# HyDRA：面向仅测量 DEQ 训练的混合去噪正则化

Markus Haltmeier* Lukas Neumann† Nadja Gruber‡ Johannes Schwab§
Gyeongha Hwang¶

arXiv:2601.01228v1 [cs.CV] 3 Jan 2026

**摘要**

求解形如 $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 的问题仍然具有挑战性，原因在于问题的不适定性以及缺乏大规模监督数据集。深度平衡（DEQ）模型已得到成功应用，但通常需要监督配对数据（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）。在许多实际场景中，只有测量数据 $\mathbf{y}$ 可用。我们提出 HyDRA（混合去噪正则化自适应），这是一种用于 DEQ 训练的仅测量框架，将测量一致性与自适应去噪正则化项相结合，并配合数据驱动的提前停止准则。在稀疏视图 CT 上的实验表明，该方法具有具有竞争力的重建质量和快速推理速度。

## 1 引言

逆问题广泛存在于各种科学与工程应用中，包括地球物理勘探、遥感、无损检测、医学成像以及各种形式的显微成像[5, 12, 19, 30]。离散化后，目标是从噪声干扰且可能不完整的测量数据 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 中恢复未知信号 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$，其关系由下式决定

$$\mathbf{y} = (\mathcal{A}\mathbf{x}) \odot \boldsymbol{\epsilon}, \tag{1.1}$$

其中，$\mathcal{A}$ 表示线性前向算子，$(\cdot)\odot\boldsymbol{\epsilon}$ 表示测量噪声模型。此类问题通常是病态的，且 $\mathcal{A}$ 可能是病态的，或具有非平凡零空间，从而使逆问题不稳定且解不唯一。我们考虑一种概率设定，其中图像$\mathbf{x}$和 $\mathbf{y}$ 服从分布$p_{\mathbf{x}}$、$p_{\mathbf{y}}$，而 $\mathcal{A}$ 是一个固定的、确定且已知的映射。

我们关注的是一种特别具有挑战性的情形：$\mathcal{A}$ 严重欠定，且其伪逆不稳定。一个典型例子是有限数据 CT，其中 $\mathcal{A} = \mathbf{MA}$，$\mathbf{A}$ 表示离散化的完整数据 Radon 变换，而 $\mathbf{M}$ 是一个掩码或子采样算子，表示只能获得部分测量数据。降低成本、缩短采集时间并减少辐射暴露，是实际应用中避免获取完整测量数据的动因。经典重建技术通过显式正则化来处理这些问题，将关于$\mathbf{x}$的先验知识编码其中，例如平滑性或稀疏性 [30]。在典型的变分正则化问题 $\min_{\mathbf{x}} \|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \alpha\, r(\mathbf{x})$ 中，空间先验以加性惩罚项 $\alpha\, r(\mathbf{x})$ 的形式纳入，其中 $\alpha > 0$，而项 $\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$则用于确保数据一致性。该框架涵盖了 Tikhonov 正则化等经典方法

*因斯布鲁克大学数学系，因斯布鲁克，奥地利。
†因斯布鲁克大学工程科学基础科学研究所，奥地利。
‡因斯布鲁克大学计算机科学系，奥地利。§库夫施泰因应用科学大学，奥地利。
¶岭南大学数学系，韩国庆山。通讯作者：ghhwang@yu.ac.kr。

以及全变差（TV）最小化，这些方法已展现出广泛的实用性。然而，这些人工设计的先验往往无法捕捉自然图像的统计复杂性，还可能引入过度平滑或阶梯效应等伪影。

近年来，深度学习方法在各种图像重建问题上都取得了最先进的性能。在这里，重建由参数化映射 $\mathcal{B}_\theta\colon\ Y \to X$实现，其中高维参数 $\theta$ 通过拟合可用数据得到。现有的大多数方法都依赖监督学习。典型架构包括显式残差型网络 [22], 、零空间型网络 [33], 以及展开网络 [36, 28, 1]。另一类方法是固定点网络 [3, 14], ，其中 $\mathcal{B}_\theta(\mathbf{y})$ 是隐式层的不动点。在深度平衡（DEQ）模型 [14], 的范畴下，这些隐式网络采用隐式微分和雅可比自由反向传播 [13], ，从而以恒定内存实现实际上无限深度的表示。尽管性能出色，这些监督方法仍需要真实配对样本（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）进行训练，而在医学和科学成像中，获取这类样本往往代价高昂或不切实际，因此限制了它们的适用性。

近年来，人们开发了可直接处理测量样本 $\mathbf{y}$ 的无监督深度学习方法，无需真实值数据。缺少真实重建结果带来了两大难题：首先，测量数据含有噪声，而$\mathcal{A}$ 的病态性会导致在最小化数据空间损失 $\|\mathcal{A}\mathcal{B}_\theta(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\|^2$时出现噪声放大；其次，当算子 $\mathcal{A}$ 高度欠定时（例如有限数据拉东变换），问题会变得棘手。在这种情况下， $\mathcal{A}$ 具有较大的零空间，任何数据空间损失都无法约束 $\mathcal{B}_\theta$的零空间分量。一些方法通过假设 $\mathcal{A}$ 是随机的来缓解这些问题 [26, 42, 6], ；另一些方法则假设前向映射可逆 [21], ；还有一些方法添加问题结构化正则项 [8], ，或采用替代的测量空间损失 [16]。然而，隐式不动点网络和 DEQ 方法尚未应用于自监督场景。

在本文中，我们提出了一种用于利用不动点网络进行无监督图像重建的混合去噪正则化自适应（HyDRA）框架。HyDRA 通过无监督损失进行训练，该损失由数据一致性项和基于去噪的正则化项组成，后者同时考虑了前向算子的零空间和病态性。HyDRA 直接从测量样本 $\mathbf{y}$ 中学习图像结构，而无需真实样本 $\mathbf{x}$。该框架包含一种不动点架构，可用于融入正性或稀疏性等已知先验，以及一种数据驱动的提前停止准则，用于稳定训练并防止过拟合。通过平衡求解实现高效推理，从而能够快速完成重建。我们在具有挑战性的稀疏视角CT重建任务上评估了 HyDRA，结果表明，即使测量数据极其有限，它仍能重建高质量图像，性能优于经典变分方法和监督深度学习基线。

## 2 背景

求解逆问题（1.1）实质上是寻找一个重建映射 $\mathcal{B}\colon\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 将含噪数据 $\mathbf{y}$ 映射回未知图像 $\mathbf{x}$。人们提出了多种方法，并假设不同程度的先验信息来构造 $\mathcal{B}$。在本文中，我们通过从参数化族（$\mathcal{B}_\theta$）$_{\theta\in\Theta}$中选择一个特定映射来构造 $\mathcal{B}$ ，其中参数 $\theta$ 在训练过程中确定。根据可用数据的类型，会出现不同的情况：

- Single-shot: 在这里，重建映射针对之后将其应用于的同一测量进行优化，因此形成单实例或逐样本过程，这种做法也用于深度图像先验或基于物理的拟合。

- Measurement-only: 此处仅有测量样本$\mathbf{y}$ 可用。学习依赖于

不需要真实$\mathbf{x}$样本的自监督或无监督方法。

- SUPERVISED LEARNING: 此处提供了匹配对（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$），因此可以对测量域与目标域之间的映射进行监督训练。

前两类方法的优点是不需要真实值数据$\mathbf{x}$。单次方法还有一个优点，即完全不使用训练数据，因此在数据采集过程中成本较低。然而，在推理时进行训练会导致重建耗时较长，尤其是与现代学习技术结合时。无监督方法以基于$\mathbf{y}$数据的训练阶段为代价，实现了更快的推理。不同方法所采用的架构也各不相同。下面我们简要概述相关方法，重点介绍 HyDRA 所依据的核心概念。

## 2.1 单次重建

在这类方法中，除了特定的观测测量数据外，不需要额外的$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 样本。经典正则化方法、深度图像先验（DIP）以及即插即用（PnP）均属于此类。

- REGULARIZATION METHODS: 第一类是经典正则化方法，其中 $\mathcal{B}$ 从一个函数族 $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha>0}$ 中选取，该函数族逐点收敛至 $\mathcal{A}$ 的右逆，当 $\alpha \to 0$时成立。我们在此使用的方法分别是 FBP（滤波反投影）或变分正则化：

$$\mathcal{B}_\alpha(\mathbf{y}) \triangleq \mathcal{A}^T\big(\mathcal{F}_\alpha \mathbf{y}\big), \tag{2.1}$$

$$\mathcal{B}_\alpha(\mathbf{y}) \triangleq \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \alpha\, r(\mathbf{x})\,. \tag{2.2}$$

在滤波反投影中，正则化通过谱滤波器 $\mathcal{F}_\alpha$实现；而在变分正则化中，先验信息则通过正则化泛函 $r$ 融入：$\mathbb{R}^n \to [0,\infty]$后者通常通过由（2.2）的最优性条件推导出的迭代方法进行近似。一个典型例子是近端梯度（PGD）方法，

$$\mathbf{x}_{k+1} = \operatorname{prox}_{s\,\alpha\, r}\Big(\mathbf{x}_k - 2s\,\alpha\,\mathcal{A}^\top(\mathcal{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{y})\Big)\,, \tag{2.3}$$

其步长为 $s > 0$。若干基于学习的重建方法源自 PGD 及其变体。

- PNP: PnP 方法将最先进的去噪器与经典优化相结合。在 PGD 的基础上，PnP 将近端算子 $\operatorname{prox}_{s\alpha r}$ 替换为一个（可能经过学习的）去噪器 $\mathcal{D}_\alpha(\cdot)$，从而得到以下更新

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{D}_\alpha\big(\mathbf{x}_k - 2s\,\mathcal{A}^\top(\mathcal{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{y})\big). \tag{2.4}$$

当去噪器设为缩放正则项$\mathcal{D}_\alpha = \operatorname{prox}_{s\alpha r}$的近端映射 $s\alpha r$时，该方法便退化为经典 PGD（2.3）。使用一般的去噪器，可通过训练所得去噪器 $\mathcal{D}_\alpha$所编码的数据驱动先验实现正则化。注意，（2.4）是针对 $\mathcal{D}_\alpha \circ \big(\mathrm{Id} - 2s\,\mathcal{A}^\top(\mathcal{A}(\cdot) - \mathbf{y})\big)$的不动点迭代。文献 [11]推导了此类隐式网络的正则化理论。当 $\mathcal{D}_\alpha$ 属于非梯度形式时，这便扩展了经典变分正则化（2.2）。尽管 PnP 在多种成像模态上均达到了最先进的性能，但其效果高度依赖去噪器的训练域；当去噪器与目标数据分布不匹配时，性能可能会下降。

- DIP: 另一类单次方法是深度图像先验（DIP），其由 [39] 引入。DIP 利用卷积神经网络的隐式正则化，而无需外部训练数据。重建图像表示为 $\mathcal{B}(\mathbf{y},\mathbf{z}) = f_{\theta(\mathbf{y},\mathbf{z})}(\mathbf{z})$，其中 $f_\theta$ 是一个以随机

向量 $\mathbf{z}$ 作为输入的网络，而参数 $\theta = \theta(\mathbf{y},\mathbf{z})$ 通过最小化确定

$$\min_{\theta} \left\| \mathcal{A} f_\theta(\mathbf{z}) - \mathbf{y} \right\|_2^2 \tag{2.5}$$

结合提前停止。网络架构中包含的隐式先验在没有任何监督或强显式正则化器的情况下，展现出了出乎意料的高质量重建结果。然而，DIP 存在推理时间较长且对停止点高度敏感的问题，而停止点会严重影响重建质量。

## 2.2 监督重建

现有大多数最先进的学习方法都依赖监督学习。这些方法最小化监督损失 $\mathbb{E}\big[\|\mathcal{B}_\theta(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\|^2\big]$，其中 $\mathbb{E}$ 表示对 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 联合分布的期望。在实践中，给定配对样本 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ 后，该损失会在所选架构 $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ 上进行近似最小化。所提出的方法在采用的架构方面存在显著差异；下面将对此进行简要总结。

■ Residual networks: 残差网络的形式为 $\mathcal{B}_\theta = (\mathrm{Id} + \mathcal{U}_\theta)\, \mathcal{A}^\sharp$，其中 $\mathcal{A}^\sharp\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是初始重建映射（近似逆），而 $\mathcal{U}_\theta$ 是标准的图像到图像网络，例如 U-net [29]。虽然方法非常简单，但事实证明，这种方法非常有效，能够获得高质量的结果 [22]。然而，对于训练分布之外的输入，普通残差架构可能会出现数据失配。零空间网络通过在架构中强制实现数据一致性 $\mathcal{A}\mathbf{x} \simeq \mathbf{y}$ 来解决这一问题。具体而言，[33] 中提出的零空间网络形式为 $\mathcal{B}_\theta = \big(\mathrm{Id} + \mathcal{P}_{\ker \mathcal{A}} \mathcal{U}_\theta\big)\, \mathcal{A}_\alpha^\sharp$，其中$\mathcal{A}_\alpha^\sharp$ 源自一种正则化方法。与标准残差网络不同，所添加的组件$\mathcal{P}_{\ker \mathcal{A}} \mathcal{U}_\theta$ 仅作用于 $\mathcal{A}$ 的零空间，因此不会改变数据一致性。此外，[33]表明，这可以得到一种数据驱动的正则化方法。已有研究提出了同时允许正交补发生变化的变体 [7, 15, 34]。

■ Unrolled networks: 另一类研究旨在通过网络级联来提升数据一致性：网络级联会在图像到图像网络与用于强制实现数据一致性的层之间交替执行 $N$ 次操作。一个典型例子是学习型近端梯度法，其中 $\mathcal{B}_\theta(\mathbf{y})$ 由有限次更新定义$\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{D}_{(k)\,\theta}\left(\mathbf{x}_k - 2s\mathcal{A}^T(\mathcal{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{y})\right)$，且 $\mathcal{D}_{(k)\,\theta}$ 是标准的图像到图像网络。相关方法还包括学习型梯度下降 [1], 、学习型交替方向乘子法 [36], 、学习型原始-对偶方法 [2], 、网络级联 [31, 24], 和变分网络 [18]。然而，至少从理论上讲，对于训练分布之外的测量数据，此类网络仍可能无法严格满足数据一致性。

■ DEQ: 尽管展开网络的设计受到 (2.3) 这类迭代方案的启发，但两者仅有松散关联：展开网络在每次迭代中使用不同的网络，也并非源自某个底层不动点方程。DEQ 模型克服了这一局限；它们是用于求解 (1.1) 的监督式隐式网络。一个代表性例子是 DEQ-prox，其中重建结果通过以下不动点方程定义：

$$\mathbf{x}^* \triangleq \mathcal{D}_\theta(\mathbf{x}^* - \mathcal{A}^T(\mathcal{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{y})). \tag{2.6}$$

使用相应的不动点迭代求解时，这会还原（2.4）。与 PnP 不同，$D_\theta$ 是一个固定映射（例如预训练去噪器），而 DEQ 会端到端训练隐式网络。DEQ 通过使用安德森加速等工具求解不动点，实现恒定内存训练和自适应推理 [40]。梯度通过隐式微分获得，也可以通过无雅可比反向传播进行近似 [13]。

### 2.3 无监督重建（仅使用测量数据）

无监督重建根据测量数据样本确定重建映射$\mathbf{y}$。面临的挑战是，如何仅凭$\mathbf{y}$提取有关待恢复图像$\mathbf{x}$的信息。

■ Data-consistency loss: 一种方法是通过在训练数据上施加数据一致性（DC）来监督网络 $\mathcal{B}_\theta = f_\theta \circ \mathcal{A}^\sharp$，并可选择加入正则化项，

$$\min_\theta \mathbb{E}_{\mathbf{y}} \left[ \left\| \mathcal{A}(\mathcal{B}_\theta \mathbf{y}) - \mathbf{y} \right\|^2 + \alpha\, r(\mathcal{B}_\theta \mathbf{y}) \right]. \tag{2.7}$$

实际上，这相当于通过网络联合求解变分正则化 $\mathcal{B}_\theta$，而不是针对每个2.2分别进行最小化$\mathbf{x}$。虽然这种方法相当自然，也已在少数研究中采用 [43, 20, 38, 41], 但似乎并不常见。原因之一可能是它很大程度上取决于正则化器的选择 $r$，而正则化器可能会引入偏差，干扰$\mathbf{y}$中包含的信息。另一方面，在未正则化的情况下 $\alpha = 0$，该方法会受到噪声以及 $\mathcal{A}$欠定性的影响。近期一项进展 [8] 提出了正则化器 $r(\mathbf{x}) = \mathbb{E}_g \|(\mathcal{B}_\theta \mathcal{A} - \mathrm{Id})(T_g \mathbf{x})\|^2$，旨在促进一类图像空间变换的等变性 $(T_g)_{g \in G}$。

■ Self-supervised loss: 自监督是指从$\mathbf{y}$ （通过添加噪声或进行掩码处理）生成辅助数据，并将其用于监督重建。这些方法最初是为图像去噪而开发的 [4, 27], 其中 $\mathcal{A}$ 是恒等算子，后来扩展到一般的逆问题 [26, 42, 6, 21, 16, 17, 32, 37, 9]。一类强大的方法遵循自监督 Noise2Self 策略 [4] 及其在逆问题中的扩展 [21, 16]。一些研究处理随机算子 [6, 26, 42], 而我们在此关注固定的前向算子 $\mathcal{A}$。这些问题在 [16], 中得到解决，其中所提出的 Sparse2Inverse（S2I）使用如下形式的重建算子 $\mathcal{B} = f \circ \mathcal{B}_I$，其中 $\mathcal{B}_I$ 表示从部分测量数据进行线性重建 $\mathbf{y}_I$，而 $f$ 是作用于图像域的神经网络。为处理由不完整测量导致的零空间分量，该方法采用数据域损失，

$$\mathbb{E} \left\| A_I \big( f \circ \mathcal{B}_I^c(\mathbf{y}_I^c) \big) - \mathbf{y}_I \right\|^2. \tag{2.8}$$

这种形式使网络能够学习零空间分量，并有效抑制稀疏角度 CT 中因缺失数据而产生的伪影，将自监督的优势与卷积神经网络架构所带来的隐式先验相结合。然而，依赖数据空间损失并与含噪测量进行比较，会带来正则化、稳定性以及适当停止准则设计方面的挑战。

## 3 HyDRA 框架

本节介绍 HyDRA，这是一种用于求解线性逆问题的新型自监督框架。HyDRA 采用隐式不动点架构，并通过一种仅使用间接且不完整数据样本$\mathbf{y}$ 的自监督损失进行训练。所提出的无监督损失将数据一致性项与自监督正则化项相结合。另一项关键组成部分是数据驱动的停止准则，它会自动确定何时停止训练，以避免过拟合。以下小节将详细介绍这些要素。

### 3.1 HyDRA 架构

所提出的 HyDRA 架构采用不动点形式，其中学习得到的重建算子 $\mathcal{B}_\theta$ 通过不动点方程隐式定义。

**定义 3.1**（HyDRA 架构）。 假设

- $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是给定的前向算子，
- $(\mathcal{D}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ 是一族压缩映射 $\mathcal{D}_\theta$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，
- $\Omega$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是非扩张映射，
- $s \in (0,\ 1/\|\mathcal{A}\|^2)$ 和 $\lambda \in (0,\ 1)$ 是参数。

我们将 HyDRA 架构 $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ 定义为具有 $\mathcal{B}_\theta$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$、$\mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}^*$，并通过以下不动点方程隐式表示

$$\mathbf{x}^* = \mathcal{N}_\theta(\mathcal{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}))\,, \tag{3.1}$$

其中

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \mathbf{x} - 2s\,\mathcal{A}^\top(\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{3.2}$$

$$\mathcal{N}_\theta(\mathbf{v}) \triangleq \Omega\big(\lambda\,\mathcal{D}_\theta(\mathbf{v}) + (1-\lambda)\,\mathbf{v}\big). \tag{3.3}$$

此处，$\mathcal{A}$、$\Omega$、$s$ 和 $\lambda$ 被视为架构的固定组件，在符号表示中不作显式包含。

根据定义3.1，HyDRA 将重建实现为（3.1）的不动点。它结合了一个可训练正则化网络 $\mathcal{D}_\theta$ 以及一个算子 $\Omega$，后者可用于施加额外的已知物理约束。（3.1）中的 HyDRA 不动点映射是梯度映射（3.2）与可学习组件（3.3）的复合。注意，如果 $\Omega = \mathrm{Id}$ 是恒等算子，则 HyDRA 架构退化为 [14] 中提出的 DE-Prox 架构。当 $\Omega = \mathcal{P}_+$为非负图像集合上的投影时，HyDRA 与 [6]中介绍的架构一致。然而，这些方法要么是完全监督的 [14]，要么依赖于随机前向映射 [6]，其中数据包含缺失信息。相比之下，我们以完全自监督方式训练（3.1），其中没有任何数据样本包含 $\mathcal{A}\mathbf{x}$ 中缺失的信息。

不动点的存在性与唯一性是一个关键问题；否则，架构（3.1）将无法明确定义。

**命题 3.2**（存在性与唯一性）。 对于任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\theta \in \Theta$，映射 $\mathcal{N}_\theta \circ \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是压缩映射，因此恰好有一个不动点。特别地，$\mathcal{B}_\theta$ 是一个定义良好的隐式网络。

证明。 映射 $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}^\top(\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 是仿射映射，其线性部分为 $\mathcal{A}^\top\mathcal{A}$，其谱包含于 $[0, \|\mathcal{A}\|^2]$ 中。此外，$\mathrm{Id} - 2s\mathcal{A}^\top\mathcal{A}$ 的特征值属于 $[1-2s\|\mathcal{A}\|^2, 1]$，这表明 $\mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})$ 对于 $0 \le s \le 1/\|\mathcal{A}\|^2$ 是非扩张的。根据假设，$\mathcal{D}_\theta$ 是压缩映射，因此凸组合 $\lambda\mathcal{D}_\theta + (1-\lambda)\,\mathrm{Id}$ 也是压缩映射。由于 $\Omega$ 是非扩张的，$\mathcal{N}_\theta = \Omega \circ (\lambda\mathcal{D}_\theta + (1-\lambda)\,\mathrm{Id})$ 是压缩映射。因此，复合映射 $\mathcal{N}_\theta \circ \mathcal{G}(\cdot, \mathbf{y})$ 是压缩映射，根据巴拿赫不动点定理，它具有唯一的不动点。 □

## 3.2 HyDRA 损失

HyDRA 中的参数 $\theta$ 通过最小化混合损失来确定

$$\mathcal{H}(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[\left\|\mathcal{A}\mathcal{B}_\theta(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\right\|_2^2\right] + \gamma\mathbb{E}_{\mathbf{y},\epsilon}\left[\left\|\mathcal{D}_\theta(\mathcal{B}_\theta(\mathbf{y}) + \epsilon) - \mathcal{B}_\theta(\mathbf{y})\right\|_2^2\right], \tag{3.4}$$

其中 $\epsilon$ 表示加性噪声。它由测量空间中的无监督数据一致性损失 $\|\mathcal{A}\mathcal{B}_\theta(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\|_2^2$以及额外的自适应去噪正则化项组成

$$\mathcal{L}_{\mathrm{R}} \triangleq \mathbb{E}_{\mathbf{y},\epsilon}\left[\left\|\mathcal{D}_\theta(\mathcal{B}_\theta(\mathbf{y}) + \epsilon) - \mathcal{B}_\theta(\mathbf{y})\right\|_2^2\right]. \tag{3.5}$$

通过最小化混合损失，网络 $\mathcal{D}_\theta$ 学会了一种隐式图像先验，该先验能够捕捉干净图像的底层统计结构，并有效抑制噪声和伪影。去噪与重建的联合训练为 $\mathcal{B}_\theta$提供了一种强大的正则化机制，即使在缺乏真实值监督的情况下，也能提升重建保真度和稳定性。

HyDRA 的关键组成部分是自监督自适应正则化项，该项训练 $\mathcal{D}_\theta$，使其能够在 $\mathcal{B}_\theta$生成的重建结果类别上充当有效的去噪器。通过这种方式，去噪器能够适应重建流形，从而形成任务对齐的隐式先验。该损失经过专门设计，可使正则化网络 $\mathcal{D}_\theta$ 发挥隐式去噪器的作用。

### 3.3 自动停止

与其他采用数据空间损失的自监督方法一样，适当的提前停止对于获得高质量重建至关重要。这反映了在存在缺失数据的情况下，对含噪测量进行求逆$\mathcal{A}$所固有的不稳定性。

我们提出了一种新颖的数据驱动的提前停止准则，通过监测峰值信噪比（PSNR），

$$\mathrm{PSNR}\big(\mathcal{B}_\theta(\mathbf{y}),\, \mathcal{B}_\theta(\mathcal{A}\,\mathcal{B}_\theta(\mathbf{y}))\big). \tag{3.6}$$

并在该值达到最大值时停止训练。我们将基于（3.6）自动停止的 HyDRA 称为 HyDRA-auto，以区别于任何手动停止。

其原理如下。经过良好训练的重建算子 $\mathcal{B}_\theta$ 应当具有鲁棒性和稳定性。以其输出 $\mathcal{B}_\theta$（$\mathbf{y}$）为基础，假设该输出是信号的干净估计，并生成合成测量 $\mathcal{A}\mathcal{B}_\theta$（$\mathbf{y}$），该算子 $\mathcal{B}_\theta$ 应能够准确地重建这些合成测量。如果提前停止指标开始下降，则表明 $\mathcal{B}_\theta$（$\mathbf{y}$）与 $\mathcal{B}_\theta$（$\mathcal{A}\mathcal{B}_\theta$（$\mathbf{y}$））之间出现偏离，这说明 $\mathcal{B}_\theta$ 已经开始对训练测量 $\mathbf{y}$中存在的噪声和伪影模式过拟合。

## 4 数值实验

为验证 HyDRA 的有效性，我们考虑稀疏视角 CT 重建问题。稀疏视角 CT 的前向模型表示为式（1.1），其中 $\mathcal{A}$ =$\mathbf{MA}$，其中 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times n}$表示全角度 Radon 变换，$\mathbf{M}$ $\in \{0,1\}^{m\times p}$ 是一个采样矩阵，用于选取角度测量数据的一个稀疏子集。所有实验均在配备 Intel Core i9–10900K CPU 和 NVIDIA RTX 3090 GPU 的工作站上进行。

### 4.1 数据集

训练和评估使用低剂量平行束（LoDoPaB）CT数据集 [25], ，其中包含二维 CT图像：35，820 个训练样本、3，522 个验证样本和 3，553 个测试样本。每幅图像的空间分辨率为 $362 \times 362$ 像素。在实验中，我们保留原始数据划分，并从每个划分中随机选取 10%，构建较小的训练、验证和测试子集。采用平行束采集几何，使用 16、32 和 64 个投影角度，以及每个投影对应的 362 个等间距探测器单元，合成稀疏视角 CT 正弦图。为模拟低强度光子计数，在投影数据中加入与每个探测器像素 1000 个光子相对应的泊松噪声。

### 4.2 对比方法

我们将 HyDRA 与专为固定前向算子 $\mathcal{A}$ 设计的方法进行比较，这些方法要么是单次估计器，要么仅使用测量样本 $\mathbf{y}$ 进行训练（自监督）。这不包括 (i)

监督方法、(ii) 训练期间依赖随机化 $\mathcal{A}$的方法，以及 (iii) 显式编码不变性的方法。我们还进行了消融实验，移除或替换 HyDRA 的关键组件。

对比的自监督方法如下：
▶ FBP：滤波反投影（2.1）。▶ TV-reg：变分正则化（2.2），使用 $r$ =TV。▶ DIP：通过（2.5）实现的单次观测深度图像先验。▶ S2I：使用自监督损失训练的 U-Net（2.8）。▶ DEQ-plain：（2.7），采用深度平衡模型，且使用 $r = 0$。
▶ DEQ-TV：（2.7），采用深度平衡模型，且使用 $r$ =TV。
▶ HyDRA-max：所提出的方法，采用最优停止。▶ HyDRA-auto：所提出的方法，采用自动停止

.

其中，FBP、TV-reg 和 DIP 是单次方法。S2I 是一种最先进的自监督基线方法，不包含显式的不变性先验。DEQ-plain 和 DEQ-TV 与 HyDRA 使用相同的测量空间损失，但省略了 HyDRA 的其他组成部分，作为消融实验来量化这些组成部分的影响。

### 4.3 实现细节

对于不动点架构（定义3.1），网络 $\mathcal{D}_\theta$ 为 U-Net，$\Omega$ 表示到立方体 $[0,1]^n$上的投影，参数选取为 $\gamma = \|\mathcal{A}\|^2$ 和 $\lambda = 0.4$ （通过经验选取，以平衡稳定性与平衡迭代的收敛速度）。为求解 DEQ 不动点方程（3.1），采用安德森加速 [40, 35]；迭代持续进行，直至连续两次迭代结果之差的相对范数低于 $10^{-3}$，或达到 50 次迭代上限。使用 HyDRA 架构最小化损失（3.4）时，我们采用无雅可比反向传播 [13]。去噪正则化项 $\mathcal{L}_\mathrm{R}$ 的噪声水平固定为 15%，该值通过经验确定，以平衡重建保真度与噪声鲁棒性。使用 Adam [23]进行优化，学习率为 $10^{-5}$，批量大小为 1。针对 16、32 和 64 视图的稀疏重建设置，训练迭代次数分别为 $5 \times 10^4$、$1.5 \times 10^5$和 $2 \times 10^6$。提前停止所用的验证指标每隔 $10^3$ 次迭代评估一次。

对于 TV正则化和 DEQ-TV，通过小规模网格搜索选择正则化参数，$\alpha \in \{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\}$ 以最大化相对于真实图像的峰值信噪比。对于深度图像先验，我们采用 [39] 的实现，并使用两种标准稳定方法：(i) 加性输入噪声，以及 (ii) 对近期网络输出进行指数移动平均 [10]。深度图像先验采用峰值信噪比处提前停止的方式训练，最多进行 5000 次迭代。S2I [16] 作为一种专为稀疏视图 CT 设计的自监督基线方法纳入实验，并训练 500 个训练轮次，在峰值信噪比最佳处提前停止。DEQ 和 DEQ-TV 均采用基于（3.6）的相同提前停止规则。

可以看出，TV 正则化提供了强有力的传统基线，相较于滤波反投影带来了显著提升，尤其是在结构相似性指数方面。深度图像先验取得了较高的峰值信噪比，但在 16 和 64 视角的情况下，结构保真度有所下降，其结构相似性指数低于 TV 正则化。S2I 在所有配置下都表现出较强的竞争力。值得注意的是，在 32 和 64 视角设置中，它的结构相似性指数在各基线方法中最高，凸显了其无需依赖真实图像即可保持结构一致性的能力。不过，在 16 视角设置中，其峰值信噪比仍略低于深度图像先验。HyDRA 由我们提出的自监督停止准则自动终止。

表 1：16/32/64 个投影下各方法的峰值信噪比、结构相似性指数和推理时间。每列最优值以绿色标出，次优值以蓝色标出。滤波反投影基准使用 1000 个角度和约 4000 个光子，不纳入比较。

| 方法 | 16 | | | 32 | | | 64 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 峰值信噪比 | 结构相似性指数 | 时间（秒） | 峰值信噪比 | 结构相似性指数 | 时间（秒） | 峰值信噪比 | 结构相似性指数 | 时间（秒） |
| 全视角，高剂量 | | | | | | | | | |
| 滤波反投影参考 | 28.93 | 0.661 | – | 28.93 | 0.661 | – | 28.93 | 0.661 | – |
| 经典基线 | | | | | | | | | |
| 滤波反投影（稀疏） | 7.55 | 0.221 | **0.0037** | 9.94 | 0.235 | **0.0044** | 12.52 | 0.258 | **0.0048** |
| TV正则化 | 26.24 | **0.702** | 4.998 | 27.06 | 0.664 | 5.0972 | 28.41 | 0.723 | 5.2463 |
| 学习基线 | | | | | | | | | |
| DIP | **26.25** | 0.606 | 207.79 | **27.58** | 0.650 | 213.99 | 28.75 | 0.691 | 214.19 |
| S2I | 23.91 | 0.582 | 0.0851 | 26.79 | 0.674 | 0.0355 | 29.31 | **0.746** | 0.0630 |
| 消融实验 | | | | | | | | | |
| DEQ-plain | 25.06 | 0.569 | 0.3408 | 26.29 | 0.590 | 0.4916 | 26.98 | 0.637 | 0.3485 |
| DEQ-TV | 25.12 | 0.572 | 0.3702 | 26.27 | 0.610 | 0.4795 | 27.17 | 0.650 | 0.3131 |
| 提出的方法 | | | | | | | | | |
| HyDRA-max | 25.54 | 0.628 | 0.4448 | 27.28 | **0.680** | 0.4676 | **29.50** | 0.733 | 0.5017 |
| HyDRA-auto | 25.50 | 0.621 | 0.4587 | 27.08 | 0.678 | 0.4329 | 29.24 | 0.726 | 0.3795 |

### 4.4 结果

表1 汇总了稀疏视角设置（16、32 和 64 个投影）下以峰值信噪比和结构相似性指数（SSIM）衡量的重建性能。HyDRA-max 展现出极具竞争力的表现，并在各项指标之间取得了出色的平衡。图1、2 和 3所示的视觉结果也佐证了这一点。HyDRA 比 S2I 更稳健；在所有视角配置下，其峰值信噪比均稳定优于 S2I。此外，HyDRA-auto 的性能与 HyDRA-max 相当，验证了我们提出的停止准则能够在无需访问真实值的情况下有效确定近乎最优的运行点。还需注意，在 64 视角设置下，HyDRA-auto 变体在所有方法中取得了最高的峰值信噪比，超越了 S2I 和深度图像先验。64 个角度下的 HyDRA-auto 甚至接近使用 1000 个角度、且每个分箱的光子数约为 4000 时获得的基线结果。消融研究（DEQ 和 DEQ-TV 使用与 HyDRA 相同的数据一致性，但分别不采用正则化或采用经典正则化项）表明，去噪正则化项 $\mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ 是 HyDRA 的关键组成部分，能够显著提升重建性能。

表1 中的计算效率结果。4–0。不同方法之间存在显著差异。DIP 每次重建需要 200 秒以上，因此不适用于实时或大规模应用。S2I 的速度显著更快，每次重建仅需几十毫秒，这体现了其简单的前馈架构。HyDRA 实现了良好的平衡，每次重建约需 0.4–0.5 秒——比 TV正则化快一个数量级，且效率远高于 DIP，同时保持了较高的重建质量。

## 5 结论

本文介绍了 HyDRA（混合去噪正则化适配），这是一种基于 DEQ 模型、用于解决不适定逆问题的新型自监督框架。HyDRA 成

图1：16个视角下的重建结果示例。

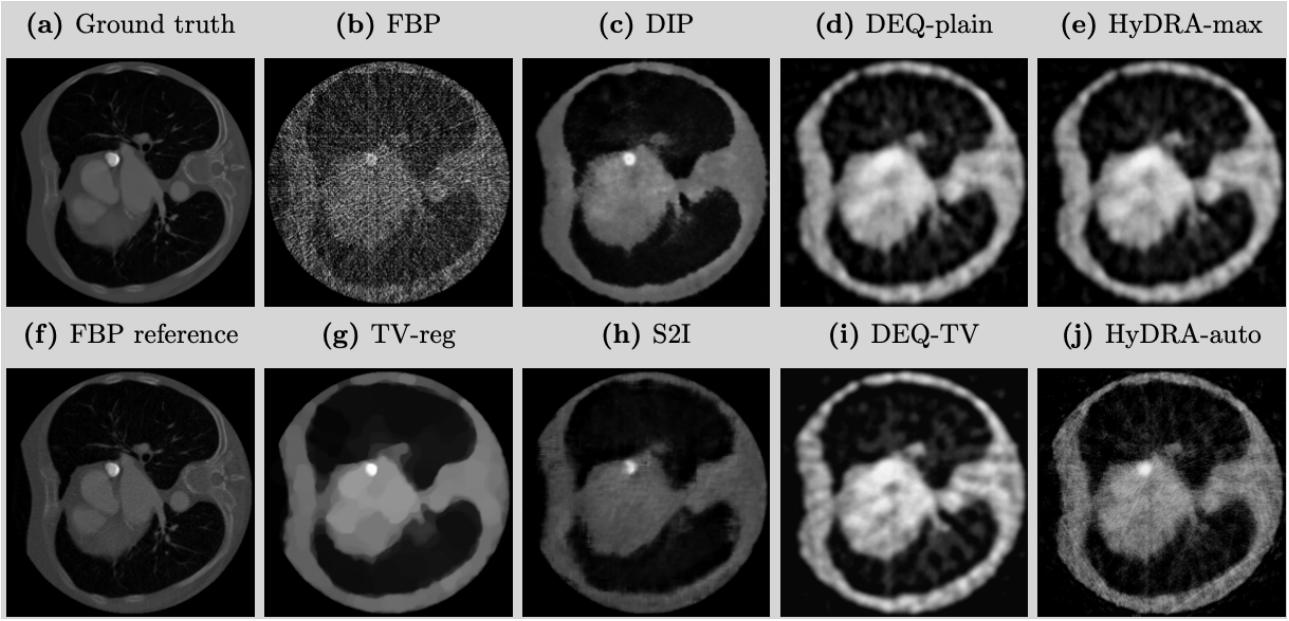
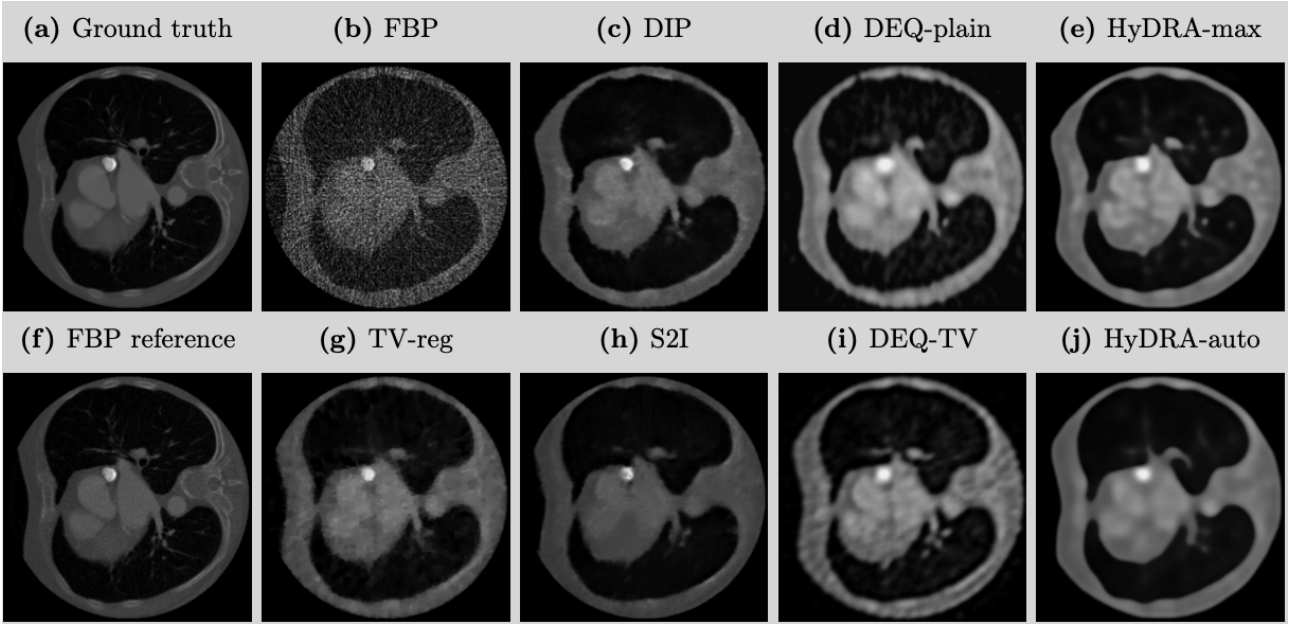


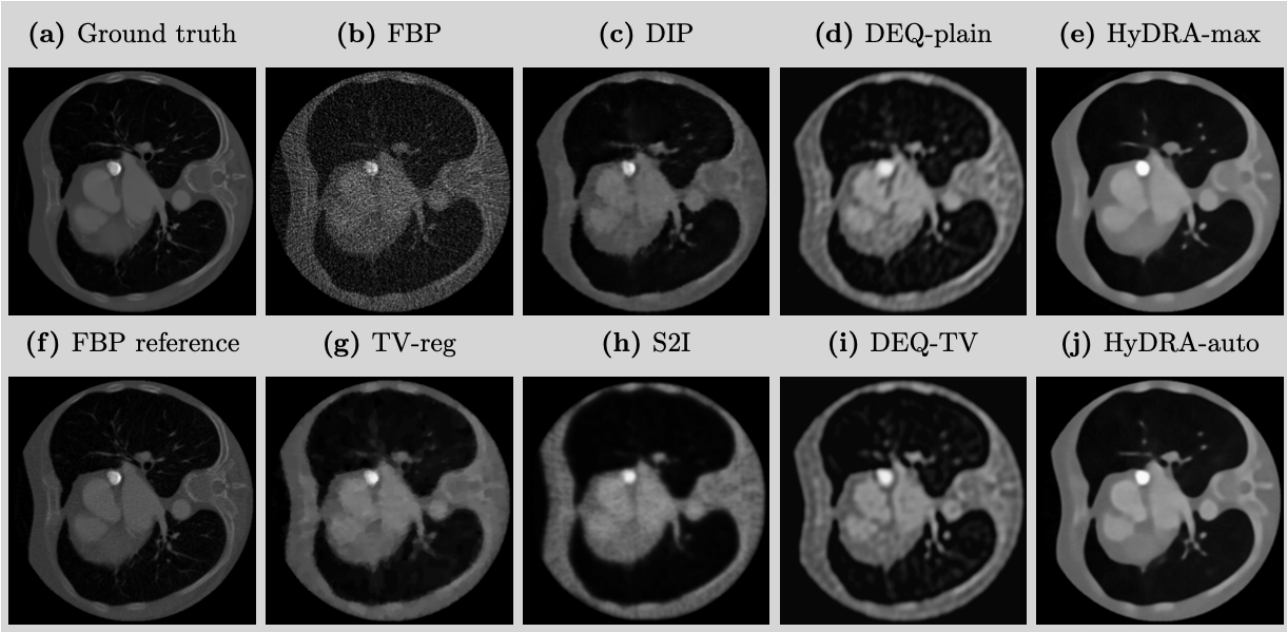

图2：32个视角下的重建结果示例。




功地将 DEQ 内存高效的不动点推理与强大的内部训练去噪正则器相结合。这种混合设计通过自监督损失进行端到端训练，直接从测量数据中学习隐式图像先验，完全不需要成对的真实值数据。所提出的提前停止准则进一步提升了鲁棒性，避免对噪声过拟合。

我们在稀疏视角CT重建任务上的验证展示了 HyDRA 的性能。在 64视角设置下，无论峰值信噪比还是结构相似性指数，它都取得了高质量的重建结果，并优于所有基线方法。HyDRA 最显著的实际优势是其计算效率。通过利用——

图3：64个视角的重建示例。




安德森加速进行平衡求解，HyDRA 的推理速度约比深度图像先验快 $470\times$，比经典全变分正则化快 $10\times$ 。

这项工作弥合了自监督方法的隐式正则化与平衡模型的结构化效率之间的差距。HyDRA 不仅能实现高质量重建、无需真实值的训练，还能进行实际应用中速度很快的推理，为现实世界中的逆问题提供了一种极具吸引力且切实可行的解决方案。未来的研究可以将 HyDRA 应用于更广泛的成像模态，例如磁共振成像和计算显微成像。

## 致谢

本研究获得韩国政府（科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目支持（RS-2024-00333393）。

## 参考文献

.[1] Jonas Adler 和 Ozan Oktem。使用迭代深度神经网络求解不适定逆问题。逆问题，33(12):124007，2017年。.[2] Jonas Adler 和 Ozan Oktem。学习型原始-对偶重建。*IEEE*医学成像汇刊，37(6):1322–1332，2018年。[3] Shaojie Bai、J. Zico Kolter 和 Vladlen Koltun。深度平衡模型。载于《神经信息处理系统进展》，第 690–701 页，2019年。[4] Joshua Batson 和 Loic Royer。Noise2Self：通过自监督进行盲去噪。载于国际机器学习会议，第 524–533 页。机器学习研究会论文集，2019年。[5] Mario Bertero 和 Patrizia Boccacci。《成像逆问题导论》。CRC出版社，1998年。

[6] Tatiana A Bubba、Matteo Santacesaria 和 Andrea Sebastiani。Tomoselfdeq：用于稀疏角度CT重建的自监督深度平衡学习。载于国际计算机视觉尺度空间与变分方法会议，第 334–346 页。施普林格，2025年。[7] Dongdong Chen 和 Mike E Davies。用于逆成像问题的深度分解学习。载于欧洲计算机视觉会议，第 510–526 页。施普林格，2020年。[8] Dongdong Chen、Juli´an Tachella 和 Mike E Davies。等变成像：超越值域的学习。载于*IEEE/CVF*国际计算机视觉会议论文集，第 4379–4388 页，2021年。[9] Dongdong Chen、Juli´an Tachella 和 Mike E Davies。鲁棒等变成像：从含噪和不完整测量中学习成像的全无监督框架。载于*IEEE/CVF*计算机视觉与模式识别会议，第 5647–5656 页，2022年。[10] Zezhou Cheng、Matheus Gadelha、Subhransu Maji 和 Daniel Sheldon。深度图像先验的贝叶斯视角。载于*IEEE/CVF*计算机视觉与模式识别会议，第 5443–5451 页，2019年。[11] Andrea Ebner 和 Markus Haltmeier。即插即用图像重建是一种收敛的正则化方法。*IEEE*图像处理汇刊，33:1476–1486，2024年。[12] Heinz Werner Engl、Martin Hanke 和 Andreas Neubauer。逆问题的正则化。施普林格，1996年。[13] Samy Wu Fung、Howard Heaton、Qiuwei Li、Daniel McKenzie、Stanley Osher 和 Wotao Yin。JFB：用于隐式网络的无雅可比反向传播。载于*AAAI*人工智能会议，第 36 卷，第 6648–6656 页，2022年。[14] Davis Gilton、Greg Ongie 和 Rebecca Willett。用于成像逆问题的深度平衡模型。*IEEE*计算成像汇刊，7:1123–1133，2021年。[15] Simon G¨oppel、J¨urgen Frikel 和 Markus Haltmeier。用于逆问题的数据近端零空间网络。*arXiv:2309.06573*，2023年。[16] Nadja Gruber、Johannes Schwab、Elke Gizewski 和 Markus Haltmeier。Sparse2Inverse：稀疏视角CT数据的自监督反演。*arXiv:2402.16921*，2024年。[17]Nadja Gruber、Johannes Schwab、Markus Haltmeier、Ander Biguri、Clemens Dlaska 和 Gyeongha Hwang。Noisier2inverse：利用相关噪声进行图像重建的自监督学习。*IEEE Access*，13:139445–139459，2025年。[18] Kerstin Hammernik、Teresa Klatzer、Erich Kobler、Michael P Recht、Daniel K Sodickson、Thomas Pock 和 Florian Knoll。学习用于加速MRI数据重建的变分网络。《医学磁共振》，79(6):3055–3071，2018年。[19] Per Christian Hansen。离散逆问题：见解与算法。工业与应用数学学会，2010年。[20] Laura Hellwege、Johann Christopher Engster、Moritz Schaar、Thorsten M Buzug 和 Maik Stille。计算机断层成像逆问题的无监督学习。*arXiv*预印本 *arXiv:2508.05321*，2025年。

[21] Allard Adriaan Hendriksen、Dani¨el Maria Pelt 和 K Joost Batenburg。Noise2inverse：用于断层成像的自监督深度卷积去噪。*IEEE*计算成像汇刊，6：1320–1335，2020年。[22] Kyong Hwan Jin、Michael T McCann、Emmanuel Froustey 和 Michael Unser。用于成像逆问题的深度卷积神经网络。*IEEE*图像处理汇刊，26(9)：4509–4522，2017年。[23] Diederik P. Kingma 和 Jimmy Ba。Adam：一种随机优化方法。国际学习表征会议 *(ICLR)*，2015年。[24] Andreas Kofler、Markus Haltmeier、Christoph Kolbitsch、Marc Kachelrieß 和 Marc Dewey。用于稀疏视角计算机断层成像的 U-Net 级联。载于国际医学图像重建机器学习研讨会，第 91–99 页。施普林格，2018年。[25] Johannes Leuschner、Maximilian Schmidt、Daniel Otero Baguer 和 Peter Maass。LoDoPaB-CT：用于低剂量计算机断层成像重建的基准数据集。*Scientific Data*，8(1)：109，2021年。[26] Charles Millard 和 Mark Chiew。利用可变密度子采样和 Noisier2noise 进行自监督磁共振图像重建的理论框架。*IEEE*计算成像汇刊，9：707–720，2023年。[27] Nick Moran、Dan Schmidt、Yu Zhong 和 Patrick Coady。Noisier2noise：从未配对噪声数据中学习去噪。载于 *IEEE/CVF*计算机视觉与模式识别会议论文集，第 12064–12072 页，2020年。[28] JH Rick Chang、Chun-Liang Li、Barnabas Poczos、BVK Vijaya Kumar 和 Aswin C Sankara-narayanan。一个网络解决所有问题——使用深度投影模型求解线性逆问题。载于 *IEEE*国际计算机视觉会议论文集，第 5888–5897 页，2017年。[29] Olaf Ronneberger、Philipp Fischer 和 Thomas Brox。U-Net：用于生物医学图像分割的卷积网络。载于 医学图像计算与计算机辅助干预 *(MIC-CAI)*，第 234–241 页。施普林格，2015年。[30] Otmar Scherzer、Markus Grasmair、Harald Grossauer、Markus Haltmeier 和 Frank Lenzen。成像变分方法，第 167 卷。施普林格，2009年。[31] Jo Schlemper、Jose Caballero、Joseph V Hajnal、Anthony N Price 和 Daniel Rueckert。用于动态磁共振图像重建的深度卷积神经网络级联。*IEEE*医学成像汇刊，37(2)：491–503，2017年。[32]Dirk Elias Schut、Adriaan Graas、Robert van Liere 和 Tristan van Leeuwen。Equivariance2inverse：一种在真实、有限角度和模糊数据上进行基准测试的实用自监督计算机断层成像重建方法。*arXiv:2510.23317*，2025年。[33] Johannes Schwab、Stephan Antholzer 和 Markus Haltmeier。逆问题的深度零空间学习：收敛分析与收敛速率。逆问题，35(2)：025008，2019年。[34] Johannes Schwab、Stephan Antholzer 和 Markus Haltmeier。Big in Japan：用于求解逆问题的正则化网络。数学成像与视觉杂志，62(3)：445–455，2020年。

[35] Damien Scieur、Alexandre d'Aspremont 和 Francis Bach。正则化非线性加速。载于《神经信息处理系统进展》，第 712–720 页，2016年。[36] Jian Sun、Huibin Li、Zongben Xu 等。用于压缩感知磁共振成像的深度 ADMM 网络。《神经信息处理系统进展》，29，2016年。[37] Juli´an Tachella、Mike Davies 和 Laurent Jacques。Unsure：在未知噪声水平下结合 Stein 无偏风险估计的自监督学习。*arXiv:2409.01985*，2024年。[38] Jonathan I Tamir、Stella X Yu 和 Michael Lustig。无监督深度基追踪：无需真实值数据学习逆问题。*arXiv* 预印本 *arXiv:1910.13110*，2019年。[39] Dmitry Ulyanov、Andrea Vedaldi 和 Victor Lempitsky。深度图像先验。载于*IEEE*计算机视觉与模式识别会议论文集 *(CVPR)*，第 9446–9454 页，2018年。[40] Homer F. Walker 和 Peng Ni。不动点迭代的安德森加速。*SIAM* 数值分析杂志，49(4)：1715–1735，2011年。[41] Alan Q Wang、Adrian V Dalca 和 Mert R Sabuncu。无需全采样训练数据的压缩感知磁共振成像基于神经网络的重建。载于 国际医学图像重建机器学习研讨会，第 27–37 页。施普林格，2020年。[42]Burhaneddin Yaman、Seyed Amir Hossein Hosseini、Steen Moeller、Jutta Ellermann、Kˆamil Uˇgurbil 和 Mehmet Ak¸cakaya。无需全采样参考数据的物理引导重建神经网络自监督学习。《医学磁共振》，84(6)：3172–3191，2020年。[43] Jingke Zhang、Qiong He、Congzhi Wang、Hongen Liao 和 Jianwen Luo。使用自监督深度学习求解逆问题的通用框架：在超声和光声图像重建中的验证。载于*2021 IEEE* 国际超声学研讨会 *(IUS)*，第 1–4 页。IEEE，2021年。