arXiv:2601.01242v1 [math.NT] 3 Jan 2026

函数域导子上的算术函数平均值

JORDAN ELLENBERG 和 MARK SHUSTERMAN

Abstract. 对于有限群 G，以及一个足够大的（但固定的）且与 G 互素的素数幂 q，我们得到了正则伽罗瓦扩张 $L/\mathbb{F}_q(t)$ 的数量的渐近公式，其中 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_q(t)) \cong G$，且这些扩张在 $\mathbb{F}_q(t)$ 的单个赋值点处发生分歧，从而推动了 Boston–Markin 猜想的正特征类比研究。对于在 L 中分歧的 $\mathbb{F}_q(t)$ 的赋值点之积的其他算术函数，以及以 $\mathbb{F}_q(t)$ 之外的更一般的一元函数域（定义在 $\mathbb{F}_q$ 上）取代 $\mathbb{F}_q(t)$ 的情形，我们也得到了类似结果。

我们的一些证明关键地运用了 Landesman–Levy 最近取得的一系列突破，以及一项关于由编织向量空间导出的辫群表示的“给定方向上稳定同调消失”新结果。其他重要内容包括对与带有 2-余循环的架相关联的编织向量空间（的余不变量环）的研究、算术函数的卷积与编织向量空间直和之间的联系，以及关于架的 Goursat 引理。

作者谨以此文献给 *Nigel Boston*（*1961—2024*）。他的视野与思想为现代域扩张统计研究奠定了基础，也对我们二人产生了深远影响。

1. Introduction

1.1. 同调稳定性。 如今人们已经充分理解，关于模空间同调稳定性的纯拓扑定理，在许多情况下可用于证明关于全局函数域上算术统计的定理。例如，从 [EVW16], 开始、最终发展至 [LL24、LL25a、LL25b], 的一系列工作，主要致力于计算 Hurwitz 空间（及其变体）的同调。在近期的一些工作中，例如 [ETW23、EL23、BDPW23、MPPRW24]，人们已明确认识到，证明同调稳定性定理具有实际价值：研究的对象不再是空间本身的同调，而是该空间上（非恒定）局部系统的同调。所涉及的模空间通常是 $K(\pi,1)$，因此问题归结为计算离散群 π 的同调，并以其某些表示作为系数。

例如，$\mathrm{Conf}^n(\mathbb{C})$——平面中 n 个无序互异点的构形空间——是一个 a$K(B_n, 1)$，其中 B_n 是由以下表示给出的、作用于 n 股辫子的 Artin 辫群

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ for } i > j+1,\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ for } i < n-1 \rangle.$$

我们研究其同调稳定性的 B_n 表示（旨在应用于算术统计）具有如下形式： $V^{\otimes n}$，其中 V 是一个编织向量空间——编织向量空间的定义见定理 2.0.1，而 B_n 在 $V^{\otimes n}$上的作用见定理 2.0.7。

在这一情形下，同调稳定性定理断言：对每个非负整数i，群 $H_i(B_n, V^{\otimes n})$ 一旦 n 相对于 i 足够大，便与 n 无关——在算术应用中，人们通常希望“足够大”意味着“大于 i 的某个常数倍”。这个常数称为稳定斜率。一个例子是 [EL23，定理 4.2.6]，该定理在对 $H_0(B_n, V^{\otimes n})$ 作出适当假设时适用。另一个例子是 [ETW23]，它给出了关于 $H_i(B_n, V^{\otimes n})$ 维数的极具非平凡性的上界。

第二作者担任 A. Edward Friedmann 博士数学职业发展讲席。1

许多在算术中发挥作用的编织向量空间都源自架——参见定理 5.1.1 和定理 5.1.17。对于这些空间，[LL25b] 证明了同调稳定性，并确定了稳定值（在许多情况下）。本文对某些编织向量空间证明了同调稳定性，事实上还证明了其消失；这一结果所适用的编织向量空间相当一般，未必源自架。尽管如此，我们在本文后半部分应用这些结果的具体例子仍与架有关（不过常常采用扭曲的方式，即使用带 2-余循环的架这一概念）。

我们最一般的同调消失结果是定理 2.0.11，其一个特例如下。

定理 1.1.1. 假设存在一个非负整数 d，使得对于每个 $n > d$，都有 $H_0(B_n, V^{\otimes n}) = 0$。那么对于 $n > (d+2)i + d$，有 $H_i(B_n, V^{\otimes n}) = 0$。

定理 2.0.11 的一个重要特点（定理 1.1.1 未能体现）是，它允许人们获得“沿给定方向”的同调稳定性——这也是 [LL25b] 中研究的一种稳定性形式。这里通过跟踪 V 上的分次来实现这一点。其他值得注意的特点包括：定理 2.0.11 更普遍地适用于曲面辫群，而且它给出的界不仅有效，而且是显式的。

为了应用定理 1.1.1，我们研究 V 的余不变量环——见定理 2.0.9。在 V 源自一个架的情况下，关于这个环已有大量研究：从 Conway–Parker 和 Fried–V¨olklein 的早期工作，到 [EVW16、EL23、Shu24] 等较近期的成果。我们在第 5.5 节将这一理论推广到源自架上 2-余循环的编织向量空间。

我们想知道，定理 1.1.1 是否也适用于自由群的自同构群，或连通闭可定向曲面的映射类群。

1.2. **算术应用**。令 G 为一个有限群，令 p为一个不整除$|G|$的素数，并令 q 为 p的一个幂。因此，$\mathbb{F}_q(t)$的每个伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 G，都是温和分歧的。

令 $R \subseteq G$ 为G的非空共轭封闭生成集，且由非平凡元素组成，并满足对每个 $r \in R$都有 $r^q \in R$。令 $R_1, \dots, R_k$为 G的共轭类，其（互不相交的）并集为 R。

固定 $\mathbb{F}_q(t)$的一个可分驯分闭包 $\overline{\mathbb{F}_q(t)}$，在 $\mathbb{F}_q(t)$的每个（有限）赋值点上方取一个赋值点，并取相应的 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q(t)/\mathbb{F}_q t)$（驯）惯性子群的一个（拓扑）生成元。

对于非负整数 $n_1, \dots, n_k$，记 $\mathcal{E}_q^R(G; n_1, \dots, n_k)$ 为 L 内 $\mathbb{F}_q(t)$ 的正则伽罗瓦扩张族，该扩张族位于 $\mathbb{F}_q(t)$ 中，并配备一个同构 $\varphi\colon \mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_q(t)) \to G$，使得满足以下条件。

- $\mathbb{F}_q(t)$ 的无穷赋值点在 L 中完全分裂。
- 在 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q(t)/\mathbb{F}_q(t))$ 中，所有在 L 中分歧的（有限）赋值点所对应的惯性子群的选定生成元，在群同态的复合下均映射到 R

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q(t)}/\mathbb{F}_q(t)) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_q(t)) \xrightarrow{\varphi} G.$$

- 对于每个 $1 \le j \le k$，$\mathbb{F}_q(t)$ 中所有惯性生成元映射到 R_j 的（有限）赋值点的次数之和为 n_j。

注1.2.1。$\mathcal{E}_q^R(G; n_1, \dots, n_k)$ 中的扩张对应于 $\mathbb{F}_q$ 上 $\mathbb{P}^1$ 的伽罗瓦 G-覆盖；这些覆盖由光滑射影几何连通曲线给出，在 $\mathbb{P}^1$ 中分支于 $n = n_1 + \cdots + n_k$ 个几何点，其中对于每个 $1 \le i \le k$，有 n_i 个几何分支点的类型为 R_i，并且在 $\infty \in \mathbb{P}^1$ 上有 $|G|$ 个 $\mathbb{F}_q$-点。

注记1.2.2。取 q 次幂会置换 $\{R_1, \dots, R_k\}$；若对于某个 $1 \le i < j \le k$，R_i 和 R_j 在此置换的同一个环中，则只有当 $n_i = n_j$ 时，$\mathcal{E}_q^R(G; n_1, \dots, n_k)$ 才可能非空。

作为 [LL25b]，所获得的“给定方向上的同调稳定化”结果的一项应用，该工作在连通分支数的意义下，得到了 $\#\mathcal{E}_q^R(G;\, n_1,\dots,n_k)$ 当 $n = n_1 + \cdots + n_k \to \infty$ 时的渐近行为，其中 q 足够大且取决于 $|G|$；这远远超出了目前已知的、将 $\mathbb{Q}$ 替换为 $\mathbb{F}_q(t)$ 时相应问题的结果。本文通过研究 $L \in \mathcal{E}_q^R(G;\, n_1,\dots,n_k)$ 上导子的算术函数平均值，进一步改进并推广了这一渐近计数。其核心思想是，当 $n \to \infty$ 和 L 遍历 $\mathcal{E}_q^R(G;\, n_1,\dots,n_k)$ 时，导子 f_L 应表现得像 $\mathbb{F}_q[t]$ 中次数为 n 的无平方因子多项式所构成的随机多重集。

L的导子（记作 f_L）是 L的判别式的根式；等价地说，它是 $\mathbb{F}_q[t]$中的一个（首一、无平方因子）多项式，由 $\mathbb{F}_q[t]$ 中所有在 L中分歧的首一不可约多项式相乘得到。也可以将 f_L 视为光滑射影几何连通曲线所对应的 L在 $\mathbb{F}_q$ 上的 $\mathbb{P}^1$ 分歧覆盖的（定义）分歧轨迹。

1.2.1. 不可约多项式。 或许，对$\mathcal{E}_q^R(G;\, n_1,\ \dots\dots,\ n_k)$中的扩张$L/\mathbb{F}_q(t)$取平均，最自然的函数是示性函数 $\mathbf{1}_{\mathrm{irr}}$，用于判断 f_L是否不可约，正如 Boston 和 Markin 所提出的。 [BM09] 还指出，要使 f_L 不可约，除了一个以外，所有n_j 都必须为 0。因此，为了对 $\mathbf{1}_{\mathrm{irr}}$ 取平均，我们可以假设 R 是 G的一个（单一）共轭类。特别地， G 由单个共轭类生成；等价地，根据 NSW13, 定理 10.2, G 的阿贝尔化是循环群。

在解析数论中，给定一个算术函数及其求和的渐近估计，人们通常会关注该函数在素数（或首一不可约多项式）上的和的渐近行为。在我们的情形中，该函数在一个（首一无平方因子）多项式$g \in \mathbb{F}_q[t]$ 处的值，是满足条件 $f_L = g$ 的 $L \in \mathcal{E}_q^R(G;\, n_1,\ \dots\dots,\ n_k)$ 的数量。

无论采用何种基本方法来估计算术函数在素数上的和——无论是（复杂的）筛法、Vaughn 的恒等式之类的恒等式，还是涉及莫比乌斯函数 M¨ 的卷积恒等式——通常都可以得到该函数在某个给定整数（或多项式）的倍数上的和的估计，其中这个整数（或多项式）可以随求和范围增长。在我们的情形中，Landesman–Levy 的结果以目前的形式并未给出这类估计，但我们仍设法得到了所需的渐近行为。

定理 1.2.3. 当 q 相对于 $|G|$充分大时，对于 $n \to \infty$ ，我们有

$$\#\{L \in \mathcal{E}_q^R(G;n) : f_L \text{ is irreducible}\} \sim \frac{q}{(q-1)n} \#\mathcal{E}_q^R(G;n)$$

且误差项具有幂次节省。

特别地， f_L 是不可约的奇数渐近而言恰好与随机无平方因子多项式不可约的情形相同。

定理 1.2.3 推进了对 [BM09]，中猜想的研究，这些猜想在 [Shu24 的第一部分中以推论 1.9] 的形式重新表述。后者的工作还证明了定理 1.2.3 的大有限域版本。

一种不涉及计数、只涉及 G-扩张是否存在，并允许在少数素数处分歧的问题版本，已在整体域上得到研究，例如见 [BSEF23、BSS20、Wit14、Hoe09、JR08、KS10、KNS10、MU11、Nom08、Pla04]。关于我们的问题在 $\mathbb{Q}$ 上的版本（带有 $G = S_4$ ）， [BG09 的定理 7.11]，给出了一个上界；而对于 $G = S_3$ （分别为 $G = S_4$），在至多 3 个（分别为 8 个）分歧素数的条件下， [TT20] 给出了一个下界。

我们证明定理 1.2.3 的关键依据是定理 1.1.1 和 [LL25b, 定理 1.3.5]——一项表示稳定性结果；该结果依赖于包括 [Shu24] 中的大单值化定理在内的诸多因素。

[Shu24, 猜想 1.4] 根据已有的启发式论据，对 $\mathbb{Q}$ 上的计数作出了与定理 1.2.3 类似的预测，但并未给出渐近行为的明确常数，只预测了增长率。有了定理 1.2.3，我们便更有把握对 $\mathbb{Q}$ 提出猜想，并采用渐近行为中最自然的常数——黎曼ζ函数在 2 处的值（且不加修正因子）。

定理 1.2.3（以及我们得到的其他结果）对于改进Cohen–Lenstra启发式方法具有一定意义，在这些改进中，人们关注所研究的函数域的判别式的分解，而该函数域的类群正是研究对象。

围绕定理 1.2.3 的思想还有一些应用，我们留待未来的工作加以探讨。其中一项应用，沿着 [ELS20], 的工作，可以证明：在 $\mathbb{F}_q[t]$ 上的二次狄利克雷 L-函数中，导子不可约且在中心点 $s = 1/2$ （或任意其他给定点）处具有零点的函数所占的渐近比例为 0。另一项潜在应用，沿着[EL23、LL25b], 的工作，将涉及全局函数域上阿贝尔簇的素数二次扭曲的塞尔默群分布；作为一个标准推论，还可得到关于这一族中 Mordell–Weil群秩的极简主义猜想的结果。

1.2.2. 关于随机有限生成群的旁注。 [BE11]提出了有限生成群的一种随机模型，其中包括以下内容。对每个正整数 n ，取所有次数为 n 的不可约多项式 $P \in \mathbb{F}_q[t]$ 对应的狄拉克测度的平均值；这里的测度取在 Spec $\mathbb{F}_q[t, P^{-1}]$ （即在 P 的根处打孔的仿射直线）的 étale基本群的最大质数互素商上。 [BE11] 假设，当 $n \to \infty$ 时，这些（取平均后的）概率测度会（弱）收敛到适当的有限生成群空间上的一个概率测度。假设 P 不可约（或至少只有有界个不可约因子）至关重要；若不作此假设，当 $n \to \infty$ 时就不会存在极限概率测度。

算术拓扑为我们提供了一种类似的、关于带边界的（有限生成）3-流形群的随机模型：在3-球面中选取一个随机结，再取3-球面中该结的补集——即去掉该结的管状邻域内部所得空间——的基本群的有限生成完备化。如果将结选为 B_n 中一条随机辫的闭包，且该辫在 S_n 中映射到一个 n-环，那么这种类比就尤为贴切；随后令 $n \to \infty$ 趋于极限。

[SW24]确定了随机闭三维流形的 Dunfield–Thurston 模型的这种极限概率分布，而 [SW22] 则更一般地研究有限生成群（以及其他范畴）上的测度，并强调了 G-矩在研究此类分布中的关键作用。 G-矩是指在我们的模型中，一个随机有限生成群满射到（给定有限群） G的满射数的期望。定理 1.2.3 推进了对 G-矩的计算，该矩对应于 [BE11]提出的有限生成群随机模型。

1.2.3. 其他因式分解函数。这里，因式分解函数是定义在无平方因子的首一多项式上的函数 $f \in \mathbb{F}_q[t]$ ，它由 f的不可约因子的次数（多重集）决定。例如，我们用 $\omega(f)$ 表示 f的（不同首一）不可约因子的个数，并定义 M¨obius 函数为 $\mu(f) = (-1)^{\omega(f)}$。

定理 1.2.4。 对于依赖于 $|G|$ 且足够大的 q，当 $n = n_1 + \cdots + n_k \to \infty$ 时，我们在其中得到抵消，并具有幂次节省

$$\sum_{L \in \mathcal{E}_q^R(G; n_1, \ldots, n_k)} \mu(f_L).$$

这推进了 [Shu24 的第二部分，即猜想 1.9]。值得注意的是，无论是我们的方法，还是 Landesman–Levy 等人的其他方法，似乎都无法为当 $k > 1$ 时的 $\#\mathcal{E}_q^R(G; n_1, \ldots, n_k)$ 提供具有幂次节省的渐近行为。困难在于理解其渐近行为

当某个 $n_1, \dots, n_k$ 较小时，Hurwitz 空间的连通分支数量。近期， [San25] 在这一问题上取得了进展，因而也推动了马勒猜想的研究。

我们的方法还可以处理其他因式分解函数，例如广义约数函数

$$d_m(f) = \#\{(f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{F}_q[t]^m : f_1, \dots, f_m \text{ are monic}, \ f_1 \cdots f_m = f\} = m^{\omega(f)}$$

首一无平方因子的 $f \in \mathbb{F}_q[t]$。

在第 7 节中，我们将这些结果推广到 $\mathbb{F}_q$ 上任意光滑射影曲线的函数域，而不仅限于 $\mathbb{P}^1$。

1.2.4. 超越因式分解的算术函数。 以下结果在任意正特征下均成立，并推广了定理 1.2.4 的 $p \neq 2$ 情形。

定理 1.2.5。 对于依赖于 $|G|$ 且足够大的 q，以及非平凡特征 $\chi\colon \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times$，当 $n = n_1 + \cdots + n_k \to \infty$ 时，我们在

$$\sum_{L \in \mathcal{E}_q^R(G; n_1, \dots, n_k)} \chi(\mathrm{disc}(f_L))$$

wh其中 $\mathrm{disc}(f)$ 是多项式 $f \in \mathbb{F}_q[t]$ 的（非零）判别式（该多项式无平方因子） .

事实上，如果 q 不是 2 的幂，且 χ 是二次的，我们有 $\chi(\mathrm{disc}(f)) = (-1)^{\deg f}\mu(f)$，因此在这种情况下，定理 1.2.5 可化为定理 1.2.4。将定理 1.2.5 应用于所有特征可知，当 L 遍历 $\mathcal{E}_q^R(G; n_1, \dots, n_k)$ 时， f_L 的判别式在 $\mathbb{F}_q^\times$ 中渐近等分布。定理 1.2.5 在第 6 节中证明；利用定理 5.5.13，还可针对 G 和 R 的某些特定取值获得更强的幂次节省。

现在假设 q 为奇数。对于首一不可约 $P \in \mathbb{F}_q[t]$，以及不被 P 整除的 $f \in \mathbb{F}_q[t]$，勒让德符号 $\left(\frac{f}{P}\right)$ 定义为：若 f 模 P 为平方，则取 1；否则取 -1。对于与 f 互素的首一无平方因子 $g \in \mathbb{F}_q[t]$，雅可比符号 $\left(\frac{f}{g}\right)$ 定义为 f 在 g 的首一不可约因子上的勒让德符号之乘积。

定理 1.2.6。 对于依赖于 $|G|$ 的充分大的 q，当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$\sum_{L \in \mathcal{E}_q^R(G; n)} \sum_{gh = f_L} \left(\frac{g}{h}\right) \sim 2\#\mathcal{E}_q^R(G; n)$$

其中 $g, h \in \mathbb{F}_q[t]$ 为首一（无平方因子且互素），并带有幂次节省误差项 .

定理 1.2.6 中的算术函数曾在 [Hoa23]，中被考虑，出现在对多重狄利克雷级数的研究中，并作为我们的方法能够处理的这类算术函数的一个例证。我们计划在未来的工作中考虑更多的算术函数。

定理 1.2.4 和定理 1.2.5 中的幂次节省是显式的，我们确切知道 q 必须有多大才能使我们的证明成立。另一方面，定理 1.2.3 和定理 1.2.6 中的幂次节省并非显式的，关于 q 的“充分大”条件也同样不是显式的。原因在于，定理 1.1.1 给出了一个显式的斜率，而 Landesman–Levy 的同调稳定性结果对于我们的定理 1.2.3 和定理 1.2.6 的证明至关重要，却没有以其目前的形式提供这类信息，尽管通过一些额外工作或许可以得到这些信息。

1.3. **拓扑邂逅算术**。空间 Conf^n 下降为 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 上的有限型概形，其 $\mathbb{F}_q$-点是 $\mathbb{F}_q[t]$ 中次数为 n 的首一无平方因子多项式；对于各种编织向量空间 V， B_n 的表示 $V^{\otimes n}$ 下降为 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$（的某个开子集）上的一个 ´étale 层。这些层中的一些层的迹函数，正是我们在定理中估计其和的迹函数。为此，我们应用格罗滕迪克–勒夫谢茨迹公式，以及 Deligne 关于弗罗贝尼乌斯在这些层的（紧支撑、 ´étale）上同调上作用的特征值的上界。

我们还需要证明某些上同调群消失，为那些不消失的上同调群的维数给出上界，或者将其与弗罗贝尼乌斯迹已计算出的其他上同调群进行比较。

例如，为了证明定理 1.2.4，我们研究由取负编织的一维向量空间，其迹函数为 $f \mapsto (-1)^{\deg f}\mu(f)$，并将定理 1.1.1 应用于它的张量幂。为了证明定理 1.2.3，我们在定理 5.2.5 中引入编织向量空间上的一个（普通）直和运算，并考察平凡的（一维）编织向量空间与用于研究 M¨obius 函数的编织向量空间的直和。我们在定理 5.4.7 中证明，在函数—层对应下，编织向量空间的（普通）直和对应于 $\mathbb{F}_q[t]$ 上多项式的算术函数的狄利克雷卷积。由此，我们在定理 5.4.8 中得出，我们的二维编织向量空间的迹函数在（一个首一无平方因子多项式） $f \in \mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q)$ 上的取值为：若 f 在 $\mathbb{F}_q[t]$ 中有一个偶数次不可约因子，则为 0；否则为 $d_2(f)$。

从解析数论的（函数论）视角来看，为什么控制这个函数在某个（多重）集合上的行为会让我们得知其中的不可约多项式的任何信息，完全不明朗。但一旦采用非阿贝尔调和分析，就会发现这个函数与首一不可约多项式的示性函数涉及相同的辫群表示，因此，控制支配该函数的同调群，也能为不可约多项式提供信息。若能更一般地理解两个算术函数何时会以这种方式“成对”，将会很有意思。

上述向量空间以及其他迹函数为因式分解函数的向量空间的编织都是对合。等价地，相应的辫群表示 B_n 是经由满群同态 $B_n \to S_n$ 从 S_n 膨胀而来；该同态将 σ_i 映到换位$(i \quad i+1)$，其中 $1 \le i \le n-1$。在不可约多项式研究中出现的 S_n 的不可约表示（弗罗贝尼乌斯在其根上作用为 n-环）是标准表示的外幂，因此我们研究由这些表示扭曲的 Hurwitz 空间的同调。确定由 S_n 的其他不可约表示扭曲的 Hurwitz 空间的同调也将很有意义，而 [HMW25] 在这一问题上取得了重大进展。

定理 1.2.5 中的算术函数源自一个向量空间，其编织由一个单位根的缩放给出，该单位根的阶为 χ。定理 1.2.6 中的算术函数可以视为一种广义卷积，它源自我们在第 5.2 节研究的一种广义概念，即编织向量空间的（不一定是普通的）直和。

我们考虑的所有编织向量空间都源自架上的（分圆）2-余循环，其他在算术中受到关注的编织向量空间也是如此，例如 [SW25] 中的那些。因此，若能找到一个相关的编织向量空间实例（例如定义在有限域上），且它并非源自架上的 2-余循环，将会很有意思。

给定一个有限域上的编织向量空间 V，对于每个 n，我们都可以选取一个数域，以及其整数环谱的一个开子集，使 $V^{\otimes n}$ 在其上下降。自然会让人想知道，这种选择是否能关于 n统一进行，甚至 $V^{\otimes n}$ 是否能下降到 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 的一个开子概形——如果 V源自一个嵌入某个群的架，情况便是如此。在这方面值得注意的是 [DS24], ；我们预计其结果将能对来自某类特殊有限架（称为*kei*）的编织向量空间，为这个问题给出肯定答案。

本文结构如下。第 2 节证明定理 2.0.11，该定理不需要本文其余部分所使用的理论工具。第 3 节介绍在群上同调定理与算术计数问题之间进行转换所需的基本算术几何。第 4 节回顾我们为在稳定范围之外对同调进行粗略（但足够良好）控制所需的贝蒂数界。第 5 节讨论架、架上的 2-余循环、架上的运算以及它们所张成的向量空间，是本文最长的部分。考虑到未来的应用，我们努力以统一的方式阐述该理论的基础。

我们特别指出第 5.5 节：该节将 [EL23, EVW16] 的一些结果置于架上的 2-余循环这一更一般的框架以及本文所得结果的背景下；定理 5.1.25 将与 2-余循环相关的编织向量空间嵌入与架相关的编织向量空间中；定理 5.1.50 则是架版本的 Goursat 引理。在这一框架下，最后三节致力于证明关于函数域扩张的算术计数定理，其中包括定理 1.2.6。

2. Homological Vanishing

本节中，我们将证明应用所需的主要同调稳定性定理。首先介绍一些关于范畴中编织对象的基本定义和例子。

设 $\mathcal{C}$ 为一个幺半范畴——一个具有张量积和单位对象 I 的范畴，它们满足自然相容性。对于本文中的应用，范畴 $\mathcal{C}$ 通常是域 κ 上（分次）向量空间构成的范畴。另一个相关例子是集合范畴，其中直积（笛卡尔积）作为张量积，单元素集合则作为单位元素。

定义 2.0.1. 设 V 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，且 $T\colon V\otimes V\to V\otimes V$ 是一个同构。若 T 是 V 的一个编织，或者说 V 是编织的（当 T 未明确给出时），则称

$$(\mathrm{id}_V\otimes T)\circ(T\otimes\mathrm{id}_V)\circ(\mathrm{id}_V\otimes T)=(T\otimes\mathrm{id}_V)\circ(\mathrm{id}_V\otimes T)\circ(T\otimes\mathrm{id}_V)$$

作为从 $V\otimes V\otimes V$ 到 $V\otimes V\otimes V$ 的态射。对于 $\mathcal{C}$ 中带有编织 T_V、T_W 的对象 V，W，态射 $f\colon V\to W$ 是编织对象之间的态射，当且仅当 $T_W\circ(f\otimes f)=(f\otimes f)\circ T_V$ 属于 $\mathrm{Mor}(V\otimes V,\ W\otimes W)$。

按照此定义，$\mathcal{C}$ 中的编织对象构成一个范畴。注意，编织是编织对象数据的一部分（也就是说，编织对象是带有额外结构的对象）。

例 2.0.2. 在 $\mathcal{C}$ 的单位对象 I 上，我们有由将 $I\otimes I$ 与 I 等同并使用 I的恒等态射而得到的（平凡）编织 $I\otimes I\to I\otimes I$。

定义 2.0.3. 设 V是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，其编织为 $T_V\colon V\otimes V\to V\otimes V$。若 $T_V\circ T_V=\mathrm{id}_{V\otimes V}$，则称 V 为置换编织对象。

例 2.0.4. 编织（有限维）向量空间是（有限维）向量空间范畴中的编织对象。例如，给定一个域 κ 和 $\zeta\in\kappa^\times$，我们有一个由 $T_{\kappa_\zeta}=\zeta\cdot\mathrm{id}_{\kappa_\zeta\otimes\kappa_\zeta}$编织的、定义在 κ 上的一维向量空间 κ_ζ。当且仅当 $\zeta\in\{1,-1\}$时，该编织向量空间是置换型的。我们有时会选取一个非零的（基）向量 $v_\zeta\in\kappa_\zeta$。

例2.0.5. 在特征不为 2 的域 κ上，我们有一个 2 维置换编织向量空间 $\kappa_\wedge$，其基为 v_1，v_{-1}，其编织由下式给出

$$v_1\otimes v_1\mapsto v_1\otimes v_1,\qquad v_1\otimes v_{-1}\mapsto v_{-1}\otimes v_1,\qquad v_{-1}\otimes v_1\mapsto v_1\otimes v_{-1},\qquad v_{-1}\otimes v_{-1}\mapsto -v_{-1}\otimes v_{-1},$$

或者等价地，它可由矩阵表示

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

在向量空间 $\kappa_\wedge\otimes\kappa_\wedge$的基 $v_1\otimes v_1$，$v_1\otimes v_{-1}$，$v_{-1}\otimes v_1$，$v_{-1}\otimes v_{-1}$下，其中该向量空间定义在 κ上。

例2.0.6。 在特征不为 2 的域 κ 上，有一个二维编织向量空间 $\kappa_\pm$，其基为 v，$\bar{v}$，其编织由下式给出

$$v\otimes v\mapsto v\otimes v,\qquad v\otimes\bar{v}\mapsto\bar{v}\otimes v,\qquad \bar{v}\otimes v\mapsto -v\otimes\bar{v},\qquad \bar{v}\otimes\bar{v}\mapsto\bar{v}\otimes\bar{v},$$

或者等价地，它可表示为矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在向量空间 $\kappa_\pm \otimes \kappa_\pm$（定义在_$\kappa$ 上）的基 $v \otimes v, v \otimes v, v \otimes v, v \otimes v$ 中。

定义 2.0.7。对于 $\mathcal{C}$ 中的编织对象 V，我们函子性地关联出 $\mathcal{C}$ 中一列对象 $\{V^{\otimes n}\}_{n\geq 0}$，它带有辫群 B_n 的作用，即群同态 $B_n \to \mathrm{Aut}(V^{\otimes n})$，其定义如下：

$$\sigma_i \mapsto \mathrm{id}_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes T_V \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes(n-i-1)}}, \qquad 1 \leq i \leq n-1.$$

注意，$V^{\otimes 0} = I$，且群 $B_0 = B_1$ 是平凡的。

对于非负整数 m, n 和 $g \in B_m,\ h \in B_n$，于是我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} & \xrightarrow{g \otimes h} & V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V^{\otimes(m+n)} & \xrightarrow{gh} & V^{\otimes(m+n)} \end{array} \tag{2.1}$$

在 $\mathcal{C}$ 中，其中竖直箭头是来自对称幺半结构的（同构），而 gh 表示辫的并置。

例 2.0.8. 对于 $1 \leq i \leq n-1$，元素 $\sigma_i \in B_n$ 通过乘以 ζ的方式作用于一维向量空间$\kappa_\zeta^{\otimes n}$。当 $\zeta = -1 \neq 1$ 时，这就是将符号表示从S_n 膨胀到 B_n所得的表示。

范畴 $\mathcal{C}$ 中的编织对象 V 是定理 2.0.3 所述的置换型，当且仅当 B_n 对 $V^{\otimes n}$ 的作用通过自然群同态 $B_n \to S_n$因子化。

对于群 G 在域 κ 上的向量空间 W 上的作用，我们将

$$H_0(G, W) = W_G = W/\operatorname{Span}_\kappa \{gw - w : g \in G,\ w \in W\}$$

记为余不变量—— W 的最大商（在 κ上的向量空间范畴中），在该商上 G的作用是平凡的。

定义 2.0.9. 设 κ 为一个域。对于 κ 上的编织向量空间 V，我们函子性地关联其分次 κ-余不变元代数

$$C(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_0(B_n, V^{\otimes n})$$

其乘法由自然同构 $V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \to V^{\otimes(m+n)}$诱导，并由公式 (2.1)中图表的交换性保证良定义。

这个分次 κ-代数是（可能非交换的）张量（结合且含单位）分次 κ-代数 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ 对（双边）理想取商所得的商代数

$$\langle gv - v : g \in B_n,\ v \in V^{\otimes n},\ n \geq 0\rangle = \langle T(v_1 \otimes v_2) - v_1 \otimes v_2 : v_1, v_2 \in V\rangle.$$

从 $C(V)$ 到其 0 次部分的投影使我们可以将 $C(V)$ 视为一个增广κ-代数，因此该投影的核 I（作为非含单位 κ-代数由 $V = V^{\otimes 1}$ 生成）就是 $C(V)$ 的增广理想。

在一个亏格为 g、具有一个边界分支和 f 个穿孔的曲面上，n 个无序互异点的构形空间是一个 $K(\pi, 1)$，其基本群称为 n 股辫

群，定义在类型为 (g, f) 的曲面上；我们将此群记作 $B^n_{g,f}$。我们将 $B^n_{g,f}$ 视为一个群族，其中 g, f 固定，而 n 变化。我们有 $B_n = B^n_{0,0}$。根据 [EL23，记号 3.1.1]，我们有一个单射群同态

$$B_i \times B^{n-i}_{g,f} \to B^n_{g,f} \tag{2.2}$$

对每个 $0 \le i \le n$ 都成立。特别地，我们将 B_n 视为 $B^n_{g,\,f}$ 的一个子群，它对应于曲面上在一个小圆盘内移动的 n 个点。

定义 2.0.10 ([EL23，定义 3.1.6])。设 g，f 为非负整数。设 κ 为一个域，W 为 κ 上的向量空间，V 为 κ 上的编织向量空间。若对每个 $n \ge 0$，我们都有一个 κ-线性作用 $B^n_{g,\,f}$ 于 $W \otimes V^{\otimes n}$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} (B_i \times B^{n-i}_{g,f}) \times (V^{\otimes i} \otimes W \otimes V^{\otimes(n-i)}) & \longrightarrow & V^{\otimes i} \otimes W \otimes V^{\otimes(n-i)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^n_{g,f} \times (W \otimes V^{\otimes n}) & \longrightarrow & W \otimes V^{\otimes n} \end{array}$$

其中水平箭头来自辫子群的作用，垂直箭头来自幺半结构和式 (2.2)，则该图表交换。

从系数系统 $(W_1,\ V_1)$ 到系数系统 $(W_2,\ V_2)$ 的态射是一对 κ-线性映射 $W_1 \to W_2, V_1 \to V_2$，使得对每个 $n \ge 0$，所诱导的 κ-线性映射 $W_1 \otimes V_1^{\otimes n} \to W_2 \otimes V_2^{\otimes n}$ 都是 $B^n_{g,\,f}$ 的表示同态。

系数系统构成一个范畴，而（V，W）$\mapsto V$导出一个从该范畴到编织向量空间范畴的函子。

在某些情况下，考虑本身带有与编织相容的非负分次的编织向量空间 V 会很有用；这些是分次向量空间幺半范畴中的编织对象。当 V 是分次的时，$C(V)$的定义方式相同，但现在分次（按非负整数）由下式给出

$$C(V)_m = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_0(B_n, (V^{\otimes n})_m).$$

当 $V = V_1$ 是 1 次齐次时，这就是 $C(V)_m = H_0(B_m,\ V^{\otimes m})$。当（$V$，$W$）是一个系数系统且 V是分次向量空间时，我们通过将W 集中在 0 次上，为 $W \otimes V^{\otimes n}$ 赋予一个分次。

若 M 是分次向量空间，我们用 $\deg M$ 表示使 M_d 非零的最大 d。若不存在这样的 d，则记作 $\deg M = \infty$。

定理 2.0.11。设 g、f 为非负整数，且 $(V$、$W)$ 是 $B^n_{g,\,f}$ 在域 κ 上的系数系统。假设 $d =$次数 $C(V)$ 是有限的。那么对于非负整数 m、n、p，有

$$H_p(B^n_{g,f}, W \otimes (V^{\otimes n})_m) = 0$$

当 $p < (m-d)/(d+2$次数 $V)$ 时成立。特别地，如果 $V = V_{\le 1}$，则

$$H_p(B^n_{g,f}, W \otimes V^{\otimes n}) = 0$$

每当 $p <$ $(n-d)$ / $(d+2)$。

证明。 基本论证源自 [EVW16]中用于计算 Hurwitz 空间上同调的谱序列，该谱序列在 [EL23] 中被推广到任意亏格的基曲线。我们先回顾 [EL23, EVW16]，中的一些记号，并稍作修改以适应我们在 V上允许的更一般的分次。我们将 M_p 记作一个分次向量空间，其第 m 个分次分量为

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_p(B^n_{g,f}, W \otimes (V^{\otimes n})_m).$$

那么 M_p是一个分次的 $C(V)$-模。（并且，当 $(g,\ f) = (0,\ 0)$ 时， M_0 实际上等于 $C(V)$。）

对于任意 $C(V)$-模 M，我们按照 [EL23，定义 3.2.1], [EVW16，§4.1] 中的定义，定义一个向量空间复形 $\mathcal{K}(M)$，其第 q项为 $\mathcal{K}(M)_q = M \otimes V^{\otimes q}$。（此处的记号与 [EL23] 和 [EVW16], 略有不同；在那里我们写作 $M[q] \otimes V^{\otimes q}$，其中 $M[q]$ 表示移位 q，而 V位于 0 次。显然，这与 $M \otimes V^{\otimes q}$ 相同，其中 V位于 1 次。但在一般情形下，若要允许 V 在多个分次中都有支撑，这种记号会更方便。）

由 [EL23，命题 3.2。4], 存在一个谱序列，其 E^1 页为

$$E^1_{pq} = \mathcal{K}(M_p)_q.$$

在 [EL23], 中，编织向量空间 V 集中于 1 次分级，因此我们来说明这一差异，它纯粹是记号上的差异。 [EL23] 中谱序列的第 n 个分次分量，源自 $B^n_{g,f}$ 对单纯集合 $\mathbb{A}(g, f, n)$ 的作用，而该单纯集合是弧复形组合化的结果。给定 $B^n_{g,f}$ 上的任意表示 F，该作用给出一个谱序列，其 E^1_{pq} 项为

$$H_p(B^n_{g,f}, k[\mathbb{A}(g, f, n)]_q \otimes F).$$

在 [EL23], 中，我们在 (V, W) 是一个系数系统且 $F = W \otimes (V^{\otimes n})$. 时应用这一结果。在当前情形下， $W \otimes (V^{\otimes n})$ 分解为分次分量 $W \otimes (V^{\otimes n})_m$ 之和，且每个分次分量都给出其自身的谱序列。因此，对所有非负整数 n, m 取这些谱序列的直和，便得到一个双分次谱序列 E。

根据 [EL23 的证明最后一段，命题 3.2。4], 我们知道 $(E^\infty_{pq})_{n,\ m} = 0$只要 $n > p + q + 1$. 在此论证中，我们希望聚焦于由 m 索引的分次，并忽略由 n索引的分次。因此我们注意到，一旦 $m > n\deg V$， $W \otimes (V^{\otimes n})_m = 0$，由此 E 的 $(n,\ m)$ 双分次分量在 $m > n \deg V$ 时为零。我们得到 $(E^\infty_{pq})_{n,\ m} = 0$ 只要$m > (p + q + 1) \deg V$；换言之，$\deg E^\infty_{pq} \le (p + q + 1) \deg V$。

现在我们已经具备了对 p 进行诱导所需的工具。待证明的断言也可以写成

$$\deg M_p \le (d + 2 \deg V)p + d.$$

我们首先考虑基例 $p = 0$。余不变量 $(M_0)_n = H_0(B^n_{g,\ f},\ W \otimes V^{\otimes n})$ 位于 $C(V)_n W = C(V)_n (M_0)_0$, 的像中，因此当 $n > \deg C(V)$ 时它们消失；换言之，$\deg M_0 \le d$，如所断言。

现在令 $p > 0$，并假设对所有 $p' < p.$，都有 $\deg M_{p'} \le (d + 2\deg V)p' + d$

谱序列在高次数处收敛到 0，这意味着

$$\deg E^2_{p0} \le \max((p + 1) \deg V, \max_{q>0} \deg E^1_{p-q,q+1})$$

因为对于每个 $q > 0$，我们知道连续商 $E^{q+1}_{p0}/E^{q+2}_{p0}$ 是由来自 E^{q+1}_{p-q} 的$q+1$ 的微分的像满射到其上的，而 $q+1$ 是 E^1_{p-q}的$q+1$ 的一个子商。另一方面，

$$\deg E^1_{p-q,q+1} = \deg \mathcal{K}(M_{p-q})_{q+1} = \deg M_{p-q} \otimes V^{\otimes q+1} \le (d + 2 \deg V)(p - q) + d + (q + 1) \deg V$$

其中最后一步由对 M_{p-q} 应用归纳假设得到。Bu t

$$(d+2\deg V)(p-q)+d+(q+1)\deg V=(d+2\deg V)p+(1-q)(d+\deg V)$$

其至多为 $(d+2$ 次 $V)p$，当 $q>0$ 时。对于 $p>0$，我们还有 $(p+1)$次 $V\le 2p$ 次 $V\le(d+2$次 $V)p$。因此

$$\deg E^2_{p0}\le\max((p+1)\deg V,\max_{q>0}\deg E^1_{p-q,q+1})\le(d+2\deg V)p.$$

现在， E^2_{p0} 是从 E^1_{p1} 到 E^1_{p0} 的微分的余核；具体而言，它是映射的余核

$$V\otimes M_p\to M_p$$

我们也可以将其写作 M_p/IM_p，其中 I 是 $C(V)$ 的增广理想。换言之，M_p 作为一个 $C(V)$-模，由次数至多为 $(d+2$次 $V)p$ 的元素生成；又因为 $C(V)$ 本身的次数为 d，所以我们得出 $\deg M_p\le(d+2$次 $V)p+d$，正如所断言的。证明至此完成。□

3. Spaces, Sheaves, Trace Functions

3.1. 构型空间。 我们将 $\mathsf{Conf}^n=\mathsf{Conf}^n\,\mathbb{A}^1$ 记作仿射直线 over $\mathbb{Z}$ 上 n 个互异无序点的构型空间。这是首一次数为 n 的多项式模空间中的仿射开子概形，其中判别式可逆。于是，该判别式给出一个概形态射

$$\delta\colon \mathrm{Conf}^n\to\mathbb{G}_m. \tag{3.1}$$

将 δ 到 $\mathbb{C}$ 的基变换进行解析化后，在基本群层面诱导出满群同态 $B_n\to\mathbb{Z}$，对于每个 $1\le i\le n-1$，该同态将标准生成元 $\sigma_i\in B_n$ 映射为 $1\in\mathbb{Z}$。

设 n_1，……，n_k 为和为 n 的非负整数。考虑由下式给出的 $\mathsf{Conf}^{n_1}\times\cdots\times\mathsf{Conf}^{n_k}$ 的开子概形

$$\mathrm{Conf}^{n_1,\dots,n_k}=\left\{(f_1,\dots,f_k)\in\prod_{i=1}^k\mathrm{Conf}^{n_i}:\mathrm{Res}(f_i,f_j)\text{ is invertible for }1\le i<j\le k\right\}.$$

其复点可以视为 $\mathbb{C}$ 中由 n 个互不相同的点构成的构型，其中有 n_i 个点的颜色为 i；如果颜色为 i 的点的集合对于 $1\le i\le k$ 相同，则认为两个构型相同。我们有一个有限 ´étale 映射

$$\tau\colon \mathrm{Conf}^{n_1,\dots,n_k}\to\mathrm{Conf}^n,\qquad \tau(f_1,\dots,f_k)=f_1\cdots f_k. \tag{3.2}$$

将该映射到 $\mathbb{C}$ 的基变换进行解析化后，诱导出一个包含映射

$B_{n_1,\dots,n_k}=\pi_1(\mathrm{Conf}^{n_1,\dots,n_k}(\mathbb{C}))$ 进入 B_n，其像的指数为 $\binom{n}{n_1,\dots,n_k}$。该开浸入（到 $\mathbb{C}$ 的基变换的解析化）

$$c\colon \mathrm{Conf}^{n_1,\dots,n_k}\to\mathrm{Conf}^{n_1}\times\cdots\times\mathrm{Conf}^{n_k} \tag{3.3}$$

诱导出一个满群同态 $B_{n_1,\dots,n_k}\to B_{n_1}\times\cdots\times B_{n_k}$，自然包含$B_{n_1}\times\cdots\times B_{n_k}\to B_{n_1,\dots,n_k}$由辫子的并置给出，并且是一个截面。我们有

$$\mathrm{Conf}^{n_1,\dots,n_k}(\mathbb{F}_q)=\left\{(f_1,\dots,f_k)\in\prod_{i=1}^k\mathrm{Conf}^{n_i}(\mathbb{F}_q):\gcd(f_i,f_j)=1\text{ for }1\le i<j\le k\right\}.$$

在 $k=n$ 和 $n_1=\cdots=n_k=1$ 的情形下，我们将 $\mathsf{Conf}^{n_1,\dots,n_k}$记作 PConf^n，并称其为有序构型空间。从根的一个排列重构无平方因子多项式的映射 $\tau\colon\mathsf{PConf}^n\to\mathsf{Conf}^n$ 是一个伽罗瓦 S_n-覆叠。在复点层面上，此映射会忘掉

$\mathbb{C}$中 n 个互不相同点的排列，而 $PB_n = \pi_1(\mathsf{PConf}^n(\mathbb{C}))$ 是群同态 $B_n \to S_n$的核。因此，也可以将 $B_{n_1,\dots,n_k}$ 描述为群同态 $B_n \to S_n$下 $S_{n_1}\times\cdots\times S_{n_k}$的原像。

对于 $f \in \mathsf{Conf}^n(\mathbb{F}_q)$，我们用 σ_f 表示 S_n 中的置换（共轭类），Frob_q 通过它作用于 $\mathbb{F}_q$中 f 的 n 个根。与覆盖 $\mathsf{PConf}^n \to \mathsf{Conf}^n$ 对应的连续群同态 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathsf{Conf}^n) \to S_n$将 Frob_f 映到 σ_f。σ_f 的循环结构就是 f的因式分解类型。

设 ℓ 为一个不整除 q的辅助素数，并固定一个域同构 $\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{C}$。下文中我们可能会不加说明地使用这个同构。

设 ρ 为一个在 $\mathbb{Q}_\ell$上取值、定义于 S_n 的有限维表示。我们将 ρ视为 Conf^n上取值于 $\mathbb{Q}_\ell$ 的向量空间的可构造光滑étale 层。其迹函数表明，该层逐点纯且权为零

$$\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_f, \rho_{\bar{f}}) = \operatorname{tr}(\rho(\sigma_f))$$

其中 f 是 f上的 Conf^n 的一个几何点。

例 3.1.1。 记 triv_n 为 S_n 的平凡一维表示。triv_n 的迹函数是 $\mathsf{Conf}^n(\mathbb{F}_q)$ 上的常值函数 1。

例 3.1.2。 根据 [Saw21，引理 3.5]，sign_n 的迹函数是 $(-1)^n$ 乘以 Möbius 函数。Möbius 函数具有乘法性——如果对于 $\mathsf{Conf}^n(\mathbb{F}_q)$ 有 $f = gh$ ，且对于 $\mathsf{Conf}^k(\mathbb{F}_q)$ 和 $\mathsf{Conf}^{n-k}(\mathbb{F}_q)$ 有 $h \in$ ，那么 $\mu(f) = \mu(g)\mu(h)$。

例 3.1.3。 从基本群的有限指数子群诱导表示，对应于沿有限 étale映射推前局部常值层。根据函数—层对应，函数上的相应运算是沿纤维求和，因此

$$\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_f, \mathrm{Ind}_{S_{n_1}\times\cdots\times S_{n_k}}^{S_n} \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \#\tau^{-1}(f)$$

其中 τ 是公式（3.2）中的乘法映射。我们得到

$$\operatorname{tr}\left(\mathrm{Frob}_f, \bigoplus_{\substack{n_1,\dots,n_k\geq 0\\ n_1+\cdots+n_k=n}} \mathrm{Ind}_{S_{n_1}\times\cdots\times S_{n_k}}^{S_n} \overline{\mathbb{Q}_\ell}\right) = d_k(f).$$

例 3.1.4. 根据 [Saw21，引理 3.6] ，我们有

$$\mathbf{1}_{\mathrm{irr}}(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \cdot \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_f, \wedge^k \mathrm{std}_n)$$

其中 std_n 是 S_n的标准 $(n-1)$ 维表示。

对于 $0 \le k \le n$ ，我们有结式态射

$$\mathrm{Res}\colon \mathrm{Conf}^{k,n-k} \to \mathbb{G}_m. \tag{3.4}$$

群 $B_{k,\ n-k}$由 $\{\sigma_1,\dots,\sigma_{k-1},\sigma_k^2,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_{n-1}\}$ 生成，并满足 [Man97，命题 1、定理 3]，中的关系；而 Res（基变换至 $\mathbb{C}$后的解析化）诱导出群同态 $B_{k,\ n-k}\to\mathbb{Z}$ ，该同态将 σ_k^2 映射为 1，并将其他生成元映射为 0。

有时，我们将公式（3.2）中的映射 $\mathsf{Conf}^{k,n-k} \to \mathsf{Conf}^n$ 记为 $\tau^{(k)}$，并将公式（3.3）中的映射 $\mathsf{Conf}^{k,n-k} \to \mathsf{Conf}^k \times \mathsf{Conf}^{n-k}$ 记为 c_k。

3.2. **Hurwitz 空间**。存在一个概形 $\mathrm{Hur}_{G,R}^{n_1,\ldots,n_k}$，其位于 $\mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_{q-1}]$ 上，并配备一个有限´ étale 态射

$$\pi\colon \mathrm{Hur}_{G,R}^{n_1,\ldots,n_k} \to \mathrm{Conf}^{n_1,\ldots,n_k} \tag{3.5}$$

对于该对象，我们有如下同一化

$$\mathrm{Hur}_{G,R}^{n_1,\ldots,n_k}(\mathbb{F}_q) = \mathcal{E}_q^R(G; n_1, \ldots, n_k) \tag{3.6}$$

使得 $L \in \mathcal{E}_q^R(G;\ n_1、\ldots\ldots、\ n_k)$ 在 π 下映射为 $(f_1、\ldots\ldots、\ f_k)$，其中 f_j 是在 L 中分歧的首一不可约多项式的乘积，并且对于每个 $1 \le j \le k$，相应的惯性生成元映射到 R_j。因此我们有

$$(\tau \circ \pi)(L) = f_L \tag{3.7}$$

其中记号同公式（3.2）。

层 $\tau_*\pi_*\mathbb{Q}_\ell$ 是光滑的、逐点纯且权重为 0，并且

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar{g}}, \tau_*\pi_*\overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \#\{L \in \mathcal{E}_q^R(G; n_1, \ldots, n_k) : f_L = g\}, \qquad g \in \mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q). \tag{3.8}$$

层 $\tau_*\pi_*\mathbb{Q}_\ell$ 到 $\overline{\mathbb{C}}$ 的基变换的解析化对应于表示 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}R^{\otimes n}$ 的一个直和项；该表示来自定理 5.1.17、定理 2.0.7 和定理 5.1.11，由满足以下条件的 n-元组张成：它们生成 G，在 G 中的乘积等于 1，并且对于每个 $1 \le i \le k$，具有来自 R_i 的 n_i 个条目。带有 $1 \le i \le n-1$ 的标准生成元 $\sigma_i \in B_n$ 将来自 R 的元素组成的 n-元组 $(r_1、\ldots\ldots、\ r_n)$ 映射为该 n-元组

$$(r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, r_{i+1}^{-1} r_i r_{i+1}, r_{i+2}, \ldots, r_n) \in R^n.$$

3.3. **特征层**。设 $\chi\colon\ \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times$ 是一个非平凡乘法特征。记 χ 的阶为 $\mathfrak{o}$，它是 $q-1$的一个因子；注意到 $\mathbb{F}_q$ 包含一个本原 $\mathfrak{o}$次单位根，因此，将 $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ 提升到 $\mathfrak{o}$ 次幂的 $\mathbb{F}_q$ 上概形态射是一个伽罗瓦覆盖，其伽罗瓦群$\{\alpha \in \mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q) = \mathbb{F}_q^\times :\ \alpha^{\mathfrak{o}} = 1\}$ 通过平移作用。我们将此群视为由将 $x \in \mathbb{F}_q^\times$ 映到 $x^{\frac{q-1}{\mathfrak{o}}}$ 而得到的 $\mathbb{F}_q^\times$的商，并注意到 χ 可经由此商分解。因此， χ导出一个定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的 $\mathbb{G}_m$ 上的秩一光滑 étale $\mathbb{Q}_\ell$-层 $\mathcal{L}_\chi$，其迹函数为

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{L}_\chi) = \chi(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q). \tag{3.9}$$

因此，层 $\mathcal{L}_\chi$ 是逐点纯的，权重为 0。

设 $\zeta \in \mathbb{C}$ 是一个阶为 $\mathfrak{o}$的单位根，选取一个环同态 $\mathbb{Z}[\zeta] \to \mathbb{F}_q$，并注意到，将 $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ 提升到 $\mathfrak{o}$ 次幂的 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 上概形态射是伽罗瓦的，且经由$\mathbb{Z}[\zeta] \to \mathbb{F}_q$ 作基变换会诱导其伽罗瓦群到上述 $\mathbb{F}_q$上的伽罗瓦群的一个同构。因此，存在一个定义在 $\mathbb{Z}[\zeta]$上的 $\mathbb{G}_m$ 上的秩一光滑层，其逐点纯且权重为 0；它在 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[\zeta]$ 下的拉回为 $\mathcal{L}_\chi$。这里稍微滥用记号，也将此层记作 $\mathcal{L}_\chi$。将 $\mathcal{L}_\chi$ 基变换到 $\mathbb{C}$ 后再作解析化，所得对象对应于 $\pi_1(\mathbb{G}_m(\mathbb{C})) = \pi_1(\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}$ 的表示，该表示将 $1 \in \mathbb{Z}$ 映到一个本原 $\mathfrak{o}$次单位根。

回顾等式（3.1），我们看到层 $\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi$ 是秩 1 的光滑层，逐点纯且权重为 0，其迹函数由下式给出

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar{f}}, \delta^{-1}\mathcal{L}_\chi) = \chi(\mathrm{disc}(f)), \qquad f \in \mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q). \tag{3.10}$$

$\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi$ 到 $\mathbb{C}$ 的基变换的解析化，对应于 B_n 的一个表示；对于每个 $1 \le i \le n$，该表示都将 $\sigma_i \in B_n$ 映射到一个给定的本原 $\mathfrak{o}$ 次单位根。

同样，回顾等式（3.4），层 $\mathrm{Res}^{-1}\mathcal{L}_\chi$ 在 $\mathrm{Conf}^{k,\ n-k}$ 上是秩 1 光滑层，逐点纯且权重为 0，其迹函数为

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\overline{(f,g)}}, \mathrm{Res}^{-1}\mathcal{L}_\chi) = \chi(\mathrm{Res}(f,g)), \qquad (f,g) \in \mathrm{Conf}^{k,n-k}(\mathbb{F}_q). \tag{3.11}$$

通过有限 étale 映射推前光滑 étale 层，对应于从与该有限 étale 映射对应的 étale基本群的开子群诱导表示。根据函数—层对应，沿适当映射推前对应于对映射各纤维上的迹函数求和。因此，层 $\tau_*^{(k)}\mathrm{Res}^{-1}\,\mathcal{L}_\chi$ 在 Conf^n 上是光滑层，逐点纯且权重为 0，其迹函数为

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar{f}}, \tau_*^{(k)}\,\mathrm{Res}^{-1}\,\mathcal{L}_\chi) = \sum_{\substack{(g,h)\in \mathrm{Conf}^{k,n-k}(\mathbb{F}_q)\\ gh=f}} \chi(\mathrm{Res}(g,h)), \qquad f\in \mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q). \tag{3.12}$$

因此，我们得到

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{Frob}_{\bar{f}}, \bigoplus_{k=0}^{n} \tau_*^{(k)}\,\mathrm{Res}^{-1}\,\mathcal{L}_\chi\right) = \sum_{gh=f} \chi(\mathrm{Res}(g,h)), \qquad f\in \mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q). \tag{3.13}$$

其中 g,h 是首一（无平方因子且互素）的。

引理3.3.1. 若 $\mathfrak{o}=2$，则有 $\chi(\mathrm{Res}(f,g)) = \left(\frac{g}{f}\right)$.

证明. 两边关于 f 都具有乘法性，因此我们可以假设 f 不可约。f 的不可约性意味着，若 $\xi\in\mathbb{F}_q$ 是 f 的一个根，则 f 在 $\mathbb{F}_q$ 中的 k 个（互异）根为 ξ^{q^i}，其中 $0\le i\le k-1$。利用弗罗贝尼乌斯是一个自同构这一事实，以及等比数列求和公式，我们得到

$$\mathrm{Res}(f,g) = \prod_{i=0}^{k-1} g(\xi^{q^i}) = \prod_{i=0}^{k-1} g(\xi)^{q^i} = g(\xi)^{\frac{q^k-1}{q-1}}.$$

由于 χ 是二次的，我们得到同余

$$\chi(\mathrm{Res}(f,g)) \equiv \mathrm{Res}(f,g)^{\frac{q-1}{2}} \equiv g(\xi)^{\frac{q^k-1}{2}} \equiv \left(\frac{g}{f}\right)$$

模 p，这足以证明我们的断言。 □

4. Coarse Bounds on (Unstable) Cohomology

4.1. 上同调比较。 设 U 是定义在数域 K的整数环的谱的一个开子概形S 上的亏格为 g 的光滑曲线。假设将 U基变换到 $\mathbb{C}$ 后有 $f+1$ 个缺失点，其中 f为某个非负整数。于是我们有

$$\pi_1(\mathrm{Conf}^n U(\mathbb{C})) = B^n_{g,f}.$$

定理 4.1.1。 设 κ 是一个有限域，n 是一个正整数，$\mathcal{F}$ 是 κ 上的$\mathrm{Conf}^n U$上的向量空间的局部常值可构造层。记 $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ 为将 $\mathcal{F}$ 基变换到 $\mathbb{C}$所得的对象，记 $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}}$为其解析化，并将其视为$B^n_{g,f}$的一个表示。那么，对于每个在 S 中不可逆且不同于 κ 的特征的素数 p，我们有一个同构

$$H^i_c(\mathrm{Conf}^n U_{\overline{\mathbb{F}_p}}, \mathcal{F}) \cong H_{2n-i}(B^n_{g,f}, (\mathcal{F}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}})^\vee)^\vee$$

κ上的向量空间。

证明。与 [EL23 定理 9.2 的证明类似，4], 可以利用 [EL23 推论 B.14] 对 $\mathrm{Conf}^n U$作正规交叉紧化，然后根据 [EVW16 命题 77]，比较 $\acute{}$上的 étale 上同调与奇异上同调，并应用庞加莱$\acute{}$对偶性。

□

4.2. **一般贝蒂数界**。 以下结论可直接由 [Cal14 定理 2.10、定理 2.11 和注 216] 得出。

引理 4.2.1。 设 n 为正整数，设 κ为一个域，并设 M 为 κ上的 B_n的表示。则对于每个整数 j ，我们有

$$\dim_\kappa H_j(B_n, M) \leq \binom{n-1}{j} \cdot \dim_\kappa M.$$

更一般地， 以下结论是 [EL23 中引理 4.3.1 和 4.3.2]的证明的推论。

引理 4.2.2。 设 n 为正整数，设 f、g 为非负整数，设 κ 为一个域，并设M 为 $B^n_{g,\ f}$ 上的 κ的表示。则对于每个整数 j ，我们有

$$\dim_\kappa H_j(B^n_{g,f}, M) \leq \binom{2g+f+n}{2g+f+j} \cdot \dim_\kappa M.$$

5. Braided Objects

本节将介绍有关编织对象的一些关键事实，以及从已有编织对象生成新编织对象的方法；这些内容对于处理本文中的例子至关重要。

回顾一下，幺半范畴 $\mathcal{C}$ 若具有（函子性的）交换约束，即一个同构

$$s_{V,W} \colon V \otimes W \to W \otimes V \tag{5.1}$$

对于 $\mathcal{C}$ 的对象 V, W 满足 $s_{W,V} \circ s_{V,W} = \mathrm{id}_{V\otimes W}$ 以及其他一些自然性质。

例 5.0.1. 域 κ 上（分次）向量空间的范畴是对称幺半范畴，集合范畴也是如此。

5.1. **Racks**。

定义 5.1.1. 架是一个集合 R ，带有二元运算 x^y ，其中 $x, y \in R$ 满足：对每个 $y \in R$，函数 $x \mapsto x^y$ 是 R 上的一个双射；并且对所有 $x, y, z \in R$，都有 $(x^y)^z = (x^z)^{y^z}$。架之间的函数 $f\colon R \to S$ 若对每个 x, $y \in R$ 都有 $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$，则称为态射。

架构成一个范畴，并且存在直积。事实上，对于架 R, S，我们通过定义 $(x, y)^{(z,w)} = (x^z, y^w)$，其中 $x, z \in R$ 且 $y, w \in S$，在集合 $R \times S$上赋予架结构。直积使架构成一个对称幺半范畴，其单位对象是单元素架 $\mathcal{T}_1$。空架是架范畴中的始对象。

若架 R 的子集 R' 在 R 上的二元运算下构成一个架，我们就称 R' 是 R的子架。在这种情况下，R' 到 R 的包含是架同态。架 R 的有限子集R' 是子架，当且仅当对于每个 $r, s \in R'$ ，都有 $r^s \in R'$。

若 R 是一个架，且 R_i 是 R的子架（对 $i \in I$ 而言），那么 $\cap_{i\in I} R_i$ 也是 R的子架。

定义 5.1.2. 设 R 是一个架。给定一个指标集 I，并对每个 $i \in I$取元素 $r_i \in R$ ，我们用以下符号表示

$$\langle r_i \rangle_{i\in I} = \bigcap_{\substack{R' \text{ a subrack of } R \\ r_i \in R' \text{ for every } i \in I}} R'$$

由所有 $i \in I$对应的 r_i 生成的 R 的子架。

若 $\langle r_i \rangle_{i\in I} = R$ ，或等价地，若不存在包含对每个 $i \in I$的 r_i 的 R 的真子架，则称元素 $r_i \in R$ 生成 R 。对于非负整数 n ，我们引入如下记号

$$R^n_\times = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n : \langle r_1, \ldots, r_n \rangle = R\} \tag{5.2}$$

对于那些能够生成它的 n 元组，其中的元素属于 R 。

Definiti关于 5.1.3。如果对于每个 $r \in R$ 都有 $r^r = r$，则称架 R 为 quandle。

我们得到 rack 范畴中一个由 quandle 构成的满幺半子范畴。

例 5.1.4. 设 R 是群 G的共轭封闭子集，且 $x^y = y^{-1}xy$ 是 y 在 G中对 x 的共轭作用。那么 R 是一个架，甚至是一个 quandle。特别地，取 $R = G$，我们得到一个从群范畴到架范畴的遗忘函子。

例 5.1.5. 给集合 X 赋予平凡架结构，即对所有 $x,\ y \in X$，令 $x^y = x$ 成立，便得到一个从集合范畴到 quandle 范畴的全忠实对称幺半函子。我们将基数为 ν 的集合上由此得到的平凡架记为 $\mathcal{T}_\nu$。注意， $\mathcal{T}_1$ 是架范畴中的终对象。我们将使用记号 $\mathcal{T}_2 = \{\varphi, \psi\}$。

定义 5.1.6. 设 R和 S为架。我们在不交并 $R \coprod S$上赋予架结构，定义如下：

$$x^y = \begin{cases} x^y & x, y \in R \\ x^y & x, y \in S \\ x & x \in R,\ y \in S \\ x & x \in S,\ y \in R. \end{cases}$$

这定义了架范畴（以及 quandle 的子范畴）中的一个余积。相对于不交并，rack 构成一个对称幺半范畴，其单位对象为空架。

定理 5.1.5 中的架 $\mathcal{T}_\nu$ 是 ν 个 $\mathcal{T}_1$ 的不交并。

例 5.1.7。 辫集合是集合范畴中的编织对象。存在一个从架范畴到辫集合范畴的全忠实函子，它为架 R（的底层集合）赋予编织 T: $R \times R \to R \times R$，定义为 $T(x,\ y) = (y,\ x^y)$。因此，定理 2.0.7 给出了 B_n 在 R^n 上的一个作用。注意，此作用保持 $R^n_\times$ 作为集合不变。

例 5.1.8。 设 R 是一个集合，且 φ: $R \to R$ 是一个双射。则 $x^y = \varphi(x)$ 为 R 赋予一个架结构。当且仅当 R 是单元素集合时，这个架才是 quandle。该构造可扩展为一个函子，从配备置换的集合范畴映到架范畴。

在后文中，我们将关注 $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 在 $m \in \mathbb{Z}$的情形，以及对每个$r \in R$， $\varphi(r) = r + 1$ 。

例 5.1.9. 令 $\mathcal{S}_\pm = \{J_1, J_2, J_3\}$ 为 Joyce quandle，其定义为

$$J_1^{J_1} = J_1^{J_2} = J_1, \quad J_2^{J_1} = J_2^{J_2} = J_2, \quad J_3^{J_1} = J_3^{J_2} = J_3^{J_3} = J_3, \quad J_1^{J_3} = J_2, \quad J_2^{J_3} = J_1.$$

定义 5.1.10. rack R 的一个划分是选取两个不相交的子集 $S, T \subseteq R$ ，使其并集为 R ，并满足对每个 $s \in S$, $t \in T$, $r \in R$， $s^r \in S$ 且 $t^r \in T$。若 S 和 T 均非空，则称该划分为非平凡的。

注意，集合 S 和 T 本身也是 rack。此外，任意两个 rack R, S 构成$R \coprod S$的一个划分。

如果 $S, T \subseteq R$是一个 rack 的划分，且 Y是一个 rack，那么 $Y \times S, Y \times T \subseteq Y \times R$也构成一个划分。

例 5.1.11。 类似地，我们可以将架划分为若干个 R（不相交的）子集 S_1、.....、 S_k，使得对于任意 $1 \le i \le k$、$s \in S_i$和 $r \in R$ ，都有 $s^r \in S_i$。

对于非负整数 n_1、.....、 n_k，我们用 n 表示它们的和，并令

$$R(n_1, \ldots, n_k) = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n : \#\{1 \le j \le n : r_j \in S_i\} = n_i, \text{ for every } 1 \le i \le k\}.$$

这个集合在 B_n 对定理 5.1.7 中的 R^n 的作用下保持不变（作为一个集合），并且我们有一个不交并

$$R^n = \bigcup_{n_1+\cdots+n_k=n} R(n_1,\dots,n_k). \tag{5.3}$$

定义 5.1.12。如果对于每个 $r \in R$，将 $s \in S$ 映射到 s^r 的函数都是 S上的置换，我们就称架 R 的子集 S 为理想。

架 R 的有限子集 S 是理想，当且仅当对于每个 $s \in S$ 和 $r \in R$，都有 $s^r \in S$。

在划分 $S,\ T \subseteq R$ 中，子集 S 和 T 是理想。反过来，对于架 R的理想 S，子集 $T = R \setminus S$ 也是 R 的理想，并且 $S,\ T \subseteq R$ 是 R的一个划分。

对于架 R、R的理想 I 以及 R的子架 S，S 与 I 的交集是 S的理想。对于架 R的理想 $I,\ J$，交集 $I \cap J$ 也是 R的理想。

定义 5.1.13。我们称群 G的子集 R 为共轭封闭的，如果它是 G的共轭类的不交并；等价地，如果对于每个 $g \in G$ 和 $r \in R$，都有 $r^g \in R$。

例 5.1.14。设 G 为一个群，并设 $R \subseteq G$。将 G 视为一个架时，R 是G的理想，当且仅当 R 是 G的共轭封闭子集。

5.1.1. 余循环。

定义 5.1.15。设 κ 为一个域，R 为一个架。若函数 $c\colon R \times R \to \kappa^\times$ 满足：对于任意 $r,s,t \in R$，都有 $c(r,s)\cdot c(r^s,t) = c(r,t)\cdot c(r^t,s^t)$，则称其为一个 2-余循环（$R$上的 κ的 2-余循环）。若对于任意 $x,y \in R$，$c(x,y)$ 都是单位根，则称 c为分圆的。

设 (R,c)、(S,d) 是配备了 κ上的 2-余循环的架，并设 $f\colon R \to S$是架的态射。若对于任意 $x,y \in R$，都有 $c(x,y) = d(f(x)\ f(y))$，则称 f是余循环的。

配备了 κ 上的 2-余循环的 rack 及余循环态射构成一个对称幺半范畴。事实上，若 c（分别地，d）是 R（分别地，S）上的一个 κ 上的 2-余循环，则

$$e\colon (R\times S)\times(R\times S) \to k^\times, \qquad e((x,y),(z,w)) = c(x,z)\cdot d(y,w), \qquad x,z \in R,\ y,w \in S$$

是 κ上 $R\times S$ 的一个 2-余循环。

例 5.1.16。设 R 是一个 rack，κ 是一个域，且 $c\colon R\times R \to \kappa^\times$ 是一个满足下述条件的函数

$$c(x^z,y) = c(x,y), \qquad c(x,y^z) = (x,y), \qquad x,y,z \in R.$$

那么 c 是一个 2-余循环。特别地，对于 $\lambda \in k^\times$，常值函数 $c(r,\ s) = \lambda$对于 $r,\ s \in R$是一个 2-余循环。另一个这样的例子是域 κ（其特征不等于 2）上的分圆 2-余循环 $c_\wedge$ 和 $c_\pm$，它们定义在架 $R\times\mathcal{T}_2$ 上；按照定理 5.1.5 中的记号，该架由下式给出

$$c_\wedge((x,y),(z,w)) = \begin{cases} -1 & y = w = \psi \\ 1 & \text{else} \end{cases}, \qquad c_\pm((x,y),(z,w)) = \begin{cases} -1 & y = \psi,\ w = \varphi \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

对于 $x,\ z \in R$a nd $y,\ w \in \mathcal{T}_2$。如果 $R = \mathcal{T}_1$，我们将 $c_\wedge$ 和 $c_\pm$ 视为 $\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2$上的 2-余循环。

例 5.1.17。设 κ 是一个域。将集合 S 与其（形式）κ-线性组合构成的向量空间 κS 对应起来（这是一个对称幺半对应），可扩展为从辫集合到 κ上的编织向量空间的忠实函子。将此函子与定理 5.1.7中的函子复合，我们得到一个从架范畴到 κ上的编织向量空间范畴的忠实函子，它将架 R 对应到向量空间 κR（有时也记作 $\kappa[R]$），该空间由 $T(x\otimes y) = y\otimes x^y$ 对 $x,\ y \in R$ 编织。

更一般地，我们有一个忠实函子 $(R,\ c)\ \mapsto\ \kappa R(c)$，它将带有 κ 上 2-余循环的架范畴映到 κ 上的编织向量空间范畴，其中 $\kappa R(c)$ 是由以下对象编织的向量空间 κR

$$T(x\otimes y)=c(x,y)\cdot y\otimes x^y,\qquad x,y\in R. \tag{5.4}$$

若 c 是常值函数 1，则有 $\kappa R(c)\ =\kappa R$。

例如，按照定理 2.0.5 和定理 2.0.6 的记号，对于特征不为 2 的域 κ ，我们有

$$\kappa_\wedge\cong\kappa\mathcal{T}_2(c_\wedge),\qquad \kappa\mathcal{T}_2(c_\pm)\cong\kappa_\pm \tag{5.5}$$

作为 κ 上的编织向量空间。若 $\zeta\in\kappa^\times$ 和 c 是 $\mathcal{T}_1$ 上的常值 2-余循环，其值为 ζ ，那么按照定理 2.0.4 的记号，我们有 $\kappa\mathcal{T}_1(c)\cong\kappa_\zeta$ ，作为 κ 上的编织向量空间。

注记 5.1.18。设 κ是一个域， R 是一个架。定理 5.1.7 中由 B_n 对 R^n 的作用所关联的 B_n 在 κ 上的表示 κR^n ，自然同构于定理 5.1.17 中的编织向量空间 κR 所对应的定理 2.0.7 中的 $\kappa R^{\otimes n}$ 上的 B_n 的表示。

例 5.1.19。设 R 是一个架， κ 是一个域，且 c 是取值于 $\kappa^\times$上的 $R\times\mathcal{T}_2$ 的 2-余循环。我们将使用如下记号

$$R_\varphi=R\times\{\varphi\},\qquad R_\psi=R\times\{\psi\},\qquad c_\varphi=c|_{R_\varphi\times R_\varphi},\qquad c_\psi=c|_{R_\psi\times R_\psi},$$

架 R_φ 和 R_ψ 同构于 R ，并按照定理 5.1.10 的意义构成 $R\times\mathcal{T}_2$ 的一个划分。

定义 5.1.20。设 R 是一个带有划分 $S,T\subseteq R$的架，且 κ 是一个域。若函数 $c\colon\ R\times R\to\kappa^\times$ 在 $R\times R$ 的四个子集 $S\times S$、 $S\times T$、 $T\times S$和 $T\times T$上的限制都是常值函数，则称其由划分 $S,T\subseteq R$ 导出。

由划分导出的函数必然是一个 2-余循环。

例 5.1.21。定理 5.1.16 中介绍的 $R\times\mathcal{T}_2$上的两个 2-余循环 $c_\wedge$ 和 $c_\pm$ ，由定理 5.1.19 中的划分导出。

命题 5.1.22。设 R 是一个架， κ 是一个域， $c\colon\ R\times R\to\kappa^\times$ 是一个 2-余循环，设$(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$，并设 $g\in B_n$。那么存在唯一的元素 $\nabla(x_1,\ldots,x_n;\,g)\in\kappa^\times$，使得

$$(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)^g=\nabla(x_1,\ldots,x_n;g)\cdot y_1\otimes\cdots\otimes y_n,\qquad (y_1,\ldots,y_n)=(x_1,\ldots,x_n)^g\in R^n,$$

其中， g 在 $x_1\otimes\cdots\otimes x_n$ 上的作用（位于 $\kappa R(c)^{\otimes n}$ 中）来自定理 *5.1.17* 和定理 *2.0.7*，而 B^n 在 R^n 上的作用来自定理 *5.1.7*。

证明。对 g 作为对称生成集中的字的长度进行归纳

$$\mathcal{S}=\{\sigma_i^\epsilon:1\le i\le n-1,\quad \epsilon\in\{\pm1\}\} \tag{5.6}$$

对于 B_n，长度为 1 时的基例即为公式（5.4）。 □

例 5.1.23。对于 $1\le i\le n-1$，我们有

$$\nabla(x_1,\ldots,x_n;\sigma_i)=c(x_i,x_{i+1}),\qquad \nabla(x_1,\ldots,x_n;\sigma_i^2)=c(x_i,x_{i+1})\cdot c(x_{i+1},x_i^{x_{i+1}}).$$

在定理 2.0.9 中引入的 $\kappa R(c)$ 的 κ-余不变元代数中，我们有

$$x_1\cdots x_n=\nabla(x_1,\ldots,x_n;g)\cdot y_1\cdots y_n \tag{5.7}$$

这里的记号与定理 5.1.22 中的记号一致，即在定理 5.1.7 中 B_n 对 R^n 的作用下，我们有 $(x_1,$ ……， $x_n)^g=(y_1,$ ……， $y_n)$。

设 V 是域 κ 上的编织向量空间。定理 2.0.7 中 B_n 在 $V^{\otimes n}$ 上的表示导出了 B_n 在 $\mathbb{P}V^{\otimes n}$ 上的作用（相伴射影表示）。我们将其视为群在集合上的作用。

推论 5.1.24。 B_n 在 $\mathbb{P}\kappa R(c)^{\otimes n}$ 上的作用保持 R的元素所对应的纯张量（的张成直线）不变（作为集合）。 B^n （在一个集合上的）此作用与定理 *5.1.7* 中描述的 B^n 在R^n 上的作用同构。

证明。 由定理 5.1.22 立即得到。 □

命题 5.1.25。 设 κ为一个域， $A \leq \kappa^\times$为一个子群， R为一个架，且 $c\colon\ R\times R\to A$ 为一个2-余循环。则

$$(r,a)^{(s,b)} = (r^s, c(r,s)\cdot a), \qquad r,s\in R,\quad a,b\in A \tag{5.8}$$

赋予 $R\times A$ 一个架结构，记作 R_c。此对应 $(R,\ c)\mapsto R_c$ 可扩展为一个函子，从带有 A值2-余循环的架范畴到架范畴。此外，当且仅当 R 为一个*quandle*且对每个 $r\in R$都有 R_c 为一个*quandle*，且 $c(r,\ r)=1$ 。

此外，若 A有限（因此 c 是分圆的），则存在一个从 $\kappa R(c)$ 到 κR_c 的编织向量空间单射态射，将每个 $r\in R$ 映射到

$$\sum_{a\in A} a^{-1}\cdot(r,a)\in \kappa R_c. \tag{5.9}$$

最后，设 $f\colon\ \kappa R(c)\ \to V$ 是 κ上的编织向量空间态射。则存在一个编织向量空间态射 $\kappa R_c\to V$，使其构成如下交换图

$$\begin{array}{ccc} & & \kappa R_c \\ & \nearrow & \uparrow \\ \kappa R(c) & \xrightarrow[f]{} & V. \end{array} \tag{5.10}$$

证明。 由定理 5.1.1 和定理 5.1.15 可直接得出，公式（5.8）给出了一个架，且该构造具有函子性。架 R_c 是 quandle，当且仅当对任意 $r\in R$和 $a\in A$ ，元素

$$(r,a)^{(r,a)} = (r^r, c(r,r)\cdot a)$$

等于 $(r,\ a)$。第一坐标上的等式等价于 R 是一个 quandle，而第二坐标上的等式等价于 $c(r,\ r)=1$。

从现在起设 A有限。显然，式（5.9）描述了一个单射 κ-线性映射，因此只需验证该映射按照定理 2.0.1 与编织相容。可将 $R\times R$ 视为 $\kappa R(c)\otimes\kappa R(c)$的一组基来完成这一验证。

对于 $(r,\ s)\in R\times R$，先应用编织，再应用式（5.9）中的映射，我们得到

$$c(r,s)\cdot\left(\sum_{a\in A} a^{-1}\cdot(s,a)\right)\otimes\left(\sum_{b\in A} b^{-1}\cdot(r^s,b)\right) = c(r,s)\cdot\sum_{(a,b)\in A\times A} a^{-1}b^{-1}\cdot(s,a)\otimes(r^s,b),$$

而先应用式（5.9）中的映射，再应用编织，则得到

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times A}\alpha^{-1}\beta^{-1}\cdot(s,\beta)\otimes(r^s,c(r,s)\cdot\alpha) = c(r,s)\cdot\sum_{(\gamma,\beta)\in A\times A}\gamma^{-1}\beta^{-1}\cdot(s,\beta)\otimes(r^s,\gamma),$$

因此交换 a与 β，以及 b与 γ，即可得到所需的等式。

最后，我们断言，从 κR_c到 V的 κ-线性映射将 $(r,\ a)\in R_c$映为 $|A|^{-1}af(r)\in V$（这里我们将 r 视为 $\kappa R(c)$中的一个元素），它是一个定义在 κ 上的编织向量空间态射，并使式（5.10）中的图交换。由式（5.9）可立即得到交换性，因此

只需检验对于（r，a），（s，b）$\in R_c$，对（r，a）$\otimes$（s，b）$\in \kappa R_c \otimes \kappa R_c$进行编织，再对刚构造的线性映射取其自身的张量积，所得的 $V \otimes V$ 中的向量，与对（r，a）$\otimes$（s，b）$\in \kappa R_c \otimes \kappa R_c$ 应用该张量积后再进行编织（在 $V \otimes V$中）所得的向量相同。事实上，$V \otimes V$中的这个向量为 $|A|^{-2} \cdot a \cdot b \cdot c$（$r$，$s$）$\cdot f$（$s$）$\otimes f$（$r^s$），由式（5.4）、公式（5.8）以及我们的假设—— f 是定义在 κ上的编织向量空间态射——可知。□

5.1.2. 关联群。

定义 5.1。 **26.** 对于一个架 R，我们函子性地关联由以下表示给出的群

$$\Gamma_R = \langle R : s^{-1}rs = r^s \text{ for all } (r,s) \in R^2 \rangle.$$

该群 从右侧作用于 R，有时称为 R的结构群。

该函子 $R \mapsto \Gamma_R$ 是从群范畴到架范畴的遗忘函子的左伴随，该遗忘函子见定理 5.1.4。

例 5.1.27。 设 R 是群 G的共轭封闭子集。上述伴随给出了一个群同态 $\Gamma_R \to G$，使得 R 到 G 的包含可经由该同态分解。群 G 通过共轭从右作用于 R，而 Γ_R 在 R 上的作用可经由群同态 $\Gamma_R \to G$分解。

例 5.1.28。 空架的结构群是平凡群。

例 5.1.29。 $\mathcal{T}_1$ 的结构群是（同构于） $\mathbb{Z}$。

例 5.1.30。 设 R，S是架。那么 $R \coprod S$的结构群是 R 的结构群与 S的结构群的直积。

定义 5.1.31。 设 R 是一个架。我们称 Γ_R 在 R 上的作用的轨道为 R的连通分支。若 R 恰有一个连通分支，则称其为连通的；等价地，若 Γ_R 在 R 上的作用是传递的，也称其为连通的。

R 的连通分支构成了定理 5.1.11 意义下对 R 的最细划分。空架不连通。

例 5.1.32。 群 G的共轭封闭子集 R，如果作为架是连通的，则是 G 的一个（单个）共轭类。群 G 的生成共轭类 R 作为架是连通的。

例 5.1.33。 定理 5.1.8 中的架 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$是连通的。

例 5.1.34。 定理 5.1.9 中的 Joyce quandle $\mathcal{S}_\pm$ 的连通分支为$\{J_1, J_2\}$ 和 $\{J_3\}$。接下来我们验证 $\mathcal{S}_\pm$ 的结构群是阿贝尔的。事实上，在 $\mathcal{S}_\pm$ 中通过 J_1 和 J_2 进行的共轭作用是恒等映射，并且 J_3 在$\mathcal{S}_\pm$的任意元素的共轭作用下保持不变。因此，$\mathcal{S}_\pm$ 的结构群中，$\mathcal{S}_\pm$ 的任意两个元素的像彼此交换，于是验证完成。类似的论证表明，定理 5.1.25 中构造的 quandle $(\mathcal{T}_2)_{c_\pm}$的结构群也是阿贝尔的。

对于特征不为 2 的域 κ，我们有一个编织向量空间的单射同态 $\kappa_\pm \to \kappa\mathcal{S}_\pm$，其定义如下：

$$v \mapsto J_3, \quad \underline{v} \mapsto J_1 - J_2$$

它作用于定理 2.0.6 中 $\kappa_\pm$ 的基上。

架 R 的结构群 Γ_R 的阿贝尔化 Γ_R^{ab}，在典范意义下同构于以 R的连通分支集合为基的自由阿贝尔群。

例 5.1.35. 设 n 为正整数， κ 为特征不整除 n的域，且 $\zeta \in \kappa$ 为一个本原 n次单位根。赋予 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 定理 5.1.8 中的架结构。那么，将定理 2.0.4 中固定的非零 $v_\zeta \in \kappa_\zeta$ 映到

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \zeta^{-r}\cdot r \in \kappa[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$$

根据定理 5.1.25 应用于 $R = \mathcal{T}_1$,$A = \{\alpha \in \kappa :\ \alpha^n = 1\}$，以及 $c\colon\ R\times R \to A$，它是编织向量空间的单射态射；后者是将 $R\times R$ 中的唯一一对映射到 ζ的 2-余循环。特别地，将整数模 n 的剩余类 r 映射到 $\zeta^r \in A$，从而把 A 与 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 等同后，上述架 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 便与定理 5.1.25 中的架 $(\mathcal{T}_1)_c$ 同构。

接下来，我们验证这个架的结构群是阿贝尔群（事实上是循环群）。为此，只需证明 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 中的所有元素在这个架的结构群中的像都相同。事实上，对于 $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，我们有

$$a = a^a = a + 1$$

在 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$的结构群中，因此，所需的相等性由以下事实得出：1 是整数模 n的剩余类加法群的生成元。

将子架 S 包含到架 R 中会诱导出一个群同态 $\Gamma_S \to \Gamma_R$，从而得到 Γ_S 在 R上的右作用。

引理 5.1.36。 设 $S \neq \emptyset$，且 Γ_S 在 R 上的作用是传递的。则 $S = R$。

证明。令 $r \in R$。我们的任务是证明 $r \in S$。由假设 S 非空，我们可以取 $s \in S$。Γ_S 在 R 上的作用的传递性给出 $\gamma \in \Gamma_S$，使得 $s^\gamma = r$。由于 S 是 R 的子架，我们有 $s^\gamma \in S$，因此如所要求的有 $r \in S$。□

定义 5.1.37。 对于架 R，记 Inn(R) 为 Aut(R) 的子群，该子群由自同构 $x \mapsto x^y$ 生成，其中 y 遍历 R，且 $x \in R$。我们称 Inn(R) 为 R 的内自同构群。

将 $y \in R$ 映射到 Inn(R) 中自同构 $x \mapsto x^y$ 的映射是架同态，因此，定理 5.1.26 后提到的伴随告诉我们，该映射可经由架同态 $R \to \Gamma_R$分解。因此，结构群 Γ_R 对 R 的作用可经由 Inn(R) 分解。因此， R 的连通分支就是 Inn(R) 在 R上的作用轨道。群同态 $\Gamma_R \to$Inn(R) 的核是 Γ_R 中对 R作用平凡的所有元素的集合。

例 5.1.38. 平凡架的内自同构群是平凡群。

例 5.1.39. 定理 5.1.8 中的架 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的内自同构群同构于群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。

例 5.1.40. $\mathcal{S}_\pm$ 的内自同构群同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

例 5.1.41。 对于架 R、 S，有 Inn($R \coprod S$) $\cong$Inn(R) $\times$ Inn(S)。

例 5.1.42。 $\mathcal{S}_\wedge$ 的内自同构群同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

例 5.1.43。 设 R 是群 G 的共轭封闭生成集。那么， R 的内自同构群同构于 G 关于其中心的商。

引理 5.1.44. 设 X 是架 R的一个子集。那么， X 生成 R，当且仅当 X 在 R 的每个连通分支中都至少包含一个元素，并且 X 在$\mathrm{Inn}(R)$中的像是一个生成集。

证明。 首先，假设 X 生成 R。由于 R 的连通分支的并是 R的子架，因此 R 的任何连通分支都不与 X不相交。因为 R在 Inn(R) 中的像是一个生成集，且 X 生成 R，所以 X 在 Inn(R) 中的像也构成一个生成集。至此，一个方向的证明完成。

对于反方向，现在假设 X 与 R 的每个连通分支都有交集，且其像生成 Inn(R)。令 $r \in R$，并用 S 表示由 X生成的 R 的子架。我们的任务是证明 $r \in S$。根据假设，存在 $x \in X$ ，它位于 r的连通分支中。由 X生成 Inn(R) 这一假设可知，存在 y_1、……、 $y_n \in X$和ϵ_1、……、 $\epsilon_n \in \{\pm 1\}$，使得

$$x^w = r, \quad w = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\epsilon_i} \in \mathrm{Inn}(R).$$

由于 $X \subseteq S$，我们得到 x、 y_1、……、 $y_n \in S$。因为 S是 R的子架，所以 $r \in S$。 □

以下是 [Shu24，定义 4.28]的一个特例。

定义 5.1.45。 如果对于架 R 的每个连通分支 C 和架 R 的每个连通分支 D，集合 $C \times D$ 是架 $R \times S$ 的一个连通分支，则称两个架 R 和 S 是同步的；也就是说， $R \times S$ 的结构群在 $C \times D$ 上的作用是传递的。

引理 5.1.46. 假设 R 是一个 *quandle*。那么 R 和 S 是同步的。

证明。 对于位于 R同一连通分支中的 r_1, r_2，以及位于 S同一连通分支中的 s_1, s_2，我们要证明 (r_1, s_1) 和 (r_2, s_2) 位于$R \times S$的同一连通分支中。根据我们的假设， r_1, r_2 位于同一连通分支，这意味着存在一个位于 s_1 的连通分支中的 s ，使得 (r_1, s_1) 和 (r_2, s) 位于$R \times S$的同一连通分支中。根据我们的假设， s_1, s_2位于同一连通分支，这意味着 s和 s_2位于同一连通分支中。这意味着存在 $x_1, \ldots, x_n \in S$和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{\pm 1\}$，使得

$$s^w = s_2, \quad w = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\epsilon_i}.$$

由于 R 是一个 quandle，我们有 $r_2^{r_2} = r_2$，因此

$$(r_2, s)^u = (r_2, s_2), \quad u = \prod_{i=1}^{n} (r_2, x_i^{\epsilon_i}).$$

由此可知，(r_1, s_2) 和 (r_2, s_2) 确实位于同一个连通分支中。 □

引理 5.1.47。 设 R和 S是架。则架同态 $R \times S \to \mathrm{Inn}(R)$ 经由 $\mathrm{Inn}(R \times S)$分解。换言之，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} R \times S & \longrightarrow & \mathrm{Inn}(R \times S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & \mathrm{Inn}(R) \end{array}$$

其中右侧的竖直箭头是一个群同态。

证明。 架同态 $R \times S \to$ Inn(R) 根据定理 5.1.26 后提到的伴随，可经由群同态 $\Gamma_{R \times S} \to$Inn(R) 分解。我们的任务是证明该群同态可经由群同态 $\Gamma_{R \times S} \to$ Inn($R \times S$) 分解。为此，我们取一个元素

$$g = \prod_{i=1}^{n} (r_i, s_i)^{\epsilon_i} \in \Gamma_{R \times S}, \quad (r_i, s_i) \in R \times S, \quad \epsilon_i \in \{\pm 1\},$$

该元素在 $R \times S$ 上的作用是平凡的，目的是验证 g 属于群同态 $\Gamma_{R\times S} \to \mathrm{Inn}(R)$ 的核。该同态将 g 映射到 $\prod_{i=1}^{n} r_i^{\epsilon_i} \in \mathrm{Inn}(R)$，后者在 R 上的作用是恒等映射，因为 g 在 $R \times S$ 上的作用是恒等映射。由此验证了 g 属于同态 $\Gamma_{R\times S} \to \mathrm{Inn}(R)$ 的核。□

定理 5.1.47 为我们提供了一个单射群同态 $\mathrm{Inn}(R \times S) \to \mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$。

引理 5.1.48。假设 R 非空，并且存在一个 $s \in S$，使得对于每个$x \in S$，都有 $x^s = x$。那么群同态 $\mathrm{Inn}(R \times S) \to \mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$ 是一个同构。

证明。记我们的群同态的像为 H。我们的任务是证明 $H = \mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$。$R$ 非空这一假设意味着，投影 $\mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S) \to \mathrm{Inn}(S)$ 在 H 上的限制是满射。要完成论证，只需（且必须）证明 H 包含该投影的核 $\mathrm{Inn}(R) \times \{\mathrm{id}_S\}$。

由于 H 是 $\mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$ 的子群，因此只需（且必须）证明 H包含生成集 $\{(r, \mathrm{id}_S) \in \mathrm{Inn}(R) \times \{\mathrm{id}_S\} : r \in R\}$ of $\mathrm{Inn}(R) \times \{\mathrm{id}_S\}$。事实上，由于对于每个 $x \in S$都有 $x^s = x$，群同态 $\mathrm{Inn}(R \times S) \to \mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$ 将 $(r, s) \in \mathrm{Inn}(R \times S)$ 映射为 (r, id_S)，对于每个 $r \in R$均如此，并且根据定义它属于 H。□

引理 5.1.49. 假设群同态 $\mathrm{Inn}(R \times S) \to \mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$ 是一个同构。那么 R 与 S 是同步的。

证明. 对于 $r \in R, s \in S$，$g \in \mathrm{Inn}(R)$、$h \in \mathrm{Inn}(S)$，我们需要证明 (r, s) 和 (r^g, s^h) 在 $R \times S$ 中位于 $\mathrm{Inn}(R \times S)$ 作用下的同一轨道上。我们的假设，即群同态 $\mathrm{Inn}(R \times S) \to \mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$ 是满射，保证存在一个 $\tau \in \mathrm{Inn}(R \times S)$，它映射到 $\mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$ 中的 (g, h)。由此可得 $(r, s)^\tau = (r^g, s^h)$，证毕。□

推论 5.1.50. 设 R 是一个连通架，S 是一个架，其群 $\mathrm{Inn}(S)$ 是阿贝尔群。假设存在 $s \in S$，使得对每个 $x \in S$，都有 $x^s = x$。设 X 是 $R \times S$ 的一个子集，其到 R 的投影生成 R，且到 S 的投影生成 S。那么X 生成 $R \times S$。

证明。</style}我们假设 R 是连通的，这意味着它非空，因此由定理 5.1.48 可知，群同态 $\mathrm{Inn}(R \times S) \to \mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$ 是同构。特别地，由定理 5.1.49 可推得，R 和 S 是同步的。

我们断言，对于 $R \times S$ 的每个连通分支 C，都有 $C \cap X \neq \emptyset$。我们假设 R 连通且与 S 同步，这意味着存在 S 的一个连通分支 D，使得 $C = R \times D$。根据假设，X 到 S 的投影生成了后者；结合定理 5.1.44可知，该投影与 D不相交。因此，X 与 C 不相交——断言得证。

接下来我们断言，X 在 $\mathrm{Inn}(R \times S)$中的像是一个生成集。为证明这一点，我们首先利用第一段中的同构，将 $\mathrm{Inn}(R \times S)$与 $\mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$等同起来。关于 X 的初始假设结合定理 5.1.44可知，$\mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$中的像 X 在每个因子上的投影都生成该因子。因此，由 Goursat 引理可知，存在一个群 G 以及满群同态 $\varphi: \mathrm{Inn}(R) \to G$和 $\psi: \mathrm{Inn}(S) \to G$，使得 $\mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S)$中由 X 的像生成的子群为

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathrm{Inn}(R) \times \mathrm{Inn}(S) : \varphi(\alpha) = \psi(\beta)\}.$$

我们假设 $\mathrm{Inn}(S)$ 是阿贝尔群，这意味着 G 也是阿贝尔群。由于 R 连通，其中的元素在 Γ_R 中共轭，因此在 $\mathrm{Inn}(R)$ 中也共轭，所以它们在 G 中的像也彼此共轭

因为 φ 是满射。由于 G 是阿贝尔群， G 中共轭的元素必相等，因此 R 的所有元素都映射到同一个 $g \in G$。由于 R 生成 Inn(R)，它在 G 中的像也生成该群，所以 g 生成 G。

取一个 $r \in R$。由前面的断言可知， X 包含一个元素 π ，它来自 $R \times S$ 中 (r, s) 的连通分支。根据我们对 s 的初始假设， π 在 Inn(R) $\times$ Inn(S) 中的像投影到 Inn(S) 后，在 S 上是恒等映射。由此可得 $g = \psi(\mathrm{id}_S) = 1$ ，因此 G 是平凡的。这就证明了我们的断言： X 在 Inn($R \times S$) 中的像生成了该群。

我们证明的两个断言结合定理 5.1.44，保证 X 按要求生成 $R \times S$。□

引理 5.1.51. 设 R 是一个架， S 是 R 的一个理想。那么，群同态 $\Gamma_S \to \Gamma_R$ 的像是 Γ_R 的一个正规子群。

证明. 只需（且必须）验证每个 $r \in R$ 都属于 Γ_S 在 Γ_R 中的像的正规化子。这立刻可由以下事实推出：对于每个 $s \in S$， $s^r \in S$，而这又是我们假设 S 是 R 的理想的推论。□

引理 5.1.52。 设 R 是一个架，且 S 是 R 的理想。则在 R 中 Γ_S 的作用下的轨道集合 $R/S = R/\Gamma_S$ 上存在唯一的架结构，使得商映射 $R \to R/S$ 是架同态。

我们称架 R/S 是 R 关于 S 的商。

证明。 由商映射的满射性，唯一性显然。对于存在性，我们需要检验两点。首先，我们需要检验，对于每个 x， $y \in R$ 和 $g \in \Gamma_S$， R 中的元素 $(x^g)^y$ 和 x^y 位于同一个 Γ_S-轨道中。由于 S 是 R 的理想，定理 5.1.51 告诉我们，Γ_S 在 Γ_R 中的像包含 $y^{-1}gy$ ，因此 x^y 与

$$(x^y)^{y^{-1}gy} = x^{yy^{-1}gy} = x^{gy} = (x^g)^y$$

如所要求。

其次，我们需要检验，对于每个 x， $y \in R$ 和 $g \in \Gamma_S$， R 中的元素 x^{y^g} 和 x^y 位于同一个 Γ_S-轨道中。由于 S 是 R 的理想，定理 5.1.51 保证 Γ_S 在 Γ_R 中的像包含 $y^{-1}g^{-1}yg$ ，因此 x^y 与

$$(x^y)^{y^{-1}g^{-1}yg} = x^{yy^{-1}g^{-1}yg} = x^{g^{-1}yg} = x^{y^g}$$

如要求的那样。至此，我们已经验证了 x， $y \in R$ x^y 的 Γ_S轨道仅取决于 x 的 Γ_S轨道和 y的 Γ_S轨道，从而赋予 R/S 所寻求的架结构。□

例 5.1.53。 对于一个架 R，映射 $R \to R/R$ 的纤维是 R的连通分支。沿用 [Shu24，定义 4.9] 我们将 R的平凡化称为 R/R ，并记作 R_{triv}。将架 R 关联到集合 R_{triv} 的对应是一个函子，它是赋予集合平凡架结构的函子的左伴随。

例 5.1.54。 $\mathcal{S}_\pm$ 关于理想 $\{J_3\}$ 的商同构于平凡架 $\mathcal{T}_2$。更一般地，按照定理 5.1.46 的证明中的论证，对于连通 quandle R ，架 $R \times \mathcal{S}_\pm$ 关于理想 $R \times \{J_3\}$ 的商同构于平凡架 $\mathcal{T}_2$。

5.2. **可加性**。

定义 5.2.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个加性幺半范畴，也就是说，对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 X ，函子 $X \otimes -$ 和 $- \otimes X$ 都是可加的。若 $\mathcal{C}$ 中的一对编织对象 (U, V) 配备了同构 $T_{U,V}\colon\ U \otimes V \to V \otimes U$ 和 $T_{V,U}\colon\ V \otimes U \to U \otimes V$，且这些同构属于 $\mathcal{C}$ ，并满足

图表

$$\begin{array}{ccccc}
U\otimes U\otimes V & \xrightarrow{T_U\otimes \mathrm{id}_V} & U\otimes U\otimes V & \xrightarrow{\mathrm{id}_U\otimes T_{U,V}} & U\otimes V\otimes U \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_U\otimes T_{U,V}} & & & & \downarrow{\scriptstyle T_{U,V}\otimes \mathrm{id}_U} \\
U\otimes V\otimes U & \xrightarrow{T_{U,V}\otimes \mathrm{id}_U} & V\otimes U\otimes U & \xrightarrow{\mathrm{id}_V\otimes T_U} & V\otimes U\otimes U \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_U\otimes T_{V,U}} & & & & \downarrow{\scriptstyle T_{V,U}\otimes \mathrm{id}_U} \\
U\otimes U\otimes V & \xrightarrow{T_U\otimes \mathrm{id}_V} & U\otimes U\otimes V & \xrightarrow{\mathrm{id}_U\otimes T_{U,V}} & U\otimes V\otimes U
\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccc}
V\otimes U\otimes U & \xrightarrow{T_{V,U}\otimes \mathrm{id}_U} & U\otimes V\otimes U & \xrightarrow{\mathrm{id}_U\otimes T_{V,U}} & U\otimes U\otimes V \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_V\otimes T_U} & & & & \downarrow{\scriptstyle T_U\otimes \mathrm{id}_V} \\
V\otimes U\otimes U & \xrightarrow{T_{V,U}\otimes \mathrm{id}_U} & U\otimes V\otimes U & \xrightarrow{\mathrm{id}_U\otimes T_{V,U}} & U\otimes U\otimes V
\end{array}$$

交换，并且将这些图中的 U 和 V 处处互换后得到的图也交换。

请注意，可加性并非一对编织对象的性质，而是一种额外结构（满足某些性质）。

定义 5.2.2。 在 $\mathcal{C}$ 中，从一对可加的编织对象（U， V）到一对可加的编织对象（X， Y）的态射，是一对$\mathcal{C}$ 中编织对象的态射（$f\colon U\to X$， $g\colon V\to Y$），使得该图

$$\begin{array}{ccccc}
U\otimes V & \xrightarrow[T_{U,V}]{} & V\otimes U & \xrightarrow[T_{V,U}]{} & U\otimes V \\
\downarrow{\scriptstyle f\otimes g} & & \downarrow{\scriptstyle g\otimes f} & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes g} \\
X\otimes Y & \xrightarrow{T_{X,Y}} & Y\otimes X & \xrightarrow{T_{Y,X}} & X\otimes Y
\end{array}$$

交换。

$\mathcal{C}$ 中的可加编织对象对构成一个范畴。

例 5.2.3。 设 V是 $\mathcal{C}$中的一个编织对象。则若令$T_{V,\ V}=T_V$，$(V,\ V)$便成为一对可加的编织对象。

定义 5.2.4. 对于 $\mathcal{C}$ 中的编织对象的一个可加对 (U,V)，我们函子性地关联到 $\mathcal{C}$ 中的对象 $U\oplus V$，其编织定义如下。将 $(U\oplus V)\otimes(U\oplus V)$ 识别为

$$(U\otimes U)\oplus(V\otimes V)\oplus(U\otimes V)\oplus(V\otimes U)$$

并令 $T_{U\oplus V}$ 在第一个直和项上为 T_U，在第二个直和项上为 T_V，在第三个直和项上为$T_{U,V}$，在第四个直和项上为 $T_{V,U}$。

请注意，编织对象的一个可加对的直和不仅取决于这些编织对象，也取决于该可加对所携带的额外结构。

在 $\mathcal{C}$ 中编织对象的可加对范畴上，我们有一个对合 $(U,V)\mapsto$，并且 $U\oplus V\cong V\oplus U$ 是 $\mathcal{C}$中的编织对 (V,U) 象。

自然包含映射和投影映射

$$U\to U\oplus V,\qquad V\to U\oplus V,\qquad U\oplus V\to U,\qquad U\oplus V\to V, \tag{5.11}$$

是编织对象的态射。

例 5.2.5。 设 U 和 V 是对称幺半加性范畴 $\mathcal{C}$ 中的编织对象。那么，按照公式 (5.1) 的记号，令 $T_{U,V} = s_{U,V}$ 和 $T_{V,U} = s_{V,U}$，则 (U,V) 成为编织对象的可加对。我们称编织对象 $U \oplus V$ 是 V 与 W 的普通直和。在普通直和运算下， $\mathcal{C}$ 中的编织对象范畴是对称幺半的，其中 $\mathcal{C}$ 的零对象是普通直和的单位对象。

如果 U 和 V 按照定理 2.0.3 的意义是置换型的，那么它们的普通直和 $U \oplus V$ 也是置换型的。

例 5.2.6。 对于域 κ，我们有定理 2.0.4 和定理 2.0.5 中引入的置换型编织向量空间的普通直和分解 $\kappa_\wedge = \kappa_1 \oplus \kappa_{-1} = \kappa \oplus \kappa_{-1}$。

例 5.2.7。 设 $\mathcal{C}$ 为一个带单位对象 I 的对称幺半加性范畴。设 $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(I)$ 为彼此可交换的元素，称其为权。若 $\mathcal{C}$ 是域 κ 上的向量空间范畴，则 $\alpha, \beta \in \kappa^\times$。

设 U 和 V 是 $\mathcal{C}$ 中的编织对象。令 $T_{U,V}$ 为 $s_{U,V}$ 与恒等映射 $V \otimes U \to V \otimes U \otimes I$ 和 $\mathrm{id}_{V\otimes U} \otimes \alpha$ 的复合，并类似地交换 U, V 与 α, β，则 (U,V) 成为编织对象的可加对。我们将此可加对的直和记为 $U \oplus_{\alpha,\beta} V$，并称其为 U, V 的加权（权为 α, β）直和。当且仅当 $\alpha = \beta = \mathrm{id}_I$ 时，加权直和才是通常的直和。

例如，采用定理 2.0.6 的记号，我们有

$$\kappa \oplus_{1,-1} \kappa = \kappa \oplus_{\mathrm{id}_\kappa, -\mathrm{id}_\kappa} \kappa \cong \kappa_\pm$$

作为 κ上的编织向量空间。

例 5.2.8。 设 S， $T \subseteq R$是一个架的划分， κ是一个域，且 $c\colon\ R \times R \to \kappa^\times$ 是一个 2-余循环。那么

$$\kappa R(c) \cong \kappa S(c|_{S\times S}) \oplus \kappa T(c|_{T\times T})$$

作为 κ上的编织向量空间，其中我们取了可加对的直和

$$(\kappa S(c|_{S\times S}), \kappa T(c|_{T\times T}))$$

关于映射的编织向量空间

$$\kappa S(c|_{S\times S}) \otimes \kappa T(c|_{T\times T}) \to \kappa T(c|_{T\times T}) \otimes \kappa S(c|_{S\times S}), \qquad s \otimes t \mapsto c(s,t) \cdot t \otimes s^t$$

and

$$\kappa T(c|_{T\times T}) \otimes \kappa S(c|_{S\times S}) \to \kappa S(c|_{S\times S}) \otimes \kappa T(c|_{T\times T}), \qquad t \otimes s \mapsto c(t,s) \cdot s \otimes t^s.$$

若按照定理 5.1.6 的含义， R 是不交并 S 和 T，则按照定理 5.2.5 的含义， κR 是 κS 和 κT 的普通直和。

例 5.2.9。 沿用定理 5.1.5、定理 5.1.6 和定理 5.1.8 中的记号，我们用 $\mathcal{S}_\wedge$ 表示三元素架 $\mathcal{T}_1 \coprod (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。于是，对于特征不等于 2 的域 κ，存在一个编织向量空间的单射态射

$$\kappa_\wedge = \kappa \oplus \kappa_{-1} \hookrightarrow \kappa \oplus \kappa[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] = \kappa\mathcal{T}_1 \oplus \kappa[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] = \kappa\left[\mathcal{T}_1 \coprod \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right] = \kappa[\mathcal{S}_\wedge]$$

由定理 5.2.6 得到的、id_κ 与定理 5.1.35 中的映射的直和，以及定理 5.2.8 中将不交并变换为直和的变换。

由定理 5.1.29、定理 5.1.35 和定理 5.1.30 可知， $\mathcal{S}_\wedge$ 的结构群是阿贝尔群。结合架在其结构群中的像是一个 quandle 这一事实，采用与定理 5.1.34 中类似的论证，可以证明定理 5.1.25 中架 $(\mathcal{T}_2)_{c_\wedge}$ 的结构群也为阿贝尔群。

例 5.2.10。 编织向量空间可加对的态射

$$(\mathrm{Span}_\kappa\{v\},\mathrm{Span}_\kappa\{\underline{v}\})\to(\kappa[\{J_3\}],\kappa[\{J_1,J_2\}]),\qquad v\mapsto J_3,\quad \underline{v}\mapsto J_1-J_2,$$

在域 κ 上，使用定理 2.0.6 和定理 5.2.8 的记号进行描述，通过定理 5.2.2 中的函子性，可得到定理 5.1.34 中的编织向量空间态射。

5.3. **张量积**。

定义 5.3.1。 设 $\mathcal{C}$ 为一个对称幺半范畴，且设 V，W 是 $\mathcal{C}$ 中的编织对象。我们将 $V\otimes W$ 上的编织定义为态射

$$T_{V\otimes W}=(\mathrm{id}_V\otimes s_{V,W}\otimes\mathrm{id}_W)\circ(T_V\otimes T_W)\circ(\mathrm{id}_V\otimes s_{W,V}\otimes\mathrm{id}_W)$$

从 $V\otimes W\otimes V\otimes W$ 到其自身，使用公式 (5.1) 中的记号。

$\mathcal{C}$ 中的编织对象范畴因此是一个对称幺半范畴，其单位对象 I 按照定理 2.0.2 进行编织。

定理 2.0.7 中的构造保持幺半结构，即如果 V 和 W 是 $\mathcal{C}$ 中的编织对象，那么同态 $B_n\to\mathrm{Aut}((V\otimes W)^{\otimes n})$ 可分解为

$$B_n\to B_n\times B_n\to\mathrm{Aut}(V^{\otimes n})\times\mathrm{Aut}(W^{\otimes n})\to\mathrm{Aut}(V^{\otimes n}\otimes W^{\otimes n})\cong\mathrm{Aut}((V\otimes W)^{\otimes n})$$

其中第一个映射是对角映射。

对于域 κ，定理 5.1.17 中的函子 $(R,c)\mapsto\kappa R(c)$ 是对称幺半的。

定义 5.3.2。对于域 κ 上的编织向量空间 W，我们引入如下编织向量空间

$$W_\zeta=W\otimes\kappa_\zeta,\qquad W_\wedge=W\otimes\kappa_\wedge,\qquad W_\pm=W\otimes\kappa_\pm.$$

若 R 是一个架，则由式 (5.5) 及前述幺半性可得

$$\begin{aligned}\kappa R_\wedge&=\kappa R\otimes\kappa_\wedge=\kappa R\otimes\kappa\mathcal{T}_2(c_\wedge)=\kappa[R\times\mathcal{T}_2](c_\wedge),\\ \kappa R_\pm&=\kappa R\otimes\kappa\mathcal{T}_2(c_\pm)=\kappa[R\times\mathcal{T}_2](c_\pm)\end{aligned}\tag{5.12}$$

作为 κ 上的编织向量空间。类似地，若 c 是 $\mathcal{T}_1$ 上像为 $\zeta\in\kappa^\times$ 的 2-余循环，则

$$\kappa R_\zeta=\kappa R\otimes\kappa_\zeta=\kappa R\otimes\kappa\mathcal{T}_1(c)=\kappa R(c)\tag{5.13}$$

作为 κ 上的编织向量空间，其中（滥用记号）我们将最后一个表达式中的 c 视为满足条件 $c(x,y)=\zeta$ 的 R 上的 2-余循环，对所有 $x,y\in R$ 均成立。

例 5.3.3. 设 κ 是一个域，R 是一个架。根据定理 5.3.2 和定理 2.0.5，我们得到 κ上的向量空间 $\kappa R_\wedge$，其基为

$$\bigcup_{x\in R}\{x_1=x\otimes v_1,\ x_{-1}=x\otimes v_{-1}\},$$

由.....编织

$$x_1\otimes y_1\mapsto y_1\otimes x_1^y,\quad x_1\otimes y_{-1}\mapsto y_{-1}\otimes x_1^y,\quad x_{-1}\otimes y_1\mapsto y_1\otimes x_{-1}^y,\quad x_{-1}\otimes y_{-1}\mapsto -y_{-1}\otimes x_{-1}^y,$$

for every $x,y\in R$.

例 5.3.4. 设 κ 是一个域，R 是一个架。根据定理 5.3.2 和定理 2.0.6，我们得到 κ上的向量空间 $\kappa R_\pm$，其基为

$$\bigcup_{x\in R}\{x=x\otimes v,\ \underline{x}=x\otimes\underline{v}\},$$

由.....编织

$$x\otimes y\mapsto y\otimes x^y,\quad x\otimes\underline{y}\mapsto\underline{y}\otimes x^y,\quad \underline{x}\otimes y\mapsto -y\otimes\underline{x}^y,\quad \underline{x}\otimes\underline{y}\mapsto\underline{y}\otimes\underline{x}^y,$$

对每个 x，$y\in R$。

命题 5.3.5。 设 (U,V) 是加性对称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中一对可加的编织对象，并设 W 是 $\mathcal{C}$ 中的一个编织对象。那么，如果令$(U\otimes W, V\otimes W)$，则它函子性地成为 $\mathcal{C}$ 中的一对可加的编织对象

$$T_{U\otimes W,V\otimes W}=\mathrm{id}_V\otimes s_{U,W}\otimes\mathrm{id}_W\circ T_{U,V}\otimes T_W\circ\ \mathrm{id}_U\otimes s_{W,V}\otimes\mathrm{id}_W$$

并通过交换上述公式中的 U、V 来定义 $T_{V\otimes W,\ U\otimes W}$。于是我们有

$$(U\oplus V)\otimes W\cong(U\otimes W)\oplus(V\otimes W)$$

作为 $\mathcal{C}$ 中的编织对象，其中直和是相对于编织对构造的。

证明。 利用定理 5.2.1 可以直接验证。 □

例 5.3.6。 对于域 κ 上的任意编织向量空间 W，根据定理 5.3.2、定理 5.2.6 和定理 5.3.5，我们有

$$W_\wedge=W\otimes\kappa_\wedge=W\otimes(\kappa\oplus\kappa_{-1})=(W\otimes\kappa)\oplus(W\otimes\kappa_{-1})=W\oplus W_{-1}$$

作为 κ 上的编织向量空间，其中第三项中的（一对）编织向量空间的直和是定理 5.2.5 意义下的普通直和，而最后一项中的直和对应于定理 5.3.5 中定义的可加对 $(W,\ W_{-1})$。

特别是，这个例子说明了一个微妙之处：即使 $U\oplus V$ 是普通直和，$(U\otimes W)\oplus(V\otimes W)$ 也未必是。这就是为什么我们需要强调，对于编织向量空间，可加性是一种额外结构——如果我们直接将直和称为“普通直和”，它就无法与张量积交换（也无法在张量积下以可控的方式变换）。

在特殊情形 $W=\kappa R$ 下，对于架 R，我们有

$$T_{W\otimes W_{-1}}(x_1\otimes y_{-1})=y_{-1}\otimes x_1^y,\qquad T_{W_{-1}\otimes W}(x_{-1}\otimes y_1)=y_1\otimes x_{-1}^y,\qquad x,y\in R.$$

利用公式 (5.12)，也可以由定理 5.2.8 得出这一结论。

例 5.3.7. 对于域 κ 上的任意编织向量空间 W，根据定理 5.3.2、定理 5.2.7 和定理 5.3.5，我们有

$$W_\pm=W\otimes\kappa_\pm=W\otimes(\kappa\oplus_{1,-1}\kappa)=(W\otimes\kappa)\oplus(W\otimes\kappa)=W\oplus\underline{W}$$

作为 κ 上的编织向量空间，其中 W 是 $\underline{W}$ 的一个副本，而上述四项中的第三项所出现的直和对应于可加对 $(W,\ W)$，其定义见定理 5.3.5。

在特殊情形 $W=\kappa R$ 下，对于架 R，我们有

$$T_{W\otimes\underline{W}}(x\otimes\underline{y})=\underline{y}\otimes x^y,\qquad T_{\underline{W}\otimes W}(\underline{x}\otimes y)=-y\otimes\underline{x}^y,\qquad x,y\in R.$$

利用公式 (5.12)，也可以由定理 5.2.8 得出这一结论。

例5.3.8. 设 n 是一个正整数，κ 是一个特征不整除 n 的域，且 $\zeta\in\kappa$ 是一个本原 n 次单位根。利用 κR 上恒等映射与定理 5.1.35 中的单射态射的张量积，以及定理 5.1.17 中函子的幺半性，我们得到一个编织向量空间的单射态射

$$\kappa R_\zeta=\kappa R\otimes\kappa_\zeta\hookrightarrow\kappa R\otimes\kappa[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]=\kappa[R\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$$

它与通过将 κR_ζ 与 $\kappa R(c)$ 视为相同对象、由式 (5.13) 得到的单射态射一致，并应用定理 5.1.25。

例5.3.9。 设 κ 是一个特征不等于 2 的域。利用 κR 上恒等映射与定理 5.2.9 中的单射态射的张量积，以及定理 5.1.17 中函子的幺半性，我们得到一个编织向量空间的单射态射

$$\kappa R_\wedge=\kappa R\otimes\kappa_\wedge\hookrightarrow\kappa R\otimes\kappa\mathcal{S}_\wedge=\kappa[R\times\mathcal{S}_\wedge].$$

由定理 5.1.10 及其后的备注可知，我们得到 $R\times\mathcal{S}_\wedge$ 的一个划分，其中一部分为 $R\times\mathcal{T}_1\cong R$，另一部分为 $R\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

例 5.3.10。设 κ 是一个特征不等于 2 的域。利用 κR 上恒等映射与定理 5.1.34 中的单射态射的张量积，以及定理 5.1.17 中函子的幺半性，我们得到一个编织向量空间的单射态射

$$\kappa R_\pm=\kappa R\otimes\kappa_\pm\hookrightarrow\kappa R\otimes\kappa\mathcal{S}_\pm=\kappa[R\times\mathcal{S}_\pm].$$

$R\times\mathcal{S}_\pm$ 有一个划分，其中一部分为 $R\times\{J_3\}\cong R$，另一部分为 $R\times\{J_1,J_2\}\cong R\times\mathcal{T}_2$。因此，由定理 5.2.8 可得 $\kappa[R\times\mathcal{S}_\pm]=\kappa[R\times\{J_3\}]\oplus\kappa[R\times\{J_1,J_2\}]$。

由定理 5.3.5（中的函子性）和定理 5.2.10，我们得到编织向量空间的可添加对的态射

$$(\kappa R,\underline{\kappa R})\to(\kappa[R\times\{J_3\}],\kappa[R\times\{J_1,J_2\}]),\qquad r\mapsto(r,J_3),\quad \underline{r}\mapsto(r,J_1)-(r,J_2),$$

对于 $r\in R$，采用定理 5.3.6 中的记号。该态射通过定理 5.2.2 中的函子性，诱导出上述编织向量空间的单射同态 $\kappa R_\pm\to\kappa[R\times\mathcal{S}_\pm]$。

5.4. 卷积。对于对称幺半加性范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 V,W，我们将默认作如下认定

$$(V\oplus W)^{\otimes n}\cong\bigoplus_{i=0}^{n}\bigoplus_{\sigma\in S_n/(S_i\times S_{n-i})}\bigotimes_{j=1}^{n}Z(i,j;\sigma)\tag{5.14}$$

其中

$$Z(i,j;\sigma)=\begin{cases}V & j\in\{\sigma(1),\dots,\sigma(i)\}\\ W & j\in\{\sigma(i+1),\dots,\sigma(n)\}.\end{cases}$$

注 5.4.1. 设 (V,W) 是对称幺半加性范畴 $\mathcal{C}$ 中一对可加的编织对象。对于每个 $0\le i\le n$，B_n 在 $(V\oplus W)^{\otimes n}$ 上的作用限制为 $B_{i,n-i}$ 在子对象 $V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)}$ 上的作用，该子对象由取式 (5.14) 中的平凡陪集 $S_i\times S_{n-i}$ 得到。若为普通直和，则后一个作用是由 $B_i\times B_{n-i}$ 在 $V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)}$ 上的外张量积作用膨胀而来。

注 5.4.2. 设 $S,T\subseteq R$ 是一个架的划分，且 κ 是一个域。令 $V=\kappa S,W=\kappa T$，我们回顾定理 5.2.8：$\kappa R\cong\kappa V\oplus\kappa W$ 是编织向量空间。定理 5.1.18 中的同构 $\kappa R^n\cong\kappa R^{\otimes n}$ 将 $k=2$ 的式 (5.3) 中的不交并分解与式 (5.14) 中的直和分解互换，并将式 (5.14) 中第 i 个直和项映射到 κ 上由 $R(i,n-i)$ 张成的空间。

命题 5.4.3。 **</style}设**(V,W) 是域 κ 上编织向量空间的可加对。那么我们有一个自然同构

$$(V\oplus W)^{\otimes n}\cong\bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Ind}_{B_{i,n-i}}^{B_n}V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)}$$

关于 κ上的 B_n 的表示。

证明。根据直和的泛性质，要构造一个从右侧到左侧的映射，只需指定一个元素

$$\mathrm{Hom}_{B_n}(\mathrm{Ind}_{B_{i,n-i}}^{B_n}V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)},(V\oplus W)^{\otimes n})=\mathrm{Hom}_{B_{i,n-i}}(V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)},(V\oplus W)^{\otimes n})$$

对每个 $0\le i\le n$ 都成立，因为诱导是限制的左伴随。所需元素由式 (5.14) 中平凡陪集（$\sigma=$id）直和项的包含给出。

要构造一个反方向的映射，只需给出一个元素

$$\mathrm{Hom}_{B_n}((V\oplus W)^{\otimes n}, \mathrm{Ind}_{B_{i,n-i}}^{B_n} V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)}) = \mathrm{Hom}_{B_{i,n-i}}((V\oplus W)^{\otimes n}, V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)})$$

对于每个 $0\le i\le n$，因为诱导是限制的右伴随，并且$B_{i,\ n-i}$ 是 B_n 的有限指数子群。所需元素由公式 (5.14) 中投影到平凡陪集直和项上的映射给出。

由此我们得到了方向相反的映射。最后，只需验证它们的复合是恒等态射。□

接下来，我们解释定理 5.4.3 中的同构如何随 n 变化而保持相容。为此，令

$$U_n = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{Ind}_{B_{i,n-i}}^{B_n} V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)}.$$

现在我们将（内在地）定义 κ-线性映射（事实上是同构）

$$\xi_{m,n}\colon U_m\otimes U_n\to U_{m+n},\qquad m,n\ge 0,$$

它们在公式 (2.1) 中扮演垂直映射的角色。也就是说，对于非负整数 m，n 和$g\in B_m$，$h\in B_n$，我们希望得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} U_m\otimes U_n & \xrightarrow{g\otimes h} & U_m\otimes U_n \\ \downarrow{\scriptstyle \xi_{m,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_{m,n}} \\ U_{m+n} & \xrightarrow{gh} & U_{m+n} \end{array}$$

在 κ 上的向量空间，其中 gh 表示辫子的并置。

为此，只需对每个 $0\le i\le m$ 和 $0\le j\le n$ 构造一个从以下对象出发的、 $B_m\times B_n$ 在 κ 上的表示同态

$$\mathrm{Ind}_{B_{i,m-i}}^{B_m}(V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(m-i)})\otimes \mathrm{Ind}_{B_{j,n-j}}^{B_n}(V^{\otimes j}\otimes W^{\otimes(n-j)}) \tag{5.15}$$

到表示在 $B_m\times B_n$ 上的限制

$$\mathrm{Ind}_{B_{i+j,m+n-(i+j)}}^{B_{m+n}} V^{\otimes i+j}\otimes W^{\otimes(m+n-(i+j))} \tag{5.16}$$

该表示是 B_{m+n} 的。

式（5.15）中的 $B_m\times B_n$ 的 κ-线性表示同构于

$$\mathrm{Ind}_{B_{i,m-i}\times B_{j,n-j}}^{B_m\times B_n}(V^{\otimes(i+j)}\otimes W^{\otimes(m+n-(i+j))})$$

根据麦基公式，式（5.16）中的表示在 $B_m\times B_n$ 上的限制同构于

$$\bigoplus_{g\in(B_m\times B_n)\backslash B_{m+n}/B_{i+j,m+n-(i+j)}} \mathrm{Ind}_{gB_{i+j,m+n-(i+j)}g^{-1}\cap(B_m\times B_n)}^{B_m\times B_n} V^{\otimes i+j}\otimes W^{\otimes(m+n-(i+j))}.$$

由于诱导是限制的左伴随，我们正在寻找一个从 $V^{\otimes\ (i+j)}\otimes W^{\otimes(m+n-(i+j))}$ 到表示在 $B_{i,\ m-i}\times B_{j,\ n-j}$ 上的限制的表示同态，其中 $B_{i,\ m-i}\times B_{j,\ n-j}$ 在 κ 上

$$\mathrm{Ind}_{gB_{i+j,m+n-(i+j)}g^{-1}\cap(B_m\times B_n)}^{B_m\times B_n} V^{\otimes i+j}\otimes W^{\otimes(m+n-(i+j))} \tag{5.17}$$

根据直和的泛性质，这是 $B_m\times B_n$ 的表示同态。

由于$B_{i+j,\ m+n-(i+j)}$ 在 B_{m+n} 中的指数有限，因此

$$[B_m\times B_n : gB_{i+j,m+n-(i+j)}g^{-1}\cap(B_m\times B_n)]$$

因为指数的有限性在共轭作用以及与子群取交下保持不变。按照我们之前采用的类似方法——将麦基公式应用于式（5.17）中的表示在$B_{i,\ m-i} \times B_{j,\ n-j}$上的限制，应用直和的泛性质，验证指数有限，再利用由此得到的诱导对限制的右伴随性——最终，我们从辫群某个适当子群的表示$V^{\otimes(i+j)} \otimes W^{\otimes(m+n-(i+j))}$ 的恒等态射出发，得到所需的映射$\xi_{m,\ n}$ 。

n 变化时上述相容性体现为下图的交换性

$$\begin{array}{ccc} (V\oplus W)^{\otimes m}\otimes(V\oplus W)^{\otimes n} & \longrightarrow & U_m\otimes U_n \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_{m,n}} \\ (V\oplus W)^{\otimes m+n} & \longrightarrow & U_{m+n} \end{array}$$

上的向量空间，其中水平映射来自定理 5.4.3 给出的同构，而左侧垂直映射来自向量空间的对称幺半结构所给出的同构。

推论 5.4.4。 设 V、W 是定理 *2.0.3* 意义下域 κ 上的置换型编织向量空间。则

$$(V\oplus W)^{\otimes n} \cong \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{Ind}_{S_i\times S_{n-i}}^{S_n} V^{\otimes i}\boxtimes W^{\otimes(n-i)}$$

作为 κ上的 S_n 表示，其中左侧置换型编织向量空间的直和是定理 *5.2.5* 意义下的普通直和。

证明。 应用定理 5.4.3、定理 5.4.1，以及诱导与膨胀的交换性。 □

推论 5。 **4.5.** 对于域 κ 上的编织向量空间的可加对$(V、\ W)$，我们有 e

$$(V\oplus W)_{B_n}^{\otimes n} \cong \bigoplus_{i=0}^{n} (V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)})_{B_{i,n-i}}$$

若直和是普通直和，则这与 $\bigoplus_{i=0}^{n} V_{B_i}^{\otimes i}\otimes W_{B_{n-i}}^{\otimes(n-i)}$ 同构。因此，定理 *2.0.9* 中将 κ 上的编织向量空间对应到其余不变元代数的函子，相对于定理 *5.2.5* 中的朴素直和幺半结构是对称幺半的。

证明。 由定理 5.4.3、余不变量的可加性以及夏皮罗引理可得

$$\begin{aligned} H_0(B_n,(V\oplus W)^{\otimes n}) &= H_0\left(B_n,\bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Ind}_{B_{i,n-i}}^{B_n} V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)}\right) \\ &= \bigoplus_{i=0}^{n} H_0(B_{i,n-i},V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)}). \end{aligned}$$

若直和是普通直和，由定理 5.4.1 可知

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=0}^{n} H_0(B_{i,n-i},V^{\otimes i}\otimes W^{\otimes(n-i)}) &= \bigoplus_{i=0}^{n} H_0(B_i\times B_{n-i},V^{\otimes i}\boxtimes W^{\otimes(n-i)}) \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^{n} H_0(B_i,V^{\otimes i})\otimes H_0(B_{n-i},W^{\otimes(n-i)}). \end{aligned}$$

对于（对称的）幺半性陈述，我们主要需要验证

$$C(V\oplus W)\cong C(V)\otimes C(W)$$

作为分次 κ-代数，其中左侧编织向量空间的直和是朴素的。事实上，由上述内容以及定理 5.4.3 证明后的讨论可知，我们有一个分次 κ-代数的同构

$$C(V\oplus W)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(V\oplus W)^{\otimes n}_{B_n}\cong\bigoplus_{n=0}^{\infty}\bigoplus_{i=0}^{n}V_{B_i}^{\otimes i}\otimes W_{B_{n-i}}^{\otimes(n-i)}$$
$$\cong\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty}V_{B_i}^{\otimes i}\right)\otimes\left(\bigoplus_{j=0}^{\infty}W_{B_j}^{\otimes j}\right)=C(V)\otimes C(W)$$

正如所要求的。 □

对于域 κ 上编织向量空间的一个可加对 $(V,\ W)$，公式 (5.11) 及余不变量代数的函子性为我们提供了一个分次 κ-代数的包含

$$C(V)\to C(V\oplus W),\tag{5.18}$$

以及一个分次 κ-代数的满射

$$C(V\oplus W)\to C(V).\tag{5.19}$$

这个包含（分别地，满射）也可由定理 5.4.5 通过包含（分别地，投影到） $i=n$ 项得到。

我们用 triv_n 表示域 κ 上 S_n 的平凡一维表示，用 sign_n 表示域 κ 上 S_n 的符号表示，用 $\mathsf{Perm}_n=\mathsf{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}\kappa$ 表示 S_n 的置换表示，并用 std_n 表示 $\{v\in\mathsf{Perm}_n:\ v_1+\cdots+v_n=0\}$ 上 S_n 的标准表示。若 κ 的特征不整除 n，则有 $\mathsf{Perm}_n=\mathsf{triv}_n\oplus\mathsf{std}_n$。

推论 5.4.6。 我们有一个 S_n-表示的同构

$$\kappa_{\wedge}^{\otimes n}\cong\bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Ind}_{S_i\times S_{n-i}}^{S_n}\mathrm{sign}_{n-i}\cong\bigoplus_{i=0}^{n}\wedge^i\mathrm{Perm}_n$$

在 κ 上，并且当 κ 的特征不整除 n时， S_n 的这些表示也同构于

$$\bigoplus_{i=0}^{n}\wedge^i\mathrm{std}_n\oplus\wedge^{i-1}\mathrm{std}_n\cong\bigoplus_{i=0}^{n-1}(\wedge^i\mathrm{std}_n)^{\oplus 2}.$$

证明。 定理 5.2.6 和定理 5.4.4 告诉我们

$$\kappa_{\wedge}^{\otimes n}=(\kappa\oplus\kappa_{-1})^{\otimes n}=\bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Ind}_{S_i\times S_{n-i}}^{S_n}\kappa^{\otimes i}\otimes\kappa_{-1}^{\otimes(n-i)}=\bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Ind}_{S_i\times S_{n-i}}^{S_n}\mathrm{sign}_{n-i}.$$

我们断言，对于每个 $0\le i\le n$，都有

$$\mathrm{Ind}_{S_i\times S_{n-i}}^{S_n}\mathrm{sign}_{n-i}\cong\wedge^{n-i}\mathrm{Perm}_n\tag{5.20}$$

作为 S_n 上的表示。由于诱导是限制的左伴随，我们有

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(\mathrm{Ind}_{S_i\times S_{n-i}}^{S_n}\mathrm{sign}_{n-i},\wedge^{n-i}\mathrm{Perm}_n)\cong\mathrm{Hom}_{S_i\times S_{n-i}}(\mathrm{sign}_{n-i},\wedge^{n-i}\mathrm{Perm}_n)$$
$$\cong\mathrm{Hom}_{S_i\times S_{n-i}}(\wedge^{n-i}\mathrm{Perm}_{n-i},\wedge^{n-i}\mathrm{Perm}_n)$$

作为 κ 上的向量空间。 $\{i+1,\dots,n\}$ 到 $\{1,\dots,n\}$ 的包含给出了 $S_i\times S_{n-i}$的表示之间的同态 $\mathsf{Perm}_{n-i}\to\mathsf{Perm}_n$，因此取其第 $(n-i)$ 个外幂，便得到一个从式 (5.20) 右侧到左侧的 S_n 在 κ 上的表示同态。

由于 $\mathbf{Perm}_n$ 是 (S_n，因而也是) $S_i \times S_{n-i}$的自对偶表示，且对偶性与构造外幂可交换，因此我们得到一个 κ上的 $S_i \times S_{n-i}$-表示的态射 $\wedge^{n-i}\mathbf{Perm}_n \to \wedge^{n-i}\mathbf{Perm}_{n-i}$。由于群 S_n 是有限的，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{S_n}(\wedge^{n-i}\mathrm{Perm}_n, \mathrm{Ind}_{S_i\times S_{n-i}}^{S_n}\mathrm{sign}_{n-i}) &\cong \mathrm{Hom}_{S_i\times S_{n-i}}(\wedge^{n-i}\mathrm{Perm}_n, \mathrm{sign}_{n-i})\\ &\cong \mathrm{Hom}_{S_i\times S_{n-i}}(\wedge^{n-i}\mathrm{Perm}_n, \wedge^{n-i}\mathrm{Perm}_{n-i})\end{aligned}$$

作为 κ 上的向量空间，这给出了从右侧到公式（5.20）左侧的 S_n 在 κ 上的表示同态。因此，我们构造出了公式（5.20）中 S_n-表示之间的态射，并且可以验证这些态射互为逆。

若 κ 的特征不整除 n，则有

$$\wedge^i \mathrm{Perm}_n \cong \wedge^i(\mathrm{std}_n \oplus \mathrm{triv}_n) = \wedge^i \mathrm{std}_n \oplus \wedge^{i-1}\mathrm{std}_n \tag{5.21}$$

作为 κ 上的 S_n 的表示，因此注意到 $i=0$ 和 $i=n$ 各自只贡献一个（非零）项，即可得到所需的同构。□

对于每个 $0 \le i \le n$，如公式（3.2）和公式（3.3）所示，我们有以下态射

$$\tau^{(i)}\colon \mathrm{Conf}^{i,n-i} \to \mathrm{Conf}^n, \qquad c_i\colon \mathrm{Conf}^{i,n-i} \to \mathrm{Conf}^i \times \mathrm{Conf}^{n-i}.$$

推论 5.4.7。设 κ 是一个有限域，V、W 是 κ 上的有限维编织向量空间。设 S 是数域 K 的整数环的谱中的一个开子概形，并且对于每个非负整数 n，设 $\mathcal{V}_n$（分别为 $\mathcal{W}_n$）是 $\mathrm{Conf}^n \times S$ 上取值于 κ 的向量空间的可构造局部常值 *étale* 层，其基变换至 $\mathrm{Conf}^n \times \mathbb{C}$ 后的解析化对应于 B_n 在 κ 上的表示 $V^{\otimes n}$（分别为 $W^{\otimes n}$）。那么，向量空间的 *étale* 层

$$\mathcal{U}_n = \bigoplus_{i=0}^{n} \tau_*^{(i)} c_i^{-1}(\mathcal{V}_i \boxtimes \mathcal{W}_{n-i})$$

在 κ 上是局部常值可构造的，其基变换到 $\mathrm{Conf}^n \times \mathbb{C}$ 后的解析化对应于 B_n 在 κ 上的表示 $(V \oplus W)^{\otimes n}$，其中编织向量空间的直和是普通直和，而 $\mathcal{U}$ 的迹函数是 $\mathcal{V}$ 的迹函数与 $\mathcal{W}$ 的迹函数的狄利克雷卷积，即对于每个 $\mathfrak{p} \in S$、$\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ 的有限扩张 $\mathbb{F}_q$，以及每个首一无平方因子 $f \in \mathbb{F}_q[t]$，我们有

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_f, \mathcal{U}_f) = \sum_{gh=f} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_g, \mathcal{V}_g)\cdot \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_h, \mathcal{W}_h)$$

其中 g、$h \in \mathbb{F}_q[t]$ 遍历首一（互素、无平方因子）多项式，而诸如 $\mathcal{U}_f$ 这样的表达式是 $\mathcal{U}_{\deg f}$ 在 $f \in \mathrm{Conf}^{\deg f}(\mathbb{F}_q)$ 上方某个几何点处的 *étale* 茎的简写。

证明。局部常值可构造这一性质在张量积、拉回、直和以及适当光滑映射的推前下保持不变。态射 $\tau^{(i)}$ 是 étale 的，因而光滑；又是有限的，因而适当，所以层 $\mathcal{U}_n$ 的局部常值性和可构造性由此得证。

到 $\mathrm{Conf}^n \times \mathbb{C}$ 的基变换是一个可加的函子，即它与直和交换。根据真基变换定理，到 $\mathbb{C}$ 的基变换与 $\tau^{(i)}$交换。由 c_i 给出的拉回也与到 $\mathbb{C}$ 的基变换满足适当的交换性，因为后者本身就是由拉回给出的，而且拉回会反转复合的阶。类似地，到 $\mathbb{C}$的拉回与外张量积交换。

解析化是一个加性函子，与推前、拉回和外张量积交换。

将 $\tau^{(i)}$（分别地，c_i）基变换到 $\mathbb{C}$ 后再进行解析化，会诱导出 $B_{i,\ n-i}$到 B_n的包含（分别地，$B_{i,\ n-i}$ 到 $B_i \times B_{n-i}$的投影）。

局部常值层与基本群的表示之间的等价是可加的，它将 $\tau_*^{(i)}$对应为从 $B_{i,\ n-i}$ 到 B_n的表示的诱导，将 c_i^{-1}对应为从 $B_i \times B_{n-i}$ 到 $B_{i,\ n-i}$的表示的膨胀。现在，定理 5.4.1 和定理 5.4.3 推出所断言的与 $(V \oplus W)^{\otimes n}$的对应关系。

根据函数—层对应，直和对应于函数的求和；沿有限映射 $\tau^{(i)}$ 的推前对应于对 $\mathbb{F}_q$上所有分解的求和，其中分解为一个次数为 i 的多项式与一个次数为 $n-i$ 的多项式的乘积；拉回对应于函数的限制，而张量积对应于函数的乘积。因此，关于卷积的结论便随之得出。□

推论 5.4.8。对于每个非负整数 n，在Conf^n 上存在唯一的光滑层 $\mathcal{U}_n$，其为 κ 上的向量空间且满足以下性质。

- $\mathcal{U}_n$ 的算术单值群与其几何单值群相同。
- $\mathcal{U}_n$ 基变换到$\mathrm{Conf}^n \times \mathbb{C}$ 后的解析化对应于 B_n的表示$\kappa_\wedge^{\otimes n}$ 。
- 对于每个首一无平方因子多项式 $f \in \mathbb{F}_q[t]$，我们有

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_f, \mathcal{U}_f) = \begin{cases} 0 & f \text{ has an irreducible factor over } \mathbb{F}_q \text{ of even degree} \\ d_2(f) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.22}$$

证明。唯一性是一个一般事实，它可由切博塔廖夫密度定理的一个版本推出。

我们通过在定理 5.4.7 中取 $K = \mathbb{Q}$、$S = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$、$\mathcal{V}_n$ 秩 1 的常值层，以及如定理 3.1.2 中所述的 S_n 符号表示对应的层 $\mathcal{W}_n$，来构造 $\mathcal{U}_n$。在此情形下，V 是平凡的一维编织向量空间，并且 $W = \kappa_{-1}$。根据定理 3.1.1，$\mathcal{V}_n$ 的迹函数为 1；根据定理 3.1.2，$\mathcal{W}_n$ 的迹函数为莫比乌斯函数乘以 $(-1)^n$，特别地，这两个函数都是乘法性的。由定理 5.2.6，$\kappa_\wedge = \kappa \oplus \kappa_{-1}$，因此只需验证式 (5.22) 右侧的算术函数与常值函数 1 和函数 $f \mapsto (-1)^{\deg f} \cdot \mu(f)$的卷积一致。由于乘法函数的卷积仍是乘法函数，且因子函数也是乘法函数，所以式 (5.22) 右侧的函数是乘法函数；而我们在 $\mathbb{F}_q[t]$中只处理无平方因子的（首一）多项式，因此只需验证上述等式对不可约多项式成立。对于不可约多项式，当其次数为奇数时，式 (5.22) 两侧均等于 2；当其次数为偶数时，两侧均等于 0。□

推论 5.4.9。令 $\chi\colon \mathbb{F}_q^\times \to \{\pm 1\}$ 为非平凡特征，并令 $\kappa = \mathbb{Q}_\ell$。则将式（*3.13*）中的 $\bigoplus_{i=0}^n \tau_*^{(i)}$ 结式映射$^{-1}\,\mathcal{L}_\chi$ 基变换至 $\mathbb{C}$ 后再进行解析化，对应于 B_n 的表示 $\kappa_\pm^{\otimes n}$ 。

证明。将 $\tau_*^{(i)}\mathrm{Res}^{-1}\,\mathcal{L}_\chi$ 基变换至 $\mathbb{C}$ 后再进行解析化，对应于从 $B_{i,n-i}$ 到 B_n 的诱导表示，其中一维表示中 σ_i^2 通过取负作用，而 $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{n-1}$ 均通过恒等映射作用。

由定理 5.2.7 和定理 5.4.3 可知

$$\kappa_\pm^{\otimes n} \cong \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{Ind}_{B_{i,n-i}}^{B_n} \mathrm{Span}_\kappa\, v^{\otimes i} \otimes \underline{v}^{\otimes (n-i)}$$

作为 B_n 的表示，采用定理 2.0.6 中的记号。要结束论证，只需验证 B_i 的生成元 $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i^2, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ 在 $_{n-i}$ 的张成空间 $\mathrm{Span}_\kappa\, v^{\otimes i} \otimes v^{\otimes (n-i)}$ 上的作用与上一段中的作用相同。□

例 5.4.10。 由定理 5.2.10、定理 5.4.2 和定理 5.4.3 可知，对于一个域 κ ，我们有一个表示的单射同态

$$\bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{Ind}_{B_{i,n-i}}^{B_n} \mathrm{Span}_\kappa v^{\otimes i} \otimes \underline{v}^{\otimes(n-i)} \to \bigoplus_{i=0}^{n} \kappa\mathcal{S}_\pm(n-i,i)$$

ove B_n ov er κ，将左侧的第 i 个直和项映射到右侧的第 i 个直和项 .

5.5. **余不变元代数**。

定义 5.5.1. 设 R 是一个架。对于 x， $y \in R$ 考虑递归定义的序列

$$x_0 = x, \qquad x_{i+1} = x_i^y, \qquad i \geq 0.$$

利用 Γ_R 在 R 上的（右）作用，我们也可以通过以下方式定义该序列

$$x_i = x_0^{y^i}, \qquad i \geq 0.$$

命题 5.5.2. 设 R 是一个有限架， κ 是一个域， $c\colon R \times R \to \kappa^\times$ 是一个分圆的 2-余循环，且 x, $y \in R$。那么存在一个（最小）正整数 $\mathfrak{q}(x,y)$ 使得 $x_{\mathfrak{q}(x,y)} = x$，以及一个最小正整数 $\mathfrak{p}(x,y)$ 使得

$$x_{\mathfrak{p}(x,y)} = x, \qquad \prod_{i=0}^{\mathfrak{p}(x,y)-1} c(x_i, y) = 1,$$

因此，在定理 *5.1.17* 中所述的编织向量空间 $\kappa R(c)$ 的分次 κ余不变元代数中，一次元 x 与齐次元 $y^{\mathfrak{p}(x,y)}$ 交换，并且

$$y^{P_y} \in Z(C(\kappa R(c))), \qquad P_y = \mathrm{lcm}_{x\in R}\, \mathfrak{p}(x,y),$$

也就是说， y 的某个适当幂位于编织向量空间 $\kappa R(c)$的余不变量代数 $C(\kappa R(c))$的中心。

证明。 由定理 5.1.1，函数 $t \mapsto t^y$ 是 R 上的双射，因此根据我们的假设， R 是有限的，这意味着存在一个（最小的）正整数 m ，使得 $x_{\mathfrak{q}(x,y)} = x$。于是，对于每个正整数 l ，我们都有

$$\prod_{i=0}^{l\cdot\mathfrak{q}(x,y)-1} c(x_i,y) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \prod_{i=j\cdot\mathfrak{q}(x,y)}^{(j+1)\cdot\mathfrak{q}(x,y)-1} c(x_i,y) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \prod_{i=0}^{\mathfrak{q}(x,y)-1} c(x_i,y) = \left(\prod_{i=0}^{\mathfrak{q}(x,y)-1} c(x_i,y)\right)^l$$

根据我们的假设， c 是分圆的，因此对于某个（最小的）正整数 $l = l_0$ ，其值等于 1。我们令 $\mathfrak{p}(x,y) = l \cdot \mathfrak{q}(x,y)$。

接下来我们断言，对于每个正整数 j ，都有

$$xy^j = \prod_{i=0}^{j-1} c(x_i,y) \cdot y^j x_j \tag{5.23}$$

在 $C(\kappa R(c))$ 中，或者等价地，用定理 5.1.22 的记号表示，

$$\nabla(x_1, y, \ldots, y; \sigma_1 \cdots \sigma_j) = \prod_{i=0}^{j-1} c(x_i, y)$$

其中，在上面的左侧， y （隐式地）出现了 j 次。我们以证明定理 5.1.22 的相同方式证明公式 (5.23)——对 j 进行诱导，基例 $j = 1$ 与公式（5.4）完全相同。

假设 $j>1$，由归纳假设可得

$$xy^j = xy^{j-1}y = \prod_{i=0}^{j-2} c(x_i,y)\cdot y^{j-1}x_{j-1}y = \prod_{i=0}^{j-2} c(x_i,y)\cdot c(x_{j-1},y)\cdot y^{j-1}yx_{j-1}^y = \prod_{i=0}^{j-1} c(x_i,y)\cdot y^j x_j$$

从而完成归纳，也就证明了该断言。

将上述断言应用于 $j=\mathfrak{p}(x,\ y)$，可知 x 与 $y^{\mathfrak{p}(x,y)}$ 确实交换。根据定义，P_y 是 $\mathfrak{p}(x,\ y)$的倍数，因此 y^{P_y}（作为 $y^{\mathfrak{p}(x,y)}$的幂）也与x交换。由于 $C(\kappa R(c))$由 1 次元素生成，而 y^{P_y} 与所有 1 次齐次元素都交换，所以 y^{P_y} 属于其中心。□

注 5.5.3。对于 $x,\ y,\ z\in R$，有 $\mathfrak{p}(x^z,\ y^z)=\mathfrak{p}(x,\ y)$。因此，若 c 是定理 5.1.16 中的余循环（由将 R 划分为其连通分支而得），则整数 P_y 仅取决于 y 所处的 R 的连通分支。

引理 5.5.4. 设 V 是域 κ 上的向量空间，基为 B；设 Γ 是一个有向图，其顶点集合为B，边集合为 E，且边由 $\kappa^\times$中的元素标记。记源映射和目标映射为 $s,t\colon\ E\to B$，标记映射为 $\lambda\colon\ E\to\kappa^\times$。

假设对每个 $e\in E$，都存在一个 $\bar{e}\in E$，使得

$$s(\bar{e})=t(e),\qquad t(\bar{e})=s(e),\qquad \lambda(\bar{e})=\lambda(e)^{-1}.$$

记 W 为由 $\{s(e)-\lambda(e)\cdot t(e)\colon e\in E\}$ 在 κ 上张成的子空间。设 $\mathcal{B}$ 是 B 的一个子集，且从 Γ 的每个连通分支中恰好包含一个顶点。那么，商映射 $V\to V/W$ 在子集

$$\mathcal{B}^1=\{v\in\mathcal{B}\colon\ \text{在}\ \kappa^\times\ \text{中，}\ \Gamma\ \text{中经过}\ v\ \text{的每个环的标签的乘积均为}\ 1\}$$

V 到 V/W 的限制是单射，其像是 V/W 在 κ 上的一组基。特别地，向量 $v\in B$ 属于 W，当且仅当 Γ 中存在一个经过 v 的环，且其标签的乘积不等于 1。

注记 5.5.5。图 Γ 可以有一条具有 $s(e)=t(e)$ 的 $e\in E$，并且 Γ 中具有给定源点和终点的边的集合可以包含多个元素。

证明。我们首先将问题归约到 Γ 连通的情形。令 Γ_i 为 Γ 对于 $i\in I$ 的连通分支，其顶点集合为 B_i，边集合为 E_i，映射为 $s|_{E_i},\ t|_{E_i}\colon E_i\to B_i$。记 V_i 为 B_i 在 κ 上的张成空间，并记 W_i 为 V_i 中由 $\{s(e)-\lambda(e)\cdot t(e)$ 张成的子空间：$e\in E_i\}$ 在 κ 上。令 $\mathcal{B}_i=\mathcal{B}\cap B_i$ 和 $\mathcal{B}_i^1=\mathcal{B}^1\cap\mathcal{B}_i$。于是有

$$B=\bigcup_{i\in I}B_i,\qquad E=\bigcup_{i\in I}E_i,\qquad V=\bigoplus_{i\in I}V_i,\qquad W=\bigoplus_{i\in I}W_i,\qquad V/W=\bigoplus_{i\in I}V_i/W_i,$$

商映射 $V\to V/W$ 是商映射 $V_i\to V_i/W_i$ 的直和，集合 $\mathcal{B}_i$ 是一个单元素集合，并且

$$\mathcal{B}_i^1=\{v\in\mathcal{B}_i\colon\ \Gamma_i\ \text{中每个经过}\ v\ \text{的环的标签在}\ \kappa^\times\ \text{中的乘积为}\ 1\}.$$

这些观察足以完成将问题归约到 Γ 连通的情形。

现在假设 Γ 连通，因此对于某个 $b\in B$ 有 $\mathcal{B}=\{b\}$。所需的单射性源于以下事实：在基数至多为 1 的集合上的任意函数都是单射的。我们分两种情况讨论。

第一种情形是，Γ 中存在一个经过 b 的环，其标签的乘积为 $\alpha\in\kappa$，且满足 $\alpha\neq 1$，也就是说 $\mathcal{B}^1$ 为空。根据 W的定义，并对环的长度作归纳，可得 $(\alpha-1)b\in W$，从而 $b\in W$。由 Γ的连通性，我们进而推出 V的基 B包含于 W中，因此 $W=V$，或等价地说，$V/W=\{0\}$。因此，$\mathcal{B}^1$在 V/W（一个空集）中的像确实是 V/W的一组基。

第二种情形是， Γ 中每个经过 b 的环的标签乘积均为 1，也就是说 $\mathcal{B}^1 = \{b\}$。由 Γ 的连通性可知， $\mathcal{B}^1$ 在 V/W 中的像张成了 κ 上的 V/W，因此只需证明 V/W 非零。我们需要证明，在 V/W 上存在一个非零的 κ-线性泛函，或等价地，存在一个非零的 κ-线性泛函 $\varphi\colon V \to \kappa$，它在 W 上为零。我们通过指定 φ 在每个 $v \in B$ 上的取值来定义它：该取值为 $\kappa^\times$ 中一条从 b 到 v、位于 Γ 内的路径的标签乘积。我们关于 Γ 中每个经过 b 的环的标签乘积均为 1 的假设，保证了 φ 定义良好。由于 $\varphi(b) = 1$，这确实是一个非零泛函。由于 W 包含于 φ 的核中，第二种情形的论证也就完成了，整个证明亦告完成。□

推论 *5.5.6.* 设 R 是一个架， κ 是一个域，且 $c\colon R\times R \to \kappa^\times$ 是一个 *2*-余循环。设 $S \subseteq R^n$ 是 B_n 在 R^n 上作用所得轨道的一组代表元。那么，当 $(x_1, \dots, x_n)$ 遍历 S 中稳定子在 B_n 中仅包含满足 $\nabla(x_1, \dots, x_n; g) = 1$ 的辫子 g 的元素时，所得乘积 $x_1 \cdots x_n$ 在 $C(\kappa R(c))$ 中两两不同，并构成 $\kappa R(c)^{\otimes n}_{B_n}$ 的一组基。特别地，元组 $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ 在 B_n 中的稳定子包含一个满足 $\nabla(x_1, \dots, x_n; g) \neq 1$ 的元素 g，当且仅当 $x_1 \cdots x_n = 0$ 属于 $C(\kappa R(c))$。

证明。将定理 5.5.4 应用于 $V = \kappa R(c)^{\otimes n} = (\kappa R)^{\otimes n} = \kappa(R^n)$、 $B = R^n$，其中图 Γ 是关于 R^n 上的 B_n 作用、相对于公式 (5.6) 中的对称生成集所得到的凯莱图；如果对于某个 $1 \leq i \leq n-1$, e 分别对应于 σ_i（分别为 σ_i^{-1}），则分别取 $\lambda(e) = c(s(e)_i, s(e)_{i+1})$（分别为 $\lambda(e) = c(t(e)_i, t(e)_{i+1})$）。注意，对于 $V/W = H_0(B_n, \kappa R(c)^{\otimes n})$，令 $\mathcal{B} = S$，使得 $\mathcal{B}^1$ 是 $(x_1, \dots, x_n)$ 取值所遍历的集合，并注意，从 $(x_1, \dots, x_n)$ 出发（并终止于此）的一个环的标签乘积 $\in R^n$ 是 $\nabla(x_1, \dots, x_n; g)$，其中 g 是 B_n 中与我们的环相对应的、$(x_1, \dots, x_n)$ 的稳定子元素。□

命题 *5.5.7.* 设 κ 是一个域，设 V 是 κ 上的编织向量空间，设 R 是架，且 $c\colon R \times R \to \kappa^\times$ 是一个 *2*-余循环。假设 $(V, \kappa R(c))$ 带有可加对结构，设 $0 \leq i \leq n$，设 $w \in V^{\otimes i}$，且 $(x_1, \dots, x_{n-i}) \in R^{n-i}$。假设存在一个 $g \in B_{n-i}$ 稳定 $(x_1, \dots, x_{n-i})$，使得 $\nabla(x_1, \dots, x_{n-i}; g) \neq 1$。那么，向量 $w \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-i} \in V^{\otimes i} \otimes \kappa R(c)^{\otimes(n-i)}$ 在 $H_0(B_{i,n-i}, V^{\otimes i} \otimes \kappa R(c)^{\otimes(n-i)})$ 中的像为 *0*，其中 $B_{i,n-i}$ 的作用取自定理 *5.4.1*。

备注 5.5.8。 根据定理 5.4.5，这等价于

$$wx_1 \cdots x_{n-i} = 0$$

在编织向量空间 $V \oplus \kappa R(c)$ 的余不变元代数中。

证明。 由于 B_{n-i} 到 B_n 的包含经由 $B_{i,n-i}$ 到 B_n 的包含分解，因此我们可以将 g 视为 $B_{i,n-i}$ 的一个元素，对此

$$(w \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-i})^g = \nabla(x_1, \dots, x_{n-i}; g) \cdot w \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-i}$$

bec由于稳定化假设，因此在 $B_{i,n-i}$-余不变量中，我们得到

$$w \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-i} = \nabla(x_1, \dots, x_{n-i}; g) \cdot w \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-i}$$

因此该向量为零，因为根据假设， $\nabla(x_1, \dots, x_{n-i}; g) \neq 1$。 □

推论 *5.5.9.* 设 R 是一个架， κ 是一个域， $c\colon R \times R \to \kappa^\times$ 是一个 *2*-余循环，并设 $r \in R$ 满足 $r^r = r$ 和 $c(r, r) \neq 1$。设 $0 \leq i \leq n$，并设 $(x_1, \dots, x_{n-i}) \in R^{n-i}$，使得对于某个 $1 \leq l < j \leq n-i$，有 $x_l = x_j = r$。设 V 是 κ 上的编织向量空间，且 $(V, \kappa R(c))$ 是一个可加对。那么对于每个 $w \in V^{\otimes i}$，元素 $w \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-i} \in V^{\otimes i} \otimes \kappa R(c)^{\otimes(n-i)}$ 在 $H_0(B_{i,n-i}, V^{\otimes i} \otimes \kappa R(c)^{\otimes n-i})$ 中映射为 *0*。

证明。 我们的假设 $r^r = r$ 意味着辫子

$$g = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{l+1}\sigma_l\sigma_{l+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1} \in B_{n-i}$$

固定 $(x_1,\dots,x_{n-i}) \in R^{n-i}$，并且根据我们对 r 的假设， $\nabla(x_1,\dots,x_{n-i};\, g) = c(r,r) \neq 1$，因此该陈述由定理 5.5.7 得出。□

推论 5.5.10。 设 R 是一个架， κ 是一个域， $c\colon R\times R\to\kappa^\times$ 是一个 2-余循环，并令

$$Q = \{r \in R : r^r = r,\ and\ c(r,r) \neq 1\}.$$

设 $0 \le i \le n$，令 $(x_1,\dots,x_{n-i}) \in R^{n-i}$ 满足 $\#\{1 \le m \le n-i\colon x_m \in Q\} > |Q|$.。设 V 是 κ 上的一个编织向量空间，满足 $(V,\kappa R(c))$ 是一个可加对。那么对每个 $w \in V^{\otimes i}$，元素 $w\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_{n-i} \in V^{\otimes i}\otimes\kappa R(c)^{\otimes(n-i)}$ 在 $H_0(B_{i,n-i}, V^{\otimes i}\otimes\kappa R(c)^{\otimes(n-i)})$ 中映射到 0。

证明。 由鸽巢原理，存在 $1 \le l < j \le n-i$ 使得 $x_l = x_j \in Q$，因此应用定理 5.5.9 并取 $r = x_l = x_j$，即可得到我们的结论。□

推论 *5.5.11.* 设 R 是有限 *quandle*， κ 是一个域，且 $c\colon R\times R\to\kappa^\times$ 是一个 *2*-余循环，满足对每个 $x \in R$ 都有 $c(x,x) \neq 1$。设 V 是 κ 上的一个编织向量空间，且 $(V,\kappa R(c))$ 是一个可加对。那么对每个 $0 \le i < n-|R|$，都有 $H_0(B_{i,n-i}, V^{\otimes i}\otimes\kappa R(c)^{\otimes(n-i)}) = 0$，因此，式 *(5.18)* 中 κ-代数的包含 $C(V) \to C(V\oplus\kappa R(c))$ 使得 $C(V\oplus\kappa R(c))$ 成为一个有限生成的左（分别地，右） $C(V)$-模。

证明。 我们调用定理 5.5.10，注意到根据我们的假设， $Q = R$ 是一个 quandle，并且对于每个 $x \in R$， $c(x,\ x) \neq 1$，从而得到所需的消失。因此，定理 2.0.9 和定理 5.4.5 告诉我们

$$\begin{aligned} C(V\oplus\kappa R(c)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_0(B_n, (V\oplus\kappa R(c))^{\otimes n}) &= \bigoplus_{n=0}^{\infty}\bigoplus_{i=0}^{n} H_0(B_{i,n-i}, V^{\otimes i}\otimes\kappa R(c)^{\otimes(n-i)}) \\ &= \bigoplus_{n=0}^{\infty}\bigoplus_{i=n-|R|}^{n} H_0(B_{i,n-i}, V^{\otimes i}\otimes\kappa R(c)^{\otimes(n-i)}) \end{aligned}$$

因此我们看到有限集合

$$\{x_1\cdots x_j \in C(\kappa R(c)) : 0 \le j \le |R|,\ \text{and } (x_1,\dots,x_j) \in R^j\}$$

生成 $C(V\oplus\kappa R(c))$ 作为左（分别为右） $C(V)$-模。 □

推论 5.5.12。 设 R 是一个有限 *quandle*，设 κ 是一个域，且设 $\zeta \neq 1$ 是 $\kappa^\times$ 中的一个单位根。那么按照定理 *5.3.2* 的记号，对于所有 $n > |R|$，我们有 $H_0(B_n, \kappa R_\zeta^{\otimes n}) = 0$。

证明。 调用定理 5.5.11，使用值为 ζ、 $V = 0$ 和 $i = 0$ 的常值余循环，并回顾公式 (5.13)。□

对于 R 的特定选择，我们可以给出比 $|R|$ 更精确的界来估计分次环 $C(\kappa R_\zeta)$ 的次数。

命题 5.5.13。 若 G 是一个有限群，且其子群 H 的指数为2， R 是 $G\setminus H$中的一个非空对合元集合，而 $\zeta \in \kappa^\times$ 是一个阶不整除 H的群的指数的单位根，则次数 $C(\kappa R_\zeta) = 1$.

若 G 是对称群 S_N， R 是换位的共轭类，且 $\zeta \in \kappa$ 是一个阶不整除 3 的单位根，则 次数 $C(\kappa R_\zeta) \le \lfloor N/2\rfloor$.

证明。 对于第一种情形，令 g_1， $g_2 \in R$；我们将证明 $g_1 \cdot g_2 = 0$ 属于 $C(\kappa R_\zeta)$。我们的假设 $[G:\ H] = 2$ 和 $R \cap H = \emptyset$ 意味着，对于某个 $h \in H$，有 $g_2 = g_1 h$。我们断言，对于每个非负整数 m，在 $C(\kappa R_\zeta)$ 中都有等式

$$g_1 \cdot g_2 = \zeta^m g_1 h^m \cdot g_1 h^{m+1},$$

其中， $g_1 h^m$， $g_1 h^{m+1}$ 的元素实际上属于 R。我们对 m使用归纳法来证明这一断言，其中基例 $m = 0$ 是由我们对 h的选择所导致的。现在假设 m 为正，使用归纳假设和编织可得

$$g_1 \cdot g_2 = \zeta^m g_1 h^m \cdot g_1 h^{m+1} = \zeta^{m+1} g_1 h^{m+1} \cdot (g_1 h^{m+1})^{-1} (g_1 h^m) g_1 h^{m+1} = \zeta^{m+1} g_1 h^{m+1} \cdot h^{-1} g_1 h^{m+1}$$

因此，要完成该断言的证明，只需验证 $h^{-1} g_1 = g_1 h$。事实上，假设 R 中的元素都是 2 阶的，这给出

$$g_1 h = g_2 = g_2^{-1} = h^{-1} g_1^{-1} = h^{-1} g_1.$$

在断言中取 m 为 h的阶，可得 $g_1 \cdot g_2 = \zeta^m g_1 \cdot g_2$；根据关于 H的群的指数的假设，$\zeta^m \neq 1$，因此 $C(\kappa R_\zeta)$中的 $g_1 \cdot g_2 = 0$ 正如所需。由此我们证明了 $\deg\ C(\kappa R_\zeta) \leq 1$。由于群 B_1 是平凡群，且根据假设 R 非空，因此 $\kappa R_\zeta^{\otimes 1} = \kappa R_\zeta$ 非零，我们得到 $\deg\ C(\kappa R_\zeta) \geq 1$。

现在考虑第二种情形—— R 是 S_N中的对换集合。取 $n > \lfloor N/2 \rfloor$，并令（τ_1，.....， τ_n）$\in R^n$，我们的任务是证明 $\tau_1 \cdots \tau_n = 0$ 属于 C（κR_ζ）。根据假设， $n > \lfloor N/2 \rfloor$，因此

$$2n \geq 2(\lfloor N/2 \rfloor + 1) \geq 2(N/2 - 1/2 + 1) = N + 1 > N$$

所以存在 $1 \leq i < j \leq n$ 和 $1 \leq l \leq n$，使得 $\tau_i\ (l) \neq l$ 且$\tau_j\ (l) \neq l$。令 $g = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1} \in B_n$，应用等式可得存在 $\nabla \in \kappa^\times$，使得 (5.7)

$$\tau_1 \cdots \tau_n = \nabla \tau_1 \cdots \tau_i \cdot \tau_j \cdot \tau_{i+1}^{\tau_j} \cdots \tau_{j-1}^{\tau_j} \cdot \tau_{j+1} \cdots \tau_n$$

属于 C（κR_ζ）。令 $g = \sigma_i^3 \in B_n$，将等式（5.7）应用于上面的右侧，可得

$$\tau_1 \cdots \tau_n = \zeta^3 \tau_1 \cdots \tau_n$$

属于 C（κR_ζ），因为我们选择 i 和 j 的方式使得对换 τ_i 和τ_j 生成了（一个副本） S_3的子群。因此，根据我们的假设， ζ 的阶不被3整除，这意味着 $\tau_1 \cdots \tau_n = 0$ 属于 C（κR_ζ），正如所要求的。□

设 R 是一个架，且 κ 是一个域。则如定理 5.3.6 所示，我们有 $\kappa R_\wedge = \kappa R \oplus \kappa R_{-1}$作为 κ 上的编织向量空间，因此式 (5.18) 为我们提供了一个分次 κ-代数的包含$C(\kappa R) \to C(\kappa R_\wedge)$。

推论 5.5.14。 设 R 是一个有限 *quandle*，且 κ 的特征不等于2。则分次 κ-代数的包含 $C(\kappa R) \to C(\kappa R_\wedge)$ 使 $C(\kappa R_\wedge)$ 成为有限生成的左（分别为右） $C(\kappa R)$-模。

证明。 我们关于 R 是一个有限 quandle 且 κ 的特征不等于 2 的假设，使我们可以将定理 5.5.11 应用于 $V = \kappa R$，并令 c 为取值 $-1 \neq 1$的常值函数；由公式 (5.13) 回忆得 $\kappa R_{-1} = \kappa R(c)$。□

引理 5.5.15。 设 κ 为一个域， $A = \bigoplus_{n=0}^\infty A_n$ 为一个（不一定是交换的、结合的或含单位元的）分次 κ-代数，且 $h \in A$ 为一个齐次元素。设 $N = \bigoplus_{n=0}^\infty N_n$ 为一个分次左 A-模，并且对每个 $n \geq 0$都有 维数$_\kappa N_n < \infty$。假设 κ 上由 h 乘法定义的线性映射在 N 上的余核是 κ 上的有限维空间。那么此映射的核也是 κ 上的有限维空间。

证明。令 $d=$ 次 h，使得 $h\in A_d$，并记

$$M^h\colon N\to N,\qquad M_n^h\colon N_n\to N_{n+d},\qquad M^h=\bigoplus_{n=0}^{\infty}M_n^h,\qquad M_n^h(v)=hv,\qquad v\in N_n,$$

由 h 乘法给出的映射。我们的假设 h 是齐次的，这意味着

$$\mathrm{Ker}(M^h)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{Ker}(M_n^h),\qquad \mathrm{Coker}(M^h)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{Coker}(M_{n-d}^h)$$

其中，当 n 为负数时， N_n 和 M_n^h 均视为零。因此，我们关于 $\dim_\kappa \mathrm{Coker}(M^h)<\infty$ 的假设意味着，当 n 足够大时， M_n^h 是满射。于是，我们关于有限维性的假设给出了以下非负整数不等式：$\dim_\kappa N_{n+d}\le\dim_\kappa N_n$。由于非负整数的非增序列最终会变为常数，且模 d 只有有限个剩余类，我们得出，对于适当大的 n，有 $\dim_\kappa N_{n+d}=\dim_\kappa N_n$ 。由于同维向量空间之间的满射线性映射是同构，我们得出，对于适当大的 n， M_n^h 是同构。对于这些 n ，于是可知 $\mathrm{Ker}(M_n^h)=0$，因此 $\mathrm{Ker}(M^h)$ 在 κ 上是有限维的，正如所需。□

引理 5.5.16. 设 κ 是一个域， A 是一个（不一定交换或含单位元的） κ-代数， M 是一个右 A-模，且它在 κ 上有限维；设 N 是一个有限生成左A-模。那么 $M\otimes_A N$ 在 κ 上有限维。

证明。 N 有限生成这一假设意味着存在一个非负整数 n 以及左 A-模的一个满射 $A^{\oplus n}\to N$。由此可得向量空间上的一个满射 $M\otimes_A A^{\oplus n}\to M\otimes_A N$，其基域为 κ。作为 κ上的向量空间，我们有 $M\otimes_A A^{\oplus n}\cong M^{\oplus n}$，因此根据 $\dim_\kappa M<\infty$ 的假设可得

$$\dim_\kappa M\otimes_A N\le\dim_\kappa M\otimes_A A^{\oplus n}=\dim_\kappa M^{\oplus n}=n\cdot\dim_\kappa M<\infty$$

如所需。 □

推论 5.5.17。 设 R 是有限连通架， κ 是一个域，且 $c\colon R\times R\to\kappa^\times$ 是一个2-余循环。对于一个非负整数 n，采用式(5.2)中的记号，定义

$$H_0(B_n,\kappa R(c)^{\otimes n})^\times=\mathrm{Span}_\kappa\{x_1\cdots x_n\in C(\kappa R(c)):(x_1,\dots,x_n)\in R_\times^n\}.$$

那么对于每个非负整数 m 以及 $(y_1,\dots,y_m)\in R^m$， κ-线性映射

$$M_{y_1\cdots y_m}\colon H_0(B_n,\kappa R(c)^{\otimes n})^\times\to H_0(B_{n+m},\kappa R(c)^{\otimes(n+m)})^\times,\qquad M_{y_1\cdots y_m}(v)=y_1\cdots y_m v,$$

由左侧乘以 $y_1\cdots y_m$ 的乘法映射 $C(\kappa R(c))$，当 n 足够大时是一个同构。

此外，假设 c 的值是 d 次单位根，且对于每个 $w\in R$，根据定理 *5.5.2*， m 可被 d 整除，也可被 P_w 整除，从而 w^m 位于 C（κR（c）） 的中心。因此，对于每个 y，当 $w\in R$ 和 n 足够大时，$M_{y^m}=M_{w^m}$。

证明。我们首先证明，当 n 足够大时， $M_{y_1\cdots y_m}$ 是满射。我们需要证明，当n 足够大时，一个 $x_1\cdots x_{n+m}\in H_0(B_{n+m},\ \kappa R(c)^{\otimes(n+m)})^\times$，其中 x_1，……， x_{n+m} 是 R的生成集，属于 $M_{y_1\cdots y_m}$的像。由 Shu24，命题 4.22] 可知，当 n足够大时，存在$(z_1,\ \dots\dots,\ z_n)\in R_\times^n$，且满足 and $g\in B_{n+m}$，使得

$$(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n)^g=(x_1,\dots,x_{n+m}).$$

由等式（5.7）可知，在 $C(\kappa R(c))$中有

$$y_1\cdots y_m\cdot z_1\cdots z_n=\nabla(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n;g)\cdot x_1\cdots x_{n+m}.$$

由于 z_1，……， z_n生成 R，我们有

$$\nabla(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n;g)^{-1}\cdot z_1\cdots z_n\in H_0(B_n,\kappa R(c)^{\otimes n})^\times$$

因此 $x_1\cdots x_{n+m}$ 确实属于 $M_{y_1\cdots y_m}$的像，所需的满射性由此得证。

为了得到当 n 足够大时 $M_{y_1\cdots y_m}$ 是同构，我们利用它的满射性，并在 $A=C(\kappa R(c))$、$h=y_1\cdots y_m$ 和齐次理想

$$N=\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_0(B_n,\kappa R(c)^{\otimes n})^{\times}$$

A 的。

最后，对于足够大的 n 和一个 $x_1\cdots x_n\in H_0(B_n,\ \kappa R(c)^{\otimes n})^{\times}$，我们需要证明在 $C(\kappa R(c))$ 中有

$$w^m\cdot x_1\cdots x_n=y^m\cdot x_1\cdots x_n.$$

我们的假设是：R 有限、连通，且由 $x_1,\ldots,\ x_n$ 生成。这些假设意味着存在一个非负整数 l 以及（不一定互异的）整数 $1\le i_0,\ldots,\ i_l\le n$，使得在 R 中定义的序列

$$w_0=w,\qquad w_{j+1}=w_j^{x_{i_j}},\qquad 0\le j\le l, \tag{5.24}$$

满足 $w_{l+1}=y$。

我们断言，对每个 $0\le j\le l+1$，都有

$$w^m\cdot x_1\cdots x_n=w_j^m\cdot x_1\cdots x_n$$

在 $C(\kappa R(c))$ 中。我们通过对 j 进行归纳来证明这一点，基例 $j=0$ 由等式（5.24）可知是显然的。现在假设 j 为正，我们使用归纳假设，写出所给表达式的展开形式，应用等式（5.7），利用我们的假设，即 d 整除 m，再利用 m 次幂的中心性，最后回顾等式（5.24），得到

$$\begin{aligned}
w^m\cdot x_1\cdots x_n&=w_j^m\cdot x_1\cdots x_n=w_j^m\cdot x_1\cdot\cdots\cdot x_{i_j-1}\cdot x_{i_j}\cdot x_{i_{j+1}}\cdots x_n\\
&=\nabla(x_1,\ldots,x_{i_j};\sigma_{i_j-1}\cdots\sigma_1)\cdot w_j^m x_{i_j}\cdot x_1^{x_{i_j}}\cdot\cdots\cdot x_{i_j-1}^{x_{i_j}}\cdot x_{i_{j+1}}\cdots x_n\\
&=\nabla(x_1,\ldots,x_{i_j};\sigma_{i_j-1}\cdots\sigma_1)\cdot x_{i_j}\cdot(w_j^{x_{i_j}})^m\cdot x_1^{x_{i_j}}\cdot\cdots\cdot x_{i_j-1}^{x_{i_j}}\cdot x_{i_{j+1}}\cdots x_n\\
&=\nabla(x_1,\ldots,x_{i_j};\sigma_{i_j-1}\cdots\sigma_1)\cdot(w_j^{x_{i_j}})^m\cdot x_{i_j}\cdot x_1^{x_{i_j}}\cdot\cdots\cdot x_{i_j-1}^{x_{i_j}}\cdot x_{i_{j+1}}\cdots x_n\\
&=w_{j+1}^m\cdot x_1\cdot\cdots\cdot x_{i_j-1}\cdot x_{i_j}\cdot x_{i_{j+1}}\cdots x_n
\end{aligned}$$

由此完成归纳，也就完成了断言的证明。断言中的情形 $j=l+1$ 正是我们要证明的。□

定义 5.5.18。如果一个架 R 的每个非空子架都是连通的，则称其为遗传连通的。

以下内容与 [EVW16，定义 3.1] 完全相同，唯一的区别是我们不假设有限性。

定义 5.5.19。设 G 为一个群，R 为 G 的共轭封闭生成集。若对于 G 的每个子群 H，H 与 R 的交集要么为空，要么是 H 的一个（单个）共轭类，则称 $(G,\ R)$ 为非分裂的。

命题 5.5.20。群 G 的共轭封闭生成集 R 是遗传连通的（作为一个架），当且仅当 (G,R) 是非分裂的。

证明。首先假设 R 是遗传连通的，并设 H 是 G 的一个子群，且满足 $R\cap H\neq\emptyset$。我们的任务是证明 $R\cap H$ 是 H的一个（单一）共轭类。根据假设，R 是 G 的共轭封闭生成集，这意味着将 G 视为一个架时，R 是 G的一个理想。因此，$R\cap H$ 是 H的一个理想（尤其是一个子架），也就是说，根据定理 5.1.14，$R\cap H$ 是 H 的一个共轭封闭子集。由假设，R 是遗传连通的，并且

$R \cap H$ 非空，这意味着 $R \cap H$ 是一个连通架。根据定理 5.1.32，这意味着 $R \cap H$ 是 H的一个（单一）共轭类。

现在假设 (G, R) 是非分裂的，并令 S 为 R 的一个非空子架。我们的目标是证明 S 是连通的。记 H 为由 S 生成的 G 的子群，并注意到 $S \subseteq H \cap R$，特别是 $H \cap R$ 非空，因此根据我们的假设 (G, R) 是非分裂的，$H \cap R$ 是 H 的一个（单一）共轭类。换言之，H 通过共轭作用于 $H \cap R$ 的作用是传递的。定理 5.1.27 告诉我们，结构群 $\Gamma_{H\cap R}$ 在 $H \cap R$ 上的作用经由群同态 $\Gamma_{H\cap R} \to H$ 分解。由于 S 生成 H，群同态的复合$\Gamma_S \to \Gamma_{H\cap R} \to H$ 是满射，因此 Γ_S 在 $H \cap R$ 上的作用是传递的。由此根据定理 5.1.36 可知 $S = H \cap R$，进而根据定理 5.1.32，S 是一个连通架，因为$H \cap R$ 生成 H，这是因为它包含 S（而 S 生成 H）。至此，两个方向的证明均已完成。□

定义 5.5.21 ([EL23，定义 4.1.1])。我们称域 κ 上的编织向量空间 V 是 1-受控的，如果存在一个齐次中心元 $U \in C(V)$，使得在 $C(V)$ 上由 U 乘法给出的 κ-线性映射，其核和余核仅支撑在有限多个次数上。我们称 $B_{g,f}^n$ 的系数系统 (V, W) 是 1-受控的，如果 V 是。

1-受控系数系统的同调稳定性见 [EL23，定理 4.2.6]。我们指出，该结果中得到的稳定斜率原则上至少可以明确写出。接下来，我们推广 [EVW16，引理 3.5] 和 [EL23，命题 A.31]。

引理 5.5.22。设 R 是遗传连通有限架，κ 是一个域，其特征对 R 的任意非空子架 S 均不整除 $|S|$；设 $c\colon\ R \times R \to \kappa^\times$ 是一个取值于 d 个单位根的 2-余循环。那么，对于每个 $w \in R$，取一个可被 d 整除且可被定理 *5.5.2* 中相应的 P_w 整除的正整数 m，则在 $C(\kappa R(c))$ 中，由齐次中心元乘法所给映射的核（分别地，余核）

$$h = \sum_{r\in R} r^m \in Z(C(\kappa R(c)))$$

在 κ 上是有限维的。因此，$\kappa R(c)$是1-受控的。

证明。对于正整数 ν，令

$$H_0(B_n, \kappa R(c)^{\otimes n})_\nu = \mathrm{Span}\{x_1 \cdots x_n \in C(\kappa R(c)) : (x_1, \ldots, x_n) \in R^n, \quad \#\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \geq \nu\}.$$

我们断言，当 n 足够大时，κ-线性映射

$$M_{h,\nu}\colon H_0(B_n, \kappa R(c)^{\otimes n})_\nu \to H_0(B_{n+m}, \kappa R(c)^{\otimes(n+m)})_\nu, \qquad M_{h,\nu}(u) = hu$$

即在 $C(\kappa R(c))$ 中的乘法映射，是满射的。

我们对 ν 进行逆向归纳来证明这一断言，其中基例 $\nu = |R| + 1$ 成立，这是因为我们假设 R 是有限的，并且任何映射到 0 向量空间的映射都是满射的。现在设 $\nu \leq |R|$，且 n 足够大，并令 $y_1, \ldots\ldots, y_{n+m}$ 为 R 的一个含有 $|S| \geq \nu$ 的子架S 的生成元。我们的任务是证明 $y_1 \cdots y_{n+m}$ 属于 $M_{h,\nu}$ 的像。我们关于 R 是遗传连通的假设意味着 S 是连通的，因此将定理 5.5.17 应用于 S 和 $c|_{S\times S}$，可得 S 的生成元 $x_1, \ldots\ldots, x_n$，使得

$$s^m \cdot x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_{n+m}$$

对每个 $s \in S$，在 $C(\kappa S(c|_{S\times S}))$ 中。因此我们有

$$\begin{aligned} h \cdot x_1 \cdots x_n = \sum_{r\in R} r^m \cdot x_1 \cdots x_n &= \sum_{s\in S} s^m \cdot x_1 \cdots x_n + \sum_{r\in R\setminus S} r^m \cdot x_1 \cdots x_n \\ &= |S| \cdot y_1 \cdots y_{n+m} + \sum_{r\in R\setminus S} r^m \cdot x_1 \cdots x_n. \end{aligned}$$

对于每个 $r \in R \setminus S$，由 $r, x_1, \dots, x_n$ 生成的 R 的子架真包含 S，因此其元素个数超过 ν。于是，归纳假设告诉我们，$r^m \cdot x_1 \cdots x_n$ 属于 $M_{h,\nu+1}$ 的像，因而也属于 $M_{h,\nu}$ 的像。显然，$h \cdot x_1 \cdots x_n$ 也属于 $M_{h,\nu}$ 的像，因此我们得出结论：$|S| \cdot y_1 \cdots y_{n+m}$ 也属于 $M_{h,\nu}$ 的像。根据关于 κ 的特征的假设，我们可以得出 $y_1 \cdots y_{n+m}$ 属于 $M_{h,\nu}$ 的像，从而完成归纳，也就证明了该断言。

我们的断言的特殊情形 $\nu = 1$ 保证，$A = C(\kappa R(c))$ 中乘以 h 的余核在 κ 上是有限维的。利用定理 5.5.15 及 $N = A$，我们得到该映射的核也有限维。□

推论 5.5.23。设 R 是一个有限架，κ 是一个域，且 $c\colon\ R \times R \to \kappa^\times$ 是一个2-余循环。设 S、$T \subseteq R$ 是一个划分，满足 S 遗传连通，T 是一个 *quandle*，κ 的特征不整除 S 的任何非空子架的阶，$c|_{S\times S}$ 的取值是 d 次单位根，并且对每个 $t \in T$，都有 $c(t,t) \neq 1$。那么，对于每个 $s \in S$，若正整数 m 能被 d 和定理 *5.5.2* 中的 $P_s =$ 最小公倍数$_{r\in R}\, \mathfrak{p}(r,s)$ 整除，则齐次元素

$$h = \sum_{s\in S} s^m \in C(\kappa S(c|_{S\times S})) \hookrightarrow C(\kappa R(c)) \tag{5.25}$$

属于 $C(\kappa R(c))$的中心，并且左乘 h 在 $C(\kappa R(c))$ 的映射的核（分别地，余核）是关于 κ 的有限维向量空间。因此，$\kappa R(c)$是1-控制的。

证明。与定理 5.2.8 中一样，我们有一个编织向量空间的同构

$$\kappa R(c) \cong \kappa S(c|_{S\times S}) \oplus \kappa T(c|_{T\times T})$$

因此，式 (5.18) 给出了式 (5.25) 中出现的分次 κ-代数的包含。

根据定理 5.5.2，考虑到我们的假设 P_s 整除 m，对每个 $s \in S$，次数 m 元素 s^m 都属于 $C(\kappa R(c))$ 的中心，因此次数为 m 的齐次元素 h 也属于这个中心。

利用我们的假设，即 S 有限且遗传连通，由定理 5.5.22 可知，乘以 h 的映射在 $C(\kappa S(c|_{S\times S}))$ 上的核（分别地，余核）是关于 κ 的有限维向量空间。特别地，对于结合 κ-代数 $A = C(\kappa S(c|_{S\times S}))$，商 A-模 $M = A/(h)$ 是关于 κ 的有限维向量空间。由定理 5.5.11 可推得，$N = C(\kappa R(c))$ 是有限生成的左 A-模。随后，定理 5.5.16 告诉我们，向量空间

$$M \otimes_A N = A/(h) \otimes_A N = N/hN$$

在 κ 上有限维；等价地，$C(\kappa R(c))$ 上由 h 乘法映射的余核在 κ 上有限维。最后，将定理 5.5.15 应用于分次 κ-代数 $C(\kappa R(c))$ 作为自身上的模，可得 $C(\kappa R(c))$ 上由 h 乘法映射的核在 κ 上有限维。□

下面回顾定理 5.3.3 及其记号。

推论 5.5.24。设 R 是一个有限遗传连通 *quandle*，且 κ 是一个域，其特征不为2，并且不整除 R的任何非空子架的阶。那么，对于一个被定理 *5.5.2* 中的 $\mathfrak{q}(x,y)$ 整除的正整数 m，对每个 x, $y \in R$，$C(\kappa R_\wedge)$ 中乘法映射的核（分别为余核）由

$$h = \sum_{r\in R} r_1^m + r_{-1}^m \in Z(C(\kappa R_\wedge))$$

在 κ 上是有限维的。因此 $\kappa R_\wedge$ 是1-控制的。

证明。 由公式 (5.12)，按照定理 5.1.16 的记号，我们有 $\kappa R_\wedge = \kappa[R \times \mathcal{T}_2](c_\wedge)$，因此应用定理 5.5.23，其中划分为 $R_\varphi, R_\psi \subseteq R \times \mathcal{T}_2$，取自定理 5.1.19，并且有 $d = 1$。注意到 c_ψ 是常值函数 $-1 \neq 1$，并且一个整数能被 $\mathfrak{q}(x, y)$ 对每个 $x, y \in R$ 整除，当且仅当它能被 $\mathrm{lcm}_{w \in R \times \mathcal{T}_2} \mathfrak{p}(w, s)$ 对每个 $s \in R_\varphi$ 整除。□

接下来，我们采用定理 5.1.19 中的设定和记号。特别地， R 是一个架， κ 是一个域，而 c 是定义在 $R \times \mathcal{T}_2$上的取值于 $\kappa^\times$的 2-余循环。于是，由定理 5.2.8 可得

$$\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c) \cong \kappa R_\varphi(c_\varphi) \oplus \kappa R_\psi(c_\psi)$$

作为编织向量空间。于是，式 (5.18) 给出了分次 κ-代数的包含

$$C(\kappa R_\varphi(c_\varphi)) \to C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c)), \quad C(\kappa R_\psi(c_\psi)) \to C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c)), \tag{5.26}$$

而式 (5.19) 给出了分次 κ-代数的满射

$$C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c)) \to C(\kappa R_\varphi(c_\varphi)), \quad C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c)) \to C(\kappa R_\psi(c_\psi)). \tag{5.27}$$

定理 5.5.25. 假设 R 是有限遗传连通幺群， c 取值于 κ中d次单位根，并且对每个 $r \in R$ ，都有

$$c((r, \varphi), (r, \psi)) \cdot c((r, \psi), (r, \varphi)) \neq 1. \tag{5.28}$$

那么存在某个正整数 N ，使得有一个 κ-代数同构

$$\bigoplus_{n \geq N} \kappa[R \times \mathcal{T}_2](c)_{B_n}^{\otimes n} \cong \left(\bigoplus_{n \geq N} \kappa R_\varphi(c_\varphi)_{B_n}^{\otimes n} \right) \times \left(\bigoplus_{n \geq N} \kappa R_\psi(c_\psi)_{B_n}^{\otimes n} \right)$$

它由式(5.26) 和式(5.27)中的包含映射与投影映射诱导。

此外，假设 κ 的特征不整除R的任何非空子架的阶。那么对于每个 $w \in R \times \mathcal{T}_2$，若正整数 m 可被 d以及定理 *5.5.2* 中的 P_w整除，则 $C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c))$ 中乘以

$$h = \sum_{\pi \in R \times \mathcal{T}_2} \pi^m = \sum_{r \in R} (r, \varphi)^m + (r, \psi)^m \in Z(C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c)))$$

是 κ上的有限维空间。因此， $\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c)$ 是1-受控的。

证明。 我们首先断言，对于每个 $r \in R$，$(r, \varphi)(r, \psi) = 0$属于 $C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c))$。事实上，等式（5.7）结合$g = \sigma_1^2 \in B_2$、我们的假设（即 R是一个 quandle）、 σ_1^2固定 $((r, \varphi), (r, \psi)) \in (R \times \mathcal{T}_2)^2$,这一事实，以及定理 5.1.23，告诉我们

$$(r, \varphi)(r, \psi) = c((r, \varphi), (r, \psi)) \cdot c((r, \psi), (r, \varphi)) \cdot (r, \varphi)(r, \psi)$$

在 $C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c))$ 中，因此根据等式（5.28）中的假设，我们得到 $(r, \varphi)(r, \psi) = 0$。

接下来，我们取 $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ 足够大，并着手证明该元素

$$e = (x_1, \varphi) \cdots (x_{n-1}, \varphi) \cdot (x_n, \psi)$$

在 $C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c))$ 中为 0。由于 n 足够大且 R 是有限的，根据鸽巢原理，存在 $1 \leq i < j \leq n$ 使得 $x_i = x_j$。将等式（5.7）应用于 $g = \sigma_{j-1} \cdot \ldots \cdot \sigma_{i+1} \in B_n$，我们得到存在 $\nabla_1 \in \kappa^\times$ 使得

$$e = \nabla_1 \cdot (x_1, \varphi) \cdots (x_i, \varphi) \cdot (x_i, \chi) \cdot (x_{i+1}^{x_i}, \varphi) \cdots (x_{j-1}^{x_i}, \varphi) \cdot (x_{j+1}, \varphi) \cdots (x_{n-1}, \varphi) \cdot (x_n, \psi)$$

在 $C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c))$ 中，其中 $\chi = \varphi$ 当 $j < n$ 时，且当 $j = n$时 $\chi = \psi$。在后一种情况下，根据证明开头的断言可知 $(x_i, \varphi)(x_i, \chi) = 0$，因此 $e = 0$。所以从现在起，我们假设属于前一种情况，即 $j < n$ 且 $\chi = \varphi$。

令 Q 为由 x_1、……、x_n 生成的 R 的子幺群。我们的假设是 R 遗传连通，这意味着 Q 连通。由于 n 足够大，我们由 [Shu24，定理 2.4] 得到，群同态 $B_n \to S_n$ 到稳定子的限制

$$(x_1, \dots x_i, x_i, x_{i+1}^{x_i}, \dots x_{j-1}^{x_i}, x_{j+1}, \dots x_{n-1}, x_n) \in Q^n$$

是满射。特别地，稳定子中存在一个辫子 b，它映射到换位（$i+1 \;\; n$），因此将 b 代入等式（5.7），可得存在 $\nabla_2 \in \kappa^\times$ 使得

$$e = \nabla_1 \cdot \nabla_2 \cdot (x_1, \varphi) \cdots (x_i, \varphi) \cdot (x_i, \psi) \cdot (x_{i+1}^{x_i}, \varphi) \cdots (x_{j-1}^{x_i}, \varphi) \cdot (x_{j+1}, \varphi) \cdots (x_{n-1}, \varphi) \cdot (x_n, \varphi)$$

在 $C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c))$ 中。和之前一样，由证明开头的断言可得 $e = 0$。当 φ和 ψ 互换时，我们的论证仍然成立，因此加法映射

$$\left(\bigoplus_{n \geq N} \kappa R_\varphi(c_\varphi)_{B_n}^{\otimes n} \right) \times \left(\bigoplus_{n \geq N} \kappa R_\psi(c_\psi)_{B_n}^{\otimes n} \right) \to \bigoplus_{n \geq N} \kappa[R \times \mathcal{T}_2](c)_{B_n}^{\otimes n}$$

是某个正整数 N对应的 κ-代数同态。由于对于每个 $0 \leq i \leq n$，当 n充分大时，i或 $n-i$至少有一个充分大，因此这个加法映射也是满射，故为所需的同构。

于是，将定理 5.5.22 应用于（R_φ，c_φ）和（R_ψ，c_ψ）可知，$C(\kappa[R \times \mathcal{T}_2](c))$ 中乘以 h 的映射的核（分别为余核）在 κ 上是有限维的。□

下面回顾定理 5.3.4 及其记号。

推论 5.5.26。设 R 是有限遗传连通幺群，κ 是一个特征不等于 2 且不整除 R的任何非空子架的阶的域。则对于一个可被定理 *5.5.2* 中的 $\mathfrak{q}(x, y)$ 整除的偶正整数 m，对每个 $x, y \in R$，$C(\kappa R_\pm)$ 中乘以

$$h = \sum_{r \in R} r^m + \underline{r}^m \in Z(C(\kappa R_\pm))$$

所得的核（分别为余核）是 κ 上的有限维空间。因此 $\kappa R_\pm$ 是 1-受控的。

证明。由公式 (5.12)，根据定理 5.1.16 的记号，我们有 $\kappa R_\pm = \kappa[R \times \mathcal{T}_2](c_\pm)$，因此应用定理 5.5.25 并取 $d = 2$，注意到公式 (5.28)确实成立，并且一个偶整数对每个 $x, y \in R$均可被 $\mathfrak{q}(x, y)$ 整除，当且仅当它对每个 $w \in R \times \mathcal{T}_2$均可被 P_w整除。□

注记5.5.27。由定理 5.5.26 和 [EL23，定理 4.2.6] 可知，对于每个非负整数 i，$C(\kappa R_\pm)$-模

$$M_i = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_i(B_n, \kappa R_\pm^{\otimes n})$$

是有限生成的，并给出了生成元次数的界。但在R 平凡这一特殊情形下，Hoang 在 [Hoa23]中的分析更进一步；它表明 M_i 是$C(\kappa_\pm) = \kappa[x, y]/(xy)$上的挠模，而且事实上在 κ上具有有限总维数。对于更一般的R，这是否也成立？我们还可以进一步追问，是否存在更强的结论，类似于 Landesman 和 Levy 在 [LL25a]中的结果：当 i 相对于 n足够小时，从 $H_i(B_n, \kappa R_\pm^{\otimes n})$到 $H_i(B_n, \kappa_\pm^{\otimes n})$的自然映射是否为同构？

5.6. **对偶性**。 回顾一下，若对称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都存在对偶对象，则称 $\mathcal{C}$ 为闭紧范畴。

例 5.6.1. 域上（分次）有限维向量空间构成的范畴是紧闭范畴。

定义 5.6.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个闭紧范畴，且 W 是 $\mathcal{C}$ 中的一个编织对象，其编织为 T_W: $W\otimes W\to W\otimes W$。在 $W^\vee$ 上赋予编织 $T_W^\vee$: $W^\vee\otimes W^\vee\to W^\vee\otimes W^\vee$，它由将 $W^\vee\otimes W^\vee$ 与 $(W\otimes W)^\vee$ 识别而得。

因此， $\mathcal{C}$ 中编织对象构成的范畴是一个紧闭范畴。特别地，对于 $\mathcal{C}$ 的编织对象 V 和 W，我们有

$$(V\otimes W)^\vee\cong V^\vee\otimes W^\vee$$

作为 $\mathcal{C}$ 中的编织对象。

对于 $\mathcal{C}$ 中的编织对象 V， B_n 在 $(V^\vee)^{\otimes n}$ 上的作用（定理 2.0.7 中引入）是 B_n 在 $V^{\otimes n}$ 上的作用的对偶。

例 5.6.3. 设 κ 是一个域， R 是一个架，且 c: $R\times R\to\kappa^\times$ 是一个 2-余循环。则$\kappa R(c)^\vee\cong\kappa R(\mathsf{inv}\circ c)$作为编织向量空间相等，其中 $\mathsf{inv}:\ \kappa^\times\to\kappa^\times$ 是取逆映射。特别地，我们有 $\kappa R^\vee\cong\kappa R$；由公式 (5.13)可知，对于 $\zeta\in\kappa^\times$，我们有 $\kappa R_\zeta^\vee=\kappa R_{\zeta^{-1}}$；由公式 (5.12)可知，$\kappa R_\wedge^\vee\cong\kappa R_\wedge$, $\kappa R_\pm^\vee\cong\kappa R_\pm$。

进一步假设 $\mathcal{C}$ 是可加的（幺半的）。设 (U,V) 是 $\mathcal{C}$中的一对可加编织对象，它们分别相对于 $T_{U,V}$和$T_{V,U}$。令$T_{U^\vee,V^\vee}=T_{V,U}^\vee$以及$T_{V^\vee,U^\vee}=T_{U,V}^\vee$，则 $(U^\vee,V^\vee)$ 成为$\mathcal{C}$中的一对可加编织对象。于是，$(U\oplus V)^\vee\cong U^\vee\oplus V^\vee$是 $\mathcal{C}$中的编织对象，其中直和是相对于上述可加对取的。如果左侧的和是普通的，那么右侧的和也是普通的。

6. Multiplicative Characters of Discriminants

我们陈述并证明一个具有显式节省的定理 1.2.5 版本，并利用第 3.3 节的材料，明确给出 q 对 R 的依赖关系。设 $\zeta\in\mathbb{F}_\ell$ 是一个阶为 $\mathfrak{o}$ 的单位根，令 $\kappa=\mathbb{F}_\ell[\zeta]$，并设 $d=\deg C(\kappa R_\zeta)$；根据定理 5.5.12，它是有限的。那么当 $n=n_1+\cdots+n_k\to\infty$ 时，我们有

$$\left|\sum_{L\in\mathcal{E}_q^R(G;n_1,\dots,n_k)}\chi(\mathrm{disc}(f_L))\right|\le 2^{n-1}|R|^n q^{n-\frac{n-d}{2d+4}} \tag{6.1}$$

因此，如果 $q>(2|R|)^{2d+4}$，我们就能得到幂次节省。

注记 6.0.1. $\mathbb{G}_m$ 的自然作用在 $\mathbb{A}^1$ 上诱导出群 $\mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q)=\mathbb{F}_q^\times$ 在集合 $\mathcal{E}_q^R(G;\,n_1,\dots,n_k)$ 上的作用；若 $\theta\in\mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q)$ 且 $L\in\mathcal{E}_q^R(G;\,n_1,\dots,n_k)$，则

$$\mathrm{disc}(f_{\theta L}(t))=\mathrm{disc}(\theta^{-n}f_L(\theta t))=\theta^{n(1-n)}\,\mathrm{disc}\,f_L(t).$$

$\mathbb{F}_q^\times$在 $\mathcal{E}_q^R(G;\,n_1,\dots,n_k)$上的作用是自由的，因为对于每个次数至少为 2 的首一无平方因子 $f\in\mathbb{F}_q[t]$ 以及每个 $\theta\neq 1$，都有 $f(\theta t)\neq\theta^n f(t)$作为多项式成立。因此， $\chi(\mathrm{disc}(f_L))$在 $\mathcal{E}_q^R(G;\,n_1,\dots,n_k)$ 上恰好等分布，因此式 (6.1) 中的和为 0，除非 $\mathfrak{o}$ 是 $n(n-1)$ 的因子。

证明。 根据式 (3.10) 和式 (3.8)，层 $\tau_*\pi_*\mathbb{Q}_\ell\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi$ 是光滑的、逐点纯的权重 0 层，其在次数为 n 的首一无平方因子 $g\in\mathbb{F}_q[t]$ 上的迹函数为

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar g},\tau_*\pi_*\overline{\mathbb{Q}_\ell}\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi)=\#\{L\in\mathcal{E}_q^R(G;n_1,\dots,n_k):f_L=g\}\cdot\chi(\mathrm{disc}(g)).$$

因此有

$$\sum_{L\in\mathcal{E}_q^R(G;n_1,\dots,n_k)}\chi(\mathrm{disc}(f_L))=\sum_{g\in\mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q)}\#\{L\in\mathcal{E}_q^R(G;n_1,\dots,n_k):f_L=g\}\cdot\chi(\mathrm{disc}(g))$$
$$=\sum_{g\in\mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q)}\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_{\bar{g}},\tau_*\pi_*\overline{\mathbb{Q}_\ell}\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi).$$

格罗滕迪克–勒夫谢茨迹公式给出

$$\sum_{g\in\mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q)}\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar{g}},\tau_*\pi_*\overline{\mathbb{Q}_\ell}\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi)=\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\,\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q,H_c^i(\mathrm{Conf}^n\,\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}_q}},\tau_*\pi_*\overline{\mathbb{Q}_\ell}\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi)).$$

由三角不等式，右侧的绝对值至多为

$$\sum_{i=0}^{2n}\left|\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q,H_c^i(\mathrm{Conf}^n\,\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}_q}},\tau_*\pi_*\overline{\mathbb{Q}_\ell}\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi))\right|.$$

由于 $\tau_*\pi_*\overline{\mathbb{Q}_\ell}\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi$ 是权为 0, [的逐点纯对象，Del80] 给出 Frob_q 在 $H_c^i(\mathrm{Conf}^n\,\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}_q}},\tau_*\pi_*\mathbb{Q}_\ell\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi)$ 上的每个特征值的绝对值上界为 $\sqrt{q}^{i/2}$，因此上面的和至多为

$$\sum_{i=0}^{2n}q^{i/2}\cdot\dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}H_c^i(\mathrm{Conf}^n\,\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}_q}},\tau_*\pi_*\overline{\mathbb{Q}_\ell}\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi)\le\sum_{i=0}^{2n}q^{i/2}\cdot\dim_\kappa H_c^i(\mathrm{Conf}^n\,\mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}_q}},\tau_*\pi_*\kappa\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi).$$

鉴于定理 2.0.8，$\tau_*\pi_*\kappa\otimes\delta^{-1}\mathcal{L}_\chi$ 到 $\mathbb{C}$ 的基变换的解析化对应于 B_n的表示 $\kappa R^{\otimes n}\otimes\kappa_\zeta^{\otimes n}\cong\kappa R_\zeta^{\otimes n}$ 的一个直和项。由此根据定理 4.1.1、定理 5.6.3 以及其前一句话可知，右侧至多为

$$\sum_{i=0}^{2n}q^{i/2}\cdot\dim_\kappa H_{2n-i}(B_n,(\kappa R_\zeta^{\otimes n})^\vee)=\sum_{i=0}^{2n}q^{i/2}\cdot\dim_\kappa H_{2n-i}(B_n,\kappa R_{\zeta^{-1}}^{\otimes n}).$$

由定理 2.0.11 可得

$$\sum_{i=0}^{2n}q^{i/2}\cdot\dim_\kappa H_{2n-i}(B_n,\kappa R_{\zeta^{-1}}^{\otimes n})=\sum_{\frac{n-d}{d+2}\le j\le 2n}q^{n-\frac{j}{2}}\cdot\dim_\kappa H_j(B_n,\kappa R_{\zeta^{-1}}^{\otimes n}).$$

由定理 4.2.1 可知

$$\sum_{\frac{n-d}{d+2}\le j\le 2n}q^{n-\frac{j}{2}}\cdot\dim_\kappa H_j(B_n,\kappa R_{\zeta^{-1}}^{\otimes n})\le q^{n-\frac{n-d}{2d+4}}\dim_\kappa\kappa R_{\zeta^{-1}}^{\otimes n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}=2^{n-1}|R|^nq^{n-\frac{n-d}{2d+4}}.$$

□

注记 6.0.2。目前尚不清楚式 (6.1) 能够达到多强的精确程度。不过，$G=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,$R=\{1\}$ 的情形颇具启发性。在这种情形下，$d=1$，因此定理 2.0.11 表明，当$i<(n-1)/3$时，$H_i(B_n,\kappa_\zeta^{\otimes n})$消失。Frenkel [Fre88]计算了 B_n 在给定系数下的上同调；而当 ζ 是一个非平凡的三次单位根时，确实存在一个非平凡的类属于 $H_{n/3}(B_n,\kappa_\zeta^{\otimes n})$，其中3|$n$。这表明，若要大幅改进适用范围，就需要一种将 ζ的乘法阶纳入考量的论证。鉴于 Landesman–Levy 最近证明，稳定同调

Hurwitz 空间（的连通分支）的稳定同调可经映射同构地对应到构形空间的稳定同调，探讨自然映射是否

$$H_i(B_n, \kappa R_\zeta^{\otimes n}) \to H_i(B_n, \kappa_\zeta^{\otimes n})$$

在某个范围内是一个同构 $i < \beta n$ （其中 β 可能取决于 R 和 ζ）；在这种情况下，左边的同调群可由 Frenkel 对右边同调群的计算得到良好的控制。

7. Möbius Function in Higher Genus

这里我们陈述并证明上一节结果的一个类似结论，将其应用于高亏格曲线上的 M¨obius 函数。由于情况相似，我们的论述会更加简略。

容易看出，取值于该局部系统的 $H_n(\mathbb{C})$ 的上同调恰好是$H^*(B^n_{g,\ f},\ (W \otimes (k[c] \otimes V_{-1})^{\otimes n})$。我们已经证明，这些上同调群在定理 2.0.11 中的某个范围内为零。该定理使我们能够证明 G-扩张的判别式的 M¨obius 函数之和的上界。

回顾一下，对于域 $\mathbb{F}$ 上代数簇 X 的无平方因子除子 $Z = \sum_{Y \in S} Y$，其中 S 是 $\mathbb{F}$ 上 X 的有限个（互不相同的）不可约子簇组成的集合，莫比乌斯函数定义为 $(-1)^{\#S}$。若 $\mathbb{F}$ 有限，则 Z 的莫比乌斯函数等于 $(-1)^{\deg Z}$ 乘以由 $\mathrm{Frob}_{\#\mathbb{F}}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的 Z 的支撑所诱导的置换（共轭类）的符号。

命题 7.0.1。设 G 是一个非平凡有限群，设 q 是一个相对于 $|G|$ 足够大且与其互素的素数幂，设 K 是 $\mathbb{F}_q$ 上亏格为 g 的光滑射影曲线 X 的函数域，设 ∞ 是 K 的一个 $\mathbb{F}_q$-点，设 D 是 X 上次数为 f 且与 ∞ 不相交的无平方因子除子。设 $R \subseteq G$ 是一个在共轭作用下封闭、且在取 q 次幂运算下封闭的生成集。设 $\mathcal{E}_n$ 是固定的 K 的可分闭包 K^{sep} 中满足以下条件的伽罗瓦正则扩张 L/K 的集合。

- 扩张 L/K 在 ∞处分裂完全。
- L/K 的分歧支撑在 D 以及一个与 D不相交的次数为 n 的无平方因子除子 $Z(L)$上。
- 扩张 L/K 配备了一个群同构 $\varphi\colon \mathrm{Gal}(L/K) \to G$；相对于该同构，$Z(L)$ 的每个点上方的分歧类型都属于 R。

那么，在 $\sum_{L \in \mathcal{E}_n} \mu(Z(L))$ 中，我们有抵消，其幂次节省与式 (6.1)中的相同。

证明。我们有

$$\left| \sum_{L \in \mathcal{E}_n} \mu(Z(L)) \right| = \left| \sum_{L \in \mathcal{E}_n} (-1)^{\deg Z(L)} \operatorname{sign}(\mathrm{Frob}_q, \operatorname{supp} Z(L)) \right| = \left| \sum_{L \in \mathcal{E}_n} \operatorname{sign}(\mathrm{Frob}_q, \operatorname{supp} Z(L)) \right|.$$

令 U 为 X中 $D\infty$ 的补集，或者（滥用记号）为其在特征 0 下的一个提升。由 [EL23，定义 2.4.2、2.4.5]可知，存在一个 Hurwitz 概形 H_n，满足$H_n(\mathbb{F}_q) = \mathcal{E}_n$。概形 H_n 有一个通过标记 n 个分支点˜得到的伽罗瓦 S_n-覆盖；该 S_n-覆盖有一个子覆盖 $H_n \to H_n$，对应于 S_n的指数为 2 的子群 A_n。这个 ´étale 双覆盖 $\tilde{H}_n \to H_n$ 对应于从 $\pi_1^{\text{ét}}(H_n)$ 到$\{\pm 1\} \subseteq \mathbb{Q}_\ell^\times$ 的连续同态，我们将其视为 $\kappa = \mathbb{Q}_\ell$上的秩 1 局部系统。

由 [EL23, 3.1.9, 3.1.10] 可知，存在一个 κ上的有限维向量空间 W、一个针对 $B^n_{g,f}$的（自对偶）系数系统 $(\kappa R_{-1}, W)$，以及 $\mathrm{Conf}^n U$ 上的光滑层 $\mathcal{F}_n$，它们逐点纯且权为零，使得 $\mathcal{F}_n$ 到 $\mathbb{C}$ 的基变换的解析化即为 $B^n_{g,f}$的表示$W \otimes \kappa R_{-1}^{\otimes n}$；$B_n$（视为 $B^n_{g,f}$的子群）在 $\kappa R_{-1}^{\otimes n}$上的作用来自

定理 2.0.7，而其在 W 上的作用是平凡的，并且

$$\sum_{L\in\mathcal{E}_n}\operatorname{sign}(\mathrm{Frob}_q,\operatorname{supp}Z(L))=\sum_{x\in\operatorname{Conf}^n U(\mathbb{F}_q)}\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q,\mathcal{F}_{\bar{x}}).$$

由 Grothendieck–Lefschetz 迹公式、三角不等式、Deligne 的黎曼假设、定理 4.1.1，以及将 κ 替换为其剩余域，可得

$$\begin{aligned}\left|\sum_{x\in\operatorname{Conf}^n U(\mathbb{F}_q)}\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q,\mathcal{F}_{\bar{x}})\right|&\le\sum_{i=0}^{2n}|\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_q,H_c^i(\operatorname{Conf}^n U_{\bar{\mathbb{F}}_q},\mathcal{F}_n))|\\&\le\sum_{i=0}^{2n}q^{i/2}\cdot\dim H_c^i(\operatorname{Conf}^n U_{\bar{\mathbb{F}}_q},\mathcal{F}_n)\\&\le\sum_{i=0}^{2n}q^{i/2}\cdot\dim H_{2n-i}(B_{g,f}^n,W\otimes\kappa R_{-1}^{\otimes n}).\end{aligned}$$

然后，按照式 (6.1) 的证明中的做法，应用定理 5.5.12、定理 2.0.11 和定理 4.2.2，即可得到所述结果。

□

注 7.0.2。 式 (6.1) 与定理 7.0.1 的陈述（及证明）如此相似，或许会让人疑惑为何没有给出一个同时推广二者的陈述。原因是，在高亏格情形下，我们尚不知道存在这样的系数系统 $(\kappa R_\zeta,W)$，其中 ζ是阶不整除 2 的单位根。

注 7.0.3。 定理 7.0.1 可能并非最优。例如，当 $G=S_3$ 和 R 为由换位构成的共轭类时，定理 5.5.13 表明， $C(\kappa R_{-1})$ 的次数为 1；因此，定理 7.0.1 给出，例如，当 L 遍历 $\mathbb{F}_q(t)$的 S_3-扩张，且根式判别式为 q^n 时， μ(根式圆盘 L)之和随着 $n\to\infty$ 增长，其增长阶至多为 $q^{(5/6)n}$ ，这里 q 充分大（但固定）。初步计算实验表明，对判别式不超过 X 的 $\mathbb{Q}$ 的三次扩张， μ(判别式 L)之和的行为更像随机游走，因此其典型大小为 $X^{1/2}$，远小于 $X^{5/6}$。

8. 导体的素性

命题 8.0.1. 设 R 是一个有限 *quandle*， κ是一个特征不为2的域。记 d 为 $C(\kappa R_{-1})$的次数；根据定理 *5.5.12*，该次数有限。设 $(\kappa R,W)$ 是一个带有 f 个穿孔的亏格为 g 的曲面上的系数系统。那么

$$H_p(B_{g,f}^n,W\otimes\kappa R^{\otimes n}\otimes\wedge^m\operatorname{std}_n)=0$$

只要 $p<(m-d)/(d+2)$。

注记 8.0.2. 当 R 是有限群 G 中的一个共轭类，且该群满足定义 5.5.19 中的非分裂条件时， $g=0$和 $\kappa=\mathbb{Q}$成立。此消失结果在m 中具有更小的线性稳定范围；事实上，对于 S_n 的表示，只要顶行以下的方格数不超过 m ，就有消失结果，而不只是 $\wedge^m$std$_n$ 。这些结论可由 [HMW 25] 关于有序 Hurwitz 空间同调表示稳定性的主要结果推出。

证明。编织向量空间 $\kappa R_\wedge$ 带有一个非平凡的分次；具体而言，若按定理 5.3.6 将 $\kappa R_\wedge=\kappa R\oplus\kappa R_{-1}$ 写成这样，我们可以取 κR 为 0 次分次部分，取 κR_{-1} 为 1 次分次部分。在此分次下， $\kappa R_\wedge=1$ 的次数。

此外，由定理 5.4.6 可知， $\kappa R_\wedge^{\otimes n}$的分次部分为

$$(\kappa R_\wedge^{\otimes n})_m=\kappa R^{\otimes n}\otimes\wedge^m\operatorname{Perm}_n=(\kappa R^{\otimes n}\otimes\wedge^m\operatorname{std}_n)\oplus(\kappa R^{\otimes n}\otimes\wedge^{m-1}\operatorname{std}_n).$$

于是，根据定理 5.4.5，余不变元环 $\oplus_n H_0(B_n,\ \kappa R_\wedge^{\otimes n})$ 的第 m 个分次分量可写为

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_0(B_n, \kappa R_\wedge^{\otimes n})_m = \bigoplus_{n=m}^{\infty} H_0(B_{n-m,m}, \kappa R^{\otimes n-m} \otimes \kappa R_{-1}^{\otimes m}).$$

后一个余不变元模是将余不变量对 $B_m \leq B_{n-m,m}$ 取商所得的，而在 B_m 下的余不变量可写为

$$\bigoplus_{n=m}^{\infty} H_0(B_m, \kappa R^{\otimes n-m} \otimes \kappa R_{-1}^{\otimes m}) = \bigoplus_{n=m}^{\infty} \kappa R^{\otimes n-m} \otimes H_0(B_m, \kappa R_{-1}^{\otimes m}).$$

我们对 d 的选择使得对于所有 $m > d$，$H_0(B_m, \kappa R_{-1}^{\otimes m})$ 都为零，因此 $H_0(B_n, \kappa R_\wedge^{\otimes n})_m$ 也同样为零，即 $\deg C(\kappa R_\wedge) \leq d$。由于 $H_p(B_{g,f}^n, W \otimes \kappa R^{\otimes n} \otimes \wedge^m \mathrm{std})$ 是

$$H_p(B_{g,f}^n, W \otimes \kappa R^{\otimes n} \otimes \wedge^m \mathrm{std}) \oplus H_p(B_{g,f}^n, W \otimes \kappa R^{\otimes n} \otimes \wedge^{m-1} \mathrm{std}) = H_p(B_{g,f}^n, W \otimes \kappa R_\wedge^{\otimes n})_m$$

由定理 2.0.11 可得

$$H_p(B_{g,f}^n, W \otimes \kappa R^{\otimes n} \otimes \wedge^m \mathrm{std}_n) = 0$$

只要 $p < (m-d)/(d+2)$。 □

很可能可以结合本论文最后一节基于 Landesman– Levy 工作的方法、定理 5.1.35 中编织向量空间的包含，以及我们对 rack（直积）内自同构群的研究，得到定理 8.0.1 某个略微弱化形式的另一种证明，该形式所保证的消失结果较少。

引理 8.0.3. 对于整数 $0 \leq i \leq n-1$，与 S_n 的不可约表示 $\wedge^i \mathrm{std}_n$ 对应的杨图为 $(n-i, 1, 1, \ldots, 1)$。

证明. 由 Pieri 的（分支）规则经归纳可得。 □

命题 8.0.4. 设 G 是一个非平凡有限群，R 是生成 G 的一个共轭类。设 q 是一个相对于 $|G|$ 足够大的、且与之互素的素数幂。假设对每个 $r \in R$，都有 $r^q \in R$。对于递增的正整数序列中的每个 n，选取 $\mathrm{Hur}_{G,R}^n \times \mathbb{F}_q$ 的一个定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的连通分支 Z_n。那么，当 $n \to \infty$ 沿该正整数序列趋于无穷时，我们有

$$\#Z_n(\mathbb{F}_q) \sim \left(1 - \frac{1}{q}\right) \cdot q^n$$

且误差项具有幂次节省。

证明. 为行文方便，有时我们将 Z_n 视为提升到特征 0 上。我们比较 Z_n 的格罗滕迪克–勒夫谢茨迹公式与 Conf^n 的迹公式。后一个公式结合 [Ros02 的命题 2.3]，给出

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right) \cdot q^n = \#\,\mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \,\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^i(\mathrm{Conf}^n \times \overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell))$$

而前者表明

$$\#Z_n(\mathbb{F}_q) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \,\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^i(Z_n \times \overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell)).$$

因此，利用三角不等式可得

$$\left|\#Z_n(\mathbb{F}_q)-\left(1-\frac{1}{q}\right)q^n\right|\leq\sum_{i=0}^{2n}\left|\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q,H_c^i(Z_n\times\overline{\mathbb{F}_q},\mathbb{Q}_\ell))-\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q,H_c^i(\mathrm{Conf}^n\times\overline{\mathbb{F}_q},\mathbb{Q}_\ell))\right|.$$

由 [LL25a，定理 1.4.2], 和定理 4.1.1 可知，存在 $1<\lambda<2$，使得概形态射 $\pi\colon Z_n\to\mathrm{Conf}^n$ 对所有充分大的 n 诱导出一个 Frob_q-等变的向量空间同构

$$H_c^i(Z_n\times\overline{\mathbb{F}_q},\mathbb{Q}_\ell)\cong H_c^i(\mathrm{Conf}^n\times\overline{\mathbb{F}_q},\mathbb{Q}_\ell)$$

当 $\mathbb{Q}_\ell$ 时，只要 $i>\lambda n$。特别地，Frob_q 在这些向量空间上的迹相同，因此再次应用三角不等式可得

$$\left|\#Z_n(\mathbb{F}_q)-\left(1-\frac{1}{q}\right)q^n\right|\leq\sum_{0\leq i\leq\lambda n}\left|\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q,H_c^i(Z_n\times\overline{\mathbb{F}_q},\mathbb{Q}_\ell))\right|+\left|\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q,H_c^i(\mathrm{Conf}^n\times\overline{\mathbb{F}_q},\mathbb{Q}_\ell))\right|.$$

由德利涅黎曼猜想可知，上式至多为

$$\sum_{0\leq i\leq\lambda n}q^{i/2}\cdot(\dim H_c^i(Z_n\times\overline{\mathbb{F}_q},\mathbb{Q}_\ell)+\dim H_c^i(\mathrm{Conf}^n\times\overline{\mathbb{F}_q},\mathbb{Q}_\ell)).$$

令 $\kappa=\mathbb{F}_\ell$，并利用定理 4.1.1，我们可以将其界定为

$$\sum_{0\leq i\leq\lambda n}q^{i/2}\cdot(\dim_\kappa H_{2n-i}(B_n,\kappa R^n)+\dim_\kappa H_{2n-i}(B_n,\kappa)).$$

应用定理 4.2.1，我们得到上界

$$\sum_{0\leq i\leq\lambda n}q^{i/2}\binom{n-1}{2n-i}(|R|^n+1)\leq q^{\frac{\lambda}{2}n}\cdot(2|R|)^n$$

当 q 足够大时，由于 $\frac{\lambda}{2}<1$，这就给出了所需的幂次节省。 – □

定理 *1.2.3* 的证明。与公式 (3.6) 中一样，我们将 $\mathcal{E}_q^R(G;\,n)$ 认同于 $\mathrm{Hur}_{G,R}^n(\mathbb{F}_q)$。令 $Z_1,\ldots,Z_m$ 为定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的 $\mathrm{Hur}_{G,R}^n\times\mathbb{F}_q$ 的连通分支。于是我们有

$$\mathcal{E}_q^R(G;n)=\mathrm{Hur}_{G,R}^n(\mathbb{F}_q)=\bigcup_{j=1}^m Z_j(\mathbb{F}_q).$$

因此我们有

$$\#\mathcal{E}_q^R(G;n)=\sum_{j=1}^m\#Z_j(\mathbb{F}_q)$$

and

$$\#\{L\in\mathcal{E}_q^R(G;n):f_L\text{ is irreducible}\}=\sum_{j=1}^m\#\{L\in Z_j(\mathbb{F}_q):f_L\text{ is irreducible}\}.$$

由 [LWZB24，推论 12.9] 可知，对于足够大的n，分支数 m仅通过 n 模 $|G|^2$的同余类依赖于 n。因此，只需证明对每个 $1\leq j\leq m$，当 $n\to\infty$ 时，我们有

$$\#\{L\in Z_j(\mathbb{F}_q):f_L\text{ is irreducible}\}\sim\frac{q}{(q-1)n}\#Z_j(\mathbb{F}_q)$$

带有幂次节省误差项。定理 8.0.4 告诉我们，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{q}{(q-1)n}\#Z_j(\mathbb{F}_q)\sim\frac{q^n}{n}$$

对每个 $1 \le j \le m$ 带有幂次节省误差项。因此，只需证明

$$\#\{L \in Z_j(\mathbb{F}_q) : f_L \text{ is irreducible}\} \sim \frac{q^n}{n}$$

当 $n \to \infty$ 时，对每个 $1 \le j \le m$，其误差项具有幂次节省。

由 [Ros02、定理 2.2], 定理 3.1.4 以及格罗滕迪克–勒夫谢茨迹公式可知，当 $n \to \infty$ 时，我们得到具有幂次节省误差项的渐近行为

$$\begin{aligned}\frac{q^n}{n} \sim \sum_{g \in \mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q)} \mathbf{1}_{\mathrm{irr}}(g) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{g \in \mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q)} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar{g}}, \wedge^k \mathrm{std}_n) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+k}\,\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^i(\mathrm{Conf}^n \times \overline{\mathbb{F}_q}, \wedge^k \mathrm{std}_n)).\end{aligned}$$

定理 3.1.4 还告诉我们

$$\#\{L \in Z_j(\mathbb{F}_q) : f_L \text{ is irreducible}\} = \sum_{L \in Z_j(\mathbb{F}_q)} \mathbf{1}_{\mathrm{irr}}(f_L) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{L \in Z_j(\mathbb{F}_q)} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\overline{f_L}}, \wedge^k \mathrm{std}_n)$$

因此，利用态射 $\pi\colon Z_j \to \mathsf{Conf}^n$ 以及格罗滕迪克–勒夫谢茨迹公式，可得这等于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{L \in Z_j(\mathbb{F}_q)} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar{L}}, \pi^{-1} \wedge^k \mathrm{std}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+k}\,\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^i(Z_j \times \overline{\mathbb{F}_q}, \pi^{-1} \wedge^k \mathrm{std}_n)).$$

鉴于三角不等式，只需对以下表达式建立幂次节省界

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{2n}\left|\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^i(Z_j \times \overline{\mathbb{F}_q}, \pi^{-1} \wedge^k \mathrm{std}_n)) - \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^i(\mathrm{Conf}^n \times \overline{\mathbb{F}_q}, \wedge^k \mathrm{std}_n))\right|. \tag{8.1}$$

由 [LL25b, 定理 1.3.5], 定理4.1.1、定理 5.1.32 和定理 8.0.3 可知，对每个 $0 < \alpha < 1$，都存在 $1 < \lambda < 2$，使得概形态射 $\pi\colon Z_n \to \mathsf{Conf}^n$ 对所有足够大的 n 都诱导一个 Frob_q-等变的向量空间同构

$$H_c^i(Z_j \times \overline{\mathbb{F}_q}, \pi^{-1} \wedge^k \mathrm{std}_n) \cong H_c^i(\mathrm{Conf}^n \times \overline{\mathbb{F}_q}, \wedge^k \mathrm{std}_n)$$

在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上，只要 $i > \lambda n$ 且 $k \le \alpha n$，上述结论便成立。因此，这一范围内的 i 和 k 对公式（8.1）没有贡献。

令 $\kappa = \mathbb{F}_\ell$。由投影公式、定理 4.1.1 以及光滑层 $\pi_*\mathbb{Q}_\ell \otimes \wedge^k \mathsf{std}_n$ 自对偶这一事实可得

维数 $H_c^i(Z_j \times \overline{\mathbb{F}_q},\ \pi^{-1}\wedge^k \mathsf{std}_n) =$维数 $H_c^i(\mathsf{Conf}^n \times \overline{\mathbb{F}_q},\ \pi_*\overline{\mathbb{Q}_\ell} \otimes \wedge^k \mathsf{std}_n) \le$维数 $H_{2n-i}(B_n,\ \kappa R^n \otimes \wedge^k \mathsf{std}_n)$

and

$$\dim H_c^i(\mathrm{Conf}^n \times \overline{\mathbb{F}_q}, \wedge^k \mathrm{std}_n) \le \dim H_{2n-i}(B_n, \kappa \mathcal{T}_1^n \otimes \wedge^k \mathrm{std}_n)$$

根据定理 8.0.1 和定理 5.1.4，当 $i > 2n - (k-d)/(d+2)$ 时，这两者都为零。特别地，对于 $k > \alpha n$，当次数 i 超过

$$2n - (k-d)/(d+2) < \left(2 - \frac{\alpha}{d+2}\right)n + 1.$$

因此，如有必要，将 λ 调得更接近 2 后，我们可以看出，范围 $i > \lambda n$ 和 $k > \alpha n$ 对公式（8.1）没有贡献。结合上一段的结论，我们推断上同调次数 $i > \lambda n$ 对公式（8.1）没有贡献。

He因此，鉴于三角不等式，接下来只需给出一个上界 r

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{0\le i\le \lambda n}\left|\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^i(Z_j\times\overline{\mathbb{F}_q}, \pi^{-1}\wedge^k \mathrm{std}_n))\right| + \left|\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^i(\mathrm{Conf}^n\times\overline{\mathbb{F}_q}, \wedge^k \mathrm{std}_n))\right|.$$

相关的层处处纯，权为 0，因此德利涅黎曼猜想给出了以下上界

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{0\le i\le \lambda n} q^{i/2}\cdot\left(\dim H_c^i(Z_j\times\overline{\mathbb{F}_q}, \pi^{-1}\wedge^k \mathrm{std}_n) + \dim H_c^i(\mathrm{Conf}^n\times\overline{\mathbb{F}_q}, \wedge^k \mathrm{std}_n)\right).$$

根据定理 4.2.1，它的上界为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{0\le i\le \lambda n} q^{i/2}\cdot\binom{n-1}{2n-i}\binom{n-1}{k}(|R|^n+1)\le (4|R|)^n q^{\frac{\lambda}{2}n}.$$

由于 $\frac{\lambda}{2}<1$，当 q 足够大时，我们便得到所需的幂次节省。 □

9. Sum of Legendre Symbols

定理 *1.2.6* 的证明。 $g=1$、 $h=f_L$ 的贡献，以及 $h=1$、 $g=f_L$ 的贡献，给出了右侧的主项。因此，我们的任务是在 $n\to\infty$ 时，于下式中获得幂次节省

$$\sum_{L\in\mathcal{E}_q^R(G;n)}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{(g,h)\in\mathrm{Conf}^{i,n-i}(\mathbb{F}_q)\\ gh=f_L}}\left(\frac{g}{h}\right).$$

取绝对值、交换求和次序，并对 i 作平凡求和后，我们需要在下式中获得幂次节省

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left|\sum_{L\in\mathcal{E}_q^R(G;n)}\sum_{\substack{(g,h)\in\mathrm{Conf}^{i,n-i}(\mathbb{F}_q)\\ gh=f_L}}\left(\frac{g}{h}\right)\right|.$$

由二次互反律 [Ros02, Theorem 3.5]可知，任意i 的贡献都等于 $n-i$的贡献，因此只需对每个 $0<i<n/2$，证明上述绝对值中的和存在幂次节省的抵消。

令 $\chi\colon\ \mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{C}^\times$ 为非平凡的二次特征。由定理 3.3.1、公式 (3.6)、式 (3.8) 和式 (3.12) 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{L\in\mathcal{E}_q^R(G;n)}\sum_{\substack{(g,h)\in\mathrm{Conf}^{i,n-i}(\mathbb{F}_q)\\ gh=f_L}}\left(\frac{g}{h}\right)=\\
&\sum_{f\in\mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q)}\#\{L\in\mathcal{E}_q^R(G;n): f_L=f\}\sum_{\substack{(g,h)\in\mathrm{Conf}^{i,n-i}(\mathbb{F}_q)\\ gh=f}}\chi(\mathrm{Res}(h,g))=\\
&\sum_{f\in\mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q)}\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar f}, \pi_*\mathbb{Q}_\ell)\cdot\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar f}, \tau_*^{(n-i)}\,\mathrm{Res}^{-1}\,\mathcal{L}_\chi)=\\
&\sum_{f\in\mathrm{Conf}^n(\mathbb{F}_q)}\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_{\bar f}, \pi_*\mathbb{Q}_\ell\otimes\tau_*^{(n-i)}\,\mathrm{Res}^{-1}\,\mathcal{L}_\chi).
\end{aligned}$$

令 $\kappa = \mathbb{F}_\ell$。根据格罗滕迪克–勒夫谢茨迹公式、德利涅黎曼猜想、定理 4.1.1、式 (5.2) 中的记号、定理 2.0.6 以及定理 5.4.9，上述量的绝对值至多为

$$\sum_{j=0}^{2n} \left|\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_q, H_c^j(\mathrm{Conf}^n \times_{\overline{\mathbb{F}_q}}, \pi_* \mathbb{Q}_\ell \otimes \tau_*^{(n-i)} \operatorname{Res}^{-1} \mathcal{L}_\chi))\right| \leq$$
$$\sum_{j=0}^{2n} q^{j/2} \cdot \dim H_c^j(\mathrm{Conf}^n \times_{\overline{\mathbb{F}_q}}, \pi_* \mathbb{Q}_\ell \otimes \tau_*^{(n-i)} \operatorname{Res}^{-1} \mathcal{L}_\chi) \leq$$
$$\sum_{j=0}^{2n} q^{j/2} \cdot \dim H_{2n-j}(B_n, \kappa R_\times^n \otimes \mathrm{Ind}_{B_{n-i,i}}^{B_n} \mathrm{Span}_\kappa v^{\otimes(n-i)} \otimes \underline{v}^{\otimes i}).$$

只需证明存在 $\lambda > 0$ 使得

$$H_j(B_n, \kappa R_\times^n \otimes \mathrm{Ind}_{B_{n-i,i}}^{B_n} \mathrm{Span}_\kappa v^{\otimes(n-i)} \otimes \underline{v}^{\otimes i}) = 0, \qquad 0 \leq j \leq \lambda n. \tag{9.1}$$

事实上，由定理 4.2.1 可得界

$$\sum_{0 \leq j \leq (2-\lambda)n} q^{j/2} \cdot \binom{n-1}{2n-j} \cdot \dim(\kappa R_\times^n \otimes \mathrm{Ind}_{B_{n-i,i}}^{B_n} \mathrm{Span}_\kappa v^{\otimes(n-i)} \otimes \underline{v}^{\otimes i}) \leq$$
$$\sum_{0 \leq j \leq (2-\lambda)n} q^{(1-\lambda/2)n} \cdot \binom{n-1}{2n-j} \cdot \dim \kappa R_\times^n \cdot \dim(\mathrm{Ind}_{B_{n-i,i}}^{B_n} \mathrm{Span}_\kappa v^{\otimes(n-i)} \otimes \underline{v}^{\otimes i}) \leq$$
$$q^{(1-\lambda/2)n} \cdot 2^{n-1} \cdot |R|^n \cdot \binom{n}{i} \leq (4|R|q^{1-\lambda/2})^n$$

当 q 足够大时，这就带来了幂次节省。

现在我们着手证明等式 (9.1) 中的消失性。将定理 5.4.10 中的包含与 $\kappa R_\times^n$张量积，并采用定理 5.1.11 的记号，可得一个表示之间的单射同态

$$\kappa R_\times^n \otimes \mathrm{Ind}_{B_{n-i,i}}^{B_n} \mathrm{Span}_\kappa v^{\otimes(n-i)} \otimes \underline{v}^{\otimes i} \to \kappa R_\times^n \otimes \kappa \mathcal{S}_\pm(i, n-i) = \kappa[R_\times^n \times \mathcal{S}_\pm(i, n-i)]$$

在 κ上的 B_n。注意到 $R_\times^n \times \mathcal{S}_\pm(i,\ n-i)$ 是 $R^n \times \mathcal{S}_\pm^n = (R \times \mathcal{S}_\pm)^n$ 的子集。由我们的假设 $0 < i < n$、定理 5.1.32、定理 5.1.40 和定理 5.1.50 可知，$R_\times^n \times \mathcal{S}_\pm(i,\ n-i)$ 实际上是 $(R \times \mathcal{S}_\pm)_\times^n$ 的子集。

因此，由 [LL25a，定理 1.4.2], [LL25b，例 1.4.7], 定理 5.1.46（或定理 5.1.48 和定理 5.1.49）以及定理 5.1.54 可知，存在 $\lambda > 0$，使得 B_n 在次数 $i \leq \lambda n$ 上、系数取 $\kappa[R_\times^n \times \mathcal{S}_\pm(i, n-i)]$ 时，其同调的唯一贡献来自表示 $\kappa[R_\times^n \times \mathcal{S}_\pm(i, n-i)]$ 的（不可约）成分；该表示属于 B_n，并出现在 B_n 的表示 $\mathrm{Ind}_{B_{i,n-i}}^{B_n} \kappa$ 中。因此，我们的任务是证明

$$\mathrm{Hom}_{B_n}(\mathrm{Ind}_{B_{n-i,i}}^{B_n} \mathrm{Span}_\kappa v^{\otimes(n-i)} \otimes \underline{v}^{\otimes i}, \mathrm{Ind}_{B_{i,n-i}}^{B_n} \kappa) = 0,$$

或者等价地，根据从有限指数子群诱导的右伴随性，证明

$$H_0(B_{i,n-i}, \mathrm{Ind}_{B_{n-i,i}}^{B_n} \mathrm{Span}_\kappa v^{\otimes(n-i)} \otimes \underline{v}^{\otimes i}) = 0.$$

这可由麦基理论以及该辫群表示不能经由对称群因子化这一事实推出。□

10. Acknowledgments

我们感谢 Will Sawin 提出定理 5.2.9，并感谢他多次给予有益的讨论。论文撰写期间，我们也感谢 Aaron Landesman 和 Craig Westerland 提供的宝贵讨论。

Jordan Ellenberg 的研究由美国国家科学基金会资助项目 DMS-2301386 和西蒙斯奖学金提供支持。Mark Shusterman 的研究由欧盟（欧洲研究委员会，函数域，101161909）共同资助。此处表达的观点和意见仅代表作者本人，不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的观点和意见。欧盟和拨款机构均不对此承担责任。

References

[BDPW23] J. Bergstr
¨
Hyperelliptic curves the scanning map and om、A. *moments of families of quadratic L-functions* 2302 07664 2023 Diaconu、D. Petersen 和 C. Westerland， ， ， arXiv 预印本 arXiv: 。( )。[BE11] N. Boston 和 J. Ellenberg, *Random pro-p groups, braid groups, and random tame Galois groups*，《群、几何与动力系统》2 (2011)，第 5 期，265–280。[BG09] M. Bhargava 和 E. Ghate, *On the average number of octahedral newforms of prime level*，Mathema-tische Annalen 344 (2009)，第 4 期，749–768。[BM09] N. Boston 和 N. Markin, *The fewest primes ramified in a G-extension of* $\mathbb{Q}$，《魁北克数学科学年鉴》2 (2009)，第 33 期，145–154。[BSEF23] L. Bary-Soroker、A. Entin 和 A. Fehm, *The minimal ramification problem for rational function fields over finite fields* **21** 2023 18199 18253 ，《国际数学研究通知》( )，— 。[BSS20] L. Bary-Soroker 和 T. Schlank, *Sieves and the minimal ramification problem*，《朱西厄数学研究所杂志》19 (2020)，第 3 期，919–945。[Cal14] F. Callegaro, *Salvetti complex. spectral sequences and cohomology of Artin groups*，图卢兹科学院数学年鉴 XXIII (2014)，第 2 期，267–296。[Del80] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*，IHÉS 数学出版物 ´9 (1980)，第 52 期，137–252。[DS24] A. Davis 和 T. M Schlank, *Arithmetic Kei theory*，arXiv 预印本 arXiv:2408.05489 (2024)。[EL23] J. S Ellenberg 和 A. Landesman, *Homological stability for generalized Hurwitz spaces and Selmer groups in quadratic twist families over function fields* 2310 16286 2023 ，arXiv 预印本 arXiv: 。( )。[ELS20] J. Ellenberg、W. Li 和 M. Shusterman, *Nonvanishing of hyperelliptic zeta functions over finite fields*，《代数与数论》14 (2020)，第 7 期，1895–1909。[ETW23] J. S Ellenberg、T. Tran 和 C. Westerland, *Fox-Neuwirth-Fuks cells quantum shuffle algebras and* , , , arXiv 预印本 arXiv: 。( )。[EVW16] J. S Ellenberg、A. Venkatesh 和 C. Westerland, *Homological stability for Hurwitz spaces and the Cohen-Lenstra conjecture over function fields* 2016 729 786 ，《数学年刊》( )，– 。[Fre88] E. V. Frenkel'，《泛函分析及其应用》22 (1988)，第 3 期，248–250。[HMW25] Z. Himes 、 J. Miller 和 J. Wilson, *Representation stability for ordered Hurwitz spaces*，arXiv 预印本 arXiv:2509.05516 (2025)。[Hoa23] A. T. N. Hoang, *Fox-Neuwirth cells, quantum shuffle algebras, and character sums of the resultant*，arXiv 预印本 arXiv:2308.01410 (2023)。[Hoe09] J. L. Hoelscher, *Galois extensions ramified only at one prime*，《Journal of Number Theory》129 (2009)，第 2 期，418–427。[JR08] J. W. Jones 和 D. P. Roberts, *Number fields ramified at one prime*，算法数论 5011 (2008)，226–239。[KNS10] H. Kisilevsky、D. Neftin 和 J. Sonn, *On the minimal ramification problem for semiabelian groups*，《代数与数论》4 (2010)，第 8 期，1077—1090。[KS10] H. Kisilevsky 和 J. Sonn, *On the minimal ramification problem for ℓ-groups*，Compositio Mathematica 146 (2010)，第 3 期，599—606。[LL24] A. Landesman 和 I. Levy, *The Cohen–Lenstra moments over function fields via the stable homology of non-splitting Hurwitz spaces* 2410 22210 2024 ，arXiv 预印本 arXiv: 。( )。[LL25a] , *Homological stability for Hurwitz spaces and applications*，arXiv 预印本 arXiv:2503.03861 (2025)。[LL25b] , *The stable homology of Hurwitz modules and applications*，arXiv 预印本 arXiv:2510.02068 (2025)。

[LWZB24] Y. Liu、M. Wood 和 D. Zureick-Brown, *A predicted distribution for Galois groups of maximal unramified extensions* **237** 2024 49 116 , Inventiones mathematicae ( ), —。[Man97] S. Manfredini, *Some subgroups of Artin's braid group*, Topology and its Application 78 (1997), 123–142。[MPPRW24] J. Miller、P. Patzt、D. Petersen 和 O. Randal-Williams, *Uniform twisted homological stability*, arXiv 预印本 arXiv:2402.00354 (2024)。[MU11] N. Markin 和 S. V. Ullom, *Minimal ramification in nilpotent extensions*, Pacific J. Math. 253 (2011), 第 1 期, 125–143。[Nom08] A. Nomura, *Notes on the minimal number of ramified primes in some l-extensions of* $\mathbb{Q}$, Arch. Math. 90 (2008), 第 6 期, 501–510。[NSW13] J. Neukirch、A. Schmidt 和 K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, 第 323 卷, Springer Science & Business Media, 2013。[Pla04] B. Plans, *On the minimal number of ramified primes in some solvable extensions of* $\mathbb{Q}$, Pacific J. Math. 215 (2004), 第 2 期, 381–391。[Ros02] M. Rosen, *Number theory in function fields*, Graduate Texts in Mathematics, 第 210 卷, Springer Science & Business Media, 2002。[San25] T. Santens, *The leading constant in malle's conjecture over function fields*, arXiv 预印本 arXiv:2512.12838 (2025)。[Saw21] W. Sawin, *Square-root cancellation for sums of factorization functions over short intervals in function fields* **170** 2021 5, 997 1026 , Duke Math. J. ( ), 第 – 期。[Shu24] M. Shusterman, *The tamely ramified geometric quantitative minimal ramification problem*, Compositio Mathematica 160 (2024), 第 1 期, 21–51。[SW22] W. Sawin 和 M. M. Wood, *The moment problem for random objects in a category*, arXiv 预印本 arXiv:2210.06279 (2022)。[SW24] , *Finite quotients of 3-manifold groups*, Inventiones mathematicae 237 (2024), 349–440。[SW25] W. Sawin 和 I. Whitehead, *Functional equations of axiomatic multiple Dirichlet series, Weyl groupoids, and quantum algebra* 2507 08662 2025 , arXiv: 。( )。[~~TT20~~] T. Taniguchi 和 F. Thorne, *Levels of distribution for sieve problems in prehomogeneous vector spaces*, Mathematische Annalen 376 (2020), 第 3 期, 1537–1559。[Wit14] M. D. Witt, *Minimal ramification and the inverse galois problem over the rational function field* $\mathbb{F}_p(t)$, 《Journal of Number Theory》143 (2014), 62–81。

Department of Mathematics, University of Wisconsin, Madison, WI 53706
Email address: ellenber@math.wisc.edu

Mark Shusterman, Faculty of Mathematics and Computer Science, Weizmann Institute of Science, 234 Herzl Street Rehovot 76100 , , Israel.
Email address: mark.shusterman@weizmann.ac.il