自

$$\mu_n = (1-\alpha_n)\mu + \alpha_n \nu$$

并设

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} (z - \xi_i).$$

设 k_n是一个满足 $k_n = o(\ ^{n\alpha_n}\log n)$的整数数列，则测度序列 $\mu_{P_n^{(k_n)}}$在 $n \to \infty$ 趋于无穷时几乎必然收敛到 μ 。

为了解释该定理，在扰动情形下，我们看到 P_n 的大多数根取自 μ，而只有趋于零的比例 $\alpha_n n$ 取自维数非退化分量ν。根据高斯–卢卡斯定理， $P^{(k_n)_n}$ 的零点受到 P_n 所有根产生的对数力影响，其中也包括来自 ν 的根。尽管如此，定理 1.5 表明，这些额外的根不会改变极限行为：尽管存在拉动效应

由 ν 引起， $P^{(k_n)}{}_n$ 的零点仍然收敛到 μ （见图1）。这种稳健性强烈表明，即使在未扰动情形 $\alpha_n \equiv 0$ 下，也应有相同的收敛结果；此时所有根都取自 μ。

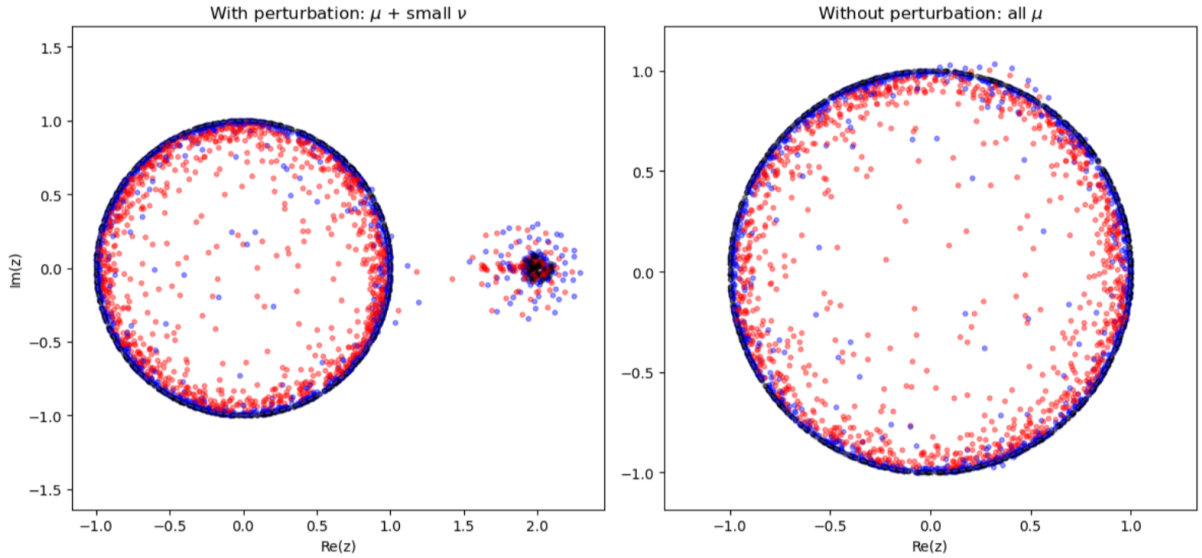


FIGURE 1. P_n （黑色）、 P_n' （蓝色）和 $P_n^{(5)}$（红色）的零点，取自十组独立样本。左图：100 个根取自 μ （在单位圆上均匀分布），另有 10 个取自 ν （在以 3 为中心、半径为 0.1 的小圆盘上均匀分布）。右图：全部 110 个根均取自 μ。

2. Proof of Theorem 1.3

为简化记号，我们记作 $k = k_n$。

2.1. 离散测度。首先，我们考虑 μ 支持在集合 $\{z_1, z_2, \dots\}$ 上的情形。注意，几乎必然地，多项式 P_n 有根 z_i ，其重数为 N_i ，其中 $N_i/n \to \mu(z_i)$。求 $k_n = o(n)$ 次导数后， z_i 仍是一个根，其重数为 $N_i - o(n) = (1 + o(1))\mu(z_i)n$。因此，几乎必然地，

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_{P_n^{(k)}}(z_i) \geq \mu(z_i).$$

由于左侧对 i 求和不超过 1，而右侧的和为 1，因此所有 i 都必须取等号，这又意味着

$$\begin{aligned} 1 - \liminf_{n\to\infty} \mu_{P_n^{(k)}}(z_i) &= \limsup_{n\to\infty} \sum_{j\neq i} \mu_{P_n^{(k)}}(z_j) = 1 - \mu(z_i) = \sum_{j\neq i} \mu(z_j) \\ &= \sum_{j\neq i} \liminf \mu_{P_n^{(k)}}(j) \leq \liminf \sum_{j\neq i} \mu_{P_n^{(k)}}(j). \end{aligned}$$

因此，li $\limsup_{n\to\infty} \sum_{j\neq i} \mu_{P_n^{(k)}}(z_j) = \liminf \sum_{j\neq i} \mu_{P^{(k)n}}(j) = \lim \sum_{j\neq i} \mu_{P^{(k)n}}(j)$ and s o

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{P_n^{(k)}}(z_i) = \liminf_{n\to\infty} \mu_{P_n^{(k)}}(z_i) = \mu(z_i)$$

我们得出结论：$\mu_{P_n^{(k)}}$几乎必然收敛到 μ 。因此，在本节余下部分中，我们假设 μ不是离散的。

2.2. 维数非退化测度。沿用 [AMP24]，中的记号和证明策略，我们记

$$\mathcal{M} = \left\{ z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C},\, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \right\}$$

为 $\mathbb{C}$ 上可逆的莫比乌斯变换集合，并赋予其从 $\mathbb{C}^4$ 上的勒贝格测度 $\lambda_{\mathbb{C}} \otimes \lambda_{\mathbb{C}} \otimes \lambda_{\mathbb{C}} \otimes \lambda_{\mathbb{C}}$ 继承而来的测度 $\lambda_{\mathcal{M}}$。

设 u 属于 $\mathcal{M}$。将经典詹森公式应用于亚纯函数 $S_n \circ u^{-1}$，其中回忆一下 $S_n = S_{k,\ n}(z) :$ $= {}^{P_n^{(k)}(z)\, k!\ P_n(z)}$，可得以下不等式。 ——

命题 2.1。 [AMP24，命题 2。2] 对于任意满足 $u^{-1}(0)$ 不是 S_n 的零点或极点的莫比乌斯变换 $u \in \mathcal{M}$ ，几乎必然有：

$$\sum_{P_n^{(k)}(\rho)=0} \log^- |u(\rho)| - \sum_{P_n(\zeta)=0} \log^- |u(\zeta)| \leq \log ||S_n||_{u^{-1}(\mathbf{S}^1)} - \log |S_n|(u^{-1}(0)) \tag{5}$$

其中 $\mathbf{S}^1$ 是 $\mathbb{C}$ 中的单位圆，且 $||S_n||_{u^{-1}(\mathbf{S}^1)}$ 是 S_n 在 $u^{-1}(\mathbf{S}^1)$ 上的最大值。这里注意，第一项求和遍历 S_n 的所有零点，第二项求和遍历所有极点，两者均按重数计。

ˆ 由于 $\mathbb{C}$ 上的概率测度空间是黎曼球面 $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的概率测度空间 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ 的子集，而后者在弱拓扑下是紧的，因此只需证明：对于 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ 中序列 $\mu_{P_n^{(k)}}$ 的任意聚点值 $\widehat{\mu}_\infty$ ，都有 $\backsim\widehat{\mu}_\infty = \mu$。由于这两个测度都是 $\mathbb{C}$ 上的概率测度，只需证明上界 $\widehat{\mu}_\infty \leq \mu$；根据下文的引理 2.2，这可由证明对于几乎所有的莫比乌斯变换 $u \in \mathcal{M}$， $\widehat{\mu}_\infty$ 的对数势都不大于 μ 的对数势得出。

引理 2.2。 [AMP24，引理 2。7] 设 $\widehat{m}_1$ 和 $\widehat{m}_2$ 是黎曼$\widehat{}$球面 $\mathbb{C}$ 上的两个有限测度，使得

$$\int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log^- |u| \, d\widehat{m}_1 \leq \int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log^- |u| \, d\widehat{m}_2$$

$\widehat{}$对于 $\lambda_{\mathcal{M}}$几乎处处的莫比乌斯变换 $u \in \mathcal{M}$。于是 $\widehat{m}_1 \leq \widehat{m}_2$ 在 $\mathbb{C}$上。特别地，如果$\widehat{m}_1$ 和 $\widehat{m}_2$ 是概率测度，那么它们相等。

因此，我们只需证明：相对于 $\mathbb{P}$几乎必然地，对于 $\lambda_{\mathcal{M}}$几乎处处的$u \in \mathcal{M}$，对所有 $\varepsilon > 0$，

$$\int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log^- |u| \, d\widehat{\mu}_\infty(u) \leq \int_{\mathbb{C}} \log^- |u| \, d\mu(u) + \varepsilon. \tag{6}$$

由于 $\widehat{\mu}_\infty$ 是一个聚点，存在一个子序列 $\mu_{P^{(k)\ n}}$，使得 $\widehat{\mu}_\infty = \lim^{k\to+\infty} \mu_{P_n^{(k)}}\widehat{}$ 我们定义截断映射 $x \mapsto \log_M^-(x) := \log^-(x) \wedge M$，该映射在 $\mathbb{C}$ 上连续，因此

$$\int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log_M^- |u| \, d\widehat{\mu}_\infty(u) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} \log_M^- |u| \, d\mu_{P_n^{(k)}}(u) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} \log^- |u| \, d\mu_{P_n^{(k)}}(u).$$

令 $M \to \infty$，我们可推出

$$\int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log^- |u_i| \, d\widehat{\mu}_\infty \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} \log^- |u_i| \, d\mu_{P_n^{(k)}}(u). \tag{7}$$

此外，根据大数定律，由于 $\xi_i \sim \mu$ 是独立同分布的，

$$\int_{\mathbb{C}} \log^- |u| \, d\mu_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log^- |u(\xi_i)| \to \int_{\mathbb{C}} \log^- |u| \, d\mu(u) \text{ almost surely.}$$

因此，（6）归结为证明

$$\sum_{P_n^{(k)}(\rho)=0} \log^- |u(\rho)| - \sum_{P_n(\zeta)=0} \log^- |u(\zeta)| \leq \varepsilon.$$

由于对几乎所有的莫比乌斯变换 u，都有 $\mathbb{P}$-几乎处处成立： $u^{-1}(0)$ 既不是 S_n 的极点也不是其零点，因此我们可以将上述内容进一步归结为

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log ||S_n||_{u^{-1}(\mathbf{S}^1)} - \log |S_n|(u^{-1}(0))}{n} \leq \varepsilon. \tag{8}$$

这由下面两个引理得出：第一个引理给出了关于 S_n 的一个相当直接的上界，第二个引理则确立了我们的关键反集中结果。

引理 2.3。 对于所有概率测度 μ、所有 $\varepsilon > 0$ 以及几乎所有 $u \in \mathcal{M}$，当 $n \to +\infty$ 时， $\mathbb{P}$-几乎处处成立：

$$\log \|S_n\|_{u^{-1}(\mathbf{S}^1)} \leq \varepsilon n.$$

引理 2.4（反集中界）。 在定理 *1.3*（2）的假设下，对于所有$a \in \mathbb{C}$ 和 $\varepsilon > 0$，有 $\mathbb{P}$-几乎处处，当 $n \to +\infty$ 时，

$$\log |S_n(a)| \geq -\varepsilon n.$$

引理 *2.3* 的证明。 对于 $\lambda_{\mathcal{M}}$-几乎每个 $u \in \mathcal{M}$， u^{-1}（$\mathbf{S}^1$）是一个圆 $\mathbf{S}$（a， r），其中 $a = u^{-1}(0) \in \mathbb{C}$ 且 $r \in (0, \infty)$。我们有

$$\begin{aligned} \|S_n\|_{\mathbf{S}(a,r)} &\leq \binom{n}{k} \sup_{i_1<\cdots<i_k} \frac{1}{||a| - |\xi_{i_1}||} \cdots \frac{1}{||a| - |\xi_{i_k}||} \\ &\leq \binom{n}{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{||a| - |\xi_i||^{1/2}} \right)^{2k} \\ &\leq \binom{n}{k} (O(n))^{2k} = (O(n))^{2k}. \end{aligned}$$

因此，

$$\log ||S_n||_{\mathbf{S}(a,r)} \ll k \log n \leq \varepsilon n$$

如所需。 □

最后，我们证明反集中界。

引理 *2.4* 的证明。根据博雷尔-坎特利引理，只需证明存在一个序列 p_n 使得 $\sum_n p_n < \infty$ 且

$$\mathbb{P}(|S_{k,n}(a)| \le e^{-\varepsilon n}) \le p_n. \tag{9}$$

由于 μ 是维数非退化的，存在测度 ν 和定义 1.2 中的集合 E。注意，存在常数 $R > 0$，使得 $\nu(E \cap D(0, R)) > 0$。因此，将 E 替换为 $E \cap D(0, R)$，并将 ν 替换为限制在 $E \cap D(0, R)$ 上的测度 ν（这只会增大下局部维数），我们可以假设 $E \subset D(0, R)$ 且 $\nu(\mathbb{C} \setminus E) = 0$。接下来，对每个 $q \in \mathbb{Q}_+$ 和 $r_0 \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$，令

$$E_{q,r_0} := \{x \in E : \nu(D(x, r)) \le r^q,\ \forall r \in (0, 2r_0)\}.$$

若对于 $x \in E$，$\dim_\nu(x) = s > 0$，则存在 $r_0 < 1$，使得对所有 $r < r_0$，都有

$$\frac{\log \nu(D(x, r))}{\log r} \ge s/2$$

这意味着

$$\nu(D(x, r) \le r^{s/2} \le r^q,\ \forall q \ge s/2.$$

因此，

$$E = \cup_{q,r_0} E_{q,r_0}.$$

由于集合 (q, r_0) 可数，存在 q 和 r_0，使得

$$\nu(E_{q,r_0}) > 0.$$

接着，我们进一步将 E 替换为 E_{q, r_0}，并将 ν 替换为其在该集合上的限制，同时固定 q和 r_0 的取值。作此选择后，我们有 $\nu(E) > 0$，$\nu(\mathbb{C} \setminus E) = 0$，且对所有 $x \in E$及所有 $r < 2r_0$，

$$\nu(D(x, r)) \le r^q.$$

这意味着，对所有 $x \in \mathbb{C}$及所有 $r < r_0$，

$$\nu(D(x, r)) \le r^q. \tag{10}$$

回忆一下，$S_{k,\ n}(a)$ 可以改写为一个次数为 k的多元多项式：

$$S_{k,n} := S_{k,n}(a) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} Y_{i_1} \dots Y_{i_k}$$

其中 $Y_i = \frac{1}{a - \xi_i^\circ}$

独立副本 $\xi_i \sim \mu$ 的抽样可以通过以下方式进行，从而分离随机性来源$\mu - \nu$和 ν。设 $p = \mu(\mathbb{C}) - \nu(\mathbb{C}) \in [0, 1)$，我们首先抽取独立副本$\eta_i \sim \mathrm{Ber}(p)$。若 $\eta_i = 1$，则从 $\frac{\mu-\nu}{p}$ 中抽取 ξ_i；否则，从 $\frac{\nu}{1-p}$中抽取 ξ_i。令$\mathcal{I} = \{i : \eta_i = 0\}$。在给定 η_1、.....、η_n 以及满足 $i \notin \mathcal{I}$的 ξ_i的条件下，随机性仍来自 $(\xi_i)_{i \in \mathcal{I}}$，这意味着它们是从概率测度 $\frac{\nu}{1-p}$中抽取的。

令 $K = |\mathcal{I}|$。于是，反集中界归结为以下随机性：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S_{k,n}(a)| \le e^{-\varepsilon n}) &= \mathbb{P}(|S_{k,n}(a)| \le \gamma_n^k) \\
&\le \mathbb{P}(|S_{k,n}(a)| \le \gamma_n^k, K \ge (1-p)n/2) + \mathbb{P}(K < (1-p)n/2) \\
&\le \sup \mathbb{P}_{(\xi_i)_{i \in \mathcal{I}}}(|S_{k,n}(a)| \le \gamma_n^k | \eta_1, \dots, \eta_n, (\xi_i)_{i \notin \mathcal{I}}) + e^{-cn}
\end{aligned}$$

其中 $\gamma_n = e^{-\varepsilon n/k}$，上确界取遍 η_1、……、η_n、$(\xi_i)_{i\notin\mathcal{I}}$的所有可能取值，且满足 $K \geq (1-p)n/2$。$\mathbb{P}(K < (1-p)n/2)$ 的上界 e^{-cn} 来自某个常数 c 对应的 Chernoff 不等式。

下文中，我们对 $\eta_1, \ldots, \eta_n, (\xi_i)_{i\notin\mathcal{I}}$的任意取值进行条件化，其中 $K \geq (1-p)n/2$。不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{I} = \{1, \ldots, K\}$。令

$$\alpha_n = \sup_{w\in\mathbb{C}} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{a-\xi} - w\right| \leq \gamma_n\right)$$

其中 $\xi \sim \nu/(1-p)$。由于

$$S_{k,n} = Y_1 S_{k-1,n-1} + S_{k-1,n}$$

由于 $S_{k-1,n-1}$ 和 $S_{k-1,n}$ 与 Y_1相互独立，因此对所有 $w \in \mathbb{C}$，有

$$\mathbb{P}(|S_{k,n} - w| \leq \gamma_n^k) \leq \mathbb{P}(|S_{k,n} - w| \leq \gamma_n^k, |S_{k-1,n-1}| \geq \gamma_n^{k-1}) + \mathbb{P}(|S_{k-1,n-1}| \leq \gamma_n^{k-1}).$$

右侧第一项有如下上界

$$\mathbb{P}\left(|Y_1 + \frac{S_{k-1,n} - w}{S_{k-1,n-1}}| \leq \frac{\gamma_n^k}{S_{k-1,n-1}}, |S_{k-1,n-1}| \geq \gamma_n^{k-1}\right) \leq \mathbb{P}\left(|Y_1 + \frac{S_{k-1,n} - w}{S_{k-1,n-1}}| \leq \gamma_n\right) \leq \alpha_n,$$

其中，最后一个不等式由 Y_1 与 $S_{k-1}, S_{k-1}{}_{n-1}^{n-w}$ 的独立性得出。因此，

$$\mathbb{P}(|S_{k,n} - w| \leq \gamma_n^k) \leq \alpha_n + \mathbb{P}(|S_{k-1,n-1}| \leq \gamma_n^{k-1}).$$

由于 $S_{k-1,n-1}$ 与 $S_{k,n}$ 形式相同，只是次数低一阶，因此可以重复这一过程多次，得到

$$\mathbb{P}(|S_{k,n} - w| \leq \gamma_n^k) \leq (k-1)\alpha_n + \sup_{w'\in\mathbb{C}} \mathbb{P}(|Y_k + \cdots + Y_K + w'| \leq \gamma_n) \leq k\alpha_n$$

在最后一个不等式中，我们再次利用 Y_k 与其余 Y_i之间的独立性，并注意到 $K = \Theta(n) \gg k$。

因此，只需证明 $\sum_n k\alpha_n < \infty$。为此，对于任意固定的 $a \in \mathbb{C}$，令 π 为 $Y = \frac{1}{a-\xi}$的分布，其中 $\xi \sim \frac{\nu}{1-p}$。令 ν_a为 $a-\xi$的分布，其支撑位于以 0 为中心、半径为 $R_a = R + |a|$ 的圆盘内。令 T为反演映射 $z \mapsto z^{-1}$。注意，T将 $D(0, R_a)$ 映射到 $\mathbb{C} \setminus \text{int}(D(0, r_a))$，其中半径为某个 $r_a > 0$。那么对于所有 $w \in \mathbb{C}$，

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{a-\xi} - w\right| \leq \gamma_n\right) = \pi(D(w, \gamma_n)) = \nu_a(T^{-1}(D(w, \gamma_n))) = \nu_a(T(D(w, \gamma_n))).$$

令 $c' = r_a/4$。如果 $D(w, c')$ 包含 0，那么 $T(D(w, \gamma_n)) \subset T(D(w, c')) \subset T(D(0, 2c'))$，它是半径大于 R_a 的外圆（当 n充分大时），因此 $\nu_a(T(D(w, \gamma_n))) = 0$。

因此，我们可以假设 $0 \notin D(w, c')$，这意味着 $|w| \geq c' \gg \gamma_n$。在这种情况下，$D(w, \gamma_n)$ 在 T 下的（原）像是一个半径为

$$r = \frac{\gamma_n}{||w|^2 - \gamma_n^2|} \leq \frac{\gamma_n}{c'^2/2}.$$

然后，对于所有充分大的 n，使得 $\frac{\gamma_n}{c'^2/2} < r_0$，由（10）可得，

$$k\pi(D(w, \gamma_n)) \leq k\nu_a(D(w', \frac{\gamma_n}{c'^2/2})) \ll k\gamma_n^q.$$

对于 $k = o(\frac{n}{\log n})$，我们有

$$\sum_n k\gamma_n^q = \sum_n ke^{-cqn/k} < \infty.$$

证明至此完成。 □

3. Proof of Theorem 1.4

3.1. Doeblin 条件。 和之前一样，我们将问题归结为：在 μ 满足定理 1.4 中的条件 (1) 的情况下，证明反集中引理 2.4（特别是 (9)）。暂时假设 Y_i 在某个面积为 1 的圆盘 $B \subset \mathbb{C}$ 上服从均匀分布。我们回顾 Carbery-Wright 不等式 [CW01, 定理 8]。

定理 3.1。 存在一个绝对常数 C，使得如果 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 是一个次数至多为 k 的多项式，且 π 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的对数凹测度，那么对所有 $\alpha > 0$、$q > 0$，

$$\pi(x \in \mathbb{R}^n : |p(x)| \le \alpha) \le \frac{Cq\alpha^{1/k}}{\left(\int |p(x)|^{q/k} d\pi(x)\right)^{1/q}} \tag{11}$$

我们将此定理应用于 $p = S_n$、$\alpha = e^{-\varepsilon n}$、$q = 2k$ 和 $\pi = \mathrm{Unif}(B)$。为计算二阶矩，我们写作 $c = \mathbb{E}Y_i$、$\overline{Y}_i = Y_i - c$，并且

$$S_n = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \prod_{j=1}^{k} (\overline{Y}_{i_j} + c) =: \sum_{I\subset[n]} \alpha_I \prod_{i\in I} \overline{Y}_i$$

其中求和遍历基数至多为 k 的指标子集，且 $\alpha_I \in \mathbb{C}$ 为确定性系数。注意，对于基数为 k 的 I，有 $\alpha_I = 1$。由独立性以及 $\mathbb{E}Y_i = 0$ 这一事实可得，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|S_n|^2 &= \sum_{I\subset[n]} |\alpha_I|^2 \mathbb{E}|\overline{Y}_1|^2 + \sum_{I\neq J} \alpha_I \overline{\alpha}_J \mathbb{E}\Big(\prod_{i\in I} \overline{Y}_i \prod_{i\in J} \overline{Y}_i\Big) \\
&= \sum_{I\subset[n]} |\alpha_I|^2 \mathbb{E}|Y_1|^2 \ge \sum_{|I|=k} \mathbb{E}|Y_1|^2 = \binom{n}{k} \mathbb{E}|Y_1|^2.
\end{aligned}$$

因此，

$$\left(\int |p(x)|^2 d\phi(x)\right)^{1/(2k)} = \left(\mathbb{E}|S_n|^2\right)^{1/(2k)} \ge C\binom{n}{k}^{1/2k}.$$

由 Stirling公式，当 $k = o(n)$ 时，其阶为

$$\Theta\left(\sqrt{\frac{n}{k}} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right)^{(n-k)/(2k)}\right) = \Theta(1)\sqrt{\frac{n}{k}}.$$

那么，(11) 的右端变为

$$\frac{Ck^{3/2}}{e^{\varepsilon n/k}\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^2},$$

当 n 足够大时，因为 $k = o(\ ^{n}/_{\log n})$。因此，

$$\mathbb{P}_{Y_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{Unif}(B)} \left(\left| \sum_{i_1 < \cdots < i_k} Y_{i_1} \dots Y_{i_k} \right| \le e^{-\varepsilon n} \right) \le n^{-2}.$$

在一般情况下， Y_i 在圆盘上的分布并不均匀，我们使用以下引理。该引理称为 Nummelin 分裂，它允许我们将 Y_i 分解为均匀随机变量与其余部分之和。这一分解在实数情形下已被多处采用，例如 [Pol12],[NP15], [BC19] 及其中的参考文献。由于我们未能找到关于复数情形的参考文献，下面给出该引理的证明。

引理 3.2。假设测度 μ 满足 *Doeblin* 条件 *3*，对于所有 $z \neq z_0$，存在参数 $c_a \in (0、1)$ $r_a > 0$、$w_a \in \mathbb{C}$，使得

$$Y_i = \frac{1}{z - \xi_i} \overset{d}{=} \varepsilon_i Z_i + (1 - \varepsilon_i) W_i$$

其中 ε_i、Z_i、W_i 是独立随机变量，分别服从 $\varepsilon_i \sim$ 伯努利分布(c_a)、 $Z_i \sim$ 均匀分布$(B(w_a、\ r_a))$。

应用这一引理，我们就可以将 S_n 表示为 ε_i、Z_i、W_i的形式。在给定 ε_i和 W_i的条件下， S_n 是关于随机变量 Z_i 的次数为 k 的多项式，可以写成

$$S_n = \sum_{i_1 < \cdots < i_k,\, i_j \in \mathcal{I}} Z_{i_1} \dots Z_{i_k} + T_n$$

其中 $\mathcal{I} = \{i \in [n] :\ \varepsilon_i = 1\}$ 和 T_n 是关于 Z_i的 $k-1$ 次多项式。因此，与之前一样， S_n 关于 Z_i 的二阶矩至少为 $C\binom{|\mathcal{I}|}{k}$ ，其中 C为某个常数。将 Carbery-Wright 不等式应用于由均匀随机变量Z_i构成的多项式 S_n ，可得

$$\mathbb{P}_{Z_i}(|S_n| \le e^{-\varepsilon n}) \le \frac{Cke^{-\varepsilon n/k}}{\binom{|\mathcal{I}|}{k}^{1/(2k)}}.$$

根据 Chernoff 不等式，以至少 $e^{-c_a n}$的概率，我们有 $|\mathcal{I}| \ge c_a n/2$。因此，

$$\mathbb{P}(|S_n| \le e^{-\varepsilon n}) \le e^{-c_a n} + c_a^{-2} n^{-2}$$

该级数仍然可求和。至此，引理 2.4 得证。

引理 *3.2* 的证明。令

$$Y := \frac{1}{a - \xi}, \qquad \xi \sim \mu.$$

我们首先证明 Y也满足 Doeblin 条件，只是参数可能不同。事实上，令 $\delta := |a - z_0| > 0$ 并选取

$$r_a := \min\{r_0, \delta/2\}.$$

那么，对每个 $w \in B$（z_0， r_a），我们都有 $|a - w| \ge \delta/2$. 定义

$$T_a : B(z_0, r_a) \to \mathbb{C}, \qquad T_a(w) := \frac{1}{a - w}.$$

映射 T_a 在 $B(z_0, r_a)$ 上全纯，其导数为

$$T_a'(w) = \frac{1}{(a - w)^2}.$$

由于在 $B(z_0, r_a)$ 上有

$$\delta/2 \le |a-w| \le |a-z_0| + r_a \le \delta + \delta/2 = 3\delta/2,$$

我们得到， $|T_a'(w)|$ 在上方和下方均一致有界。因此， T_a 是从 $B(z_0,\ r_a)$到开集的 C^1-微分同胚

$$D_a := T_a\big(B(z_0, r_a)\big).$$

此外，逆映射 T_a^{-1}的雅可比行列式为

$$J_{T_a^{-1}}(y) = \frac{1}{J_{T_a}(T_a^{-1}(y))},$$

因此它在 D_a上也有上下界。

设 ν_a 为 Y的分布，则对任意博雷尔集 $E \subset D_a$，有 $T_a^{-1}(E) \subset B(z_0,\ r_a) \subset B(z_0,\ r_0)$，因此由（3）得，

$$\nu_a(E) = \mu\big(T_a^{-1}(E)\big) \ge c_0 \operatorname{Leb}\big(T_a^{-1}(E)\big). \tag{12}$$

由于 T_a 在该集合上是微分同胚，且$J_{T_a^{-1}}$在此处有下界，因此存在 $m_a > 0$（仅依赖于 $a,\ z_0,\ r_0,\ c_0$），使得

$$\operatorname{Leb}\big(T_a^{-1}(E)\big) = \int_E J_{T_a^{-1}}(y)\, dy \ge m_a \int_E dy = m_a \operatorname{Leb}(E) \qquad \text{for all Borel } E \subset D_a. \tag{13}$$

结合（12）和（13）可得

$$\nu_a(E) \ge c_0 m_a \operatorname{Leb}(E) \qquad \text{for all Borel } E \subset D_a. \tag{14}$$

由于 D_a 是开集，存在一个球 $B(w_a, r_a) \subset D_a$。于是由（14）可得，

$$\nu_a(E) \ge c_0 m_a \operatorname{Leb}(E) \qquad \text{for all Borel } E \subset B(w_a, r_a).$$

因此， Y 满足 Doeblin 条件。接着我们令

$$c_a := c_0 m_a \operatorname{Leb}\big(B(w_a, r_a)\big) \le \nu_a(B(w_a, r_a)).$$

因此， $c_a \in (0, 1]$。如果 $c_a = 1$ ，则分解是平凡的；否则我们定义均匀测度

$$\lambda_a(E) := \frac{\operatorname{Leb}(E \cap B(w_a, r_a))}{\operatorname{Leb}(B(w_a, r_a))}.$$

那么对于每个 $E \subset B(w_a, r_a)$,

$$\nu_a(E) \ge c_a\, \lambda_a(E). \tag{15}$$

定义概率测度

$$\eta_a := \frac{\nu_a - c_a \lambda_a}{1 - c_a}.$$

于是我们得到如下分解

$$\nu_a = c_a \lambda_a + (1 - c_a)\eta_a.$$

等价地，我们可以将 Y 表示为

$$Y \overset{d}{=} \varepsilon Z + (1-\varepsilon) W,$$

其中 $\varepsilon \sim$ 服从伯努利分布(c_a)， $Z \sim \lambda_a$ 、 $W \sim \eta_a$和 δ_a, Z, W 相互独立。 □

3.2. **一般测度**。只需证明（??）。对于几乎所有的 $a \in \mathbb{C}$，根据定理 1.4 (2) 的假设，我们知道 $\mathbb{E}Y_i = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{a-u} d\mu(u) =: c \neq 0$ 其中 c 仅取决于 a和 μ。于是我们有

$$|\mathbb{E}S_n| = |c|^k \binom{n}{k} \to \infty \text{ as } n \to \infty \text{ for } k = o(n).$$

为计算 S_n 的高阶矩，我们首先将 Y_i 归一化为 $Y_i = \sigma X_i + c$，其中 $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(Y_i)}$。随机变量 X_i 相互独立，均值为 0，方差为 1。我们有

$$\begin{aligned} T_n := S_n - \mathbb{E}S_n &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{r=1}^{k} \sum_{j_1<\cdots<j_r \text{ subset of } i_1<\cdots<i_k} c^{k-r}\sigma^r X_{j_1}\dots X_{j_r} \\ &= \sum_{r=1}^{k} c^{k-r}\sigma^r \binom{n}{k-r} \sum_{j_1<\cdots<i_r} X_{j_1}\dots X_{j_r} \end{aligned}$$

因此，

$$\mathbb{E}[|T_n|^2] = \sum_{r=1}^{k} N_r\, \sigma^{2r}|c|^{2k-2r}.$$

其中

$$N_r = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}^2.$$

求和中两个相邻项的比值为

$$\frac{N_r\sigma^2}{N_{r-1}|c|^2} = \frac{(k-r+1)^2\sigma^2}{(n-r+1)r|c|^2} = o_a(1)$$

由于 $k = o(\sqrt{n})$。因此，

$$\mathbb{E}|T_n|^2 \ll N_1|c|^{2k-2}\sigma^2 = \frac{k^2\sigma^2}{n|c|^2}|\mathbb{E}S_n|^2. \tag{16}$$

因此，由切比雪夫不等式可得，当 $k = o(\sqrt{n})$ 时，

$$\mathbb{P}(\log|S_n(a)| \le -\varepsilon n) \le \mathbb{P}(|S_n(a) - \mathbb{E}S_n(a)| \ge |\mathbb{E}S_n(a)|/2) \ll \frac{\mathrm{Var}S_n(a)}{|\mathbb{E}S_n(a)|^2} = o(1)$$

如所求，从而证明得证。

4. Proof of Theorem 1.5

我们将改写第 2.2 节中的证明。根据引理 2.2，我们希望证明，对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及序列 $\mu_{P_n^{(k)}}$ 在 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ 中的所有聚点值 $\hat{}\mu_n$，都有

$$\int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log^- |u|\, d\widehat{\mu}_\infty \le \int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log^- |u|\, d\mu + \varepsilon$$

对于 $\lambda_{\mathcal{M}}$-几乎处处的 M¨obius 变换 $u \in \mathcal{M}$。然而，左侧含有来自 $\int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log^- |u|\, d\nu$ 的一些贡献，这些贡献可能是无穷大的。为避免这一问题，我们改为证明，对于所有 $\varepsilon,\ \varepsilon' > 0$，几乎所有 $u \in \mathcal{M}$，

$$\int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log^- |u|\, d\widehat{\mu}_\infty \le \int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log^- |u|\, d(\mu + \varepsilon\nu) + \varepsilon. \tag{17}$$

由引理 2.2 可得 $\widehat{\mu}_\infty \le \mu + \varepsilon\nu$ 对所有 ε 均成立，这进而表明 $\widehat{\mu}_\infty \le \mu$，因此 $\widehat{\mu}_\infty = \mu$，因为它们都是概率测度。

为证明（17），正如我们在（7）中所示，

$$\int_{\widehat{\mathbb{C}}} \log^- |u_i|\, d\widehat{\mu}_\infty \le \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} \log^- |u_i|\, d\mu_{P_n^{(k)}}(u). \tag{18}$$

接下来，注意到一种对 $\xi_i \sim \mu_n$ 进行抽样的方法是：先抽样 θ_i ~伯努利分布(α_n)，$\zeta_i \sim \mu$，$\eta_i \sim \nu$，然后令

$$\xi_i = \zeta_i \mathbf{1}_{\theta_i=0} + \eta_i \mathbf{1}_{\theta_i=1}.$$

于是得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log^- |u(\xi_i)| &= \frac{1}{n}\sum_{i:\theta_i=0} \log^- |u(\zeta_i)| + \frac{1}{n}\sum_{i:\theta_i=1} \log^- |u(\eta_i)| \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log^- |u(\zeta_i)| + \frac{N_n}{n}\frac{1}{N_n}\sum_{i:\theta_i=1} \log^- |u(\eta_i)|\end{aligned}$$

其中，$N_n \sim$ 二项分布(n，α_n) 是满足 $\theta_i = 1$ 的指标 i 的数量。对于第一个和，正如之前所见，根据大数定律，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log^- |u(\zeta_i)| \to \int_{\mathbb{C}} \log^- |u_i| d\mu \text{ almost surely.} \tag{19}$$

我们断言

$$N_n \to \infty \text{ almost surely} \tag{20}$$

and

$$\frac{N_n}{n} \to 0 \text{ almost surely.} \tag{21}$$

为证明 (20)，我们应用切尔诺夫下尾界：

$$\mathbb{P}(N_n \le n\alpha_n/2) \le \exp\left(-\frac{1}{8}\, n\alpha_n\right).$$

由于 $n\alpha_n/\log\, n \to \infty$，当 n 足够大时，右端至多为 n^{-2}，因此 $\sum_n \mathbb{P}(N_n \le n\alpha_n/2) < \infty$。由博雷尔–坎泰利引理，$\mathbb{P}(N_n \le n\alpha_n/2 \text{ i.o.}) = 0$。由此可知，$N_n \to \infty$ 几乎必然成立。

为证明 (21)，对于任意 $\delta > 0$，由于 $a_n \to 0$，存在 n_0，使得对所有 $n \ge n_0$ 都有 $a_n \le \delta/2$。对于这样的 n，我们使用二项随机变量的标准切尔诺夫界：

$$\mathbb{P}(N_n \ge \delta n) \le \left(\frac{ena_n}{\delta n}\right)^{\delta n} = \left(\frac{ea_n}{\delta}\right)^{\delta n}.$$

由于 $a_n \to 0$，右端关于 n 可求和，因此 $\sum_n \mathbb{P}(N_n \ge \delta n) < \infty$。由博雷尔–坎泰利引理，$\mathbb{P}(N_n \ge \delta n \text{ i.o.}) = 0$。由于这对 $\delta = 1,\ 1/2,\ 1/3,$ ..... 均成立，我们得出 $N_n/n \to 0$ 几乎必然成立。

现在，利用 (20)，由大数定律可得，$\sum_{i:\ \theta_i=1} \log^- |u(\eta_i)|$ 几乎必然收敛于其均值 $\int_{\mathbb{C}} \log^- |u|\, d\nu$；结合 (21)，得到

$$\frac{N_n}{n}\frac{1}{N_n}\sum_{i:\theta_i=1} \log^- |u(\eta_i)| \le \varepsilon \int_{\mathbb{C}} \log^- |u|\, d\nu \text{ almost surely eventually.} \tag{22}$$

结合 (18)、(19) 和 (22)，我们将证明 (17) 的问题归结为像之前一样证明 (8) 的相应版本，即几乎必然地

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log ||S_n||_{u^{-1}(\mathbf{S}^1)} - \log |S_n|(u^{-1}(0))}{n} \leq \varepsilon.$$

其中 $S_n = \frac{P_n^{(k)}}{k!}$ $P_n = \sum_{i_1<\cdots<i_k} Y_{i_1} \dots Y_{i_k}$ 其中 $Y_{i_j} = \frac{1}{z-\xi_i}$。用同样的论证，引理 2.3 仍然成立。最后，我们通过考察 η_i的随机性来调整引理 2.4 的证明。

更具体地说，我们首先抽取随机变量 (θ_i) 和 (ζ_i)。这将确定集合 $\mathcal{I} = \{i : \theta_i = 1\}$ 及其基数 N。正如我们先前所证明的，几乎必然，$N \geq n\alpha_n/2$ 对所有 $n \geq n_0$ 都成立，其中某个 n_0 仅由 (θ_i) 的取值决定。于是， S_n 现在是由 N 个独立同分布随机变量 $\eta_i \sim \nu$, $i \in \mathcal{I}$ 构成的次数为 k 的多项式。

注意， S_n 具有如下形式

$$S_n = \sum_{I\subset\mathcal{I}} \alpha_I \prod_{i\in I} Y_i$$

其中求和遍历所有基数至多为 k 的子集 I，并且对所有 $|I| = k$，我们有$\alpha_I = 1$。因此，将 n 替换为 N、将 $[n]$ 替换为 $\mathcal{I}$ 后，引理 2.4 的其余证明仍然成立，从而得到

$$\mathbb{P}_{(\eta_i)}(|S_n| \leq e^{-\delta n}) \leq \mathbb{P}_{(\eta_i)}(|S_n| \leq e^{-\delta N}) \leq ke^{-q\delta N} + e^{-c'N} \leq ke^{-q\delta N} + e^{-c'\alpha_n n} \leq n^{-2}$$

当 $k = o\left(\frac{\alpha_n n}{\log n}\right)$ 时。根据博雷尔-坎特利引理，几乎必然地， $|S_n| \leq e^{-\delta n}$最终成立。证明完毕。

References

[AHKT20] Noga Alon、Dan Hefetz、Michael Krivelevich 和 Mykhaylo Tyomkyn。《大图上的边统计量》。《组合学、概率与计算》，29(2)：163–189，2020 年。[ALN22] Thomas Alazard、Omar Lazar 和 Quoc Hung Nguyen。《求导作用下多项式根的动力学》。纯粹数学杂志 ´与应用数学 ´，162：1–22，2022 年。[AMP24] Jürgen Angst、Dominique Malicet 和 Guillaume Poly。《随机多项式临界点的几乎必然行为》。《伦敦数学会通报》，56(2)：767–782，2024 年。[BC19] Vlad Bally 和 Lucia Caramellino。《随机多项式与不变性原理之间的全变差距离》。《概率年刊》，47(6)：3762–3811，2019 年。[BLR22] Sung-Soo Byun、Jaehun Lee 和 Tulasi Reddy。《随机多项式及其高阶导数的零点》。《美国数学会汇刊》，375(09)：6311–6335，2022 年。[CW01] Anthony Carbery 和 James Wright。《凸体上多项式的分布不等式与 L^q 范数不等式》，其中 $\mathbb{R}^n$ 为复数域。《数学研究快报》，8(3)：233–248，2001 年。[FKS21] Jacob Fox、Matthew Kwan 和 Lisa Sauermann。《组合反集中不等式及其应用》。载于《剑桥哲学学会数学学报》，第 171 卷，第 227–248 页。剑桥大学出版社，2021 年。[HK23] Jeremy Hoskins 和 Zakhar Kabluchko。《重复求导下零点的动力学》。《实验数学》，32(4)：573–599，2023 年。[Kab15] Zakhar Kabluchko。《具有独立同分布根的随机多项式的临界点》。《美国数学会会刊》，143(2)：695–702，2015 年。[KST19] Matthew Kwan、Benny Sudakov 和 Tuan Tran。《子图统计量的反集中》。《伦敦数学会杂志》，99(3)：757–777，2019 年。

[KT22] Alexander Kiselev 和 Changhui Tan。《求导作用下多项式根的流》。《偏微分方程年刊》，8(2)：16，2022 年。[Mat99] Pertti Mattila。欧几里得空间中的集合与测度几何：分形与可求 *rectifiable* 性。第 44 号。剑桥大学出版社，1999 年。[MNV15] Raghu Meka、Oanh Nguyen 和 Van Vu。《独立随机变量多项式的反集中》。*arXiv* 预印本 *arXiv:1507.00829*，2015 年。[MV24a] Marcus Michelen 和 Xuan-Truong Vu。《随机多项式迭代导数的零点的几乎必然行为》。《概率电子通信》，29：1–10，2024 年。[MV24b] Marcus Michelen 和 Xuan-Truong Vu。《具有独立根的随机多项式越来越多阶导数的零点》。《美国数学会会刊》，152(06)：2683–2696，2024 年。[NP15] Ivan Nourdin 和 Guillaume Poly。《全变差距离下的不变性原理》。《随机过程及其应用》，125(6)：2190–2205，2015 年。[OS21] Sean O'Rourke 和 Stefan Steinerberger。《刻画求导作用下多项式复根的非局部输运方程》。《美国数学会会刊》，149(4)：1581–1592，2021 年。[Pol12] Guillaume Poly。狄利克雷形式及其在马尔可夫链遍历理论中的应用。博士论文，博士论文，2012 年。https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00690724。[PR13] Robin Pemantle 和 Igor Rivin。《随机多项式导数的零点分布》。载于《组合学进展：滑铁卢计算机代数研讨会，*W80，2011* 年 *5* 月 *26–29* 日》，第 259–273 页。Springer，2013 年。[Sub12] Sneha Subramanian。《多项式临界点的分布》。《概率电子通信》，17(37)：1–9，2012 年。[Tao22] Terence Tao。《充分高次多项式的森多夫猜想》。《数学学报》，229(2)：347–392，2022 年。[vBLSvdW07] Hans-Christian Graf von Bothmer、Oliver Labs、Josef Schicho 和 Christiaan van de Woestijne。《无限多个次数下的卡萨斯–阿尔韦罗猜想》。《代数杂志》，316(1)：224–230，2007 年。