arXiv:2601.01249v1 [math.OA] 3 Jan 2026

图 C*-代数是单生成的

JAKUB CURDA、JULIAN GONZALES 和 VICTOR WU

Abstract. 我们证明，可数有向图的 C^*-代数是单生成的。因此，任何由满足 Cuntz-Krieger 关系的可数族投影和偏等距生成的 C^*-代数也是单生成的。

Introduction

哪些算子代数由单个元生成，或等价地由两个自伴元生成，这一问题至少可以追溯到 Kadison 于 1967年 提出的问题清单（见 [8]）。他针对可分作用的 II_1因子提出了这一问题，或者更一般地说，针对可分作用的冯·诺伊曼代数提出了这一问题。对于所有非 II_1([16, 26]) 型的因子，Kadison 的问题已经得到解决，而许多 II_1 因子也已知是单生成的（例如见 [17, 9, 7]）。这一问题在一般情形下仍未解决——例如，对于自由群因子 $L(\mathbb{F}_n$，当 $n \geq 3$时仍是开放问题。

与冯·诺依曼代数的情形不同，若问所有可分C^*-代数是否都是单生成的，那就过于天真了——随便找找就能发现反例。对于含单位元的交换 C^*-代数，已知 $C(X)$是单生成的，当且仅当 X 嵌入复平面。非交换反例也比比皆是。若矩阵维数n 相对于 X 的维数足够小，则形如 $C(X) \otimes M_n$ 的代数不是单生成的（例如参见 [14] ）。由于单生成 C^*-代数的商仍然是单生成的，因此可以由这些代数的扩张构造出更多反例。例如， $\mathbb{F}_2$ 的全群 C^*-代数$C^*(\mathbb{F}_2)$不是单生成的，因为它有商代数 $C(\mathbb{T}^2)$。

因此， C^*-代数的生成元问题通常仅针对没有有限维表示的代数（例如参见 [23, 问题 1.3] ），有时甚至仅针对单代数。就我们所知，单生成的唯一已知障碍，是存在非单生成的齐性商代数。

一类自然的 C^*代数不会产生问题商，这一类就是图 C^*代数；见下文所述的分解。本文证明，对于任意可数有向图 E，其图 C^*代数 $C^*(E)$都是单生成的。

Th定理 A. 设 E 是一个可数有向图。那么 $C^*(E)$ 是单生成的 *ed.*

最初由 [12] （另见 [6]）引入的图 C^*-代数已证明是一类通常允许进行明确计算、直接研究 C^*-代数性质并检验猜想的代数（例如参见 [20, 21, 2, 3, 4]）。尽管这类代数很少是简单的，粗略地说，它们是由 AF 代数、Kirchberg 代数以及形如 $C(\mathbb{T}) \otimes M_n$ ([1]) 的代数经过迭代扩张而得到的，而这些代数都已知是单生成的（见下文段落）。由于单生成性不会传递到扩张上（参见 [22]），定理 A 不能直接由这一事实推出。尽管如此，

这表明，图 C^*-代数是研究生成元问题的一个自然类别。注意，定理 A 并不能一般性地推广到 C^*高秩图的 -代数——已知某个 k-图可以具有同构于 C^*-代数的 $C(\mathbb{T}^k)$（参见 [11, 例 1.7 (iii)]）。

我们简要概述一下 C^* 情形中已知的单生成结果。早期研究（[25, 15, 13]）着眼于具有适当分解性质的代数。此后，相关研究 [23] 最终表明，特别是，任何含幺可分且 $\mathcal{Z}$-稳定的 C^* 代数都是单生成的。我们还指出，含幺可分 C^* 代数的稳定化也是单生成的（[15, 定理 8]），所有 AF 代数也都是如此（[22]）。另一方面，Kirchberg 有一项未发表的结果指出，任何含有两个等距算子且其值域正交的含幺可分 C^* 代数都是单生成的（该结果的表述见 [14, 第 138] 页；特殊情形下证明思路的概要见 [23, 定理 2.4] ）。

图 C^* 代数这一类包含稳定和/或 $\mathcal{Z}$-稳定的代数（见[24, 5]）。对于属于上述类别的图代数，我们的方法为其单生成提供了另一种证明。这一类还包含 Kirchberg 结果所涵盖的代数，不过这些代数必定含幺。值得注意的是，生成元问题通常限于含幺 C^* 代数，因为一个 C^* 代数是单生成的，当且仅当其最小单位化是单生成的。本文不对是否含幺作任何假设——事实上，一个图对应的 C^* 代数含幺，当且仅当该图只有有限多个顶点。

现在，我们通过没有汇点的有限图这一特殊情形，来说明证明的基本思路。设 E 是这样一幅边为 e_1、……、e_m的图。记 s_i 为相应的偏等距，注意到 $C^*(E) = C^*(s_1$、……、$s_m)$。事实证明，若 E 不含汇点，则对于适当选取的权重 ζ（它属于由所有顶点投影以及边偏等距的值域投影生成的交换子代数），元素 $d = (\sum s_i)\ \zeta$ 是 $C^*(E)$的一个生成元。利用 s_i值域的正交性，可知 d^*d 是值域投影的加权和，因此它们都属于 $C^*(d)$。最后，在左侧乘以 $s_i s_i^*$，可得 s_i 也属于 $C^*(d)$。我们指出，对等距算子取标量倍数再求和的思路，已经出现在 [23, 定理 2.4]中对 Kirchberg 结果的证明概要里。

事实证明，上述策略并未用到单位元，因此将其推广到没有汇点的可数图是直接的（见推论 8）。主要障碍是 E 中的汇点。更具体地说，当存在接收无限多条边的汇点时，图 C^*-代数不再由边偏等距生成。我们将生成元调整为三个项之和，每一项分别用于处理图的不同部分。第一项捕捉汇点及终止于这些汇点的边，第二项捕捉所有与汇点相距“足够远”的边，第三项则处理其余边，并帮助将前两项粘合在一起。通过仔细的双重归纳论证，我们可以从生成元中恢复每个边偏等距元和顶点投影。

本文结构安排如下：第 1 节回顾谱理论和图 C^*-代数的一些基本事实；第 2 节讨论没有汇点的图 E 这一特殊情形。第 3节构造 $C^*(E)$ 的候选生成元，随后在第 4节验证它确实是一个生成元。

Funding

作者感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所（剑桥）在“拓扑群胚及其 C^*-代数”项目期间给予的支持与热情接待，本文的相关工作正是在此期间完成的。本研究得到英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/V521929/1。JC 得到英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/X026647/1。JG 得到英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/T517896/1。为实现开放获取，作者已对本次投稿所产生的任何作者接受稿（AAM）版本采用知识共享署名许可协议公共版权许可。

Acknowledgments

作者谨此感谢 Brian Chan，就与本文相关的主题进行了有益的讨论。

1. Preliminaries and basic facts - spectra

为统一符号约定，我们先回顾有向图及其相应 C^*-代数的定义。

定义 1. 一个有向图 $E=(E^0,E^1,r,s)$ 是由可数的顶点 集和边 集 E^0 和 E^1，以及值域 映射和源点 映射 $r,s\colon E^1\to E^0$ 组成的四元组。

定义 2 ([6, 定义 1])。 设 $E=(E^0,E^1,r,s)$ 是一个有向图。一个 *Cuntz-Krieger* E-族 在一个 C^*-代数 A 中由一族 $\{p_v\colon v\in E^0\}\subseteq A$ 互相正交的投影以及一族 $\{s_e\colon e\in E^1\}\subseteq A$ 具有互相正交值域的偏等距组成，并满足

(i) 对所有 $e\in E^1$，$s_e^*s_e=p_{s(e)}$；(ii) 对所有 $e\in E^1$，$s_es_e^*\le p_{r(e)}$；以及 (iii) 当 $0<|r^{-1}(v)|<\infty$ 时，$p_v=\sum_{r(e)=v}s_es_e^*$。

图 C^*代数 $C^*(E)$ 是由一个 Cuntz-Krieger$E$-族生成的泛 C^*-代数。

我们沿用 [18] 的约定，使边及其对应的偏等距沿同一方向，这与 [6] 和 [19], 不同，例如后两者采用相反的约定。证明 $C^*(E)$ 具有单生成性时，并不需要用到其泛性质；我们直接证明，任何由一个 Cuntz-Krieger$E$-族生成的 C^*-代数都是单生成的。

我们先介绍图中边和顶点的一些记号。术语 内部和 边界 用于描述边或顶点距离汇点有多远。我们在第 3 节构造的生成元将由三个部分组成，分别来自内部边、边界边和汇点。

记号 3。 设 $E=(E^0,E^1,r,s)$ 是一个有向图。若顶点 $v\in E^0$ 满足 $s^{-1}(v)=\emptyset$（也就是说，v 不发出任何边），则称其为汇点；我们用 $E^0_{\mathrm{sink}}\subseteq E^0$ 表示汇点集合。若顶点 $v\in E^0$ 不是汇点，且 $r(s^{-1}(v))\subseteq E^0_{\mathrm{sink}}$（也就是说，从 v 发出的所有边都终止于汇点），则称其为边界顶点；我们用$E^0_{\mathrm{bdry}}\subseteq E^0$ 表示边界顶点集合。所有其他顶点称为内部顶点；我们用 $E^0_{\mathrm{int}}\subseteq E^0$ 表示内部顶点的集合（因此 $E^0=E^0_{\mathrm{int}}\sqcup E^0_{\mathrm{bdry}}\sqcup E^0_{\mathrm{sink}}$）。

若边 $e \in E^1$ 满足 $r(e) \in E^0_{\mathrm{sink}}$，则称其为汇点边；若满足 $r(e) \in E^0_{\mathrm{bdry}}$，则称其为边界边；若满足 $r(e) \in E^0_{\mathrm{int}}$，则称其为内部边。我们用 $E^1_{\mathrm{sink}} \subseteq E^1$ 表示汇点边集合，用 $E^1_{\mathrm{bdry}} \subseteq E^1$ 表示边界边集合，用 $E^1_{\mathrm{int}} \subseteq E^1$ 表示内部边集合。

记号 4。 设 E 为一个有向图。对于顶点 $v, w \in E^0$，我们用 $p_v, q_w \in C^*(E)$ 表示相应的投影；对于边 $e, f \in E^1$，我们用 $s_e, t_f \in C^*(E)$ 表示相应的偏等距。我们称 $s_e s_e^*$ 为与边 e 相对应的值域投影。从现在起，w 将专门表示汇点，而 f 将专门表示汇边。

1.1. **谱。** 本小节记录关于谱的两个基本事实。第一个是关于 C^*-代数中正交正规元的一般事实。第二个指出，图 C^*-代数中的某些自伴元具有可数谱，这一结论对于我们在第 3 节构造生成元至关重要。

若 A 和 B 是单生成的 C^*-代数，且 A 是含单位元的，[1] 则直和 $A \oplus B$ 也是单生成的[2]。在交换情形下，我们需要这一事实的一个简单变体：不再要求 A 含单位元，而是要求对生成元 $a \in A$ 和 $b \in B$ 的谱加以控制。

引理 5. 设 A 是一个 C^*-代数，且 a、$b \in A$ 是两个正交正规元，满足

$$\sigma(a) \setminus \{0\} \cap \sigma(b) \setminus \{0\} = \emptyset\,. \tag{1.1}$$

那么 a、$b \in C^*(a+b)$。

证明。 由正交性可得，

$$\begin{aligned} C^*(a,b) &\cong C^*(a) \oplus C^*(b) \\ &\cong C_0\big(\sigma(a) \setminus \{0\}\big) \oplus C_0\big(\sigma(b) \setminus \{0\}\big) \\ &\cong C_0\big((\sigma(a) \setminus \{0\}) \sqcup (\sigma(b) \setminus \{0\})\big)\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

由于 $\sigma(a)$ 和 $\sigma(b)$ 是紧的，由 (1.1) 可知，不交并 $(\sigma(a)\setminus\{0\})\sqcup(\sigma(b)\setminus\{0\})$ 与 $U := \big(\sigma(a) \cup \sigma(b)\big) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}$ 同胚。在恒等 $\Phi\colon C^*(a,b) \xrightarrow{\cong} C_0(U)$ 下，我们得到

$$\Phi(a)(z) = \begin{cases} z & \text{if } z \in \sigma(a) \\ 0 & \text{if } z \in \sigma(b) \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\Phi(b)(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z \in \sigma(a) \\ z & \text{if } z \in \sigma(b) \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\Phi(a+b)(z) = z \quad \text{for all } z \in U\,. \tag{1.5}$$

由于 $\Phi(a+b)$ 分离点且在 U 中处处不为零，它生成 $C_0(U)$ 作为一个 C^*-代数（根据局部紧版本的 Stone-Weierstrass定理）。因此a，$b \in C^*(a+b)$，如所需。□

[1]注意，两个非含单位元的单生成 C^*-代数的直和不一定是单生成的。例如，考虑 $C_0(X) \oplus C_0(X)$，其中 X 是穿孔圆盘。[2]设 a 和 b 分别为它们的生成元，不失一般性，设 $\|a\|$，$\|b\| < \frac{1}{2}$。取实部和虚部后，应用函数演算可知，$(1_A + i1_A + a,\ b)$ 是 $A \oplus B$ 的一个生成元。

为了在我们的情形中应用引理 5，我们需要以下结果来控制图 C^*-代数中某些自伴元的谱。

引理 6. 设 E 是一个有向图。设 B 是由$E^0_{\mathrm{sink}} \cup E^1_{\mathrm{sink}} \cup E^1_{\mathrm{bdry}}$生成的 $C^*(E)$ 的 C^*-子代数。那么， B 的每个自伴元都有可数谱。

证明。 设 F 是 E 的子图，它仅由边 $E^1_{\mathrm{sink}} \cup E^1_{\mathrm{bdry}}$ 及其值域和源点，以及 E^0_{sink}构成。由于 F 是入口完备的（即对每条边 $e \in F^1$，都有 $r_E^{-1}(r_E(e)) \subseteq F^1$），因此这一族

$$\{p_v : v \in E^0_{\mathrm{sink}} \cup E^0_{\mathrm{bdry}}\} \cup \{s_e : e \in E^1_{\mathrm{sink}} \cup E^1_{\mathrm{bdry}}\} \tag{1.6}$$

是 $C^*(E)$中的一个 Cuntz-Krieger F-族，因此存在一个 $*$-同态 φ: $C^*(F) \to B$。显然， φ 是满射；又由于 F 无环，Cuntz-Krieger 唯一性定理（[6,定理 2]）[3] 表明 φ 是单射，因而是一个同构。

注意， F 是无环的，并且有可数条路径，因为 F 中的最大路径长度为 2。因此，[19, 定理 6.5] 与 [10] 共同推出， $C^*(F) \cong B$ 中的每个自伴元都有可数谱，证毕。□

2. Graphs with no sinks

本节给出一个简短证明，说明 C^*无汇点图的代数是单生成的。与第 4 节一样，我们利用图 C^*代数的一个关键性质：边偏等距的值域投影两两正交。正如引言中所提到的，证明 [23, 定理 2.4] 时也采用了类似的思路。

本节中的生成元 d 具有 $(\sum \epsilon_e s_e)\,\xi^{\frac{1}{2}}$ 的形式，其中 $\sum \epsilon_e s_e$ 是所有边偏等距的加权和，而 ξ 是属于由所有顶点投影和值域投影生成的（交换的）C^*子代数的一个正元素。选取元素 ξ ，使得由 d^*d 生成的 C^*子代数包含所有值域投影 $s_e s_e^*$。值域投影两两正交，因此在生成元 d 左乘以 $s_e s_e^*$，可知 s_e 也属于 $C^*(d)$。由于无汇点图的 C^*代数由其边偏等距生成，因此 d 生成 $C^*(E)$。

下面的引理描述了 ξ的构造，并将在第3节中使用。粗略地说，适当的正元素 ξ 之所以存在，是因为任何由一族交换投影生成的交换 C^*-代数都有零维谱，因此尤其是单生成的。

引理 7。设 $S \subseteq E^1$ 是有向图 E 中的一组边。令 $V := s(S) \subseteq E^0$ 为 S 中各边的源点集合，并令 $T := r^{-1}(V) \subseteq E^1$ 为所有值域属于 V 的边的集合。定义

$$A := C^*(p_v, s_e s_e^* : v \in V, e \in T) \subseteq C^*(E). \tag{2.1}$$

设 $(\epsilon_e)_{e\in S}$ 是满足 $\sum_{e\in S} \epsilon_e < \infty$ 的正实数。存在一个范数不超过 *1* 的正元素 $\xi \in A$ ，使得

$$d := \left(\sum_{e\in S} \epsilon_e s_e\right) \xi^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

满足以下条件：

[3]如前所述，本文采用的边偏等距方向约定与 [6] 及 [19] 中采用的相反。

(i) $A = C^*(d^*d)$；*(ii)* 对于任意 $v \in V$，存在 $h_v \in A$ 使得 $p_v = \xi^{\frac{1}{2}} h_v$。

此外，给定任意可数紧集 $C \subseteq \mathbb{C}$，可以选取元素 ξ，使得d^*d 的谱与 $C \setminus \{0\}$不相交。

证明。对每个 $v \in V$，令 $\mu_v := \sum_{e \in S \cap s^{-1}(v)} \epsilon_e^2$。注意，由于对于每个 $v \in V$，集合 $S \cap s^{-1}(v)$ 都非空，因此每个 μ_v 都是有限且严格为正的。令 $C \subseteq \mathbb{C}$ 为可数紧集，从而对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个非零长度的区间 $[\theta, \theta'] \subseteq (0, \varepsilon)$，使得 $C \cap [\theta, \theta'] = \emptyset$。令 $\{[\theta_v, \theta_v']\}_{v \in V} \subseteq (0,1)$ 为一组两两不相交的非零长度区间，使得 $C \cap [\theta_v, \theta_v'] = \emptyset$ 且对所有 $v \in V$ 都有 $\frac{\theta_v'}{\mu_v} \leq 1$。如果 V 是无限的，我们还要求：对于任意 $\varepsilon > 0$，仅存在有限多个 $v \in V$ 使得$\frac{\theta_v'}{\mu_v} > \varepsilon$。

代数 A 是交换的，且具有零维谱。令 Ω 表示其谱，并令 $\Psi\colon A \xrightarrow{\sim} C_0(\Omega)$ 为典范同构。对于每个 $v \in V$，令 $K_v \subseteq \Omega$ 为满足 $\Psi(p_v) = \mathbb{1}_{K_v}$的紧开子集。注意，$\Omega$ 是这些集合的不交并。K_v令 $\xi \in A$ 满足：对于每个 $v \in V$，限制 $\Psi(\xi)|_{K_v}$ 是单射，且值域包含于 $[\frac{\theta_v}{\mu_v}, \frac{\theta_v'}{\mu_v}]$[4]中。注意，$\xi$的范数至多为 1。

设 $r := \sum_{e \in S} \epsilon_e^2 s_e^* s_e \in A$，并注意到，根据偏等距 s_e的值域的正交性，有 $r\xi = d^*d$。在每个紧开集 K_v上，函数 $\Psi(r)$ 取常值 μ_v，因此 $\Psi(d^*d)|_{K_v}$ 是单射，并且取值于 $[\theta_v, \theta_v']$ 中。于是，函数$\Psi(d^*d)$ 在 Ω 上严格为正且为单射，因此生成 $C_0(\Omega)$ 作为一个C^*-代数（根据局部紧空间版本的 Stone-Weierstrass定理）。由此可得 $A = C^*(d^*d)$。这证明了 (i)。还要注意，$\Psi(d^*d)$ 的值域与 $C \setminus \{0\}$ 不相交，因此 d^*d 的谱与 $C \setminus \{0\}$ 不相交。

现在证明 (ii)。设 $v \in V$。函数 $\Psi(\xi)$ 在限制于紧开集 K_v 时，其值域包含于 $[\frac{\theta_v}{\mu_v}, \frac{\theta_v'}{\mu_v}]$。由于 $\frac{\theta_v}{\mu_v} > 0$，存在 $h_v \in A$，使得函数$\Psi(h_v) \in C_0(\Omega)$ 满足 $\Psi\big(\xi\big)^{\frac{1}{2}} \Psi(h_v) = \mathbb{1}_{K_v}$。因此 $\xi^{\frac{1}{2}} h_v = p_v$，证毕。□

以下结论可由前述引理立即推出。

花冠 **图 8.** 设 E 是一个无汇点的有向图。那么 $C^*(E)$是单生成的.

证明。设 $S = E^1$ 为 E中所有边组成的集合。设 V和 T如引理 7 中所述。由于 E 没有汇点，因此有 $V = E^0$ 和 $T = E^1$。设 $(\epsilon_e)_{e \in E^1}$ 为任意满足 $\sum_{e \in E^1} \epsilon_e < \infty$的正实数序列，并设 A、ξ 和 d 如引理 7 中所述。任取$e \in E^1$，并令 $h \in A = C^*(d^*d)$ 满足 $\xi^{\frac{1}{2}} h = s_e^* s_e$。由于 $s_e s_e^* \in A = C^*(d^*d)$，我们有

$$\epsilon_e s_e = s_e s_e^* dh \tag{2.3}$$

属于 $C^*(d)$。由此可得 $C^*(d) = C^*(E)$，因为 $C^*(E)$ 由其边偏等距生成。□

3. A generator for $C^*(E)$

设 E 是一个有向图。在本节中，我们构造一个元素 $g \in C^*(E)$，它将成为 $C^*(E)$ 的一个生成元。

[4]这是可行的，因为任何第二可数的 0 维空间都能嵌入区间。

记号 9. 令 $\{w_1, w_2, \dots\} = E^0_{\text{sink}}$ 表示 $C^*(E)$ 中汇点的集合。对每个汇点 w_m，令 $\{f_{m,1}, f_{m,2}, \dots\} = r^{-1}(w_m)$ 表示终止于 w_m 的边的集合。注意，$\{f_{m,n}\}_{m,n\geq 1}$ 等于 E^1_{sink}，即所有汇边的集合。对每个汇点 w_m，令 $q_m := q_{w_m} \in C^*(E)$ 表示相应的投影；对每条汇边 $f_{m,n}$，令$t_{m,n} := t_{f_{m,n}} \in C^*(E)$ 表示相应的偏等距。

对于每个 $v \in E^0_{\text{bdry}}$，令 $m(v) \in \mathbb{N}$ 为满足存在一条边 f，使得 $s(f) = v$ 且 $r(f) = w_{m(v)}$ 的最小正整数。对每个$\ell \in \mathbb{N}$，记 $V_\ell := \{v \in E^0_{\text{bdry}} : m(v) = \ell\}$。注意，$V_1$，$V_2$，.....两两不相交，且 E^0_{bdry} 等于它们的并集。

令 $Y := s(E^1_{\text{bdry}}) \subseteq E^0_{\text{int}}$ 为满足存在一条（边界）边 $e \in E^1_{\text{bdry}}$，使得 $s(e) = y$ 的（内部）顶点 y 的集合。对于每个 $y \in Y$，令 $\{e_{y,1}, e_{y,2}, \dots\} = E^1_{\text{bdry}} \cap s^{-1}(y)$ 为源点等于 y 的所有边界边组成的集合。注意，$\{e_{y,n}\}_{y\in Y,\ n\geq 1}$ 等于 E^1_{bdry}，即所有边界边组成的集合。对于每条边界边 $e_{y,\ n}$，令 $s_{y,\ n} := s_{e_{y,\ n}} \in C^*(E)$ 表示其对应的偏等距。[5]

下面说明边和顶点的标记方式。第 4 节的目标是证明，所有边偏等距和汇点投影都属于 $C^*(g)$，其中 g表示 $C^*(E$ 的候选生成元。若某族投影或偏等距已在记号 9 中枚举，我们将用归纳法证明该族的所有元素都属于 $C^*(g)$（见引理 12 和命题 15）。

The 由定义 2 中的 Cuntz-Krieger 关系，下面的引理显然成立。

引理 10. 对于任意整数 $m, n, m', n', k \geq 1$、边$e, e' \in E^1$及顶点 $y \in Y$，有如下关系：

$$
\begin{aligned}
s_e^* s_{e'} &= 0 && \text{if } e \neq e', \\
q_m \perp s_e &&& \text{if } e \in E^1_{\text{bdry}} \cup E^1_{\text{int}}, \\
q_m \perp p_v &&& \text{if } v \in E^0_{\text{bdry}} \cup E^0_{\text{int}}, \\
p_v t_{m,n} &= 0 && \text{if } v \in E^0_{\text{bdry}} \cup E^0_{\text{int}}, \\
t_{m,n} t_{m',n'} &= 0, \\
s_{y,k} s_{y,n}^* s_{y,n} &= s_{y,k}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

此外，

$$
q_{m'} t_{m,n} = \begin{cases} t_{m,n} & \text{if } m = m' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{3.2}
$$

取一个严格递减序列 $(\delta_m)_{m=1}^\infty \subseteq (0,1)$，使得 $\sum_{m=1}^\infty \delta_m < \infty$。令 $(\alpha_{y,n})_{y\in Y, n\geq 1} \subseteq (0,1)$ 满足 $\sum_{y\in Y, n\geq 1} \alpha_{y,n} < \infty$，并且使得

$$
\sum_{r(e_{y,n})\in V_\ell} \alpha_{y,n} \leq \delta_\ell - \delta_{\ell+1} \tag{3.3}
$$

对于所有 ℓ。这意味着

$$
\sum_{\ell\geq m} \sum_{r(e_{y,n})\in V_\ell} \alpha_{y,n} \leq \delta_m \qquad \text{for all } m. \tag{3.4}
$$

[5]请注意，集合 Y、V_ℓ、$\{w_1, w_2, \dots\}$，$\{f_{m,1}, f_{m,2}, \dots\}$ 中的任何一个都可能是有限集或空集。给定 $y \in Y$，集合 $\{e_{y,1}, e_{y,2}, \dots\}$ 也可能是有限集。

设双重序列 $(\gamma_{m,\,n})_{m,\,n=1}^{\infty}$ 满足 $\sum_{m\,,\,n=1}^{\infty}(\gamma_{m,\,n}-\delta_m)<\infty$，并且对每个 $m\in\mathbb{N}$，$(\gamma_{m,\,n})_{n=1}^{\infty}\subseteq(\delta_m,\ \delta_{m-1})$ 都是严格递减序列。对每个 $m,\ n\in\mathbb{N}$，令$\beta_{m,\,n}:=\frac{\gamma_{m,\,n}-\delta_m}{2}$。注意到 $\sum_{m\,,\,n=1}^{\infty}\beta_{m,\,n}<\infty$。定义

$$a:=\sum_{\substack{y\in Y\\ n\geq 1}}\alpha_{y,n+1}s_{y,n+1}s_{y,n}^{*}\,, \tag{3.5}$$

$$b:=\sum_{m,n\geq 1}\beta_{m,n}t_{m,n}\,, \tag{3.6}$$

$$c:=\sum_{m\geq 1}\delta_m q_m+\sum_{m,n\geq 1}(\gamma_{m,n}-\delta_m)t_{m,n}t_{m,n}^{*}\,. \tag{3.7}$$

注意到所有级数在范数意义下绝对收敛，因此 a、b 和 c 都是 $C^*(E)$ 中定义良好的元素。令 $C\subseteq\mathbb{C}$ 表示 $a^*a+(b+c)^*(b+c)$ 的谱。根据引理 6，C 是一个可数紧集。令 S 表示边 $E_{\mathrm{int}}^1\cup\{e_{y,1}\}_{y\in Y}$ 的集合，并令 $(\epsilon_e)_{e\in E_{\mathrm{int}}^1}$ 为一列正实数，使得 $\sum_{e\in E_{\mathrm{int}}^1}\epsilon_e<\infty$。注意，$E_{\mathrm{int}}^0$ 等于 S 中边的源点集合。定义 $A(E)$ 为子代数

$$A(E):=C^*(p_v,s_es_e^*\colon v\in E_{\mathrm{int}}^0,e\in E_{\mathrm{int}}^1). \tag{3.8}$$

应用引理 7 于集合 S 可得到一个正元素 $\xi\in A(E)$，其范数至多为 1，且满足

$$d:=\left(\sum_{y\in Y}\alpha_{y,1}s_{y,1}+\sum_{e\in E_{\mathrm{int}}^1}\epsilon_e s_e\right)\xi^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

满足以下条件：

(i) $A(E)=C^*(d^*d)$；(ii) 对任意 $e\in S$，存在 $h\in A(E)$ 使得 $s_e^*s_e=\xi^{\frac{1}{2}}h$；(iii) d^*d 的谱与 $C\setminus\{0\}$ 不相交。

现在定义图 C^*-代数 $C^*(E)$ 的候选生成元 g，如下：

$$g:=a+b+c+d\,. \tag{3.10}$$

4. The proof

在本节中，我们证明在第 3 节中构造的元素 g 生成 $C^*(E)$。该策略采用归纳法，大致如下。我们的目标是证明每个边偏等距 s_e 和汇点投影 q_i 都属于 $C^*(g)$。一旦证明了 s_e（分别为 q_i）属于 $C^*(g)$，我们便从 g 中减去所有涉及 s_e（分别为 q_i）的项，从而得到一个简化生成元（见（4.4）和（4.11））。生成元g 中的系数经过精心安排，因此可以利用这些简化生成元，通过归纳过程提取所有边偏等距和汇点投影（见引理 14 和命题 15）。

在小节4.1 中，我们证明与内部边相关的所有偏等距都属于 $C^*(g)$。类似地，小节 4.2 讨论边界边，小节 4.3则讨论汇点和汇点边。

4.1. **内部边。** 在下面的命题中，我们仿照推论8 的证明，证明与内部边相关的所有偏等距都属于 $C^*(g)$。

命题 *11.* 设 $g \in C^*(E)$ 是式 *(3.10)* 中的候选生成元，并设 $A(E)$ 如式 *(3.8)* 所示。那么 $A(E) \subseteq C^*(g)$。因此，与内部边相关联的所有偏等距都属于 $C^*(g)$。特别地，$\left(\sum_{e\in E^1_{\mathrm{int}}} \epsilon_e s_e\right)\xi^{\frac{1}{2}}$ 属于 $C^*(g)$。

证明. 由边的值域投影的正交性以及引理 10，我们有[6] $a^*d = a^*(b+c) = d^*(b+c) = 0$。因此

$$g^*g = a^*a + (b+c)^*(b+c) + d^*d\,. \tag{4.1}$$

正元素 $a^*a + (b+c)^*(b+c)$ 和 d^*d 正交，并且除 0 之外，它们根据上面的 (iii) 具有不相交的谱。因此，d^*d 属于 $C^*(g)$，由引理 5可知。由此可得 $A(E) \subseteq C^*(g)$，根据上面的条件 (i)。

现在证明，与内部边相关的所有偏等距都属于 $C^*(g)$。令 $e \in E^1_{\mathrm{int}}$。那么 $s_e s_e^* \in A(E) \subseteq C^*(g)$，因此 $s_e s_e^* g \in C^*(g)$。注意，

$$s_e s_e^* g = s_e s_e^* d = \epsilon_e s_e \xi^{\frac{1}{2}} \tag{4.2}$$

这是由值域投影的正交性得出的。接下来，根据上文的 (ii)，存在 $h \in A(E) \subseteq C^*(g)$，使得 $\xi^{\frac{1}{2}} h = s_e^* s_e$。因此

$$s_e s_e^* g h = \epsilon_e s_e \xi^{\frac{1}{2}} h = \epsilon_e s_e s_e^* s_e = \epsilon_e s_e \tag{4.3}$$

是 $C^*(g)$ 的一个元素。由于 $\epsilon_e > 0$，我们得到 $s_e \in C^*(g)$，证毕。 □

4.2. **边界边。** 上一小节证明了，与内部边相关的所有偏等距都属于 $C^*(g)$。我们从 g 中减去所有涉及内部边的项，得到一个新元素 $g_{1,1} \in C^*(g)$，其定义见 (4.4)。所有涉及边界边的项将由一个在 (4.5) 中定义的新元素 a_1 来表示。本小节证明，与边界边相关的所有偏等距都属于由 C^*、g 和 a_1共同生成的 C^*-子代数。在第 4.3 小节中，我们将证明 $a_1 \in C^*(g)$，因此，与边界边相关的所有偏等距都属于 $C^*(g)$，如所需。

定义

$$g_{1,1} := g - \left(\sum_{e\in E^1_{\mathrm{int}}} \epsilon_e s_e\right)\xi^{\frac{1}{2}} = a_1 + b + c\,. \tag{4.4}$$

其中

$$a_1 := \left(\sum_{y\in Y} \alpha_{y,1} s_{y,1}\right)\xi^{\frac{1}{2}} + \sum_{\substack{y\in Y\\ n\geq 1}} \alpha_{y,n+1} s_{y,n+1} s_{y,n}^*\,. \tag{4.5}$$

注意到 $g_{1,\,1} \in C^*\,(g)$，因为 $\left(\sum_{e\in E^1_{\mathrm{int}}} \epsilon_e s_e\right)\xi^{\frac{1}{2}} \in C^*\,(g)$，根据命题 11。

引理 12. 所有与边界边相关联的偏等距都属于 $C^*(g, a_1)$。

[6] In (3.5), the sum defining a contains terms of the form $\alpha_{y,k} s_{y,k} s_{y,k-1}^*$ for $k \geq 2$, so a^*d indeed vanishes.

证明. 边界边的集合等于 $\{e_{y,n}\}_{y\in Y,n\geq 1}$。我们的第一个论断是，对于任意$y\in Y$，偏等距 $s_{y,1}$ 属于 $C^*(g,a_1)$。根据 ξ 和 d 在 (3.9) 中的构造，存在一个元素 $h\in A(E)$，使得 $\xi^{\frac{1}{2}}h=s^*_{y,1}s_{y,1}$。根据引理 10 我们有

$$a_1h=\alpha_{y,1}s_{y,1}s^*_{y,1}s_{y,1}=\alpha_{y,1}s_{y,1}\,. \tag{4.6}$$

注意到，根据命题 11， a_1h 属于 $C^*(g,a_1)$，因此$s_{y,1}$ 也属于 $C^*(g,a_1)$，因为$\alpha_{y,1}>0$。这证明了第一个结论。

接下来，由于 $\xi\in A(E)\subseteq C^*(g)$（命题 11），我们推得

$$a=\sum_{\substack{y\in Y\\ n\geq 1}}\alpha_{y,n+1}s_{y,n+1}s^*_{y,n}=a_1-\left(\sum_{y\in Y}\alpha_{y,1}s_{y,1}\right)\xi^{\frac{1}{2}} \tag{4.7}$$

属于 $C^*(g,a_1)$。固定 $y\in Y$，并注意到，根据引理 10，对任意 $n\geq 1$，$as_{y,n}=\alpha_{y,n+1}s_{y,n+1}$。由第一个结论可得，$s_{y,2}\in C^*(g,a_1)$，因为$\alpha_{y,2}>0$。继续归纳地推导，我们得到对任意 $n\geq 1$，$s_{y,n}\in C^*(g,a_1)$。由于 $y\in Y$ 是任意的，我们已经证明，所有与边界边相关联的偏等距都属于 $C^*(g,a_1)$，证明至此完成。□

以下引理中的不等式将在引理 14 以及命题15中的相关归纳过程中起关键作用。

引理 13. 设 a_1 如 (4.5)所示。那么 $a_1=\sum_{v\in E^0_{\mathrm{bdry}}}p_va_1$ 是一个范数收敛和，并且不等式

$$\sum_{\ell\geq m}\sum_{v\in V_\ell}\|p_va_1\|\leq\delta_m \tag{4.8}$$

对任意 m均成立。

证明。 对于任意 $v\in E^0_{\mathrm{bdry}}$，我们有

$$\begin{aligned}\|p_va_1\|&\leq\sum_{y\in Y}\alpha_{y,1}\|p_vs_{y,1}\|+\sum_{\substack{y\in Y\\ n\geq 1}}\alpha_{y,n+1}\left\|p_vs_{y,n+1}s^*_{y,n}\right\|\\ &=\sum_{\substack{y\in Y,n\geq 1\\ r(e_{y,n})=v}}\alpha_{y,n}\,.\end{aligned} \tag{4.9}$$

因此，由（3.4）可得

$$\sum_{\ell\geq m}\sum_{v\in V_\ell}\|p_va_1\|\leq\delta_m \tag{4.10}$$

对于任意 m 如所需。取 $m=1$ 可得 $\sum_{v\in E^0_{\mathrm{bdry}}}\|p_va_1\|\leq\delta_1<\infty$。因此，和 $\sum_{v\in E^0_{\mathrm{bdry}}}p_va_1$ 在范数意义下绝对收敛。由于$\{e_{y,n}\}_{y\in Y\text{中的所有边}n\geq 1}$ 的值域都包含于E^0_{bdry}中，根据（4.5）显然可知，该和等于 a_1。□

4.3. **汇点与汇点边**。在本小节中，我们证明 $C^*(g)$ 包含所有汇点投影以及与汇点边相关的所有偏等距。由此可知，来自（ g 3.10）的候选生成元 $C^*(E)$ 确实生成

在命题 15 中，我们通过归纳法（关于$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$上的字典序）证明，所有汇边偏等距 $t_{M,N}$ 都属于 $C^*(g)$。引理 14 给出了归纳步骤。同时，我们关于 M 进行归纳，证明所有汇点投影q_M 都属于 $C^*(g)$。一旦证明某个给定的偏等距 $t_{M,N}$ 属于 $C^*(g)$，我们就从生成元中减去所有涉及$t_{M,N}$ 的项，从而得到一个“修正生成元”$g_{M,N+1}$ （见 (4.11)）。类似地，一旦证明某个给定的汇点投影q_M 属于 $C^*(g)$，我们就从生成元中减去所有涉及 q_M 的项，从而得到一个“修正生成元”$g_{M+1,1}$。注意，这还包括减去所有值域在 V_M 中的边界边所涉及的项，因此 a_M 被替换为 a_{M+1} （见 (4.12)）。

我们在 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上赋予字典序。也就是说，当且仅当 $m_1>m_2$ 或 $n_1\geq n_2$ 且 $m_1=m_2$时，我们写作 $(m_1,n_1)\geq(m_2,n_2)$。对于 $N,M\geq 1$，我们定义

$$g_{M,N}:=a_M+\sum_{(m,n)\geq(M,N)}\beta_{m,n}t_{m,n}+\sum_{m\geq M}\delta_m q_m+\sum_{(m,n)\geq(M,N)}(\gamma_{m,n}-\delta_m)t_{m,n}t_{m,n}^*\,, \tag{4.11}$$

其中

$$a_M:=\sum_{\ell\geq M}\sum_{v\in V_\ell}p_v a_1\,. \tag{4.12}$$

我们利用引理 13 证明 (4.12) 中的级数绝对收敛。注意，该记号与 $g_{1,1}$ 以及 a_1 在 (4.4) 和 (4.5) 中的定义一致。

引理 14. 对于任意 $M,N\geq 1$，有 $t_{M,N}\in C^*(g_{M,N})$ 以及 $q_M\in C^*(g_{M+1,1}+\delta_M q_M)$。

证明。 对于 $k\geq 1$，由引理 10，可得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma_{M,N}^k}g_{M,N}^k=\;&\frac{1}{\gamma_{M,N}^k}a_M^k+\frac{1}{\gamma_{M,N}^k}\sum_{m\geq M}\delta_m^k q_m+\sum_{(m,n)\geq(M,N)}\frac{\gamma_{m,n}^k-\delta_m^k}{\gamma_{M,N}^k}t_{m,n}t_{m,n}^*\\&+\sum_{(m,n)\geq(M,N)}\frac{\beta_{m,n}t_{m,n}}{\gamma_{M,N}^k}\left(\sum_{j=1}^{k}\gamma_{m,n}^{k-j}\,a_M^{j-1}\right).\end{aligned} \tag{4.13}$$

根据假设，我们有 $\delta_M<\gamma_{M,N}$，并且由引理 13可知 $\|a_M\|\leq\delta_M$，因此第一项在 $k\to\infty$时趋于 0。由于对所有 $m\geq M$都有 $\delta_m\leq\delta_M<\gamma_{M,N}$，第二项由单调收敛定理趋于 0。对于第三项和第四项，关于 $(m,n)\geq(M,N+1)$ 的求和将在 $k\to\infty$时趋于 0。事实上

$$\left\|\sum_{(m,n)\geq(M,N+1)}\frac{\gamma_{m,n}^k-\delta_m^k}{\gamma_{M,N}^k}t_{m,n}t_{m,n}^*\right\|\leq\max_{(m,n)\geq(M,N+1)}\left(\frac{\gamma_{m,n}^k-\delta_m^k}{\gamma_{M,N}^k}\right)\leq\frac{\gamma_{M,N+1}^k}{\gamma_{M,N}^k} \tag{4.14}$$

由于投影 $t_{m、n}t_{m、n}^*$ 两两正交，且双重序列 $(\gamma_{m、n})$ 关于字典序递减。注意，$\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_{M}^{-j}$、$_{N+1}\|a_M\|^{j-1}$收敛，因为 $\delta_M<\gamma_{M、N+1}$。于是对于 $(m、n)\geq(M、N+1)$，我们有

$$\left\|\frac{\beta_{m,n}t_{m,n}}{\gamma_{M,N}^k}\sum_{j=1}^{k}\gamma_{m,n}^{k-j}\,a_M^{j-1}\right\|\leq\frac{\beta_{m,n}\gamma_{M,N+1}^k}{\gamma_{M,N}^k}\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_{M,N+1}^{-j}\|a_M\|^{j-1}\lesssim\beta_{m,n}\left(\frac{\gamma_{M,N+1}}{\gamma_{M,N}}\right)^k, \tag{4.15}$$

因此，这些项的和在 $k \to \infty$ 时收敛到 0。总之，我们得到

$$\frac{1}{\gamma_{M,N}^k} g_{M,N}^k \to t_{M,N} t_{M,N}^* + \beta_{M,N} t_{M,N} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{M,N}^{-j} a_M^{j-1} =: y \tag{4.16}$$

如 $k \to \infty$，因此 $y \in C^*(g_{M,\,N})$。记

$$z := \beta_{M,N} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{M,N}^{-j} a_M^{j-1}\,, \tag{4.17}$$

因此 $y = t_{M,\,N} t_{M,\,N}^* + t_{M,\,N} z$。于是 $yy^* = t_{M,\,N} t_{M,\,N}^* + t_{M,\,N} z z^* t_{M,\,N}^* \cdot$。由于 $\|a_M\| \leq \delta_M$ 和 $\beta_{M,\,N} = \frac{1}{2}(\gamma_{M,\,N} - \delta_M)$，我们得到

$$\|z\| \leq \frac{\beta_{M,N}}{\gamma_{M,N} - \|a_M\|} \leq \frac{1}{2}\,. \tag{4.18}$$

因此 yy^* 是投影 $t_{M,\,N} t_{M,\,N}^*$ 的一个小扰动，从而

$$\lim_{k\to\infty} (yy^*)^{1/k} = t_{M,N} t_{M,N}^*\,. \tag{4.19}$$

因此 $t_{M,\,N} t_{M,\,N}^* \in C^*(g_{M,\,N})$。最后，注意到

$$t_{M,N} t_{M,N}^* g_{M,N} = \beta_{M,N} t_{M,N} + \gamma_{M,N} t_{M,N} t_{M,N}^* \tag{4.20}$$

因此 $t_{M,\,N} \in C^*(g_{M,\,N})$，如所述。

接下来，考虑 $\frac{1}{\delta_M^k} \left(g_{M+1,\,1} \pm \delta_M q_M\right)^k$ 当 $k \to \infty$ 时的极限。由引理 $g_{M+1,\,1}$ 和 q_M 中的元素两两正交，因此，$_{1} + \delta_M q_M\big)^k = g_{M+1,\,1}^k + \delta_M^k q_M$。由（4.16），极限 $\lim^{k\to\infty} \gamma_{M+1,}^k$ $_{1}$ $g_{M+1,\,1}^k$ 存在，因此 $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\delta_M^k} g_{M+1,\,1}^k = 0$，因为 $\gamma_{M+1,\,1} < \delta_M$。由此可得 $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\delta_M^k} \left(g_{M+1,\,1} + \delta_M q_M\right)^k = q_M$。所以，确实有 $q_m \in C^*(g_{M+1,\,1} + \delta_M q_M)$，如所述。

□

命题 15. 设 g_1*,1* 如 *(4.4)* 中所述。与汇点和汇边相关的所有投影和偏等距都属于 $C^*(g_1$*,1)*，因此也属于 $C^*(g)$。此外，a_1 属于$C^*(g_1$*,1)*，因此也属于 $C^*(g)$，其中 a_1 如 *(4.5)* 中所述。

证明.固定 $m \geq 1$。我们通过对 n 归纳，证明对于所有$n \geq 1$，$t_{m,n} \in C^*(g_{m,1})$。由引理 14，偏等距 $t_{m,1}$ 属于 $C^*(g_{m,1})$。假设对于某个 $N \geq 1$，$t_{m,1}, \ldots, t_{m,N} \in C^*(g_{m,1})$。那么

$$g_{m,N+1} = g_{m,1} - \sum_{n=1}^{N} \beta_{m,n} t_{m,n} - \sum_{n=1}^{N} (\gamma_{m,n} - \delta_m) t_{m,n} t_{m,n}^* \tag{4.21}$$

也属于 $C^*(g_{m,1})$。由引理 14，偏等距 $t_{m,N+1}$ 属于 $C^*(g_{m,N+1})$，因此也属于 $C^*(g_{m,1})$。因此，通过对 n 归纳可得，对于所有$n \geq 1$，$t_{m,n} \in C^*(g_{m,1})$，如所述。

接下来，我们对 m使用归纳法，证明对于任意$m \geq 1$，q_m 和$g_{m,\,1}$ 都属于 $C^*(g_{1,\,1})$。假设对于某个 $m \geq 1$，有$g_{m,\,1} \in C^*(g_{1,\,1})$。根据上述断言，对于任意一条终止于汇点 w_m的边 f，偏等距 t_f 属于 $C^*(g_{1,\,1})$。考虑这类边的$t_f^* t_f$，可知对于任意顶点 $v \in V_m$，p_v 属于 $C^*(g_{1,\,1})$（因为对于任意顶点 $v \in V_m$，都存在一条边，其源点等于 v，且值域等于 w_m）。根据引理10，对于任意$v \in E_{\mathrm{bdry}}^0$，我们有$p_v g_{1,\,1} = p_v a_1$，因此

$\sum_{v\in V_m} p_v a_1 \in C^*(g_{1,\ 1})$，其中我们使用引理 13 证明该和收敛。由第一个断言可知，

$$g_{m+1,1} + \delta_m q_m = g_{m,1} - \sum_{n\geq 1} \beta_{m,n} t_{m,n} - \sum_{n\geq 1} (\gamma_{m,n} - \delta_m) t_{m,n} t_{m,n}^* - \sum_{v\in V_m} p_v a_1 \tag{4.22}$$

也属于 $C^*(g_{1,\ 1})$。由引理 14，投影 q_m 属于 $C^*(g_{m+1,\ 1} + \delta_m q_m)$，因此也属于 $C^*(g_{1,\ 1})$。从上面的表达式中减去 $\delta_m q_m$，可得 $g_{m+1,\ 1}$属于 $g_{1,\ 1}$。因此，按照 m 进行归纳可知，对于任意 $m \geq 1$，元素 q_m 和 $g_{m,\ 1}$ 均属于 $C^*(g_{1,\ 1})$。由第一个断言可知，对于所有 $m,\ n \geq 1$，$t_{m,\ n} \in C^*(g_{1,\ 1})$。

我们已经证明，对于任意汇边 f，偏等距 t_f 属于 $C^*(g_1,1)$。因此，考虑这类边的 $t_f^* t_f$，可知对于任意边界顶点 v，p_v 属于 $C^*(g_1,1)$。由引理 10 可知，对于任意 $v \in E^0_{\text{bdry}}$，$p_v g_{1,1} = p_v a_1 \in C^*(g_1,1)$，因此 a_1 属于 $C^*(g_1,1)$，因为 $a_1 = \sum_{v\in E^0_{\text{bdry}}} p_v a_1$ (引理 13)。命题得证。□

定理 16. 元素 g 来自 (3.10) 生成 $C^*(E)$作为一个 C^*-代数。因此，每个图 C^*-代数都是单生成的。

证明。 根据命题11，所有与内部边相关联的偏等距都属于$C^*(g)$。根据命题15，所有与汇点和汇边相关联的投影及偏等距都属于 $C^*(g)$。此外，元素 a_1 在 (4.5) 中定义，依据命题 $C^*(g$15，它属于；因此，根据引理 $C^*(g$12，所有与边界边相关联的偏等距都属于 $C^*(g)$。最后，回顾一下，每个图 C^*-代数都由其边偏等距和汇点投影生成。□

注 17. 正如推论8所示，当图 E 没有汇点时，证明会大大简化。在这种情况下，所有的边都是内部边，且生成元 g (来自 (3.10)) 等于 d (来自 (3.9)。

如果图 E 没有接收无限多条边的汇点，那么证明也会简化。事实上，4.3 小节 将变得多余，而形式为 $\tilde{a} + \tilde{d} + \sum_n \frac{1}{n^2} q_n$的元素生成 $C^*(E)$，其中 $\{q_1, q_2, \dots\}$ 是与不发出也不接收任何边的顶点相对应的投影集合~，并且 $\tilde{a}$和 d 的定义与（3.5）和（3.9）中相同，但采用下文所述经过修改的边界边和内部边定义。在这种情况下，删去集合 E^0_{sink} 和 E^1_{sink}，将边 $e \in E^1$ 定义为边界边，当且仅当它终止于一个汇点；否则将其定义为内部边。

References

[1] T. Bates、D. Pask、I. Raeburn 和 W. Szyma´nski。行有限图的 C^* 代数。《纽约数学杂志》，6：307–324，2000年。[2] S. Eilers、J. Gabe、T. Katsura、E. Ruiz 和 M. Tomforde。图 C^* 代数的扩张问题。《*K*理论年刊》，5(2)：295–315，2020年。[3] S. Eilers、T. Katsura、M. Tomforde 和 J. West。非单图代数中 K 理论不变量的值域。《美国数学会汇刊》，368(6)：3811–3847，2016年。[4] S. Eilers、G. Restorff、E. Ruiz 和 A. P. W. Sørensen。幺正图 C^* 代数的完全分类：几何分类与强分类。《杜克数学杂志》，170(11)：2421–2517，2021年。[5] G. Faurot。 $\mathcal{Z}$稳定图代数。预印本，arXiv:2511.02760。[6] N. J. Fowler、M. Laca 和 I. Raeburn。无限图的 C^* 代数。《美国数学会会刊》，128(8)：2319–2327，2000年。[7] D. Gao、S. Kunnawalkam Elayavalli、G. Patchell 和 H. Tan。内部序列交换与单生成。《国际数学研究通知》，(8)：1–9，2025年。

[8] L. Ge。论“R. Kadison 于1967年提出的冯·诺伊曼代数问题”。第19卷，619–624页。2003年。附有 Kadison 一篇此前未发表的手稿，算子代数与算子理论国际研讨会（临汾，2001年）。[9] L. Ge 和 S. Popa。论 II_1 型因子的若干分解性质。《杜克数学杂志》，94(1)：79–101，1998年。[10] T. Huruya。一类 C^* 代数的谱刻画。新潟大学科学报告，A辑，(15)：21–24，1978年。[11] A. Kumjian 和 D. Pask。高秩图 C^* 代数。《纽约数学杂志》，6：1–20，2000年。[12] A. Kumjian、D. Pask、I. Raeburn 和 J. Renault。图、群胚与 Cuntz–Krieger 代数。《泛函分析杂志》，144(2)：505–541，1997年。[13] W. Li 和 J. Shen。关于近似可除 C^* 代数的一则注记，2008年。预印本，arXiv:0804.0465。[14] M. Nagisa。 C^* 代数的单生成与秩。载于《算子代数及其应用》，《纯数学高级研究》第38卷，第135–143页。日本数学会，东京，2004年。[15] C. L. Olsen 和 W. R. Zame。一些具有单生成元的 C^* 代数。《美国数学会汇刊》，215：205–217，1976年。[16] C. Pearcy。具有单生成元的 W^* 代数。《美国数学会会刊》，13：831–832，1962年。[17] S. Popa。关于 II_1 型因子中 Cartan 子代数的札记。《斯堪的纳维亚数学》，57(1)：171–188，1985年。[18] I. Raeburn。图代数。《CBMS 数学区域会议丛书》第103卷。由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学会出版，罗得岛州普罗维登斯，2005年。[19] K. M. Rangaswamy 和 M. Tomforde。图 C^* 代数与 Leavitt 路径代数的 Naimark 问题。预印本，arXiv:2502.03743。[20] E. Ruiz、A. Sims 和 M. Tomforde。图 C^* 代数的核维数。《数学进展》，272：96–123，2015年。[21] N. Suri 和 M. Tomforde。图 C^* 代数的 Naimark 问题。《伊利诺伊数学杂志》，61(3-4)：479–495，2017年。[22] H. Thiel。 C^* 代数的生成秩。《泛函分析杂志》，280(4)：108874，2021年。[23] H. Thiel 和 W. Winter。 $\mathcal{Z}$ 稳定 C^* 代数的生成元问题。《美国数学会汇刊》，366(5)：2327–2343，2014年。[24] M. Tomforde。与图相关联的 C^* 代数的稳定性。《美国数学会会刊》，132(6)：1787–1795，2004年。[25] D. M. Topping。UHF 代数是单生成的。《斯堪的纳维亚数学》，22：224–226，1968年。[26] W. Wogen。论冯·诺伊曼代数的生成元。《美国数学会通报》，75：95–99，1969年。

Jakub Curda, Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford, OX2 6GG, UnitedKingdom电子邮箱地址: jakub.curda@maths.ox.ac.ukJulian Gonzales, School of Mathematics and Statistics, University of Glasgow, Uni-versity Place, Glasgow, G12 8QQ, United Kingdom电子邮箱地址: julian.gonzales@glasgow.ac.ukVictor Wu, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Camperdown,NSW 2050, Australia电子邮箱地址: victor.wu1@sydney.edu.au