arXiv:2601.01226v1 [math.PR] 3 Jan 2026

自然基数冗余字母表数制中具有独立表示数字的随机变量的奇异分布

M. V. PRATSIOVYTYI 和 S. P. RATUSHNIAK

摘要。给定自然参数 s 和 r，其中 $2 \le s \le r$，我们考察∞随机变量 $\xi = \sum_{k=1} s^{-k}\xi_k \equiv \Delta^{r_s}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$，的分布，其中 (ξ_k) 是一列独立随机变量，取值于 $\{0,1,...,r\}$，其对应概率分别为 p_0，p_1，.....，p_r，且所有 $p_i < 1$。

在 $s = 3 = r$的情形下，建立了 ξ 分布奇异及绝对连续的充要条件。证明了，ξ 的分布绝对连续当且仅当 $p_1 = \frac{1}{3} = p_2$。其他所有情形下，该分布均为奇异分布（即支撑在勒贝格测度为零的集合上）。当 $p_0p_1p_2p_3 = 0$时，在条件 $p_ip_{i+1}p_{i+2} \ne 0$ 下，明确确定了 ξ 分布的谱（即最小闭支撑）以及其密度的本质支撑的分形豪斯多夫–别西科维奇维数，其中 $i = 0,\ 1$。

本文还讨论了 ξ 的分布与由相应级数决定的无限伯努利卷积之间的联系，以及在含一个冗余数字的三进制数制中数的表示。文中还提出了若干未解决问题。

对于基为 3、字母表为 $A = \{0,1,2,3\}$的数制，确定一个数的表示个数这一问题已得到完全解决。研究证明，在区间 $[0;\ \frac{3}{2}]$ 中，几乎所有数（就勒贝格测度而言）都有连续统多个不同的表示；而表示唯一的数构成一个豪斯多夫–别西科维奇维数为 $\log_3 2$的分形集。

1. 引言

设 $(\Omega\ \mathfrak{B})$ 是一个可测空间，μ 和 ν 是其上定义的两个连续概率测度。回忆一下，若对于所有满足 $\nu(E) = 0$的 $E \in \mathfrak{B}$，都有 $\mu(E) = 0$，则称测度 μ 相对于测度 ν $(\mu \le \nu)$ 是绝对连续 的。若 $\mu \le \nu$ 且 $\nu \le \mu$，则称这两个测度等价$(\mu \sim \nu)$。若存在集合 $S \in \mathfrak{B}$，使得$\mu(S) = 0$ 且 $\nu(\Omega \setminus S) = 0$，则称测度 μ 和 ν 正交 $(\mu \perp \nu)$。

如果 $\mu \perp \nu$ 其中一个测度是勒贝格测度，则另一个测度称为奇异测度，即与勒贝格测度正交。奇异连续随机变量的概率分布函数相对于勒贝格测度几乎处处导数为零。

奇异概率测度和奇异函数仍是研究得不够充分的对象，其一般理论尚不完善。然而，Zamfirescu 定理 [21] 指出，在连续概率分布函数类中，具有非平凡奇异分量的函数构成第二类贝尔纲集。

存在若干与奇异测度（随机变量）相关的问题。

1. 深化 *Jessen–Wintner*定理的问题 [7], 该定理断言，由一列独立且离散分布的随机变量构成、几乎必然收敛的随机级数

日期：2026年1月6日。2020 数学学科分类。主要分类：60E05；次要分类：11K55、26A30。关键词和短语。随机变量的奇异分布、绝对连续分布、由级数支配的无限伯努利卷积、含三进制和冗余数字的数制、级数的不完全和集、 N-自相似集、分形维数。本研究得到 Simons基金会（SFI-PD-Ukraine-00014586，M.P.、S.R）的资助。发表于 Matematychni Studii，第63卷（第2期）（2025年），第199–209页。

具有纯分布（纯离散、纯绝对连续或纯奇异）。离散性判据已为人所知，但奇异性和绝对连续性的判据仍未明确。在某些类别的随机变量中，这一问题已得到成功解决 [1, 2]。

2. 两个奇异测度（分布）的卷积问题。目前，两个奇异测度（分布）的卷积为奇异（或绝对连续）的充要条件（以及相当一般的充分条件）尚不清楚。

3. 两个康托分布的卷积问题（支撑在勒贝格测度为零的无处稠密集上的分布）。迄今为止，关于两个康托分布卷积的谱（最小闭支撑）是康托集还是康托尔值集的充要条件仍然未知。

4. 特征函数绝对值在无穷远处的行为问题。

回顾一下，随机变量 ζ 的分布（概率分布函数为 $F_\zeta(x)$）的特征函数是复值函数 $f_\zeta(t)$，它是$+\infty$随机变量 $e^{it\zeta}$的期望值，即 $f_\zeta(t) = Me^{it\zeta} = \int e^{itx}dF_\zeta(x)$。已知 [10]，对于特征函数为 $f_\zeta(t)$ 的随机变量 ζ 的绝对$-\infty$连续分布，值 $L_\zeta \equiv \limsup |f_\zeta(t)|$ 等于 0；对于离散分布，该值为 $L_\zeta = 1$；对于奇异分布，该值为 $L_\zeta \in [0;\ 1]$.$|t|\to\infty$奇异分布的 L_ζ 值刻画了它接近绝对连续分布或离散分布的程度。奇异分布的 $L_\zeta = 0$ 或 $L_\zeta = 1$ 的性质 ζ 仍然是个谜。

对于满足 Jessen–Wintner 定理的连续随机变量 ζ，条件 $L_\zeta = 0$意味着其分布具有奇异性。这是运用特征函数法确定分布奇异性的核心。

2. 研究对象

设 s和 r为固定参数，满足 $2 \le s \le r$；设 $A = \{0, 1, ..., r\}$ 为一个字母表，$L = A \times A \times ...$ 为由字母表 A中的元素构成的序列集合。数 $x \in [0;\ \frac{r}{s-1}]$ 的级数表示 $x = \alpha_1 s^{-1} + \alpha_2 s^{-2} \overline{+ ...} + \alpha_k s^{-k} + ... \equiv \Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}$ 称为其在基为 s 、采用冗余字母表的数制中的表示。字母表的冗余性通常决定数表示的非唯一性。每一对参数（$s; r$）都会产生其独特的几何结构。

给定一个预先确定的独立随机变量序列 (ξ_k)，其中每个随机变量分别以概率 p_0，p_1，.....，p_r取值 0，1，.....，r（且所有 $p_i < 1$），考虑随机变量 $\xi = \Delta^{r_s}_{\xi_1\xi_2...\xi_k...}$. 的分布

根据 Jessen–Wintner定理，ξ 的分布要么是纯绝对连续的，要么是纯奇异的。对于任意一对参数 s 和 r，要通过充要条件区分这两种情况并非易事；即使参数取特定值，求出 ξ 的概率分布函数的显式表达式也同样困难。

关于随机变量 ξ，除了上述问题之外，我们还关注以下问题：

1）在奇异的情况下，描述分布所支撑的 Lebesgue零测度集的拓扑、度量和分形性质。

2）在绝对连续的情况下，寻找使 ξ 能够分解为两个独立分量之和的条件，其中一个分量在某个区间上服从均匀分布。

3）研究该分布的特征函数绝对值在无穷远处的行为。

4）建立 ξ 的分布与无限Bernoulli卷积以及Cantor型分布的卷积之间的联系。

本文致力于对这些问题作出部分解答。

文献 [15], 对 $s=2=r$ 的情形进行了深入研究。研究发现，只有当 ξ 满足 $p_1=0$，5或 $p_0=0$，$5=p_2$时，它才具有绝对连续分布。在所有其他情况下，ξ 的分布都是奇异的。

本文讨论 $s=3=r$ 的情形，并完整解决了确定 ξ 分布类型的问题，同时描述了特定条件下分布支撑集的分形性质。

∞下文中，我们记 $\Delta^{r_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}=\sum\limits_{n=1}3^{-n}\alpha_n$、 $\alpha_n\in A\equiv\{0,1,2,3\}$。表达式 $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}=x$ 称为数 x 的 Δ-进制表示，而 α_n 是该表示中的第 n 个数字。数的 Δ 进制表示中的括号表示重复（循环）部分。只有一位数字的循环节称为简单循环节。

3. ξ 的分布与由级数支配的无限伯努利卷积之间的联系

每个数 $x=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$、 $\alpha_n\in A$ 都是随机变量 ξ 的一个取值。ξ 的取值集合 E_ξ 与该级数的不完全和（子和）集合重合

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}u_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots=\sum_{k=1}^{n}u_k+r_n=\frac{3}{2},$$

∞即，集合 $E(u_n)=\{x:\ x=\sum\varepsilon_nu_n,\quad \varepsilon_n\in\{0;\ 1\},$ $M\in 2^N\}_{n=1}$

由于对于给定级数的各项 u_n 及相应余项 r_n，不等式 $u_n<r_n$对所有 $n\in N$均成立，由角谷定理 [8]可得 $E=[0;\ \overline{\ {}^{3}_{2}}]$。

由级数 (1) 所决定的无限伯努利卷积是和 $\eta=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\eta_n$，的分布，其中（$\eta_n$）是一个独立随机变量序列，各随机变量取值为 0 和 1，其概率分别为 $q_0>0$ 和 $q_1=1-q_0>0$。

根据 Jessen–Wintner定理，η 的分布要么是纯奇异的，要么是纯绝对连续的。下文将证明，它总是奇异的。

η 的分布是 ξ分布的一个特例，其中 $p_0=q_0^3$、 $p_1=3q_0^2q_1$、 $p_2=3q_0q_1^2$、$p_3=q_1^3$。

如果尝试采用几何方法来分析 ξ的分布，就会因数的 Δ表示并非唯一而遇到困难。

4. 数的 表示的个数及圆柱体的重叠

∞显然，等式 $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}=\Delta_{c_1\ldots c_k\ldots}$ 等价于$\sum 3^{-k}(\alpha_k-c_k)=0_{k=1}$

$0=\Delta_{(0)}$ 数$\frac{3}{2}=\Delta_{(3)}$ 有唯一的 Δ表示，但它们并非仅有的这类数。存在一些数，它们有有限个、可数个，甚至连续统个不同的 Δ表示。

注意，数的 Δ 表示中有三对可以互换的相邻数字对，而互换后数值不变： $03\leftrightarrow 10$, $13\leftrightarrow 20$, $23\leftrightarrow 30$。

定理1。 Δ 表示中包含简单周期（由一个数字组成的循环节）的数，具有可数个不同的表示（数 0 和 $3\ 2$除外）。

证明。 1. 首先，我们证明数 $x_0=\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k(0)}$ 有一个可数的不同表示集。事实上，对于任意长度的 2 序列，我们有：

$$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k(0)}=\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](2)}=\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1]2\ldots23(0)}.$$

因此， x_0 有无限多个不同的表示。下面证明这个集合是可数的。考虑数 1 的任意一种表示 $\Delta_{\alpha_1...\alpha_k...}$。如果假设 $\alpha_1 = 0$，就会得到矛盾：$1 = \Delta_{0\alpha_2\alpha_3...} \le \Delta_{0(3)} = \frac{1}{2}$。

The 假设 $\alpha_1 = 1$ 也会导致矛盾： $\frac{1}{3} \le 1 = \Delta_{1\alpha_2\alpha_3...} \le \Delta_{1(3)} = \frac{5}{6}$.

如果 $\alpha_1 = 3$，则 $1 = \Delta_{3\alpha_2...\alpha_n...} \le \Delta_{3(0)} = 1$，从而对所有 $k > 1$有 $\alpha_k = 0$，因此 $1 = \Delta_{3(0)} = \Delta_{(2)}$。

如果 $\alpha_1 = 2$，我们分析 α_2。

与 α_1一样，我们发现 $\alpha_2 \notin \{0, 1\}$，并且如果 $\alpha_2 = 3$，我们唯一地得到 $1 = \Delta_{23(0)}$。

如果 $\alpha_2 = 2$，我们对 α_3继续这一过程，依此类推。由此对所有 $k \in N$得到 $1 = \Delta_{2...23(0)} = \Delta_{(2)}$。因此，数1具有不同表示的可数集。

数 $\Delta_{0...0(2)}$ 的表示的可数性可用类似的方法证明。考虑到等式

$$\Delta_{\alpha_1...\alpha_k(0)} = \Delta_{\alpha_1...\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](2)} = \Delta_{\alpha_1...\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](0)} + \Delta_{\underbrace{0...0}_{k}(2)},$$

$$\Delta_{\alpha_1...\alpha_k(0)} = \alpha_1\Delta_{1(0)} + \alpha_2\Delta_{01(0)} + ... + \alpha_k\Delta_{\underbrace{0...0}_{k-1}1(0)}$$

证明即告完成。

2. 数 $x_0 = \Delta_{c_1...c_k(2)}$ 的表示的可数性由第 1 项得出，因为$\Delta_{c_1...c_k(2)} = \Delta_{c_1...c_k23(0)}$。

3. 将 Δ 进制表示中的连续数字两两替换（例如，将 03 替换为 10），可得:

$$\Delta_{(1)} = \Delta_{0(3)} = \Delta_{10(3)} = \Delta_{1...10(3)}.$$

设 $\Delta_{\alpha_1...\alpha_n...}$ 是数 $x_0 = \Delta_{(1)}$ 的任意一种表示。

由于 $\Delta_{0(3)} = \Delta_{(1)} = x_0 < \Delta_{2(0)}$，我们必有 $2 \ne \alpha_1 \ne 3$。若 $\alpha_1 = 0$，则 $x_0 = \Delta_{0(3)}$。若 $\alpha_1 = 1$，我们分析 α_2，依此类推。对于任意 $k \in N$，有

$$\Delta_{\underbrace{1...1}_{k}0(3)} = \Delta_{(1)} \le x_0 < \Delta_{\underbrace{1...1}_{k}2(0)},$$

因此 $2 \ne \alpha_{k+1} \ne 3$。如果 $\alpha_{k+1} \ne 1$，那么 $x_0 = \Delta_{\underbrace{1...1}_{k}0(3)}$.

数 $x_0 = \Delta_{c_1...c_k(1)}$，其中 $c_k \ne 1$，有可数个不同的 Δ-表示，因为数对 c_k1 没有其他替换方式，而集合 $c_1...c_k$k 可能只有有限种替换方式，或者完全没有替换方式——如果其中不含数字 0 或 3。

4. 由于 $\Delta_{a(3)} = \Delta_{[a+1]0(3)} = \Delta_{[a+1]1...1(3)} = \Delta_{[a+1](1)}$，根据第 3 条，数 $x_0 = \Delta_{a(3)}$ 有可数个 Δ-表示。数 $x_0 = \Delta_{c_1...c_k(3)}$ 的表示集合的可数性可由第 3 条及上述评注得出。因此，数 x_0 的 Δ-表示仅限于上述情形。□

推论 2. 在区间 $[0; \frac{3}{2}]$ 中，几乎所有的数（相对于勒贝格测度）都有连续统多个不同的 Δ-表示。

定理 3. </style}一个其 -表示中仅包含数字1 和2，且这两个数字都出现无穷多次的数，有唯一的 Δ-表示。

证明。 设 $\Delta_{\alpha_1...\alpha_n...}$ 是该数的一个任意 Δ-表示

$$x_0 = \Delta_{\underbrace{11...1}_{a_1}\underbrace{22...2}_{b_1}\underbrace{11...1}_{a_2}\underbrace{22...2}_{b_2}...\underbrace{11...1}_{a_n}\underbrace{22...2}_{b_n}...}, a_n, b_n \in N.$$

将给定的 Δ表示中 x_0 的数字记为 c_1,c_2,...,c_n,...

我们将使用数学归纳法原理证明对所有自然数 n， $\alpha_n = c_n$ 均成立。

由于 $\Delta_{(1)} = \Delta_{0(3)} < x_0 < \Delta_{2(0)} = \Delta_{1(2)}$，因此 $\alpha_1 = 1$。

假设对所有 $j \le k$ 都有 $\alpha_j = c_j$ 。考虑数字 α_{k+1}。存在两种可能情况：1）$c_{k+1} = 1$；2） $c_{k+1} = 2$。在第一种情况下：

$$\Delta_{c_1\ldots c_k(1)} = \Delta_{c_1\ldots c_k0(3)} < x_0 < \Delta_{c_1\ldots c_k2(0)} = \Delta_{c_1\ldots c_k1(2)},$$

因此 $\alpha_{k+1} = 1 = c_{k+1}$。在第二种情况下：

$$\Delta_{c_1\ldots c_k(1)} = \Delta_{c_1\ldots c_k1(3)} < x_0 < \Delta_{c_1\ldots c_k3(0)} = \Delta_{c_1\ldots c_k(2)},$$

因此 $\alpha_{k+1} = 2 = c_{k+1}$。由数学归纳法原理， $\alpha_n = c_n$ 对所有 $n \in N$均成立。对于表示以一串 2 开始的情况，证明是类似的。定理得证。□

定理 4。 如果某个数 x 的 Δ-表示不包含简单周期，且包含无穷多个数字 0 和3，那么 x 有连续统多个不同的表示。

证明。 在定理的假设下，数 x 的 Δ-表示包含无穷多个形如 $a3$ 或 $0b$ 的数对，其中 $a \ne 3$、 $b \ne 0$。每一对都允许进行另一种替换。因此，任何满足定理条件的数都有连续统多个不同的 Δ-表示。□

推论 5。数

$$x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\underbrace{1\ldots1}_{a_1}\underbrace{2\ldots2}_{b_1}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{a_n}\underbrace{2\ldots2}_{b_n}\ldots \ and\ y = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\underbrace{2\ldots2}_{b_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_1}\ldots\underbrace{2\ldots2}_{b_n}\underbrace{1\ldots1}_{a_n}\ldots$$

有有限个不同的 Δ表示。此外，若对所有 $j = 1,\ \alpha_j = 3\ k$，则 x和 y 都具有唯一的 $\overline{\Delta}$表示。

推论 6. 具有唯一 Δ表示的数集具有连续统势，其分形豪斯多夫–贝西科维奇维数等于$\log_3 2$。

数集 $\Delta_{c_1\ldots c_m}$ 中具有形式为 $\Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$、$(\alpha_n) \in L$的 Δ表示的数 $x \in E$，称为秩为 m 、基为 $c_1\ldots c_m$的圆柱体。容易证明，圆柱体 $\Delta_{c_1\ldots c_m}$ 是一个线段m 3，其端点为 $a = \sum c_k3^{-k}$、 $b = a + \frac{1}{3^m}$，显然， $\Delta_{c_1\ldots c_m} = \bigcup_{k=1} \Delta_{c_1\ldots c_mi}$。 $i=0$

Δ表示的数具有一个显著特点：柱集之间存在特定的重叠：

$$\Delta_{c_1\ldots c_mi} \cap \Delta_{c_1\ldots c_m[i+1]} = \Delta_{c_1\ldots c_{m-1}i3} = \Delta_{c_1\ldots c_{m-1}[i+1]0},\ i = 0, 1, 2,$$

也就是说，两个“相邻”柱集的交集本身就是一个秩更高的柱集。

5. 具有分形水平集的函数

根据关于数的 r_s表示个数所得的结果，可以对该函数的水平集进行分形分析。下面考虑一个关于 $s = 3 = r$ 的模型示例。

回顾一下，数 $x \in [0; 1]$ 的传统四进制表示称为

$$x = \Delta^4_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{4^n} + \ldots,$$

其中 $\alpha_n \in \{0, 1, 2, 3\}$，尤其是 $\Delta^4_{\alpha_1\ldots\alpha_k(0)} = \Delta^4_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](3)}$。

约定在一个四进有理数的两种四进制表示中，只采用循环节为 (0) 的那一种，据此定义函数 f：

$$f(x = \Delta^4_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

定理 7. 函数 f 的水平集具有不同的基数：

1) 单点集和有限集；2) 可数集和

连续统集，

包括分形维数为正的集合。

证明。显然，集合 $f^{-1}(y_0)$ 在层级 $y_0 = f(x_0)$ 上的基数等于数 $y_0 \in [0$ 的不同表示所构成的集合的基数；$\frac{3}{2}]$。

如上所述，数 0 和 3_2 具有唯一表示：$f^{-1}(0) = \Delta^4_{(0)}$，$f^{-1}(3_2) = \Delta^4_{(3)} = 1$。根据引理，数 $\Delta_{(12)} = \frac{5}{8}$ 也具有唯一表示 $f^{-1}(5_8) = \Delta^4_{(12)} = \frac{2}{5}$。

数 $y_0 = \Delta_{1010(12)} = \Delta_{0310(12)} = \Delta_{0303(12)} = \Delta_{1003(12)}$ 具有有限个形式上不同的表示，因此具有有限水平集：

$$\{\Delta^4_{1010(12)}, \Delta^4_{0310(12)}, \Delta^4_{0303(12)}, \Delta^4_{1003(12)}\}.$$

水平集 $y_0 = \Delta_{(1)} = \Delta_{1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{n}(3)}$，由上可知，它是可数的。

数 $y_0 = \Delta_{(10)}$ 有连续统个不同的表示，因此函数 f 的水平集是连续统：$y_0^{-1} = \{x : x = \Delta^4_{a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n\ldots}\}$，其中 $(a_n,\ b_n) \in \{(1,\ 0),\ (0,\ 3)\}$。

将数 $x = \Delta^4_{a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n\ldots}$ 写成如下形式

$$\begin{aligned} x =& \Delta^4_{a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n\ldots} = \frac{a_1}{4} + \frac{b_1}{4^2} + \frac{a_2}{4^3} + \frac{b_2}{4^4} + \ldots \\ =& \frac{4a_1 + b_1}{4^2} + \frac{4a_2 + b_2}{4^4} + \ldots = \frac{\alpha_1}{16} + \frac{\alpha_2}{16^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{16^n} + \ldots, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_n \equiv 4a_n + b_n \in \{3; 4\}$，我们看到集合 y_0^{-1} 由这样的点组成：它们在十六进制中的表示只使用两个数字，即 3 和 4。众所周知，该集合是一个连续统，是一个自相似的勒贝格零测集，其分形维数为 $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$。□

6. 分布的奇异性

集合 E_ξ 在条件 $p_0p_1p_2p_3 \neq 0$ 下是 ξ的分布的谱。如果 $p_0p_1p_2p_3 = 0$，则 ξ的谱是 E的子集。如果 $p_0 = 0$或 $p_3 = 0$，则谱分别为 $[0;\ 1]$或 $[\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}]$。在所有其他情况下，谱是一个无处稠密分形集。当 $p_0p_ip_3 \neq 0$ 且 $p_j = 0$时，会出现一个非平凡的情形，对于 $i \neq j$，$j \in \{1, 2\}$。

引理 8. 集合 $C[\Delta;\ \{0, 1, 3\}] = \{x :\ x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$、$\alpha_n \in \{0, 1, 3\}\}$ 是一个无处稠密的 N-自相似集，其勒贝格测度为零，分形（豪斯多夫）维数为 $x =$ 对数$_3 \frac{3+\sqrt{5}}{2}$。

证明。令 $\Delta'_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta_{c_1\ldots c_m} \cap C$。由于 $C \subset [\Delta_3 \cup \{\Delta_1 \cup \Delta_0\}]$，$\varnothing = \Delta_1 \cap \Delta_3$，可得 $C \overset{3}{\sim} \Delta'_3$。由于 $\Delta'_{13} \subset C$ 和 $\Delta'_{13} \cap \Delta_0 = \varnothing$，我们有 $C \overset{3-2}{\sim} \Delta'_{13}$。

此外 $\Delta_{00} \cup \Delta_{01}$ 与 $\Delta_{10} \cup \Delta_{11}$全等（等距），$\Delta'_0 \cup \Delta'_1 \overset{3}{\sim} \Delta'_{i0} \cup \Delta'_{i1}$，而

$$C \subset \Delta_3 \cup \Delta_{13} \cup [(\Delta_{00} \cup \Delta_{01}) \cup (\Delta_{10} \cup \Delta_{11})].$$

此外，$C \overset{3}{\sim} \Delta'_{i13}$、$i = 0,\ 1$。考虑到 $\Delta_{003} = \Delta_{010}$、$\Delta_{030} = \Delta_{100}$，我们有

$$\Delta'_{000} \cup \Delta'_{001} \cong \Delta'_{010} \cup \Delta'_{011} \cong \Delta'_{100} \cup \Delta'_{101} \cong \Delta'_{110} \cup \Delta'_{111} \overset{3^2}{\sim} \Delta'_0 \cup \Delta'_1,$$

并得到：$C \subset \Delta'_3 \cup \Delta'_{13} \cup [\bigcup_{i_1=0}^{1} \ldots \bigcup_{i_n=0}^{1} \Delta'_{i_1\ldots i_n13}] \cup D$，其中 D 是一个可数集，且 $C \overset{k}{\sim} \Delta'_{i_1\ldots i_n13}$，满足 $k = 3^{-(n+2)}$。因此，C 是一个 N-自相似集，其维数是方程 $\frac{1}{3^x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{(n+2)x}} = 1$ 的解，即 $x =$ log $\frac{3+\sqrt{5}}{3\ 2}$。□

注意 9. 集合 $C[\Delta;\ \{0, 2, 3\}]$ 与 $C[\Delta;\ \{0, 1, 3\}]$具有相同的性质。证明与上面的证明类似。

定理10. 设 $p_0p_1p_2p_3=0$。*1.* 若 $p_i=p_{i+1}=p_{i+2}=\frac{1}{3}$，则随机变量 ξ 在单位区间上服从均匀分布。

2. 若存在一个p_j 使得 $0\neq p_j\neq\frac{1}{3}$，则随机变量 ξ 的分布是奇异分布，并且：

2.1）如果两个概率为零，那么 ξ 具有分形维数谱为$\log_3 2$的康托型分布；

2.2）如果仅有一个概率为零，且 $p_1p_2=0$，那么 ξ 具有分形维数谱为$\log_3\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 的康托型分布；

2.3）如果仅有一个概率为零，且 $p_0p_3=0$，那么 ξ 具有奇异分布，其概率分布函数严格递增，且其密度的本质支撑的分形维数为 $-\log_3 p_1^{p_1}p_2^{p_2}p_i^{p_i}$。

证明。 1. 若 $p_3=0$，则 ξ 是一个随机变量，其三进制表示中的数字 ξ_n 取值为0、1、2的概率均为$\frac{1}{3}$。已知这种随机变量在区间 [0上服从均匀分布； 1]。

如果 $p_0=0$，则考虑随机变量 $\hat{\xi}=\xi-\frac{1}{2}=\xi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$，即随机变量$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n-1}{3^n}=\Delta^3_{\xi_1'\xi_2'\ldots\xi_n'\ldots}$，其中 ξ_n' 以相等的概率 $\frac{1}{3}$ 取值 0、1、2。由于 ξ 和 $\hat{\xi}$ 具有 $\hat{}$ 等价分布，且 ξ 服从均匀分布，因此 ξ 在$[\frac{1}{2}$上服从均匀分布； $\frac{3}{2}]$。

2.1）如果 $p_3=0=p_i$，则 ξ的分布的谱是康托型集合 $C[r_s,V]$，其中$V=\{0,1,2\}\setminus\{i\}$，已知该集合是一个分形维数为 $\log_3 2$的自相似集。当 $p_1=0=p_2$时，也会出现类似情况。如果 $p_3\neq 0=p_0$ 和 $p_1p_2=0$，那么相应的随机变量 $\hat{\xi}$ 和 ξ 具有等价分布。后一种情况对应于在经典三进制表示中具有独立数位的随机变量。由于某一数字的概率为零，ξ 具有奇异康托型分布。

2.2）。在 $p_1p_2=0$ 的情况下，ξ 的分布的谱与集合 $C[r_s$ 重合； $\{0,2,3\}]$ 或 $C[r_3$； $\{0,1,3\}]$。因此，命题 2.2）由前面的引理和备注得出。

2.3）。设 $p_0p_3=0$。如果 $p_3=0$，则随机变量 ξ 具有独立同分布的三进制数字；如果对于某个 j 有 $p_j\neq\frac{1}{3}$，则该分布是奇异的。

事实上，在这种情况下，概率分布函数的增长点集合是区间 [0； 1]。ξ 属于集合 $E[3$； p_0， p_1， $p_2]$ 中的概率为 1，其中这些数的数字频率分别与 p_i 对于每个 $i=0$， 1，2 相匹配。正如 Eggleston [4] 和 Billingsley [3], 所证明的，集合 E 的勒贝格测度为零，其豪斯多夫–别西科维奇维数为 $-\log_3 p_0^{p_0}p_1^{p_1}p_2^{p_2}$。因此， ξ 具有奇异分布，并且其分布函数 [11]严格递增。

若 $p_0=0$，则对于随机变量 $\hat{\xi}=\xi-\frac{1}{2}$，同样的结论也成立，其分布与 ξ 的分布等价。□

在 $p_0p_1p_2p_3\neq 0$ 的情况下，我们使用特征函数法。

ξ 的分布的特征函数具有如下形式

$$f_\xi(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t),$$

其中 $\varphi_k(t)=p_0+p_1e^{it\cdot 3^{-k}}+p_2e^{i2t\cdot 3^{-k}}+p_3e^{i3t\cdot 3^{-k}}=\sum_{m=0}^{3}p_m\cos\frac{mt}{3^k}+i\sum_{m=0}^{3}p_m\sin\frac{mt}{3^k}$，并满足函数方程 $f_\xi(t)=\varphi_1(t)f_\xi(\frac{t}{3})$。特别地， $f_\xi(2\pi ns)=f_\xi(2\pi n)$， $\forall n\in N$且 $L_\xi\geq|f_\xi(2\pi)|$。

定理 11。 若 $p_1=\frac{1}{3}=p_2$，则具有独立数位 ξ_n、取值为 0、1、2、3 且相应概率为 p_0、 p_1、 p_2、 p_3 的随机变量 $\xi=\Delta_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ 具有绝对连续分布。

在这种情况下， ξ 的分布是 $[0$ 上的均匀分布； $1]$ 与奇异康托型分布的卷积。在所有其他情况下， ξ 的分布是奇异的。

证明。 如果 $p_1 = \frac{1}{3} = p_2$，那么 ξ 可以表示为两个独立随机变量之和： τ，它在 $[0$上服从均匀分布； $1]$, 以及 ζ, 它服从奇异康托型分布。

∞事实上，在 $[0$上服从均匀分布的随机变量具有形式 $\tau = \sum 3^{-n}\tau_n$，其中 $(\tau_n)_{n=1}$是独立同分布随机变量，取值为 0、1、2，且其概率均为 $1\ 3$。随机变量$\infty\zeta = \sum 3^{-n}\zeta_n$，其中 ζ_n 是独立随机变量，取值为 0、1，概率分别为 $x > 0_{n=1}$和 $1 - x > 0$，具有奇异康托型分布。

如果加数相互独立，则 τ 和 ζ 的分布的卷积就是和 $\tau + \zeta$ 的分布。恒等式 $\xi = \tau + \zeta$等价于方程组 $\xi_n = \tau_n + \zeta_n$, $n = 1$， 2， .....。该方程组等价于以下相容方程组：

$$p_0 = P\{\xi_n = 0\} = \frac{1}{3}x,\ \ p_1 = P\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{3}(1-x) + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3},$$
$$p_2 = P\{\xi_n = 2\} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}(1-x) = \frac{1}{3},\ p_3 = P\{\xi_n = 3\} = \frac{1}{3}(1-x),$$

这意味着 $p_1 = \frac{1}{3} = p_2$、 $p_0 + p_3 = \frac{1}{3}$ 和 $x = 3p_0$。

因此，在条件 $p_1 = \frac{1}{3} = p_2$ 下， ξ 的分布是均匀分布与奇异分布的卷积，因而它是绝对连续的。

现在考虑 $p_1 \neq \frac{1}{3}$ 或 $p_2 \neq \frac{1}{3}$ 的情形。我们使用特征函数法来获得奇异性的充分条件，具体证明 $L_\xi > 0$，这意味着奇异性。我们首先证明无穷乘积

$$\prod_{k=2}^{\infty} \varphi_k(2\pi) \neq 0. \tag{2}$$

$_3$由于对于所有 $k > 1$， $\sum p_m \sin \frac{2\pi m}{3^k} > 0$，因此可得 $\varphi_k(2\pi) \neq 0$。众所周知，无穷乘积 (2) 的绝对∞收敛等价于级数$\sum_{m=1}^{} |\varphi_k(2\pi) - 1|$的收敛。$_{k=2}$我们使用比较判别法证明该级数的收敛性。我们来估计 $u_k = |\varphi_k(2\pi) - 1|$:

$$u_k = \left[(\sum_{m=0}^{3} p_m \cos(2\pi m 3^{-k}) - 1)^2 + (\sum_{m=0}^{3} p_m \sin(2\pi m 3^{-k}))^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left[(\sum_{m=0}^{3} p_m)^2 + 4(\sum_{m=1}^{3} p_m \sin^2(\pi m 3^{-k}) - \sum_{0\neq i\neq j\neq 0} p_i p_j \sin^2(\pi(i-j)3^{-k})) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 2\left[\sum_{m=0}^{3} p_m \sin^2(\pi m 3^{-k}) - \sum_{0\neq i\neq j\neq 0} p_i p_j \sin^2(\pi(i-j)3^{-k}) \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq 2\left[\sum_{m=1}^{3} p_m \sin^2(\pi m 3^{-k}) \right]^{\frac{1}{2}} \leq 2\left[\sum_{m=1}^{3} p_m \sin^2(3\pi \cdot 3^{-k}) \right]^{\frac{1}{2}} \leq 2\sin(3\pi \cdot 3^{-k}) \leq 6\pi \cdot 3^{-k}.$$

注意，最后三个不等式对所有 $k > 2$ 都成立。由最后一个不等式及∞比较判别法可知，级数 $\sum |\varphi_k(2\pi) - 1|$ 收敛，因此无穷$_{k=2}$

乘积 (2) 也收敛，这意味着不等式 (2) 成立。因此， $|f_\xi(2\pi)| = 0$ 当且仅当 $\varphi_1(2\pi) = 0$， $\sum_{m=0}^{3} \cos \frac{2\pi m}{3} = 0 = \sum_{m=0}^{3} \sin \frac{2\pi m}{3}$ 时，这等价于方程组 $p_0 - \frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_2 + p_3 = 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(p_1 - p_2)$. 因此， $|f_\xi(2\pi)| = 0$ 当且仅当 $p_1 = \frac{1}{3} = p_2$，并且在此条件下，如前所示， ξ 的分布是绝对连续的。

因此，当 $p_1 \neq \frac{1}{3}$ 或 $p_2 \neq \frac{1}{3}$ 时，我们有 $|f_\xi(2\pi)| \neq 0$，从而 $L_\xi > 0$，这意味着 ξ 的分布是奇异的。□

推论 12. 随机变量 η 具有纯奇异分布。

η 的分布是奇异的，因为方程组 $3q_0^2(1-q_0) = \frac{1}{3} = 3q_0(1-q_0)^2$ 不相容。

7. ξ 的分布作为康托型分布的卷积

引理 13. 两个独立奇异分布随机变量 $\theta = \sum \theta_n 3^{-n}$ 和 $n=1\infty\varepsilon = \sum \varepsilon_n 3^{-n}$ 的和，其中 (θ_n) 和 (ε_n) 是取值为0、$2_{n=1}$以及0、1的独立随机变量序列，概率分别为 u、 $1-u$ 和 v、 $1-v$，具有奇异分布，其谱为区间 $[0;\ \frac{3}{2}]$。

证明。 事实上，和 $\theta + \varepsilon$ 的分布与 ξ 属于同一类分布，其对应参数为 $p_0 = uv$, $p_1 = u(1-v)$, $p_2 = v(1-u)$, $p_3 = (1-u)(1-v)$。然而，系统 $u(1-v) = \frac{1}{3} = v(1-u)$是不相容的。因此，根据定理 11， $\theta + \varepsilon$ 的分布是奇异的。□

定理 14。 若 $p_0 = (p_0 + p_1)(p_0 + p_2)$，则 ξ 的分布是两个康托尔型分布的卷积，即随机变量 $\theta = \Delta_{\theta_1\theta_2\ldots\theta_n\ldots}, \varepsilon = \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$的分布，其中 (θ_n) 和 (ε_n) 是取值为0、2 以及0、1的独立随机变量序列，其概率分别为 $p_0 + p_1, 1-(p_0 + p_1)$ 和 $p_0 + p_2, 1 - (p_0 + p_2)$。

证明。 若 $P\{\theta_n = 0\} = x$, $P\{\theta_n = 2\} = 1 - x$, $P\{\varepsilon_n = 0\} = y$, $P\{\varepsilon_n = 1\} = 1 - y$，则等式$\xi = \theta + \varepsilon$等价于方程组 $p_0 = xy$, $p_1 = x(1-y)$, $p_2 = (1-x)y$, $p_3 = (1-x)(1-y)$，而该方程组又等价于 $x = p_0 + p_1$, $y = p_0 + p_2$, $p_0 = xy = (p_0 + p_1)(p_0 + p_2)$。 □

注 15。 对于 $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{4}$，条件 $p_0 = (p_0 + p_1)(p_0 + p_2)$成立。在这种情况下， ξ 的分布是奇异的。

8. 结束语

我们未能得到概率分布函数 $F_\xi(x)$ 的显式表达式。在条件$p_0p_1p_2p_3 \neq 0$ 下，描述 ξ, $N_\xi = \{x : F'_\xi(x) > 0$或 $F'_\xi(x)$ does not exist$\}$ 的分布密度本质支撑的拓扑、度量及分形性质这一问题仍未解决。主要困难源于级数表示数的非唯一性以及圆柱体之间的重叠。尽管重叠结构相对简单，计算圆柱体的概率仍然很有挑战性。

参考文献

[1] S. Albeverio, Ya. Gontcharenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. Jessen–Wintner型随机变量及其分布的分形性质。《*Mathematische Nachrichten*》。2006年。第279卷，第15期。第1619—1633页。[2] S. Albeverio, Ya. Goncharenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. 具有独立二进制位的随机变量分布的卷积。《*Random Operators and Stochastic Equations*》。2007年。第15卷，第1期。第89—104页。[3] P. Billingsley.《Ergodic Theory and Information》。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1965年。xiii+193 页。[4] H. G. Eggleston. 由十进制性质定义的集合的分数维。《*Quart. J. Math.*》1949年。第20卷。第31—36页。

[5] Ya.V. Goncharenko, I.O. Mykytiuk. 冗余数字集数制中的实数表示及其应用。Nauk. Chasop. Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova. Ser. 1. Fiz.-Mat. Nauky，2004年，第5期，第242–254页。（乌克兰语）[6] Ya. Goncharenko, M.V. Pratsiovytyi, and G. Torbin. 具有独立二进制位的随机变量奇异分布卷积的度量—拓扑性质与分形性质，《概率论与数理统计》（乌克兰）第67卷，11–20页（2002年）。[7] B. Jessen, A. Wintner. 分布函数与黎曼ζ函数// Trans. Amer. Math. Soc. – 1935年。– 38。第1期。– 第48–88页。[8] S. Kakeya. 关于无穷级数的部分和。Tohoku Sci Rep.，(4)：159–163，1914年。[9] O. Lavrova, V. Mogylova, O. Stanzhytskyi, O. Misiats. 将时间尺度上的一族优化问题用于区间上的最优控制问题近似// 非线性动力学与系统理论，2017年，17 3 303 314 ( )，第 – 页。[10] E. Lukacs.《特征函数》。— 第2版。— 纽约：Hafner Publishing Company，1970年。[11] G. Marsaglia. 具有独立二进制位的随机变量，Ann. Math. Statist. — 1971年。— 42，第^o 2期。— 第1922–1929页。[12] I.O., Mykytyuk, M.V. Pratsiovytyi 具有两个冗余数字的二进制数制及其相应的数论度量理论。// M.P. Dragomanov国立师范大学科学纪要。系列：物理与数学科学，2003年，第4期，第270–279页。（乌克兰语）[13] M.V. Pratsiovytyi. 奇异分布的卷积//乌克兰国家科学院报告，1997年。– 第9期。– 第36–43页。（乌克兰语）[14] M.V. Pratsiovytyi. 关于奇异分布的有限卷积及Jessen–Wintner定理的“奇异类比”，Ukrainian Math. J. – 1998年。– 第50卷，第8期。– 第1233–1241页。[15] M.V. Pratsiovytyi. 随机幂级数之和的分布。乌克兰国家科学院报告，1996年，第5期，第32–37页。（乌克兰语）[16] M.V. Pratsiovytyi. 奇异概率分布研究的分形方法。– 基辅：Nats. Pedagog. Univ. Mykhaila Dragomanova，1998年。– 296 页。（乌克兰语）[17] J. Reich. 关于抛硬币检验所得分布的一些结果。概率年刊。– 1982 年。– 10，第 3 期。第780–786页。[18] J. Reich. 独立随机变量的加权和何时具有密度——一些结果与例子。概率年刊。– 1982年。– 10，第3期。第787–798页。[19] R. Salem. 关于一些严格递增的奇异单调函数，Trans. Amer. Math. Soc. — 1943年。— 53。— 第 427–439 页。[20] B. Solomyak. 关于随机级数 $\sum \pm\lambda^n$ （一个 Erdös 问题），Ann. of Math.，**2** 142 （1995 年），第3期，611–625页。[21] T. Zamfirescu. 大多数单调函数都是奇异的。*Amer. Math. Mon.*。1981年。第88卷。第47–49页。

M.V. Pratsiovytyi 乌克兰国家科学院数学研究所、
德拉戈马诺夫乌克兰国立大学，基辅，乌克兰
ORCID 0000-0001-6130-9413电子邮箱地址：
prats4444@gmail.com

S.P. Ratushniak 乌克兰国家科学院数学研究所、
德拉戈马诺夫乌克兰国立大学，基辅，乌克兰
ORCID 0009-0005-2849-6233电子邮箱地址：
ratush404@gmail.com