arXiv:2601.01235v1 [math.CO] 3 Jan 2026

构成大型超立方体的 Bruhat 区间

JORDAN ELLENBERG、NICOLAS LIBEDINSKY、DAVID PLAZA、JOSÉ SIMENTAL 和 GEORDIE WILLIAMSON

摘要。我们研究如何在对称群 S_n 中寻找作为偏序集超立方体的大型 Bruhat 区间。受 AlphaEvolve（由 Google DeepMind 开发的进化式编码智能体）提出的置换启发，我们发现了一种不同寻常的情况：该智能体生成了一种模式，在我们测试的 n 上表现良好；我们还证明，它对一般的 n 也表现良好。当 n 是 2 的幂时，我们构造出一个维数为 $O(n\log n)$ 的超立方体，其维数与可能的最大值至多相差一个常数因子。此外，我们给出了这个超立方体顶点的精确刻画：它们恰好是二进制均匀分布的 置换——一种简单的逐位性质，早已在蒙特卡罗积分和数理金融领域出现。对称群 S_n 中作为超立方体的 Bruhat 区间的最大维数，给出了 S_n 中 Kazhdan–Lusztig R-多项式次高次项系数可能最大值的一个下界（且该下界可能就是最大值）。一个出人意料的推论是，我们为 S_n 中开 Richardson 簇所关联的簇代数中冻结变量的最大数量，得到了一个阶为 $n\log n$ 的新下界；对于 Bruhat 图嵌入的模空间，我们也得到了类似结果。

1. 引言

考虑赋有 Bruhat 序的对称群 S_n。我们研究其中可能出现的超立方体（即布尔）区间有多大的问题。据我们所知，这个问题最早由 Reading 的博士论文提出 [33], ，该论文为所有有限不可约 Coxeter 群建立了下界。对于 S_n这一特例，他证明最大的超立方体的秩至少为

$$n-1+\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor .$$

围绕这一问题展开的后续研究包括 [35, 26, 36, 30]。

在本文中，我们在 S_n 中找到了一个区间，它与一个超立方体偏序同构，其维数在最大可能规模的一个常数倍范围内。

更准确地说，我们的主要定理如下（未定义的术语见 § 2）：

定理 1.1. 考虑由 2^m 个元素组成的对称群，其中 $m \geq 1$。二进制分布良好的置换构成 *Bruhat* 序中的一个区间。此区间与维数为 $m2^{m-1}$的超立方体偏序同构。

根据斯特林公式， S_{2^m} 中的任意超立方体的维数都不超过 $m2^m$。因此，我们的超立方体维数与可能达到的最大维数相差一个常数因子。

定理 2.21 所述的区间由“二进制良好分布”的置换组成，这是一种与二进制展开相关的数论条件。我们指出，二进制良好分布置换的定义不涉及任何李论数据，因此这个集合确实是一个 Bruhat 区间，这一事实相当令人惊叹。据作者所知，这是该现象以非平凡方式出现的首个实例。

日期：2026年1月6日。

1.1. 背景。在 Bruhat 序中存在自然且规模较大的超立方体，这令人意外。任何研究 Bruhat 序的人都会注意到，大多数小区间都是小型超立方体。不难看出，恒等排列与任意 Coxeter 元素之间的区间（例如 $s_1 s_2 \ldots s_{n-1}$，其中 s_i 表示一个简单对换）是维数为 $n-1$ 的超立方体。或许令人惊讶的是，还存在维数大于 $n-1$ 的超立方体（见图 1 ）。此外，随着区间变大，寻找超立方体也变得越来越困难（见表1）。这可能会让人猜想，Bruhat 序中不存在具有超线性维数的超立方体。我们的主要结果表明，从这些小例子中获得的直觉与实际情况相去甚远。

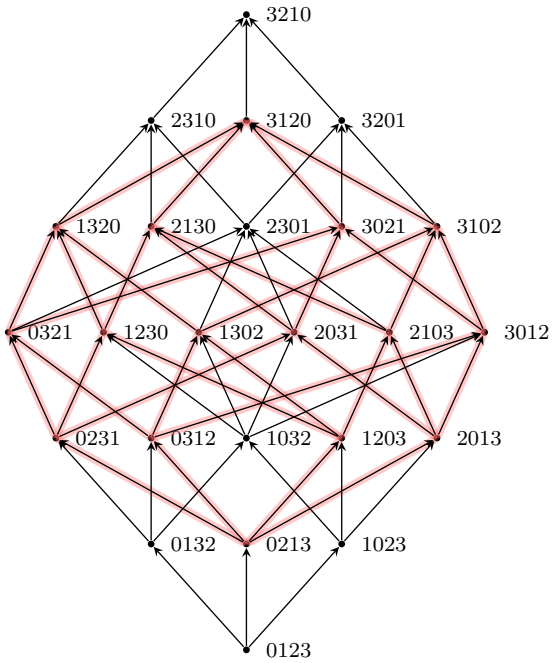


图1. S_4 中第一个“出乎意料”的四维超立方体。这也是我们构造中的第一个有趣例子。

簇代数中也存在类似现象。长期以来，人们一直猜想，附属于置换对的开 Richardson 簇具有簇结构 [11, 20]，这一猜想最近得到了证明。簇簇的一个关键不变量是其冻结变量的数量，它大致等于忠实环面作用可能达到的最大秩。起初，人们认为这个数量至多为 $n-1$ （在 S_n 中），因为这是 SL(n) 中自然作用的极大环面的维数。然而，人们可以找到一些开 Richardson 簇，对于S_n 而言，它们是秩大于 $n-1$ 的环面。人们意识到冻结变量的数量难以捉摸，这为发现簇结构迈出了重要一步。在开 Richardson 簇上构造出簇结构之后，人们发现冻结变量的数量等于 Kazhdan-Lusztig d-不变量（见 § 3.3）；该不变量很容易计算，也很容易看出其有时会超过 $n-1$。本文的区间给出了冻结变量数量为 $n\log n$ 的例子，大大超过了任何已知的一类例子。

在研究 Dyer 和 Lusztig 的组合不变性猜想时，也会出现一种相关现象。这里的问题是证明同构的 Bruhat 区间会产生相等的 Kazhdan-Lusztig 多项式。任意 Bruhat 区间都可以自然地嵌入到 $\mathfrak{h}^*$ 中，即极大环面的李代数的对偶空间中。众所周知，我们可以从这个嵌入图中恢复出

Kazhdan-Lusztig 多项式。因此，通过联系与同构区间的不同表现形式相关联的嵌入，来证明这一猜想是很自然的。令人惊讶的是，同构区间的几何嵌入可能具有大相径庭的维数。例如，超立方体可能嵌入到一个维数远低于其“自然”维数的空间中。为克服这一困难，Hone、Klein 和本文最后一位作者引入了非退化嵌入的概念，并研究了它们的模空间。与簇代数的情形极为相似，这种嵌入所在空间的维数很难计算，似乎与 d-不变量有关，而且可能远大于 $n-1$ （ $\mathfrak{h}^*$ 的维数）。本文中的例子给出了一些区间，其中这种“自然维数”远高于人们凭直觉所预期的数值。

考虑 Bruhat 序中的超立方体，还有一个相关动机，同样与组合不变性猜想有关。受人工智能实验的启发，Blundell、Buesing、Davies、Veličković 和最后一位作者基于 Bruhat图 [13, 5], 猜想了一个关于 Kazhdan-Lusztig 多项式的新公式；若该公式成立，便可推出组合不变性。这项工作重新引起了人们对组合不变性 [9, 24, 2] 的兴趣，并为初等区间 [3]给出了证明。该公式依赖于对区间进行“超立方体分解”的选择，这种分解提供了一种从超立方体迭代构造 Bruhat 区间的方法。在 [5], 中，一个简单的构造证明了，对于S_n中的任意区间，都可以通过 $n-1$ 步完成这一过程；然而，实验表明，通常可以做得高效得多。这种效率与出乎意料地存在大量超立方体有关。

k	超立方体	总数	比率
3	223704	241620	0.9259
4	286108	387932	0.7375
5	231484	498176	0.4647
6	111064	536860	0.2069
7	27484	502031	0.0547
8	2736	417142	0.0066
9	64	313063	0.0002
10	0	214478	0.0000
11	0	134933	0.0000
12	0	78104	0.0000

表 1. 长度为 k 的超立方体 / 长度为 k 的区间总数（ S_7）

1.2. **方法**。 本文研究的这个大型超立方体，是通过一种新颖的实验方法发现的。具体来说：我们在S_n中搜索置换对，并未采用任何形式的穷举搜索（这对于除最小的 n之外的情况都不切实际），而是使用了一个名为 AlphaEvolve 的协议，该协议由 Google DeepMind 近期开发。这种协议是一种进化算法，其中程序随时间不断演化，以大语言模型作为繁殖方式，并根据程序生成符合用户指定数学目标的输出的能力来确定其“适应度”。在本例中，我们搜索的是 Kazhdan-Lusztig d不变量尽可能大的置换对。

我们将在第 4 节详细介绍实验过程，希望这一描述能对有意采用这些方法的其他数学家有所帮助。

已有不少证据表明，AlphaEvolve 及相关协议可用于生成具有数学研究价值的实例（例如参见 [34, 17, 22]）。很自然地，迄今为止，大量研究都聚焦于那些已经

经过大量数学研究的问题；在数十个案例中，研究者已能借助 AlphaEvolve 找到与现有文献中的最佳实例相当或略有改进的实例。通常（但并非总是如此），这些渐进式改进很难解释；例如，在 [34] 中发现的 $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8$ 中那个大型帽集，比迄今发现的任何帽集都大，但到目前为止，我们还无法编出一个令人信服的故事来解释“为什么”这个帽集如此之大，而且这种解释也可能根本不存在。

本项目有所不同。寻找较大的 d-不变量或较大的超立方体，是一个自然且有趣的问题，但关于它的现有文献并不多。我们借助 AlphaEvolve 找到的例子，在性质上也与我们所知的最佳例子不同：它在 n 中具有更大的渐近增长阶。更重要的是，这些置换（更准确地说，是生成这些置换的程序）具有很强的可解释性；短短几天内，我们就能够弄清楚它为何有效，从而证明机器生成的小 n 例子实际上可以推广到所有 n。具体而言，我们认为本文提出的大型超立方体本身就是一个具有数学研究价值的对象，而且我们还可以从中学到更多。

致谢

本文包含 Adam Zsolt Wagner 的重要贡献，因技术原因无法将其列为共同作者。本文材料基于以下研究成果：当 JE、NL、DP、JS 和 GW 驻留于罗德岛州普罗维登斯的计算与实验数学研究所，参加“代数组合学中的范畴化与计算”学期项目期间，获得美国国家科学基金会第 DMS-1929284 号拨款的支持。JE 的研究还获得了美国国家科学基金会 DMS-2301386 号拨款和西蒙斯奖学金的支持。NL 的研究获得了 FONDECYT-ANID 1230247 号拨款的部分支持。DP 的研究获得了 FONDECYT-ANID 1240199 号拨款的部分支持。JS 的研究获得了墨西哥国立自治大学 PAPIIT 项目 IA102124 和 SECIHTI 项目 C-F-2023-G-106 的部分支持。GW 获得了 ARC 项目 DP230102982 和马克斯·普朗克—洪堡研究奖的支持。作者还要感谢 AlphaEvolve 促成了富有启发性的讨论。我们感谢 Leonardo Patimo 指引我们查阅相关参考文献，也感谢 Mario Marietti 与我们进行了有帮助的邮件交流。

2. 二进制分层均匀分布排列

本节介绍本文的主要研究对象：二进制均匀分布排列类。我们确立了它们的基本性质，并确定了此类排列集合的基数。特别地，我们证明了该类构成一个与超立方体同构的 Bruhat 区间，正是引言中提到的那个大型超立方体。

2.1. 基本性质。 在全文中，我们固定一个正整数 n。我们将由 n 个元素组成的区间记作 $[n]$ $\{0,\dots,n-1\}$。我们将 S_n 视为$[n]$上的双射集合。下文中，我们始终假设 $n=2^m$。

定义 2.1。 对于 $k\geq 0$，基本 k-区间是 $[2^m]$ 中形如 $[c2^k,(c+1)2^k-1]$ 的区间。下文中，我们通过以下方式将 $\mathbb{F}_2^m$ 与 $[2^m]$ 认同：

$$(a_0,a_1,\dots,a_{m-1})\mapsto \sum_{i=0}^{m-1} a_i 2^{m-1-i}.$$

在这种识别下，一个基本的 k-区间由固定前 $m-k$ 位来确定。

对于一个基本的 k-区间 S，我们用 P_S 表示每个 S 中元素的前 $m-k$ 位所构成的唯一长度为 $m-k$ 的二进制字符串。

如果对于每个基本的 k_1-区间S 和 k_2-区间 T，当 $k_1 + k_2 = m$ 时，都恰好存在一个元素 $i \in S$ 满足$\pi(i) \in T$，则称置换 π 是二进制均匀分布的。

我们用 $\mathcal{D}_m$ 表示 S_{2^m} 中所有二进制均匀分布排列的集合。

注 2.2。对于 $\pi \in S_{2^m}$，我们定义其置换矩阵 $M_\pi = (m_{i,\ j})$ 为 $m_{i,\ j} = 1$，若 $\pi(j) = i$，否则为 0。将元素 $\pi \in S_{2^m}$ 与其置换矩阵$M_\pi \in \mathrm{Mat}_{2^m \times 2^m}$对应起来，我们就能对二进制均匀分布排列作出更直观的图示解释。对于每个 $k = 0, \ldots\ldots m$，将 M_π 划分为大小为 $2^k \times 2^{m-k}$ 的块，从左上角开始，按从左到右、从上到下的顺序进行（即按阅读顺序）。那么，当且仅当每个这样的块中恰好有一个值为 1 的元素时，$\pi \in \mathcal{D}_m$（见图 2）。

当 $k = 0$ 且 $k = m$ 时，对于任意置换，上述条件都会自动满足。因此，要检验 $\pi \in \mathcal{D}_m$ 是否成立，只需检验 $0 < k < m$ 是否满足上述条件。

定义 2.3. 在矩阵 $M \in \mathrm{Mat}_{2^m \times 2^m}$ 中，基本块 指注 2.2 中所考虑的一个 $(2^k \times 2^{m-k})$-块。

定义 2.4. 我们按归纳法定义元素 $x_m \in S_{2^m}$ 如下：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (0, 1) \in S_2, \\
x_2 &= (0, 2, 1, 3) \in S_4, \\
x_3 &= (0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7) \in S_8, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

换言之，

$x_{m+1} = (x_m(0)\ x_m(0) + 2^m,\ x_m(1)\ x_m(1) + 2^m,\ \ldots,\ x_m(2^m - 1)\ x_m(2^m - 1) + 2^m) \in S_{2^{m+1}}$.定义 y_m 为单行记法中的逆序元素，即

$$y_m = (x_m(2^m - 1), \cdots, x_m(1), x_m(0)).$$

例 2.5. 设 $m = 4$。此时我们有

$$
\begin{aligned}
x_4 &= (0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15) \\
y_4 &= (15, 7, 11, 3, 13, 5, 9, 1, 14, 6, 10, 2, 12, 4, 8, 0).
\end{aligned}
$$

x_4 和 y_4 的置换矩阵如图 2 所示。图中还展示了基本块，由此可清楚看出，x_4 和 y_4 是 $\mathcal{D}_4$的元素。

备注 2.6。我们来解释一下，为什么置换 x_m 和 y_m 比乍看之下更为自然。像之前一样，将集合 $[2^m]$ 与 $\mathbb{F}_2^m$对应起来，置换 x_m 和 y_m对应于 $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^m) \ltimes \mathbb{F}_2^m \subset S_n$ 中的仿射映射，其定义公式如下：

$$x_m(a_0, \ldots, a_{m-1}) = (a_{m-1}, \ldots, a_0) \qquad \text{and} \qquad y_m(a_0, \ldots, a_{m-1}) = (\overline{a_{m-1}}, \ldots, \overline{a_0}),$$

其中 $\overline{a_i} = a_i + 1$。

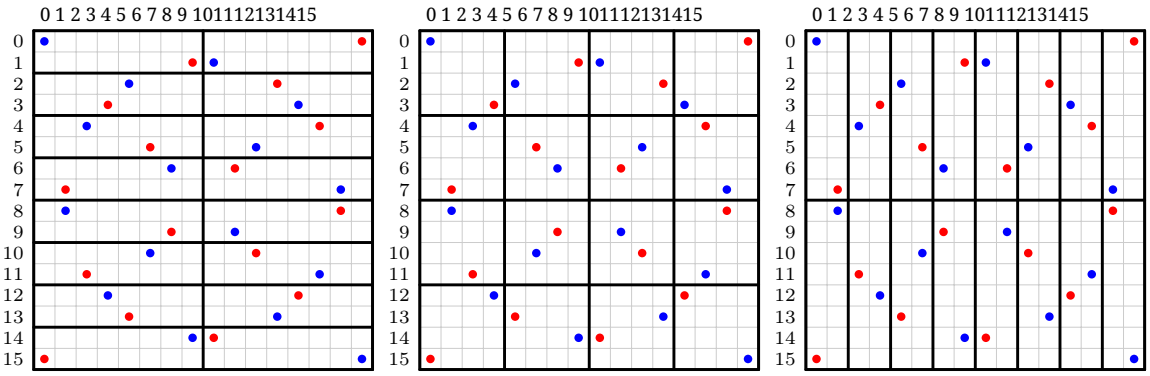
对于 $a,\ b \in [n]$ 我们用 $(a,\ b)$ 表示交换 a 和 b的对换。

定义 2.7。设 $\pi = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in S_n$。我们将 π, $\ell(\pi)$ 的长度 定义为 π的逆序数。也就是说，

$$\ell(\pi) = \#\{(i, j) \in [n]^2 \mid i < j \text{ and } \pi(i) > \pi(j)\}.$$

在下面的引理中，我们汇总置换 x_m 和 y_m的一些基本事实。

引理 2.8。设 $m \geq 1$。则有



基本 大小为 $2^3 \times 2^1$ 的基本块大小为 $2^2 \times 2^2$ 的基本块大小为 $2^1 \times 2$ 的基本块 3

图 2. M_{x_4}（蓝色）和 M_{y_4}（红色），并突出显示基本块。

(1) x_m 和 y_m 是对合。*(2)* $x_m y_m = y_m x_m = w_0$，其中 w_0 表示S_{2^m}中的最长元。*(3)* $x_m, y_m \in \mathcal{D}_m$。*(4)* $\ell(x_m) = 2^{m-2}(2^m - (m+1))$以及 $\ell(y_m) = 2^{m-2}(2^m + (m-1))$。因此，$\ell(y_m) - \ell(x_m) = m2^{m-1}$。

证明。 前两个结论直接由备注 2.6 得出。

现在我们关注第三个结论。由条目 1 和 2 可知 $y_m = x_m w_0$。因此，只需证明 $x_m \in \mathcal{D}_m$。

固定 $k \in \{0, \dots, m\}$。设 S和 T分别为基本的 $(m-k)$-区间和 k-区间。设$P_S \in \mathbb{F}_2^k$ 和 $P_T \in \mathbb{F}_2^{m-k}$分别为与 S 和 T相关联的二进制序列。为了证明 x_m 属于 $\mathcal{D}_m$，我们必须验证存在唯一的 $i \in S$ 使得 $x_m(i) \in T$。容易看出，同时满足这两个条件的唯一 i，是与 m 位二进制序列 $P_S P_T^{-1}$ 相关联的那个，其中 P_T^{-1}表示 P_T的反转。由此我们证明了 $x_m \in \mathcal{D}_m$。

还需证明 x_m的长度公式； y_m 的情形类似。回顾一下， $\ell(x_m)$等于逆序数，即满足 $i < j$且 $x_m(i) > x_m(j)$的数对 (i, j) 的个数。

显然， $\ell(x_1) = 0$ 且 $\ell(x_2) = 1$。对于 $m \geq 3$，我们声称

$$\ell(x_m) = 2\ell(x_{m-1}) + \big(2^{m-1} - 1\big)2^{m-2}. \tag{2.1}$$

为此，将 x_m 的单线表示法写成 $x_m = (a_m \mid b_m)$的拼接，其中每个块的长度为 2^{m-1}。根据构造， a_m 和 b_m 都编码了 x_{m-1}的副本，因此二者合计贡献 $2\ell(x_{m-1})$个逆序对。

设 C_m 为 x_m 中涉及 a_m 的一个元素和 b_m的一个元素的逆序对数。由于 a_m 中的元素都是偶数，而 b_m 中的元素都是奇数，每个元素 $k \in a_m$ 恰好为 C_m贡献 $k/2$。对从 0 到 $2^m - 1$的所有偶数求和，得到

$$C_m = (2^{m-1} - 1) \cdot 2^{m-2}.$$

这就证明了递推关系 (2.1)。

利用初始条件 $\ell(x_1) = 0$、 $\ell(x_2) = 1$求解递推关系，可得

$$\ell(x_m) = 2^{m-2}\big(2^m - (m+1)\big),$$

如所需。 □

对称群中的 Bruhat 序定义如下。

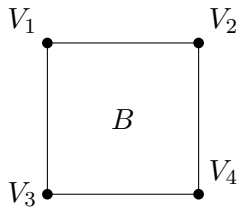


图 3. 基本块中的顶点

定义 2.9. 设 $\pi_1, \pi_2 \in S_n$。若存在一列对换 $t_1, \ldots, t_k \in S_n$ 使得 $\pi_1 \leq \pi_2$，则记作

(1) $\pi_1 t_1 \cdots t_k = \pi_2$; (2) 对所有 $1 \leq s \leq k$, $\ell($
$\pi t_1 \cdots t_{s-1}) < \ell(\pi_1 t_1 \cdots t_s)$。

D定义 2.10. 设 $w \in S_n$。我们定义与 w a 相关联的 Ehresmann 矩阵 E_w s

$$E_w(i,j) = \#\{k \leq j \mid w(k) \geq i\}, \qquad 0 \leq i, j < n.$$

也就是说，$E_w(i,\ j)$ 统计 0、1、.....、j 中有多少个值被 w 映射到大于或等于 i 的值。等价地，它统计了 w 的置换矩阵中位于由 $(i,\ j)$ 确定的西南矩形内的 1 的个数。

以下判据最初由 Ehresmann 提出，是比较 Bruhat 序中两个置换的有用工具。一种证明（采用略有不同的约定）可见于 [4,定理 2.1。5]。

引理 2.11. 设 $x, y \in S_n$。那么，我们有

$$x \leq y \text{ in the Bruhat order} \iff E_x(i,j) \leq E_y(i,j) \quad \text{for all } i,j.$$

对于 $x,\ y \in S_n$，我们用 $[x,y]$ 表示相应的 Bruhat 区间

$$[x,y] = \{z \in S_n \mid x \leq z \leq y\}.$$

二进制均匀分布排列与 x_m 和 y_m 之间的关系如下:

$$\mathcal{D}_m = [x_m, y_m].$$

目前我们只能证明一个包含关系。另一个包含关系的证明将推迟到下一节。

引理 2.12。 对于所有 $m \geq 1$，我们有 $[x_m, y_m] \subset \mathcal{D}_m$。

证明。设 $\pi \in [x_m, y_m]$ 和 B 是一个基本块。令 $U_\pi(B)$ 表示置换矩阵 M_π 中块 B 内 1 的个数。根据注 2.2，要证明 $\pi \in \mathcal{D}_m$，只需证明 $U_\pi(B) = 1$。

设 $V_1,\ V_2,\ V_3$ 和 V_4 是 B 的顶点，并按阅读顺序标记，如图 3 所示。由容斥原理可得

$$U_\pi(B) = E_\pi(V_2) - E_\pi(V_1) - E_\pi(V_4) + E_\pi(V_3). \tag{2.2}$$

由引理 2.8 可知 $x_m,\ y_m \in \mathcal{D}_m$。特别地，根据注 2.2，对于所有 $1 \leq i \leq 4$，我们得到$E_{x_m}(V_i)$ $= E_{y_m}(V_i)$。另一方面，由引理 2.11 可得

$$E_{x_m}(V_i) \leq E_\pi(V_i) \leq E_{y_m}(V_i),$$

对所有 $1 \leq i \leq 4$ 均成立。由此得出 $E_{x_m}(V_i) = E_\pi(V_i)$。将这些等式与 (2.2) 结合，我们得到 $U_\pi(B) = U_{x_m}(B) = 1$，这正是我们要证明的结论。□

2.2. Ab **ig Bruhat 超立方体**。 让我们引入一种特殊类型的瓦片，位于一个 $2^m \times 2^m$-矩阵中。

定义 2.13。 我们称基本的 k_1-区间 S 和基本的 k_2-区间 T 为互补的，如果 $k_1 + k_2 = m+1$ 且 $k_1,\ k_2 \geq 1$。互补块 是 $2^m \times 2^m$-矩阵中的一个块，其元素由 $S \times T$ 索引，其中 S 和 T 是互补区间。我们用 $\mathcal{C}_m$ 表示互补块的集合。

定义 2.14。 设 $S_2 = \{e, s\}$。我们定义一个函数

$$\varphi : \mathcal{D}_m \to S_2^{\mathcal{C}_m}$$

如下。设 S 为一个基本的 k_1-区间，T 为一个基本的 k_2-区间，且 $(S,\ T) \in \mathcal{C}_m$。与 $(S,\ T)$ 对应的 M_π 的子矩阵 $M_{(S,T)}$ 是两个互不相交的基本块的并集，每个块的大小为 $2^{k_1-1} \times 2^{k_2}$。因此，若 $\pi \in \mathcal{D}_m$，则 $M_{(S,T)}$ 中恰有两个元素等于 1。删除 $M_{(S,T)}$ 中的所有零列和零行后，我们得到以下情形之一：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{or} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在第一种情况下，我们设定 $\varphi(\pi)(S,\ T) = e$；在第二种情况下，我们设定 $\varphi(\pi)(S,\ T) = s$。

我们可以如下将 $S_2^{\mathcal{C}_m}$ 视为偏序集。

定义 2.15。 设 $m \geq 1$ 和 $f_1,\ f_2 \in S_2^{\mathcal{C}_m}$。若满足以下条件，我们记作 $f_1 \leq f_2$

$$f_1(P, Q) \leq f_2(P, Q)$$

对所有 $(P,\ Q) \in \mathcal{C}_m$。换言之，当且仅当对所有 $(P,\ Q) \in \mathcal{C}_m$，我们有 ve

$$f_1(P, Q) = s \implies f_2(P, Q) = s.$$

我们注意到，$(S_2^{\mathcal{C}_m},\ \leq)$ 作为偏序集同构于一个秩为 $|\mathcal{C}_m| = m2^{m-1}$ 的超立方体。$(S_2^{\mathcal{C}_m},\ \leq)$ 中的最小元和最大元，分别记作 f_e 和 f_s，满足 $f_e(P,\ Q) = e$ 且 $f_s(P,\ Q) = s$，对所有 $(P,\ Q) \in \mathcal{C}_m$ 均成立。

引理 2.16。 函数 φ 是保序的。也就是说，对于所有满足 $\pi_1 \leq \pi_2$ 且在 *Bruhat* 序中有 π_1，$\pi_2 \in \mathcal{D}_m$ 的情形，我们有 $\varphi(\pi_1) \leq \varphi(\pi_2)$ 属于 $(S_2^{\mathcal{C}_m}, \leq)$。

证明。我们通过逆否命题进行论证。假设 $\varphi(\pi_1) \not\leq \varphi(\pi_2)$。那么存在一个互补对 $(S,\ T) \in \mathcal{C}_m$ 使得

$$\varphi(\pi_1)(S, T) = s \qquad \text{and} \qquad \varphi(\pi_2)(S, T) = e. \tag{2.3}$$

如图4所示，将互补对 $(S,\ T)$ 分成四个全等矩形。设 R 为该划分中的左下矩形，并设 V_1、P、V_2 和 V_3 为 R 的顶点，按阅读顺序排列。注意，点 V_i 是基本块的顶点。由于 π_1，$\pi_2 \in \mathcal{D}_m$，对于所有 $i \in \{1, 2, 3\}$，我们都有 $E_{\pi_1}(V_i) = E_{\pi_2}(V_i)$。

令 $X_{\pi_i}(R)$ 表示置换矩阵 M_{π_i} 中 R 内部 1 的数量。根据 (2.3)，我们有 $X_{\pi_1}(R) = 1$ 和 $X_{\pi_2}(R) = 0$。根据容斥原理，我们有

$$E_{\pi_i}(P) = E_{\pi_i}(V_1) + E_{\pi_i}(V_3) - E_{\pi_i}(V_2) + X_{\pi_i}(R).$$

由此可得 $E_{\pi_1}(P) - E_{\pi_2}(P) = 1$。特别地，$E_{\pi_2}(P) < E_{\pi_1}(P)$。因此，引理 2.11 得出 $\pi_1 \not\leq \pi_2$，这正是我们要证明的。□

引理 2.17。 对于所有 $m \geq 1$，都有 $\varphi(x_m) = f_e$，且 $\varphi(y_m) = f_s$。

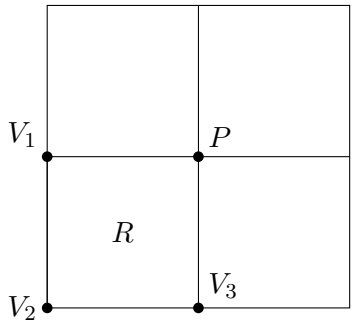


图4. 按照引理 2.16 的证明划分一个互补块

证明。 我们来证明 x_m 的情形， y_m 的情形类似。设 (S,T) 是一对互补对。我们需要证明 $\varphi(x_m)(S,T) = e$。注意，这意味着，如果$a < b \in S$是满足 $x_m(a)\ x_m(b) \in T$ 的两个元素，那么 $x_m(a) < x_m(b)$。

我们将 x_m 视为 $\mathbb{F}_2^m$ 的一个自同态。假设 S 是一个基本的 k-区间， T 是一个基本的 $m-k+1$-区间，且 $k \geq 1$。令 $P_S \in \mathbb{F}_2^{m-k}$ 和 $P_T \in \mathbb{F}_2^{k-1}$ 分别为与 S 和 T 相关联的二进制序列。

若 $k = 1$，则 $S = \{P_S0, P_S1\}$ 和 $T = \mathbb{F}_2^m$。于是， $a = P_S0$ 和 $b = P_S1$ （因为 $a < b$）。因此， x_m（a） $= 0P_S^{-1}$，且 x_m（b） $= 1P_S^{-1}$。由此可得 x_m（a） $= P_S0 < P_S1 = x_m$（b），因为通过我们的识别 $[2^m] \leftrightarrow \mathbb{F}_2^m$，区间 $[2^m]$ 上的自然序变为 $\mathbb{F}_2^m$ 上的字典序。

现在假设 $k > 1$。在这种情况下， S 中映射到 T 的两个元素为

$$a = P_S0P_T^{-1} < P_S1P_T^{-1} = b.$$

显然， $x_m(a) = P_T0P_S^{-1} < P_T1P_S^{-1} = x_m(b)$，由此证明得证。 □

定义 2.18。 设 $m \geq 1$ 和 $1 \leq k \leq m$。对于任意 k位二进制字符串 B，我们用 $B\star$表示一个以 B 开头的 m位二进制字符串（因此 $\star$ 是一个长度为 $m-k$的二进制字符串）。

设 $\pi \in \mathcal{D}_m$ 和 $(S,T) \in \mathcal{C}_m$。设 P_S和 P_T分别为与 S和 T关联的二进制序列。设 $P_S\star_1, P_S\star_2 \in \mathbb{F}_2^m$为两个以$P_S$开头的 m位二进制字符串，它们经 π映射后成为以 P_T开头的字符串。我们将 翻转 $Fl_{S,T}(\pi)$ 定义为这样一个置换：它在除 $P_S\star_1$ 和 $P_S\star_2$之外的所有字符串上都与 π 一致，并将$P_S\star_1$映射到 $\pi(P_S\star_2)$，将 $P_S\star_2$映射到 $\pi(P_S\star_1)$。换言之，$Fl_{S,T}(\pi)$ 是 π在右侧乘以对换 $(P_S\star_1, P_S\star_2)$。

在下面的引理中，我们将 S_2 与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 等同起来，其中 e 对应 0， s 对应 1。因此，我们可以将 $S_2^{\mathcal{C}_m}$ 与函数集合 $f : \mathcal{C}_m \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 等同起来。

引理 2.19。 设 $\pi \in \mathcal{D}_m$ 和 $(S,T) \in \mathcal{C}_m$。设 $\chi_{S,T}$： $\mathcal{C}_m \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是将（S,T） 映射为 1、并将每个其他互补块映射为 0的函数。那么，我们有

(1) $Fl_{S,T}$（π） $\in \mathcal{D}_m$。*(2)* φ（$Fl_{S,T}$（π）） $= \varphi$（π） $+ \chi_{S,T}$。*(3)*

$$\ell(Fl_{S,T}(\pi)) = \begin{cases} \ell(\pi)+1, & \text{if } \varphi(\pi)(S,T) = 0; \\ \ell(\pi)-1, & \text{if } \varphi(\pi)(S,T) = 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

证明。 令 $\sigma := Fl_{S,T}(\pi) \in \mathcal{D}_m$. 根据翻转的定义，置换矩阵 M_π and M_σ 在互补对 (S,T) 之外完全相同。在该块内，它们相差

一个局部变换

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

我们分别证明每一项。

(1) 按照我们已确立的记号，我们用 $\pi(P_S\star_1) = P_T*_1$ 和 $\pi(P_S\star_2) = P_T*_2$表示置换矩阵中经翻转移动的两个 1 项，该置换矩阵对应于 π。

假设 $\sigma \notin \mathcal{D}_m$。那么存在一个基本块 (U, V)，使得方程 $\sigma(P_U\star) = P_V\star'$无解。由于 $\pi \in \mathcal{D}_m$，方程 $\pi(P_U\star) = P_V\star'$确实有解，而且解唯一。由于 σ 仅在输入 $P_S\star_1$ 和 $P_S\star_2$ 处与 π 不同，该解必定是 $\pi(P_S\star_1) = P_T*_1$ 或 $\pi(P_S\star_2) = P_T*_2$。不失一般性，我们假设它是前者。于是我们知道 $P_S\star_1$ 以 P_U 开头，而 P_T*_1 以 P_V 开头。

根据互补对和基本块的定义，我们知道$|P_S| + |P_T| = m - 1$和 $|P_U| + |P_V| = m$。这意味着，要么 $|P_U| \le |P_S|$，要么$|P_V| \le |P_T|$。在前一种情况下，由于 $P_S\star_1$ 以 P_U 开头，因此P_U 是 P_S的前缀。特别地，$P_S\star_2$ 以 P_U开头。根据翻转的定义，

$$\sigma(P_S\star_2) = P_T*_1$$

又由于 P_T*_1 以 P_V开头，这就为 $\sigma(P_U\star) = P_V\star'$提供了一个解，与我们的假设矛盾。另一方面，如果 $|P_V| \le |P_T|$，那么 P_V是P_T 的前缀，而等式 $\sigma(P_S\star_1) = P_T*_2$ 以完全类似的方式导出矛盾。由此可知，$\sigma = Fl_{S,\ T}(\pi)$属于 $\mathcal{D}_m$，如所述。

(2) 现在我们计算 $\varphi(\sigma)$。首先注意到

$$\varphi(\sigma)(S, T) = \varphi(\pi)(S, T) + 1,$$

因为翻转会交换块 $(S,\ T)$ 中两个 1 的位置。

剩下要证明的是，对于任何其他互补对 $(S_1,\ T_1) \neq (S,\ T)$，翻转不会改变 $\varphi(\pi)(S_1,\ T_1)$ 的值。关键在于，根据 φ 的定义，只要知道互补对 $(S_1,\ T_1)$ 中两个 1 中的任意一个的位置，就能确定 $\varphi(\sigma)(S_1,\ T_1)$ 的值。例如，如果其中一个 1 位于 $(S_1,\ T_1)$ 的左上象限，那么 $(S_1,\ T_1)$ 中的另一个 1 就必定位于右下象限，而 $\varphi(\sigma)(S_1,\ T_1) = 0$。

现在，位于 $(S_1,\ T_1)$ 中的两个 1 至多有一个能位于 $(S,\ T)$ 中，因为 $(S,\ T) \cap (S_1,\ T_1)$ 包含在一个基本块内，因此其中至多包含一个 1。这意味着存在一个 1，它位于 $(S_1,\ T_1)$ 中，但不位于 $(S,\ T)$ 中。由于 M_π 和 M_σ 在 $(S,\ T)$ 之外重合，我们可以得出结论，这个 1 在 M_π 和 M_σ 中的位置相同。由于这个共同的 1 的位置决定了 $\varphi(\sigma)(S_1,\ T_1)$ 和 $\varphi(\pi)(S_1,\ T_1)$ 的值，我们得出结论，这两个值相等，证毕。

(3) 最后，我们计算 $\ell(\sigma)$，也就是 σ的逆序数。由于 M_π 和 M_σ仅相差一个如（2.5）所示的局部变换，显然 $\ell(\sigma) = \ell(\pi) \pm 1$。

我们来更精确地说明。设 $i, j \in [2^m]$ 是两个 1 所在的列。假设在（2.5）中，左侧（分别为右侧）的矩阵对应于 M_π（分别为 M_σ）的一个子矩阵。在这种情况下，我们有 $\varphi(\pi)(S, T) = 0$。另一方面，数对（i, j）是 σ 的一个逆序对，却不是 π的逆序对。因此，$\ell(\sigma) = \ell(\pi)+1$。这证明了（2.4）的第一种情形。另一种情形的证明类似。

三个断言均已证明，证明完毕。 □

命题 2.20。 映射 φ: $\mathcal{D}_m \to S_2^{\mathcal{C}_m}$是偏序集同构，即，当且仅当 $\varphi(\pi_1) \le \varphi(\pi_2)$。

证明。 我们将证明分为三个步骤。

(1) φ 是单射。

设 $\pi \in \mathcal{D}_m$ 和 $a \in [2^m]$。我们证明可以从$\varphi(\pi)$中唯一地恢复 $\pi(a)$。

令 C_1 表示以 a为索引的列。考虑包含 C_1的唯一互补的 $(m, 1)$-块 (S_1, T_1)。值 $\varphi(\pi)(S_1, T_1)$指出高度为 2^{m-1} 的两个子列中哪一个不可能包含 $\pi(a)$。因此，这一步恰好阻挡 2^{m-1} 个 C_1中的可能行。令 C_2 为剩余的（未阻挡的）子列，其高度为 2^{m-1}。

接下来，考虑包含 C_2的唯一互补的 $(m-1, 2)$-块 (S_2, T_2)。值 $\varphi(\pi)(S_2, T_2)$再次阻挡了 C_2的一半，也就是一个包含 2^{m-2} 行的子列。令 C_3 为剩余未阻挡的子列，此时其高度为 2^{m-2}。

按此方式继续，在第 k 步中，我们屏蔽 2^{m-k} 行。经过 m 步后，被屏蔽的行总数为

$$2^{m-1} + 2^{m-2} + \cdots + 2^1 + 2^0 \;=\; 2^m - 1.$$

由于整列 C_1 包含 2^m 行，屏蔽其中的 $2^m - 1$ 行后，恰好剩下一行未被屏蔽，而这一行必定是 $\pi(a)$ 的位置。

因此，对于每个 $a \in [2^m]$， $\pi(a)$ 都由 $\varphi(\pi)$ 唯一确定，所以 φ 是单射。

(2) φ 是满射。

我们采用识别 $S_2 \leftrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ，与前一个引理的证明中相同。

设 $f : \mathcal{C}_m \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和

$$\mathcal{A}_f = \{(S, T) \in \mathcal{C}_m \mid f(S, T) = 1\}.$$

我们通过对 $|\mathcal{A}_f|$ 进行归纳，证明任意 f 都有一个原像。

如果 $|\mathcal{A}_f| = 0$，那么 $f = f_e = f_{0^\circ}$ 因此，引理 2.17 给出 $\varphi(x_m) = f_\circ$ 这就确立了归纳的基例。

现在固定满足 $|\mathcal{A}_f| > 0$ 的 f。令 $(S, T) \in \mathcal{A}_f$，并设 $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_f \setminus \{(S, T)\}$。定义 $g : \mathcal{C}_m \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为如下函数：在 $\mathcal{A}'$ 上取值 1，在其他地方取值 0。根据归纳假设，存在 $\pi_g \in \mathcal{D}_m$ 使得 $\varphi(\pi_g) = g$。由引理 2.19 可知

$$\varphi\big(Fl_{(S,T)}(\pi_g)\big) = f.$$

归纳证明完成。

(3) φ 是偏序集同构。

既然我们已经证明 φ 是双射，接下来只需证明 φ 在两个方向上都保持序关系。其中一个方向已在引理 2.16 中得到证明。因此，只需证明

$$\varphi(\pi) \le \varphi(\pi') \implies \pi \le \pi', \qquad \text{for } \pi, \pi' \in \mathcal{D}_m.$$

关键观察是， $\varphi(\pi) \le \varphi(\pi')$ 意味着 $\mathcal{A}_{\varphi(\pi)} \subset \mathcal{A}_{\varphi(\pi')}$。对 $\big|\mathcal{A}_{\varphi(\pi')} \setminus \mathcal{A}_{\varphi(\pi)}\big|$ 作直接的归纳论证，并结合引理2.19中的第2项和第3项，可知 π' 可以通过一系列长度递增的右乘换位从 π 得到。因此， $\pi \le \pi'$，如所需。

□

定理 2.21。 对于所有 $m \ge 1$ ，我们有：

(1) $\mathcal{D}_m = [x_m, y_m]$.

(2) $[x_m, y_m] \simeq S_2^{\mathcal{C}_m}$。 *(3) Bruhat* 区间 $[x_m, y_m]$ 是一个秩为 $m2^{m-1}$ 的超立方体。

证明。 根据引理 2.12，要证明第一个结论，只需证明包含关系 $\mathcal{D}_m \subset [x_m, y_m]$。令 $\pi \in \mathcal{D}_m$。我们有 $f_e \leq \varphi(\pi) \leq f_s$。由引理 2.17 和命题 2.20 可得 $x_m \leq \pi \leq y_m$。这就是 $\pi \in [x_m, y_m]$。第一个结论得证。结合命题 2.20 和第一个结论即可得出第二个结论。最后，回想起 $|\mathcal{C}_m| = m2^{m-1}$，第三个结论便可直接由第二个结论推出。□

3. 联系、扩展与应用

本节指出与现有文献的一些联系，阐述一种 p-进推广，并介绍其在簇代数以及 Bruhat 图嵌入的模空间中的一些应用。

3.1. **低差异序列**。该序列

$$(0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15)$$

在例 2.5 中出现的序列，除以 16 并去掉开头的 0 后，被称为 $[0, 1]$ 中分母为 16 的***van der Corput*序列** 。它是单位区间中低差异序列或拟随机序列的一个著名例子。

二进制分层均匀分布排列在低差异序列领域也有一种体现。如果 π 是 $\mathcal{D}_m$ 中的一个置换，我们可以把它的置换矩阵看作单位正方形中的一个由 2^m 个点 $(i/2^m,\ \pi(i)/2^m)$ 构成的子集。像这样的、大小为 2^m 的正方形子集，如果每个基本块恰好包含其中一个点，就称为一个 $(0,\ m,\ 2)$-网。这是 Niederreiter 在 [31] 中定义的更一般的 $(t,\ m,\ s)$-网概念的一个特例。这些网是分布特别均匀的有限子集，$[0, 1]^s$，已被证明广泛适用于准随机数生成和蒙特卡罗积分，例如数理金融领域（ [6]。）

不难证明，$(0,\ m,\ 2)$-网的集合（按显然的等价关系取商，即用网所相交的 $(1/2^m) \times (1/2^m)$ 个正方形集合为网标记）与 $\mathcal{D}_m$ 之间存在双射。在此背景下，恰好有 $2^{m2^{m-1}}$ 个互不等价的 $(0,\ m,\ 2)$-网这一事实（命题 2.20 的一部分）在 [37] 中得到了证明。

如备注 2.6 所述，我们可以将仿射线性群 $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^m) \ltimes \mathbb{F}_2^m$视为 S_{2^m} 的一个子群。记 B 为 $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^m)$ 中上三角矩阵组成的子群，记 G 为 $B \ltimes \mathbb{F}_2^m$。于是 G 置换了 $[2^m]$ 中的基本区间，这意味着 $\mathcal{D}_m$ 在 G 的左乘和右乘下均保持不变。特别地，这意味着双陪集 Bx_mB 包含于 $\mathcal{D}_m$ 中。注意，将 x_m 视为 $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^m)$ 的元素时，它是一个置换矩阵，对应于 S_m 中的反转；因此 Bx_mB 是 $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^m)$ 的 Bruhat分解中的大胞腔。这一非常自然的构造在低差异序列领域中也早已为人所知：与 Bx_mB 对应的 $(0, m, 2)$-网称为数字化 $(0, m, 2)$-网。事实上，在相关文献中可以找到这样的条件：一个矩阵的所有主子式都是非奇异的（例如参见 [15]的推论 4.54）；但似乎尚未有人注意到，这一条件选出的正是 Bruhat 大胞腔，正如 $(0, m, 2)$-网构成一个 Bruhat 区间（正如我们在定理 2.21 中所证明的）这一事实也尚未被注意到。若能深入挖掘低差异序列领域的文献，看看其中是否还有更多具有出人意料的代数组合学联系的构造，将会很有意思。

3.2. **排列多胞体的幂**。 上述论证可推广如下。对于每个$t,\ m > 0$，都存在一组 t-进分布良好的置换 $\mathcal{D}_m^{(t)} \subseteq S_{t^m}$，其定义仿照定义 2.1。特别要注意，$\mathcal{D}_1^{(t)} = S_t$。这些置换的更多例子

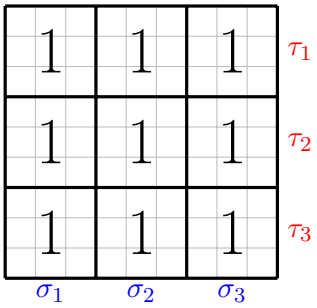
为 $x_m^{(t)}$， $y_m^{(t)} \in S_{t^m}$，它们是$(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^m$的仿射变换，由下式给出

$x_m^{(t)}(a_0, \ldots\ldots, a_{m-1}) = (a_{m-1}, \ldots\ldots, a_0)$；$y_m^{(t)}(a_0, \ldots\ldots, a_{m-1}) = (t-1-a_{m-1}, \ldots\ldots, t-1-a_0)$。注意， $x_m^{(t)}$和 $y_m^{(t)}$是对合，而 $x_m^{(t)} y_m^{(t)} = y_m^{(t)} x_m^{(t)}$是 S_{t^m}中的最长元。定义 2.14 可推广为一个映射 $\varphi\colon \mathcal{D}_m^{(t)} \to S_t^{mt^{m-1}}$。利用这一点可以证明

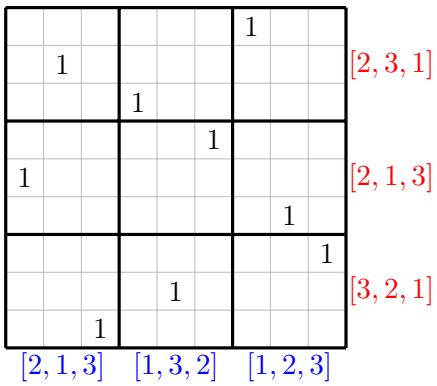
$$[x_m^{(t)}, y_m^{(t)}] = \mathcal{D}_m^{(t)} \cong S_t^{mt^{m-1}},$$

其中，最后一个同构是关于 Bruhat 序的偏序集同构。

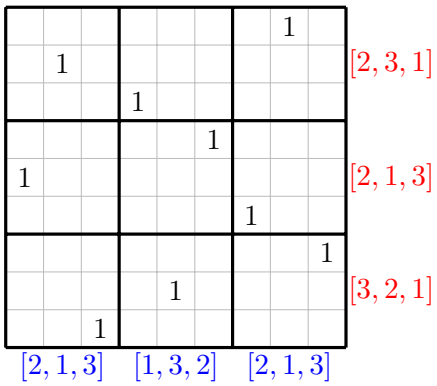
例如，要在 S_9 中构造一个 3 进良分布排列，我们从以下构型开始:



其中，较大的 1 表示相应的3×3-块中有唯一一个等于 1 的元素，而 σ_i， $\tau_i \in S_3$ 是分别表示相应列和行中 1 的相对位置的置换。这给出了 S_9 中的 3 进良分布排列与 S_3^6之间的双射。下面给出一个更具体的例子:



将最后一列从恒等排列 $[1, 2, 3]$ 改为 $[2, 1, 3]$，得到以下矩阵。



由此可见，我们在 Bruhat 序中有一个覆盖关系。

注记 3.1. 注意，通常的数独谜题是由 σ_1、……、 σ_9 构成的集合，其中的元素是在 S_9 中的 3 进良分布排列，并满足如下条件：若 $i \neq j$，则 $\sigma_i\sigma_j^{-1}$ 没有不动点。从这个角度来看，我们可以将广义数独谜题定义为 t^m t 进良分布排列 (σ_1、……、 σ_{t^m}) 在 S_{t^m} 中构成的集合，且若 $i \neq j$，则 $\sigma_i\sigma_j^{-1}$ 没有不动点。例如，下面是一个由 S_8 中的元素构成的 2进制数独谜题。

1	4	5	6	2	3	8	7
2	3	8	7	5	6	1	4
5	6	1	4	8	7	2	3
8	7	3	2	1	4	5	6
4	1	6	5	3	2	7	8
3	2	7	8	6	5	4	1
6	5	4	1	7	8	3	2
7	8	2	3	4	1	6	5

3.3. **Kazhdan-Lusztig d-不变量**。我们定义引言中提到的 d-Kazhdan-Lusztig 不变量。它是 Kazhdan-Lusztig R-多项式中次高次幂项系数的绝对值。现在我们回顾其针对置换的定义，不过它也可以定义在任意 Coxeter系统上。

定义 3.2. 存在唯一的多项式族 $\{R_{u,v}(q)\}_{u,v\in S_n} \subseteq \mathbb{Z}[q]$ 满足以下条件：

(1) $R_{u,v}(q) = 0$ if $u \not\leq v$;
(2) $R_{u,v}(q) = 1$ if $u = v$;
(3) For $1 \leq i < n$, let $s_i = (i,\, i+1)$.
If $\ell(vs_i) < \ell(v)$ then

$$R_{u,v}(q) = \begin{cases} R_{us_i,vs_i}(q), & \text{if } vs_i < u, \\ qR_{us_i,vs_i}(q) + (q-1)R_{u,vs_i}(q), & \text{if } vs_i > v. \end{cases}$$

现在可以定义 d-不变量。

定义 3.3. 对于 $x, y \in S_n$ 我们引入 $d_{x,y} \in \mathbb{Z}$，定义为

$$R_{x,y}(q) = q^{\ell(y)-\ell(x)} - d_{x,y}, q^{\ell(y)-\ell(x)-1} + \text{ lower degree terms.}$$

我们有以下递推关系来计算 $d_{x,y}$。

(1) 对任意 $x \in W$，都有 $d_{x,x} = 0$；

(2) 对任意 $x \leq y$ 以及满足 $ys_i < y$ 的简单对换 s_i，我们有

$$d_{x,y} = \begin{cases} d_{xs_i,ys_i}, & \text{if } xs_i < x, \\ d_{x,ys_i} + 1, & \text{if } xs_i > x \text{ and } xs_i \not\leq ys_i, \\ d_{x,ys_i}, & \text{if } xs_i > x \text{ and } xs_i \leq ys_i. \end{cases} \tag{3.1}$$

推论 3.4。设 $m \geq 1$。设 x、 $y \in [x_m, y_m]$ 满足 $x \leq y$。那么，我们有

$$R_{x,y}(q) = (q-1)^{\ell(y)-\ell(x)}. \tag{3.2}$$

特别地，$R_{x_m,\ y_m}(q) = (q-1)^{\ m2^{m-1}}$ 以及 $d_{x_m,\ y_m} = m2^{m-1}$。

证明。 由定理 2.21 可知，Bruhat 区间 $[x, y]$ 是一个超立方体。特别地，$[x, y]$ 不包含任何与 S_3同构的区间。因此，直接应用 [8, 定理 6.3]即可得到（3.2）。最后，由引理 2.8 可得 $\ell(y_m) - \ell(x_m) = m2^{m-1}$，最后一个结论也随之成立。 □

我们沿用 d-不变量这一名称，是因为 Patimo [32], 的研究表明，这个值是 Bruhat 区间的一个组合不变量。也就是说，它只取决于该区间未标记的哈斯图，而与区间的端点无关。基于这一事实，他证明了 Lusztig 和 Dyer 关于 Kazhdan–Lusztig 多项式 q系数的组合不变性猜想。

T他在证明中的主要要素是一个用于计算$d_{x,\ y}$的组合公式，即 y

$$d_{x,y} = \min\{\,|F| \mid F \subset E_{[x,y]} \text{ and } F^{\diamond} = E_{[x,y]}\,\}, \tag{3.3}$$

其中 $E_{[x,y]}$ 表示 $[x, y]$的哈斯图中的边集， $F^{\diamond}$ 表示 F的菱形闭包。关于 $F^{\diamond}$ 的精确定义，请参见 [32, 定义 4.5]。粗略地说， $F^{\diamond} \supset F$ 的构造过程如下：每当一个菱形（即秩二超立方体）的两条相邻边已属于 $F^{\diamond}$时，我们就将该菱形中另外两条相邻边加入 $F^{\diamond}$。重复这一过程，直到无法再加入边为止。

一般而言，使用 (3.3) 计算 $d_{x,y}$ 是一项困难的任务。不过，当 $[x, y]$ 是一个超立方体时，很容易验证，满足 (3.3) 中条件的最小集合 F 由与 x关联的边组成。这样，我们便直接从 d-不变量的组合定义中恢复了公式 $d_{x_m,y_m} = m2^{m-1}$。

3.4. 簇簇。 如果仿射代数簇 X 的坐标代数 $\mathbb{C}[X]$ 具有簇代数结构，我们就称其为簇簇，参见 [18]。这意味着，X 除余维 2 的部分外，可以由代数环面覆盖，并且每个环面都具有一个坐标系，其中的坐标是 $\mathbb{C}[X]$上的正则函数（即簇变量），而这些环面之间的过渡函数可以归结为一条称为簇变异的组合规则。簇变量可分为可变变量和冻结变量。冻结变量恰好是 $\mathbb{C}[X]$中的单位，并且作为坐标出现在 X上簇结构的每个代数环面中。一个代数簇可能具有多种彼此不等价的簇结构，但冻结变量的数量是 X的不变量，参见 [21]。簇结构的存在对 X的几何性质有诸多影响；例如，它意味着存在一个具有正结构常数的 $\mathbb{Z}$-形式，[23]。

最近的研究表明，旗簇中的开 Richardson 簇在 [11] 和 [20]中分别具有簇结构。根据 [10],的主要结果，这两项工作中构造的簇结构彼此一致。 [20]的工作利用 Deodhar 几何 [14]构造了簇结构。特别是，种子中的可变变量数量与 Richardson 簇中余维为 1 的 Deodhar 分层数量一致，而簇变量总数为 $\dim R^{\circ}_{x,y} = \ell(y) - \ell(x)$。将冻结变量的数量记为$f_{x,y}$ ，则有

$$f_{x,y} = \ell(y) - \ell(x) - \#\mathfrak{D}^1_{x,y} \tag{3.4}$$

其中$\mathfrak{D}^1_{x,y}$ 是余维为 1 的 Deodhar 分层集合。

另一方面，Deodhar 在 [14, 定理 1.3] 中给出了一个用 Deodhar 分层表示 R-多项式的表达式：

$$R_{x,y}(q) = \sum_{\mathfrak{s}} (q-1)^{a(\mathfrak{s})} q^{b(\mathfrak{s})}.$$

其中 $\mathfrak{s}$ 遍历所有 Deodhar 分层，而 $a(\mathfrak{s}) + 2b(\mathfrak{s}) = \ell(y) - \ell(x)$。量 $b(\mathfrak{s})$ 恰好是分层 $\mathfrak{s}$ 的余维。存在唯一一个满足 $b(\mathfrak{s}_0) = 0$ 的分层 $\mathfrak{s}_0$ 。它

由此可知，我们可以写成

$$R_{x,y}(q) = (q-1)^{\ell(y)-\ell(x)} + \#\mathfrak{D}^1_{x,y}(q-1)^{\ell(y)-\ell(x)-2}q + \text{ lower terms.}$$

我们得到

$$R_{x,y}(q) = q^{\ell(y)-\ell(x)} - (\ell(y)-\ell(x)-\#\mathfrak{D}^1_{x,y})q^{\ell(y)-\ell(x)-1} + \text{ lower terms.} \tag{3.5}$$

比较 (3.4) 和 (3.5)，我们得出 $f_{x,y} = d_{x,y}$，也就是说，Richardson 簇$R^\circ_{x,y}$ 中的冻结变量数量恰好等于 d-不变量 $d_{x,y}$。

任意簇簇都允许代数阿贝尔群的忠实作用；若该簇簇具有真正满秩，则此阿贝尔群是一个秩等于冻结变量数量的环面，详见 [29, 第 5] 节。特别地，开 Richardson 簇具有真正满秩，因此我们有一个忠实作用

$$(\mathbb{C}^\times)^{d_{x,y}} \curvearrowright R^\circ_{x,y}. \tag{3.6}$$

这种作用的簇论构造存在一个问题：它并非显式构造，而且其构造依赖于复杂的组合学（例如参见 [27, 例 4.6]），因此最好能得到一种更显式的形式。将 $(\mathbb{C}^\times)^{n-1}$ 与 PGL(n) 中的对角矩阵环面对应起来，就很容易得到 $(\mathbb{C}^\times)^{n-1}$ 在 $R^\circ_{x,y}$ 上的自然作用。在许多情况下（例如，当 $x = e$[12, 第 4]节) 时，或当 y 是一个格拉斯曼置换（[19]）时），我们有 $d_{x,y} \le n-1$，而作用 (3.6) 是自然 $(\mathbb{C}^\times)^{n-1}$作用的商。当 $d_{x,y} > n-1$ 时，目前尚不清楚如何得到 (3.6) 中其余$\mathbb{C}^\times$因子的作用。特别是，若不利用 $R^\circ_{x_n,y_n}$ 已经同构于一个环面这一事实，如何显式构造 $(\mathbb{C}^\times)^{\ell(y_n)-\ell(x_n)}$ 在$R^\circ_{x_n,y_n}$ 上的作用，将是一个非常有趣的问题。此外，$(\mathbb{C}^\times)^{\ell(y_n)-\ell(x_n)}$ 对开 Richardson 簇 $R^\circ_{x_n,y_n}$ 的作用能否延拓到闭 Richardson 簇 R_{x_n,y_n}，也很值得探究。我们指出，定理 2.21 结合 [1,推论 3.2]和 [28, 推论 1.3], 表明，R_{x_n,y_n} 是光滑的。

3.5. **Bruhat 区间嵌入的模空间**。区间 $[x,y]$ 的 Bruhat 图，其顶点由该区间中的置换构成；若存在某个反射 $t=(i,j) \in S_n$，使得 $u \le v$且 $u = tv$，则有一条有向边 $u \to v$，并以 t为边标记。可以根据偏序集 [16]恢复区间的无标记 Bruhat 图。

Bruhat 图具有自然嵌入。对称群 S_n 通过置换坐标作用于 $\mathbb{R}^n$。固定 $\rho=(0,1,\ldots,n-1)$，并将 $u \in [x,y]$ 映到 $u(\rho)$，将 $u \to v$映到连接 $u(\rho)$ 与 $v(\rho)$ 的直线。这个嵌入具有几何意义：它是闭 Richardson 簇中 $0-$ 维环面轨道和一维环面轨道在矩映射 [7] 下的像。下文将这种嵌入称为几何嵌入，并强调它包含额外信息。

对于组合学和 Kazhdan-Lusztig 理论中的若干问题，考察 Bruhat 图更为自然。一个例子是 Dyer 和 Lusztig 提出的组合不变性猜想，它断言同构区间会导出相同的 Kazhdan-Lusztig 多项式。已知 [16, 7] 可以从 Bruhat 图以及 其嵌入中恢复 Kazhdan-Lusztig 多项式。一个关键难点在于，尽管两个区间可能同构，但它们的几何嵌入可能大不相同。例如，这些嵌入所在的自然环境空间甚至可能维数不同。因此，Hone、Klein 和最后一位作者开始考察 Bruhat 区间的一般嵌入类，上文讨论的几何嵌入就是其中一例 [25]。

为了解释这个定义，我们需要简要回顾一下反射子群。在我们所讨论的对称群中，这些子群由任意一组换位生成。任何这样的子群都同构于若干个（可能较小的）对称群的乘积。若一个反射子群同构于 $S_2 \times S_2$ 或 S_3，我们就称其秩为 2。我们可以

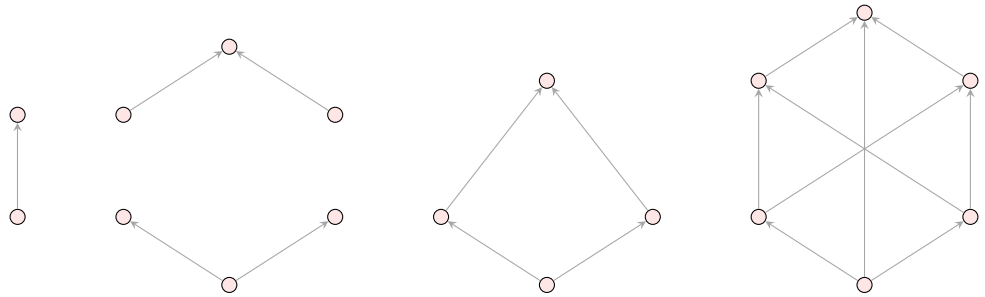


图5. 对称群 Bruhat 区间的秩2子图：箭头、不完整菱形、菱形和完整 S_3。

找出秩 2 反射子群的陪集与任意 Bruhat 区间的交集。这些交集恰好是同构于箭头、菱形或完整 S_3 子图的菱形完全子图（见图 5）。我们将其称为秩 *2* 子图。

下面的定义（对 [25]至关重要）试图抽象自然界中出现的 Bruhat 图嵌入的性质：

定义 3.5. 设 $x, y \in S_n$。Bruhat 图 ϕ：$[x, y] \to \mathbb{R}^m$ 的一个嵌入称为良好，如果：

(1) 顶点的像位于球面 $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$上；(2) 对所有秩2子图，其点的像都位于一个平面上。

不难看出，上文讨论的几何嵌入满足这些性质。然而，即便是简单的 Bruhat 区间，其良好嵌入也可能远多于自然界中出现的嵌入。例如，自然界中只出现少数几何菱形嵌入，而 $\mathbb{R}^2$ 内部良好嵌入的模空间，是圆 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$上4个点的模空间中的一个开集。更一般地，在对称群中，几何嵌入里边与边之间的角总是属于集合 $\pm\pi/3, \pm\pi/2$ 和 $\pm 2\pi/3$，而良好嵌入则没有此类限制。良好嵌入似乎提供了一个自然的更大空间，可借此尝试关联同构区间的几何嵌入。

对于固定的区间 $[x, y]$，自然会问：该区间能够良好嵌入的最大维数是多少？（我们总是假设嵌入的顶点不包含在某个仿射超平面内。）这个量至少具有两个与前面讨论的冻结变量数量相同的性质：人们可能会（错误地）猜测它总是被 $n-1$ 界定；而且，它显然被 $\ell(y) - \ell(x)$ 界定。可以合理推测这两个数实际上相等，但目前尚无定论。对于超立方体，情况会大大简化。在这种情况下，很容易看出，这个最大维数就是超立方体的维数，而且所有嵌入的模空间都可以明确地理解。

4. FunSearch 和 AlphaEvolve 实验

本文的主要定理源自一些通过计算发现的有趣例子。由于本文采用的计算方法（将大语言模型用作繁殖方式的遗传算法）颇为新颖，我们将比惯例稍多花些篇幅，以相当详尽的叙述介绍实验过程，希望这番讨论能对有意采用这些方法的其他数学家有所帮助。

我们最初考虑的问题，是在 S_n 中寻找一对置换 x， y ，使其 d-不变量 $d_{x,\ y}$ 尽可能大。

这个问题具有两个特征，而这两个特征结合起来，往往表明可以采用机器学习方法进行探索：

- 搜索空间（置换对）的大小为（$n!$ ）$_2$，除非 n 非常小，否则无法进行穷举搜索。
- 要最大化的函数$d_{x,\ y}$ 可以使用（3.1）快速且可靠地计算。

其他具有这些特征、并曾作为此类机器学习实验对象的问题包括：

（1）**帽子集问题**。在（$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$）^{n} 中寻找不含三项等差数列的大子集。（2）**无等腰三角形问题**。在 $n \times n$ 网格中寻找不含等腰三角形的大子集。（3）**的极值数** C_4。寻找以 n 个顶点构成的图，使其在不含 4-圈的情况下边数尽可能多。

请注意，这些问题的搜索空间大小相对于 n^2 呈指数级增长，甚至呈双重指数级增长。与那些规模过大而无法搜索的问题相比，本文所处理的搜索空间在某种意义上相对较小。这或许有助于解释本文所报告实验中观察到的相对成功的表现。

令 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为如下定义的函数

$$f(n) = \max\{d_{x,y} \mid x, y \in S_n\}.$$

很容易证明， $f(n)$至少与 n相差一个常数。例如，我们有$d_{e,\ w_0} = n - 1$。对 $n \leq 7$ 进行穷举计算可得

n	1	2	3	4	5	6			7
$f(n)$	0	1	2	4	5	7	9		

表 2. $f(n)$ 的较小取值

我们在 S_8 中找到了一对置换，其 d-不变量为 12，但不确定这个值是否为最大值。事实上，对于每个 n ，我们都能构造一对置换 $(x,\ y)$，使得 $d_{x,\ y} = 2n - 4$ （当 n 为偶数时）且 $2n - 5$ （当 n 为奇数时）。这些置换由一种易于描述的构造方法得出：例如，当 $n = 12$时，一对满足 $d_{x,\ y} = 20$ 的置换可表示为

$$x = (2,5)(4,7)(6,9)(8,11) \qquad \text{and} \qquad y = (1,12)(2,4)(3,6)(5,8)(7,10)(9,11).$$

O我们开始实验时的目标，是理解这个下界是否 as best 可能。如我们在 3.4 节中记录的，答案是否定的。

4.1. **FunSearch 实验**。FunSearch 是 Google DeepMind 于 2023 年开发并在 [34] 中介绍的一种协议。FunSearch 是开源的，有多个版本可供使用。我们使用了 Christofero Fraser-Taliente 开发的实现，我们发现它尤其适合数学研究人员使用，并且可在 https://github. com/kitft/funsearch 公开获取。

我们回顾一下主要思路。我们的目标是找到两个置换 x， y ，使得 $d_{x,\ y}$ 足够大。FunSearch 并非直接搜索这样的一对，而是搜索一个输出这样一对的 Python 程序。

该机制中的主循环大致如下。这里， M 和 m 是常量，其重要性仅在于 $M \gg m$。

(1) 假设给定大量 M 个 Python 程序。(2) 运行所有程序。丢弃所有输出不是一对置换的程序。在剩余程序中，选出输出具有最大$d_{x,y}$值的 m 个程序。(3) 将这些程序的各种子集 m作为输入发送给大语言模型，同时附上一条提示，要求模型输出与输入中的程序相似的 M 个程序。(4) 返回第 1 步。

在初始步骤中， M 程序可以设置为用户选定的某个初始程序的 M 个副本。在这些实验中，我们通常将初始程序设为：输入一个整数 n ，并输出两个恒等置换副本，置于 S_n 中。

FunSearch 运行过程中不断演化的置换生成程序，出于历史原因，被称为 priority。重要的是，评估函数（在本例中，即给定输入置换 x 和 y 后计算 $d_{x,\ y}$ 的函数）是固定不变的；我们在开始时将它提供给 FunSearch，它不会随之演化。这样一来，用户便有相当大的自主权和灵活性，可以引导 priority 朝着所需的任意目标演化。

在 Python 中，有许多表示置换的方法。在这些实验中，我们选择将置换表示为一个由 1 到 $n-1$ （含）之间的整数构成的列表；评估器会将这个列表解释为简单反射 s_i 的乘积。特别地，恒等置换表示为空列表，因此我们的初始程序只需输出两个空列表副本。

有人可能会问，我们如何约束 priority，使它在 FunSearch 的演化过程中输出这种形式。答案是：我们做不到！至少不能直接做到。用户能直接控制的是冻结的评估器，我们可以对其进行设计，让任何输出不符合预期形式的 priority 得到低分。在实践中（无论是在这项实验中还是在许多其他实验中），我们发现这种做法足以让种群中的大多数程序持续生成格式正确的输出。

我们的实验使用了以下提示：

该程序正尝试学习一对具有较大 d– 不变量的置换。

在每次迭代中，改进此前迭代得到的 priority _ v1 方法，使其优于 priority _vX 方法。只做小幅修改。尽量缩短代码。请 ∗不要∗使用任何随机性。

不使用随机性的要求，是因为当一个输出具有非确定性的程序在一次测试运行中取得高分时，我们可能无法在后续运行中重现这一表现。如果一个能让评估器满意的程序确实稳定地表现良好，那么跟踪其运行情况就会简单得多。

我们的实验主要使用 Mistral 的模型 mistral-small-3.1-24b-instruct，因为它成本较低。在 [17]中，我们发现，在 FunSearch 应用中，使用更昂贵的模型并不会带来稳定的性能提升。在当前项目中，我们偶尔也使用更大型模型的输入运行 FunSearch，但据观察，性能并无提升。本文报告的 FunSearch 实验中，Mistral API 调用的总费用约为 10 美元。相比之下， [22] 报告称，向 AlphaEvolve 提供更昂贵的大语言模型的调用时，确实能带来性能提升。

一般来说，FunSearch 针对问题的某个固定实例或固定实例集训练出的程序，往往难以很好地泛化到其他实例。例如，一个经过训练的程序

用于研究 9×9 网格上的无等腰三角形问题，在更大的网格 [17] 上运行时表现并不理想。这个问题截然不同。FunSearch 的实验相当快（半小时内）就找到了能够为许多 n 给出 $d_{x,y} = 2n - c$ 的程序，即使训练时只使用了一个 n。例如，一次针对 $n = 11$ 的运行生成了以下程序，它产生了一个值为 17 的 d-不变量。

```
定义 优先级(n: 整数) -> 列表:
 #返回一对整数列表，整数范围为 1 到 n-1，用于
      解释为一系列相邻换位。
 #n 是一个整数。我们不限制列表的长度。

    a = 列表(范围(1, n-1, 2))[::-1] + 列表(范围(2, n-1, 2))[::-1]b = 列表
    (范围(0, n-2, 2)) + 列表(范围(n//3, n-1, 2))[::-1]c = 列表(范围(1, n-1,
    3))[::-1] + 列表(范围(2, n-1, 3))[::-1] + 列表(范围(3, n-1, 3))[::
    -1]返回 [a, b, c]
```

有趣的是，这个程序实际上会生成一个包含三个 置换的列表，而不是两个。事实证明，我们编写的评估器会直接丢弃作为输入传入的任何多余置换。在 FunSearch 和 AlphaEvolve 中，大语言模型生成的程序包含与任务无关的代码，这种情况相当常见。

对于我们测试过的每个形如 $6m + 5$ 的 $11m + 6$ for every$n$ ，上述程序都会生成一对 d-不变量为 $11m + 6$ for every$n$ 的置换，我们认为它很可能对一般情况也成立。这已经是相当出色的表现；很少能看到程序可以推广到无穷多个问题实例。

另一方面，当 $n = 13$ 该程序生成一对置换，其 d-不变量为 13 时，表现就相当差。不过，以上述程序初始化 的一次 FunSearch 运行很快就找到了一个程序，使 d-不变量达到 21；唯一的变化是第二个置换的定义改为

```
b = 列表(范围(0, n-1, 2)) + 列表(范围(n//4, n-1, 2))[::-1]
```

这提示我们手动检查第二个范围起点的取值（第一个在 $n = 11$ 上训练的程序中为 n // 3，第二个在 $n = 13$ 上训练的程序中为 n // 4），以确定哪个能带来最佳性能。结果发现，实际中似乎总是将范围起点设为 3 最好。这个经过手动修改的程序对所有 n 都能生成一对具有 d-不变 $2n - 5$ 的置换。[1] 这种性能与我们为奇数 n 找到的最佳置换对相当，而在偶数 n 时则差 1。该程序生成的置换与我们已知的并不完全相同，但在某种意义上“精神相通”——尤其是，两组置换中的对合数量都关于 n 呈线性增长，这意味着我们非常接近 Bruhat 序的底部。

4.2. **AlphaEvolve 实验**。随后，我们转向了 AlphaEvolve。它是 DeepMind 设计的另一种进化协议，旨在接替 FunSearch。预计 AlphaEvolve 将在不久后以开源软件包的形式发布，但目前我们的试验是在 DeepMind 内部进行的。已有观察表明，AlphaEvolve 在数学离散和连续领域的各种问题中，都擅长寻找示例；有时还能为某个问题实例找到示例，并将其推广到无限多个实例 [22]。按照惯例，运行 AlphaEvolve 时会使用措辞不那么简洁、指示性更强的提示。（引自 [22]: “在提示中给 AlphaEvolve 提供一条有见地的专家建议，几乎总能显著改善结果。”）我们使用的提示如下：

[1] 至少数据是这么表明的；由于后来发现这并非最优，我们没有写下证明来说明这对所有 n 都成立。

提示开头是

最大化 Kazhdan–L u s z t i g 多项式的 d–i n v a r i a n t

请以计算代数和组合优化领域专家的身份，找出对称群 S_n 中的置换对 `x` 和 `y`，使其具有尽可能大的“d–i n v a r i a n t”，记作 d (x , y)。这个不变量是 Kazhdan–L u s z t i g 多项式的一个系数。

你需要编写一个搜索函数，给定一个整数 `n `，找出大小为 `n ` 的最佳排列对。排列应表示为一个从 1 到 `n ` 的整数元组。例如，对于 n=3，一个有效的排列对可以是`( ( 1 , 3 , 2 ) , ( 3 , 2 , 1 ) ) `。

并结束

提示：已知，对于较大的 `n`，d (x , y) 的最大值至少为 `2n−5`（当 `n ` 为奇数时）和 `2n−4`（当 `n `为偶数时）。试着找出达到或超过此界的排列对！

第二条提示：虽然上面的提示要求你编写一个搜索函数，但你真正需要的是一个通用解法。你的程序将接受一些相当大的 n 值作为测试，而搜索在这些情况下帮不上忙。短期内，搜索或许会有所帮助；但从长远来看，解决这个问题的唯一办法是找到一种通用构造。当然，这种通用构造仍然可以包含少量搜索，但它应当建立在良好的结构和理念理解之上，而不能只是一个通用的搜索启发式方法。我们着眼于长远，因此你应该专注于此。数学研究是一场马拉松，而不是短跑。现在就去找出那个能解决所有 n 值问题的通用构造吧！

你做得到！我相信你！！！

我们没有针对单个 n 进行训练，而是通过计算程序输出在从 10 到 50 的所有 n 上的 d 不变量并对结果取平均，来评估程序。其理念是激励演化过程生成适用于许多甚至所有 n 的程序，而不是过拟合于所训练的特定 n 。这就是 [22] 中所称的“泛化模式”。值得注意的是，“泛化模式”评估已在许多 FunSearch 实验中进行过尝试，但结果相当有限；AlphaEvolve 的一个明显优势似乎是，它更善于汇总基于许多问题实例的联合评估所获得的信息。

AlphaEvolve 运行了几个小时，生成了一些程序，这些程序给出的 d-不变量对大多数 n 都超过了 $2n-5$；从表面看，这些程序的性能似乎仍然关于 n 呈线性增长，常数为 2。不过，让 AlphaEvolve 运行一整夜后，我们获得了本文正文所报告的质的改进。最终生成的程序给出的 d-不变量看起来（并很快被证明）关于n呈超线性增长。该程序、其输出，以及用于启动进化过程的完整提示词，都可以在 https://github.com/JSEllenberg/Bruhat-hypercubes/tree/main 找到。

这次运行评估了约 3000 至 5000 个程序；模型调用结合使用了 Gemini 2.5 Flash 和 Gemini 2.5 Pro，并向这些模型请求了相当于按公开价格计费约 70 美元的令牌数量。[2]

演化出的程序相当冗长，其中包含的非功能性代码明显多于上述 FunSearch 示例。（请注意，提示中要求“保持代码简短”的指令已不再存在。）其中有一个“模拟退火”例程，我们认为它几乎从未被实际执行过；此外，程序还会在一大类递归构造中进行搜索，但实际上最终总是使用其中某一种特定的递归构造。

用 $\alpha(n)$ 表示程序输出的 S_n 中各置换的 d-不变量后，我们观察到一种似乎满足关系 $\alpha(2n) = 2\alpha(n) + n$ 的现象；特别是，在所测试的取值范围内，$\alpha(2^m) = m2^{m-1}$ 。

事实上，在检查代码后，我们得以对程序（更确切地说，是程序中实际执行工作的那一小部分）在 $n = 2^m$ 时所做的事情给出一个简单描述，而这正是论文主体部分中 x_m 和 y_m 的定义的由来。事实上， x_3 和 y_3 是我们在 S_8 中已经发现的 S_8 里的同一对置换。因此，在另一个宇宙中，我们或许会注意到，这两个作用在 8 个字母上的置换，可以用长度为 3 的二进制展开来简单描述。但实际上，直到有一个能够为任意长度的二进制展开计算出该置换的程序使我们注意到这一点之前，我们并没有发现这个事实。

如第 3.1 节所述，这些 2^m 字母的置换在低差异序列领域中早已为人所知。我们搜索了日志中的相关关键词，以确认 AlphaEvolve 是否从现有文献中获取了这些置换，但没有找到任何关于低差异序列的引用。我们确实发现了一些关于位反转置换的引用，甚至还找到了计算 x_m 和 y_m 的程序（针对 $n = 2^m$）；但这些程序最终并未出现在通向最终成功程序的谱系中！这是因为，这些特定程序在 n 取非 2 的幂的值时表现非常糟糕。这个情形说明了思考评分函数的重要性。如果 $s(n)$ 是程序在 S_n中输出的两个置换的 d-不变量，那么我们的评分函数是$\sum_{n=10}^{50} s(n)$。但由于 S_n 中的最大 d-不变量关于 n是单调的，我们本可以利用这一知识，通过 $\sum_{n=10}^{50}\max_{i\le n} s(i)$来评估函数。这样一来，最先尝试对 $n = 2^m$. 使用位反转置换的函数就会获得高分。在本例中，这并不重要，因为 AlphaEvolve 最终再次得到位反转置换，而且这一次使用的程序对范围内所有 n 的值都表现良好。

我们此前有一些直觉，认为具有较大 d-不变量的置换对 x, y 或许与 Bruhat 序中的大型超立方体有关。因此，当我们发现，对于 $m = 3$ 和 $m = 4$，Kazhdan-Lusztig R 多项式是 $(q - 1)$ 的幂时，我们感到十分欣喜，同时也并非完全意外；这与 Bruhat 区间 $[x_m, y_m]$ 是一个超立方体相符（也就是说，作为有向图，它等价于 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ ，其边对应于将单个坐标从 0 改为 1。）因此，我们似乎有理由相信，这个区间实际上是一个维数为 $m2^{m-1}$ 的超立方体。我们原以为这可能很难证明，因为一般而言，计算两个置换之间 Bruhat 区间的基数本身就颇具挑战，更不用说确定其结构了。然而，在本例中，正如我们将在论文正文中阐述的那样，我们找到了 Bruhat 区间 $[x_m, y_m]$ 内置换的明确描述，从而使一切都变得可行。

[2]当然，这些金额相当不稳定；我们只是想说明，我们所讨论的这类实验并不需要个人研究者无法承担的计算资源。

这三种令人称道的现象很可能并非巧合

- 在组合问题上实现了定性改进，而不只是超越此前已知最优解的渐进式改进；

- 高度可解释的程序；
- 其输出可证明能为所有 n 提供良好示例，而不仅限于训练范围内的示例；并且，除了在训练目标上取得高分之外，这些示例似乎也有其他值得关注之处；

在这个例子中，这些特点同时具备。

有趣的是，我们在针对另一目标（最大化 d-不变量）进行优化的搜索中，找到了一个非常大的超立方体。值得探究的是，如果直接要求 AlphaEvolve 寻找一个构成大超立方体的 Bruhat 区间，而不是寻找具有较大 d-不变量的区间，它是否也能取得同样好的结果。

参考文献

[1] Hiraku Abe 和 Sara Billey。《Lakshmibai-Sandhya定理》的推论：置换模式在 Schubert 演算及相关几何中的普遍性。载于《Schubert 演算——大阪 2012》，《纯数学进阶研究》第 71 卷，第 1–52 页。日本数学会，[东京], 2016。[2] Grant T. Barkley 和 Christian Gaetz。利用超立方体分解实现下区间的组合不变性。《Lothar Combin. 研讨班》，89B：第 86 号文章，8 页，2023 年。[3] Grant T. Barkley 和 Christian Gaetz。初等区间的 Kazhdan-Lusztig R多项式的组合不变性。《数学年刊》，392(3)：3299–3317，2025 年。[4] Anders Bjorner 和 Francesco Brenti。《Coxeter 群的组合学》。Springer，2005 年。[5] Charles Blundell、Lars Buesing、Alex Davies、Petar Veli˘ cković 和 Geordie Williamson。迈向 Kazhdan-Lusztig 多项式的组合不变性。《表示论》，26：1145–1191，2022 年。[6] Phelim Boyle、Mark Broadie 和 Paul Glasserman。证券定价的蒙特卡罗方法。《经济动态与控制杂志》，21(8-9)：1267–1321，1997 年。[7] Tom Braden 和 Robert MacPherson。从矩图到交叉上同调。《数学年刊》，321(3)：533–551，2001 年。[8] Francesco Brenti。Kazhdan-Lusztig 多项式的组合公式。《数学发明》，118(1)：371–394，1994 年。[9] Francesco Brenti 和 Mario Marietti。Kazhdan-Lusztig R 多项式、组合不变性与超立方体分解。《数学杂志》，309(2)：第 25 号论文，19 页，2025 年。[10] Roger Casals、Pavel Galashin、Mikhail Gorsky、Linhui Shen、Melissa Sherman-Bennett 和 José Si- mental。比较辫簇上的簇代数。arXiv 预印本 arXiv:2508.03816，2025 年。[11] Roger Casals、Eugene Gorsky、Mikhail Gorsky、Ian Le、Linhui Shen 和 José Simental。辫簇上的簇结构。《美国数学会杂志》，38(2)：369–479，2025 年。[12] Marco Castronovo、Mikhail Gorsky、José Simental 和 David E Speyer。簇深层轨迹与镜像对称。arXiv 预印本 arXiv:2402.16970，2024 年。[13] Alex Davies、Petar Veličković、Lars Buesing、Sam Blackwell、Daniel Zheng、Nenad Tomašev、Richard Tanburn、Peter Battaglia、Charles Blundell、András Juhász 等人。通过引导人类直觉推进数学发展。《自然》，600(7887)：70–74，2021 年。[14] Vinay V. Deodhar。关于 Bruhat 序的若干几何方面。I. Bruhat 胞腔的更精细分解。《数学发明》，79(3)：499–511，1985 年。[15] Josef Dick 和 Friedrich Pillichshammer。《数字网与序列：差异理论与准蒙特卡罗积分》。剑桥大学出版社，2010 年。[16] Matthew Dyer。论 Coxeter系统的“Bruhat图”。《组合数学》，78(2)：185–191，1991 年。[17] Jordan S Ellenberg、Cristofero S Fraser-Taliente、Thomas R Harvey、Karan Srivastava 和 Andrew V Sutherland。用于数学发现的生成式建模。arXiv 预印本 arXiv:2503.11061，2025 年。[18] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。簇代数。I. 基础。《美国数学会杂志》，15(2)：497–529，2002 年。[19] Pavel Galashin 和 Thomas Lam。正拟阵、纽结与 q,t卡特兰数。《杜克数学杂志》，173(11)：2117–2195，2024 年。[20] Pavel Galashin、Thomas Lam 和 Melissa Sherman-Bennett。辫簇的簇结构，II：一般类型。《数学发明》，即将出版。[21] Christof Geiss、Bernard Leclerc 和 Jan Schröer。阶乘簇代数。《文献数学》，18 274，2013 249：–。

[22] Boguslaw Kopocinski、Jacek Cichon 和 Stefan Index。*arXiv 预印本 arXiv:2211.02864*，2022。[23] Mark Gross、Paul Hacking、Sean Keel 和 Maxim Kontsevich。簇代数的典范基。*J. Amer. Math. Soc.*，31(2):497–608，2018。[24] Maxim Gurevich 和 Chuijia Wang。Kazhdan-Lusztig 多项式的抛物递归与超立方体分解。*Selecta Math. (N.S.)*，30(5):第81号论文，27页，2024。[25] Chris Hone、Finn Klein 和 Geordie Williamson。Bruhat图的嵌入模空间。准备中的作品，2025。[26] Axel Hultman 和 Kathrin Vorwerk。对合上的 Bruhat 序中的模式避免与布尔元素。*Journal of Algebraic Combinatorics*，30(1):87–102，2009。[27] Soyeon Kim。辫簇的簇自同构群。*arXiv 预印本 arXiv:2505.14889*，2025。[28] Allen Knutson、Alexander Woo 和 Alexander Yong。Richardson 簇的奇点。*Math. Res. Lett.*，20(2):391–400，2013。[29] Thomas Lam 和 David E. Speyer。簇簇的上同调 I：局部无环情形。*Algebra Number Theory*，16(1):179–230，2022。[30] Eunjeong Lee、Mikiya Masuda 和 Seonjeong Park。环面 Bruhat 区间多面体。*Journal of Combinatorial Theory, Series A*，179:105387，2021。[31] Harald Niederreiter。差异度较小的点集与序列。*Monatshefte für Mathematik*，104(4):273–337，1987。[32] Leonardo Patimo。Kazhdan-Lusztig 多项式中 q 的系数的组合公式。*Int. Math. Res. Not. IMRN*，(5):3203–3223，2021。[33] Nathan Paul Reading。*Bruhat* 序的结构。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2002。博士论文——明尼苏达大学。[34] Bernardino Romera-Paredes、Mohammadamin Barekatain、Alexander Novikov、Matej Balog、M Pawan Kumar、Emilien Dupont、Francisco JR Ruiz、Jordan S Ellenberg、Pengming Wang、Omar Fawzi 等。利用大语言模型通过程序搜索发现数学成果。《自然》，625 475，2024 7995 468( ): – 。[35] Bridget Eileen Tenner。模式避免与 Bruhat 序。*Journal of Combinatorial Theory, Series A*，114(5):888–905，2007。[36] Bridget Eileen Tenner。Bruhat 序与弱序中的区间结构。*Journal of Combinatorics*，13(1)，2022。[37] Yi-Jun Xiao。基数为 $b \geq 2$ 的 (0，m，2)-网的一些几何性质。*Monte Carlo Methods Appl.*，8(1):97–106，2002。

数学系，威斯康星大学麦迪逊分校，麦迪逊，威斯康星州，美国电子邮箱：ellenber@math.wisc.edu

数学系，智利大学，智利电子邮箱：nlibedinsky@gmail.com

数学研究所，塔尔卡大学，智利电子邮箱：dplaza@utalca.cl

数学研究所，墨西哥国立自治大学
墨西哥电子邮箱：simental@im.unam.mx

数学与统计学院，悉尼大学，澳大利亚电子邮箱：g.williamson@sydney.edu.au