arXiv:2601.01250v1 [q-fin.MF] 3 Jan 2026

具有多重违约的市场模型中的欧式期权：BSDE方法

Miryana Grigorova* James Wheeldon†

2026年1月6日

摘要

我们研究由布朗运动和 p 违约鞅驱动的非线性倒向随机微分方程（BSDE）。具有多个违约跳跃的BSDE，其驱动项可以采用涉及可选有限变差过程的广义形式。我们首先证明其存在性与唯一性，随后在驱动项满足适当假设的条件下，建立这些BSDE的比较结果和严格比较结果。对于线性驱动项，我们利用伴随指数半鞅，推导出BSDE第一分量的显式公式。该表示取决于有限变差过程是可预测的还是仅为可选的。我们将这些结果应用于定价和对冲问题：在线性完备市场中，市场包含两种可违约资产；在非线性完备市场中，市场包含p 种可违约资产。我们给出后一类市场模型的两个例子：一个例子中，期权卖方是大型投资者，会影响单项资产的违约概率；另一个例子中，大型卖方的策略会影响所有 p 项资产的违约概率。

关键词： 具有多重违约跳跃的BSDEs、广义驱动项、比较定理、欧式期权、非线性市场、可选股息过程。

*通讯作者，电子邮箱： miryana.grigorova@warwick.ac.uk，统计学系，华威大学

†电子邮箱： james.wheeldon@warwick.ac.uk，统计学系，华威大学致谢：感谢Marie-Claire Quenez 提供的有益讨论。

1 引言

本文研究具有多个违约跳跃的倒向随机微分方程，并探讨其在金融背景下的一些应用。倒向随机微分方程最初由 Bismut [4],提出，他研究了与随机控制相关的线性情形。Pardoux 和 Peng[19] 证明了布朗滤过下具有 Lipschitz 驱动项的非线性倒向随机微分方程的适定性。

文献中也研究了同时包含连续分量和跳跃分量的倒向随机微分方程（例如参见 [21], [20], [1], [7], [18]）。 [7], 研究了具有单次违约跳跃的倒向随机微分方程，并将其应用于金融背景中（关于不完备单一违约框架的发展，参见 [14, 15]）。

本文考虑由布朗运动以及 p补偿违约鞅驱动的倒向随机微分方程，其中每个补偿违约鞅都与一个违约时刻 $\tau_i > 0$ 和一个强度过程 $\lambda^i = (\lambda_t^i)_{t\in[0,T]}$ 相关，对应于 $i \in \{1, \dots, p\}$。我们提出新的先验估计，并证明具有多个违约跳跃的倒向随机微分方程的解的存在性与唯一性。

我们考虑一个有限变差的可选（不一定可预测）、右连续且有左极限（rcll）过程 D ，并将其纳入倒向随机微分方程的驱动项，从而得到驱动项的一般形式： $g(t, y, z, k^1, \dots, k^p)dt + dD_t$。这一建模选择源于如下事实：在包含可违约证券的市场中，或有债权通常会产生中间现金流，尤其是在违约时刻，正如 [2]中所观察到的。

我们将 [7] 中引入的 λ-线性驱动项的定义推广到一般的 $\lambda^{(p)}$-线性驱动项情形，其中 $\lambda^{(p)}$ 指的是 p 强度过程向量λ^1，.....， λ^p。当驱动项 g 为 $\lambda^{(p)}$-线性时，我们利用相关的伴随半鞅，推导出具有多个违约跳跃的倒向随机微分方程解的显式表示。该表示取决于过程 D 是可预测的，还是仅为可选的。我们还在对驱动项作适当假设的条件下证明了一个比较结果和一个严格比较结果，并再次区分D 可预测与 D 仅为可选这两种情形。

我们介绍该模型的两种金融应用：一种市场是线性且完备的，另一种市场虽完备但为非线性。在这两种情形下，我们都假设存在一项无风险资产、一项无违约（无跳跃）的风险资产，以及两项或更多项可违约资产。我们着重研究在到期日 $T > 0$ 对终端支付 η 的欧式或有索取权进行定价与对冲，并考虑由过程 D建模的中间“股息”，其中 D 表示一个外生累积过程。过程 D 不一定是可预测的。在第二个例子中，市场是非线性的，其非线性源于大型卖方的策略会影响违约概率所造成的市场缺陷。

在具有 p 违约的非线性市场环境中，我们证明或有债权的价格为 $X^{g\cdot T}(\eta, D)$，其中 $X^{g\cdot T}(\eta, D)$ 表示具有多个违约跳跃的非线性倒向随机微分方程的解，其终止时刻为 T，终端条件为η，广义驱动项具有如下形式： $g(t, y, z, k^1, \dots, k^p)dt + dD_t$。由此得到非线性定价系统 $\mathcal{X}^g : (\eta, D) \mapsto X^{g\cdot T}(\eta, D)$，我们将研究其性质。当 D 固定时，我们定义相应的 (g, D)-条件评价为 $\mathcal{E}^{g,D\cdot T}(\eta) := X^{g\cdot T}(\eta, D)$，其中 $\eta \in L^2(\mathcal{G}_T)$，并给出其主要性质。

本文其余部分安排如下：

第 2 节专门研究带有 p 违约跳跃和广义驱动项的倒向随机微分方程。在小节 2.1 中，我们定义带有 p 违约跳跃和广义$\lambda^{(p)}$驱动项的倒向随机微分方程（允许存在一个中间可选有限变差过程 D）；在小节 2.2 中，我们证明其存在性与唯一性，并研究广义 $\lambda^{(p)}$驱动项为线性的情形；在小节 2.3 中，我们在驱动项满足适当假设的条件下，建立比较结果和严格比较结果。第 3 节专门讨论在完备线性市场和非线性市场中对欧式期权进行定价与对冲的应用。在小节 3.1 中，我们给出一个线性 完备市场的例子；在小节 3.2 中，我们介绍带有 p 违约的非线性 完备市场，并研究相关欧式期权非线性定价系统的性质；在小节 3.3 中，我们给出一个非线性完备市场的具体情形，其中大型卖方会影响一个（可违约）风险资产的违约概率；在小节 3.4 中，我们考虑大型卖方的交易策略会影响所有 p（可违约）资产违约概率的例子。

2 基础概率设置

在下文中，我们固定 $T>0$ 为有限时间范围。令 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个完备概率空间，并令 $(W_t)_{t\in[0,T]}$ 为一维布朗运动。令$\mathbb{F}:=(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 表示由 W 生成的增广滤波。随机变量之间的不等式和等式均理解为相对于 P 几乎处处（a.s.）成立。

令 $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，并令 τ_1、τ_2、……、τ_p 为正随机时刻。我们假设，对于每个 $i\in\{1,\ldots,p\}$，随机时刻 τ_i 具有连续分布，并且对于所有 i、$j\in\{1,\ldots,p\}$（满足 $i\neq j$），有$P(\tau_i\neq\tau_j)=1$。此外，我们假设 p 个违约时刻严格有序，即 $\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_p$。我们将 τ_i 解释为第 i 个违约（或第 i 个信用事件）时刻。对于 $i\in\{1,\ldots,p\}$ 和 $t\in[0,T]$，定义$N_t^i:=\mathbb{1}_{\{\tau_i\le t\}}$。

对于每个 $i\in\{1,\ldots,p\}$，令 $\mathbb{F}^i:=(\mathcal{F}_t^i)_{t\in[0,T]}$表示使 τ_i成为 $\mathbb{F}^i$-停时的最小右连续滤波。我们定义扩张滤波 $\mathbb{G}:=\mathbb{F}\vee\mathbb{F}^1\vee\cdots\vee\mathbb{F}^p$。事实上，滤波 $\mathbb{G}$ 是由 W和违约指标过程 $N^1,N^2,\ldots,N^p$生成的增广滤波。我们假设$\mathbb{F}$-布朗运动 W 仍然是 $\mathbb{G}$-布朗运动。

根据定义，对于每个 i，过程 $N^i=(N_t^i)_{t\in[0,T]}$是非递减的、 $\mathbb{G}$-适应的，因此是一个 $\mathbb{G}$-次鞅。令 $\Lambda^i=(\Lambda_t^i)$表示 N^i的 $\mathbb{G}$-可预测补偿子。注意，过程 $(\Lambda_{t\wedge\tau_i}^i)$是 $(N_{t\wedge\tau_i}^i)$的 $\mathbb{G}$-可预测补偿子。由可预测补偿子的唯一性可知，对于 $t\ge0$， $\Lambda_{t\wedge\tau_i}^i=\Lambda_t^i$ 几乎处处成立。

我们进一步假设，每个过程 Λ^i 都相对于勒贝格测度绝对连续。这意味着存在一个非负的 $\mathbb{G}$-可预测过程 $(\lambda_t^i)_{t\in[0,T]}$，称为第 i个强度过程，使得 $\Lambda_t^i=\int_0^t\lambda_s^i ds$，对$t\in[0,T]$成立。由于 $\Lambda_t^i=\Lambda_{t\wedge\tau_i}^i$，可得 $\lambda_t^i=0$，对 $t>\tau_i$成立。

对于每个 $i\in\{1、\ldots\ldots、p\}$，我们将 $\mathbb{G}$-补偿违约鞅 M^i定义为

$$M_t^i=N_t^i-\int_0^t\lambda_s^i ds, \tag{2.1}$$

对于所有 $t \in [0,T]$。

2.1 多个违约跳跃的倒向随机微分方程

定义如下:

- $\mathcal{P}$ 是 $\Omega \times [0,T]$ 上的**可预测** σ-代数。
- $\mathcal{S}_T^2$ 是 $\mathbb{G}$-适应的右连续且有左极限（rcll）过程 φ 的集合，使得 $\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T} |\varphi_t|^2] < +\infty$。
- $\mathcal{A}_T^2$ 是实值**有限变差**rcll $\mathbb{G}$-适应过程 A的集合，其中$\mathbb{E}[(\int_0^T |dA_t|)^2] < \infty$，且满足 $A_0 = 0$。
- $\mathcal{A}_{p,T}^2$ 是$\mathcal{A}_T^2$中所有**可预测**过程的子集。
- $\mathcal{H}_T^2$ 是所有 $\mathbb{G}$-可预测过程构成的空间，并赋予内积 $\|Z\|^2 := \mathbb{E}[\int_0^T |Z_t|^2 dt] < \infty$。

- $\mathcal{H}^2_{\lambda^i,\,T}$是空间 $L^2(\Omega\times[0,T],\ \mathcal{P}\ \lambda_t dP\otimes dt)$，配备内积$\langle U,\ V\rangle_{\lambda^i}$:
$=\ \mathbb{E}[\int_0^T U_t V_t \lambda_t^i dt]\ <\ \infty$。对于所有 $U\ \in \mathcal{H}^2_{\lambda^i,\,T}$我们定义 $\|U\|^2_{\lambda^i} :=$
$\mathbb{E}[\int_0^T |U_t|^2 \lambda_t^i dt] < \infty$。

如果显然我们是在有限时间范围 T内进行讨论，则可以从上述记号中省略 T 下标。

由于 $\mathbb{G}$-强度 λ_t^i 在 $t > \tau_i$ 处消失，对于所有 $U \in \mathcal{H}^2_{\lambda^i}$ $\|U\|^2_{\lambda^i} = \mathbb{E}[\int_0^{T\wedge\tau_i} |U_t|^2 \lambda_t^i dt]$ 均成立（因此，U在 τ_i之后的取值不会影响 $\|U\|^2_{\lambda^i}$的计算）。

对于我们的多重违约框架，我们回顾 [11] 中的鞅表示性质（另见 [12] 定理 107）。

定理 2.1 (**鞅表示性质**)**：** 对于任意$(\mathbb{P},\mathbb{G})$平方可积鞅$(m_t)^{t\in[0,T]}$，存在唯一的 $\mathbb{G}$-可预测过程 $z \in H_T^2$和 $k^i \in H^2_{\lambda^i,\,T}$对于所有 $i \in \{1,\ \ldots,\ p\}$，使得以下鞅表示性质成立，

$$m_t = m_0 + \int_0^t z_s dW_s + \sum_{i=1}^p \int_0^t k_s^i dM_s^i. \tag{2.2}$$

在下面的定义中，我们扩展了 [7] 中 λ-驱动项的概念，以纳入多个违约跳跃。为简单起见，我们将违约强度向量 $\lambda^{(p)}$ 记作（$\lambda^1,\ \ldots,\ \lambda^p$）$'$。这里的记号$'$表示该向量的转置。

定义 2.2 ($\lambda^{(p)}$**-可容许驱动项**)**：** 如果一个函数 g 是驱动项，则称之为驱动项，当且仅当 g: $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^{2+p} \to \mathbb{R}$ 满足 $(\omega,t,y,z,k^1,\ldots,k^p) \mapsto g(\omega,t,y,z,k^1,\ldots,k^p)$ 是一个 $P \otimes B(\mathbb{R}^{2+p})$-可测函数，且 $g(\cdot,\cdot\,0,0,\ldots,0) \in H_T^2$。该驱动项 g 是

称为 $\lambda^{(p)}$-可容许的，如果存在常数 $C \geq 0$，使得对于 $dP \otimes dt$-几乎处处的 (ω, t)，以及所有 $(y_1, z_1, k_1^1, \ldots, k_1^p)$、$(y_2, z_2, k_2^1, \ldots, k_2^p)$，有：

$$|g(\omega, t, y_1, z_1, k_1^1, \ldots, k_1^p) - g(\omega, t, y_2, z_2, k_2^1, \ldots, k_2^p)| \leq C \left(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_t^i(\omega)} |k_1^i - k_2^i| \right). \quad (2.3)$$

注释 2.3：由条件 (2.3) 可知，对于每个 $(y, z, k^1, \ldots, k^p)$，$g(t, y, z, k^1, \ldots, k^j, k^{j+1}, \ldots, k^p) = g(t, y, z, 0, \ldots, 0, k^{j+1}, \ldots, k^p)$ 对 $t > \tau_j$ $dP \otimes dt$- 几乎处处成立。这里我们用到了以下事实：λ^j 在 τ_j 之后消失，并且停时 $\tau_1, \ldots, \tau_p$ 是有序的。因此，在集合 $\{t > \tau_j\}$ 上，$\lambda^{(p)}$-可容许驱动项 g 不依赖于 $k^1, \ldots, k^j$。

定义 2.4 (具有 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项的倒向随机微分方程)： 设 g 为一个 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项，且 $\eta \in L^2(G_T)$。若过程 $(Y, Z, K^1, \ldots, K^p)$ 属于 $S_T^2 \times H_T^2 \times H_{\lambda^1,T}^2 \times \cdots \times H_{\lambda^p,T}^2$，并满足以下条件，则称其为一个具有 p 个违约跳跃、终止时刻为 T、$\lambda^{(p)}$-可容许驱动项为 g、终端条件为 η 的倒向随机微分方程的解：

$$-dY_t = g(t, Y_t, Z_t, K_t^1, \ldots, K_t^p)dt - Z_t dW_t - \sum_{i=1}^{p} K_t^i dM_t^i, \quad Y_T = \eta. \quad (2.4)$$

正如我们稍后将看到的，在存在违约的市场中处理（可能是非线性的）定价问题时，或有债权可能会产生中间现金流。例如，这些现金流可能来自承诺股息，可将其建模为债权持有人收到的一系列连续或离散的随机现金流；也可能来自回收过程，该过程在时刻 T 之前发生违约时提供回收支付。将这些不同来源的中间现金流统一纳入一个“股息”过程 D中会更为方便，其中 D 假定为可选（但不一定可预测）、右连续且有左极限（rcll），并且具有有限变差。

因此，我们关注包含过程 $D \in \mathcal{A}_T^2$ 的广义驱动项倒向随机微分方程。

定义 *2.5*（具有广义 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项的倒向随机微分方程）：设 g 为一个$\lambda^{(p)}$-可容许驱动项，设 $\eta \in L^2(G_T)$，且设 $D \in A_T^2$。若过程 $(Y, Z, K^1, \ldots, K^p)$ 属于 $S_T^2 \times H_T^2 \times H_{\lambda^1,T}^2 \times \cdots \times H_{\lambda^p,T}^2$，并满足以下条件，则称其为具有 p 违约跳跃、终止时刻为 T、广义 $\lambda^{(p)}$- 可容许驱动项$g(t, y, z, k^1, \ldots, k^p)$ $dt + dD_t$及终端条件 η 的倒向随机微分方程的解：

$$-dY_t = g(t, Y_t, Z_t, K_t^1, \ldots, K_t^p)\, dt + dD_t - Z_t\, dW_t - \sum_{i=1}^{p} K_t^i\, dM_t^i, \quad Y_T = \eta. \quad (2.5)$$

我们强调，在方程（2.5）中，过程 D 是一个有限变差、右连续且有左极限的适应过程，且 $D_0 = 0$ 及其总变差均可积。这意味着 D 至多有可数个跳跃，并具有典范分解 $D = A - A'$，其中 A 和 A' 是从零开始的可积、非递减、右连续且有左极限的适应过程（即 $A_0 = A'_0 = 0$），并且相互

奇异性条件 $dA_t \perp dA'_t$ 成立（例如，参见 [8]中的命题 A.7）。若 D 是可预测的，则过程 A和 A' 也可预测。

命题 2.6： 若 $D \in \mathcal{A}^2_T$，则存在唯一的（可预测）过程 $D' \in \mathcal{A}^2_{p,T}$以及唯一的（可预测）过程 $\theta^1 \in H^2_{\lambda^1,T}, \theta^2 \in H^2_{\lambda^2,T}, \ldots, \theta^p \in H^2_{\lambda^p,T}$，使得对所有 $t \in [0,T]$，

$$D_t = D'_t + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \theta^i_s dN^i_s. \tag{2.6}$$

证明。由于 $D \in \mathcal{A}^2_T$，我们有典范分解 $D = A - \hat{} A$，其中 $A, \hat{} A$ 是 $\mathcal{A}^2_T$ 中的非递减过程，且满足 $dA_t \perp d\hat{} A_t$。将引理 A.1 应用于 $\hat{} \hat{} A$ 和 A，可得 A 和 A 可唯一分解为：

$$A_t = B_t + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \psi^i_s dN^i_s,$$

and

$$\hat{A}_t = \hat{B}_t + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \hat{\psi}^i_s dN^i_s,$$

其中 (B_t) 和 $(\hat{} B_t)$ 是可预测的（非递减）且属于 $\mathcal{A}^2_{p,T}$，并且对于每个$i \in \{1, \ldots, p\}$，(ψ^i_t) 和 $(\hat{} \psi^i_t)$ 属于 $\mathcal{H}^2_{\lambda^i,T}$。令 $D'_t := B_t - \hat{} B_t$，并且对每个$i \in \{1, \ldots, p\}$，令 $\theta^i_t := \psi^i_t - \hat{} \psi^i_t$，即可得到所需性质。■

2.2 多个违约跳跃的倒向随机微分方程：性质

我们首先为含 p 违约跳跃的倒向随机微分方程建立先验估计。对于 $\beta > 0$, $\phi \in \mathcal{H}^2_T$，以及 $k^i \in \mathcal{H}^2_{\lambda^i,T}$，我们引入如下定义：$\|\phi\|^2_\beta := \mathbb{E}[\int_0^T e^{\beta t} \phi_t^2 \, dt]$, $\|k^1\|^2_{\lambda^1,\beta} := \mathbb{E}[\int_0^T e^{\beta t} (k^1_t)^2 \lambda^1_t \, dt], \ldots, \|k^p\|^2_{\lambda^p,\beta} := \mathbb{E}[\int_0^T e^{\beta t} (k^p_t)^2 \lambda^p_t \, dt]$，以及 $\|k^{(p)}\|^2_{\lambda^{(p)},\beta} := \sum_{i=1}^p \|k^i\|^2_{\lambda^i,\beta} = \mathbb{E}[\int_0^T e^{\beta t} \sum_{i=1}^p (k^i_t)^2 \lambda^i_t \, dt]$。

2.2.1 含多个违约跳跃的倒向随机微分方程的先验估计

命题 2.7：设 $\eta, \hat{} \eta \in L^2(G_T)$。设 $g, \hat{} g$ 是两个 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项。设 $C > 0$ 是与 g 相关联的 $\lambda^{(p)}$-常数。设 D 是属于 $\mathcal{A}^2_T$ 的可选过程。设 $(Y, Z, K^1, \ldots, K^p)$ 和 $(\hat{} Y, \hat{} Z, \hat{} K^1, \ldots, \hat{} K^p)$ 分别是与终止时刻 $T > 0$ 和广义驱动项 $(g\ t\ y\ z\ k^1\ \ldots\ k^p\ dt + dD_t, \eta)$ 和 $(\hat{} g\ t\ y\ z\ k^1\ \ldots\ k^p\ + dD_t, \hat{} \eta)$ 以及终端条件 η 和 $\hat{}$ 相关联的倒向随机微分方程的解。设 $\bar{\eta} := \eta - \hat{} \eta$。对于 $s \in [0,T]$，记 $\bar{Y}_s := Y_s - \hat{} Y_s$, $\bar{Z}_s := Z_s - \hat{} Z_s$；对于每个 $i \in \{1, \ldots, p\}$，记 $\bar{K}^i_s := K^i_s - \hat{} K^i_s$。

设 ξ、$\beta > 0$ 满足 $\beta \geq \frac{p+2}{\xi} + 2C$ 和 $\xi \leq \frac{1}{C^2}$。那么，对于每个 $t \in [0,T]$，有

$$e^{\beta t} \bar{Y}_t^2 \leq \mathbb{E}\left[e^{\beta T} \bar{\eta}^2 \middle| \mathcal{G}_t \right] + \xi \, \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\beta s} \bar{g}_s^2 ds \;\middle|\; \mathcal{G}_t \right] \quad a.s., \tag{2.7}$$

其中 $\bar{g}_s := g(s, \hat{} Y_s, \hat{} Z_s, \hat{} K^1_s \ldots, \hat{} K^p_s) - \hat{} g(s, \hat{} Y_s, \hat{} Z_s, \hat{} K^1_s \ldots, \hat{} K^p_s)$。此外，

$$\|\bar{Y}\|^2_\beta \leq T \left[e^{\beta T} \mathbb{E}[\bar{\eta}^2] + \xi \, \|\bar{g}\|^2_\beta \right]. \tag{2.8}$$

此外，若 $\xi < \frac{1}{C^2}$，则有，

$$\|\bar{Z}\|_\beta^2 + \|\bar{K}^{(p)}\|_{\lambda^{(p)},\beta}^2 \leq \frac{1}{(1-C^2\xi)}\left[e^{\beta T}\mathbb{E}[\bar{\eta}^2] + \xi\ \|\bar{g}\|_\beta^2\right]. \tag{2.9}$$

证明。对半鞅 $(e^{\beta s}\bar{Y}_s^2)$ 在 t 与 T 之间应用伊藤公式，可得，

$$\begin{aligned} e^{\beta T}\bar{Y}_T^2 = e^{\beta t}\bar{Y}_t^2 + \beta\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}^2 ds + 2\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}d\bar{Y}_s \\ + \int_t^T e^{\beta s}d\langle\bar{Y}^c\rangle_s + \sum_{t<s\leq T}\left(e^{\beta s}\bar{Y}_s^2 - e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}^2 - 2e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}\Delta\bar{Y}_s\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

进一步计算（注意到 dD_t 项相互抵消）可得，

$$\begin{aligned} 2\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}d\bar{Y}_s = -2\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}(g(s,Y_s,Z_s,K_s^1,\ldots,K_s^p) - \hat{g}(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s,\hat{K}_s^1,\ldots,\hat{K}_s^p))ds \\ + 2\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}\bar{Z}_s dW_s + 2\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}\sum_{i=1}^p \bar{K}_s^i dM_s^i, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\int_t^T e^{\beta s}d\langle\bar{Y}^c\rangle_s = \int_t^T e^{\beta s}\bar{Z}_s^2 ds, \tag{2.12}$$

以及“跳跃项”，

$$\sum_{t<s\leq T}\left(e^{\beta s}\bar{Y}_s^2 - e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}^2 - 2e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}\Delta\bar{Y}_s\right) = \sum_{t<s\leq T} e^{\beta s}(\bar{Y}_s - \bar{Y}_{s-})^2.$$

由于对于所有满足 $i \neq j$的 $i,j \in \{1,\ldots,p\}$， $P(\tau_i = \tau_j) = 0$，因此可得，

$$\begin{aligned} &\sum_{t<s\leq T}(e^{\beta s}\bar{Y}_s^2 - e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}^2 - 2e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}\Delta\bar{Y}_s) = \sum_{t<s\leq T} e^{\beta s}(\bar{Y}_s - \bar{Y}_{s-})^2 \\ &= \int_t^T e^{\beta s}\sum_{i=1}^p (\bar{K}_s^i)^2 dN_s^i \\ &= \int_t^T e^{\beta s}\sum_{i=1}^p (\bar{K}_s^i)^2 dM_s^i + \int_t^T e^{\beta s}\sum_{i=1}^p (\bar{K}_s^i)^2\lambda_s^i ds. \end{aligned} \tag{2.13}$$

将（2.11）、（2.12）和（2.13）代入（2.10），可得:

$$\begin{aligned} e^{\beta t}\bar{Y}_t^2 + \beta\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}^2 ds + \int_t^T e^{\beta s}\left(\bar{Z}_s^2 + \sum_{i=1}^p (\bar{K}_s^i)^2\lambda_s^i\right)ds = e^{\beta T}\bar{Y}_T^2 + \\ 2\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}(g(s,Y_s,Z_s,K_s^1,\ldots,K_s^p) - \hat{g}(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s,\hat{K}_s^1,\ldots,\hat{K}_s^p))ds \\ - 2\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}\bar{Z}_s dW_s - 2\sum_{i=1}^p\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}\bar{K}_s^i dM_s^i - \sum_{i=1}^p\int_t^T e^{\beta s}(\bar{K}_s^i)^2 dM_s^i. \end{aligned} \tag{2.14}$$

对（2.14）取条件期望（给定$\mathcal{G}_t$）可得:

$$\begin{aligned}
&e^{\beta t}\bar{Y}_t^2 + \mathbb{E}\left[\beta\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}^2 ds + \int_t^T e^{\beta s}\left(\bar{Z}_s^2 + \sum_{i=1}^p (\bar{K}_s^i)^2\lambda_s^i\right) ds \middle| \mathcal{G}_t\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[e^{\beta T}\bar{Y}_T^2 \middle| \mathcal{G}_t\right] \\
&\quad + 2\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}(g(s,Y_s,Z_s,K_s^1,\ldots,K_s^p) - \hat{g}(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s,\hat{K}_s^1,\ldots,\hat{K}_s^p))ds \middle| \mathcal{G}_t\right].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Now,

$$\begin{aligned}
&g(s,Y_s,Z_s,K_s^1,\ldots,K_s^p) - \hat{g}(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s,\hat{K}_s^1,\ldots,\hat{K}_s^p) \\
&\qquad = g(s,Y_s,Z_s,K_s^1,\ldots,K_s^p) - g(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s,\hat{K}_s^1,\ldots,\hat{K}_s^p) + \bar{g}_s.
\end{aligned}$$

由于 g 是一个 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项，因此满足条件 (2.3)；于是,

$$\begin{aligned}
&|g(s,Y_s,Z_s,K_s^1,\ldots,K_s^p) - \hat{g}(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s,\hat{K}_s^1,\ldots,\hat{K}_s^p)| \\
&\qquad \le C|\bar{Y}_s| + C|\bar{Z}_s| + C\sum_{i=1}^p |\bar{K}_s^i|\sqrt{\lambda_s^i} + |\bar{g}_s|.
\end{aligned}$$

对于所有 y, z, a, k^1, λ^1, ..., k^p, λ^p 和 $\epsilon > 0$，我们有以下初等不等式,

$$\begin{aligned}
2y\left(Cz + C\sum_{i=1}^p k^i\sqrt{\lambda^i} + a\right) &\le \frac{y^2}{\epsilon^2} + \epsilon^2\left(Cz + C\sum_{i=1}^p k^i\sqrt{\lambda^i} + a\right)^2 \\
&\le \frac{y^2}{\epsilon^2} + (p+2)\epsilon^2\left(C^2z^2 + C^2\sum_{i=1}^p (k^i)^2\lambda^i + a^2\right).
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\int_t^T e^{\beta s}2\bar{Y}_{s-}(g(s,Y_s,Z_s,K_s^1,\ldots,K_s^p) - \hat{g}(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s,\hat{K}_s^1,\ldots,\hat{K}_s^p))ds \\
&\le \left(2C + \frac{1}{\epsilon^2}\right)\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}^2 ds + (p+2)C^2\epsilon^2\int_t^T e^{\beta s}\left(\bar{Z}_s^2 + \sum_{i=1}^p (\bar{K}_s^i)^2\lambda_s^i\right) ds \\
&\quad + (p+2)\epsilon^2\int_t^T e^{\beta s}\bar{g}_s^2 ds.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

令 $\xi := (p+2)\epsilon^2 > 0$，并在 (2.15) 中使用不等式 (2.16)，可得,

$$\begin{aligned}
&e^{\beta t}\bar{Y}_t^2 \le \mathbb{E}[e^{\beta T}\bar{\eta}^2|\mathcal{G}_t] + \mathbb{E}\left[\left(2C + \frac{p+2}{\xi} - \beta\right)\int_t^T e^{\beta s}\bar{Y}_{s-}^2 ds \middle| \mathcal{G}_t\right] + \\
&\quad \mathbb{E}\left[(C^2\xi - 1)\int_t^T e^{\beta s}\left(\bar{Z}_s^2 + \sum_{i=1}^p (\bar{K}_s^i)^2\lambda_s^i\right) ds \middle| \mathcal{G}_t\right] + \mathbb{E}\left[\xi\int_t^T e^{\beta s}\bar{g}_s^2 ds \middle| \mathcal{G}_t\right].
\end{aligned} \tag{2.17}$$

那么，对于每个 $\xi, \beta > 0$，满足 $\beta \ge 2C + \frac{p+2}{\xi}$ 且 $\xi \le \frac{1}{C^2}$，我们得到所需的不等式 (2.7)。

利用不等式 (2.17)，从 0 积分到 T 并取期望，我们得到：

$$\begin{aligned}\|\bar{Y}\|_\beta^2 &\le T\left[e^{\beta T}\mathbb{E}[\bar{\eta}^2]+\xi\|\bar{g}\|_\beta^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\mathbb{E}\left[(C^2\xi-1)\int_t^T e^{\beta s}(\bar{Z}_s^2+\sum_{i=1}^p(\bar{K}_s^i)^2)ds\middle|\mathcal{G}_t\right]dt\right]\\ &\le T\left[e^{\beta T}\mathbb{E}[\bar{\eta}^2]+\xi\|\bar{g}\|_\beta^2\right]+(C^2\xi-1)\int_0^T\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}(\bar{Z}_s^2+\sum_{i=1}^p(\bar{K}_s^i)^2ds\right]dt\\ &= T\left[e^{\beta T}\mathbb{E}[\bar{\eta}^2]+\xi\|\bar{g}\|_\beta^2\right]+T(C^2\xi-1)(\|\bar{Z}\|_\beta^2+\|\bar{K}^{(p)}\|_{\lambda^{(p)},\beta}^2).\end{aligned}$$

重新排列可得

$$\|\bar{Y}\|_\beta^2+T(1-C^2\xi)(\|\bar{Z}\|_\beta^2+\|\bar{K}^{(p)}\|_{\lambda^{(p)},\beta}^2)\le T\left[e^{\beta T}\mathbb{E}[\bar{\eta}^2]+\xi\|\bar{g}\|_\beta^2\right]$$

由于 $\xi\le\frac{1}{C^2}$，由（2.8）可得该不等式。
由于 $\|\bar{Y}\|_\beta^2\ge 0$，我们得到，

$$\|\bar{Z}\|_\beta^2+\|\bar{K}^{(p)}\|_{\lambda^{(p)},\beta}^2\le\frac{1}{1-C^2\xi}\left[e^{\beta T}\mathbb{E}[\bar{\eta}^2]+\xi\|\bar{g}\|_\beta^2\right],$$

这对 $\xi<\frac{1}{C^2}$ 导出了不等式（2.9） —

■

注 2.8：在 $\lambda^{(p)}$-常数 $C=0$ 的情形下，（2.7）和（2.8）对所有满足 $\beta\ge\frac{p+2}{\xi}$ 的 ξ，$\beta>0$ 均成立。当 $C=0$ 时，不等式（2.9）对所有 $\xi>0$ 均成立。

2.2.2 具有多个违约跳跃的倒向随机微分方程的存在性与唯一性 s

有了针对含 p 违约跳跃的倒向随机微分方程所建立的先验估计，我们现在可以证明解的存在性与唯一性。为此，我们将利用平方可积 $\mathbb{G}$-鞅的表示性质（定理 2.1）以及命题 2.7 中建立的先验估计。

对于 $\beta>0$，我们用$\mathcal{H}_\beta^{2\,(p)}$,表示空间$\mathcal{S}^2\times\mathcal{H}_\beta^2\times\mathcal{H}_{\lambda^1,\beta}^{2}\times\cdots\times\mathcal{H}_{\lambda^p,\beta}^2$，其配备范数 $\|(Y,Z,K^1,\ldots,K^p)\|_{,\beta}^{2\,(p)}:=\|Y\|_\beta^2+\|Z\|_\beta^2+\|K^1\|_{\lambda^1,\beta}^2+\ldots+\|K^p\|_{\lambda^p,\beta}^2$。

命题 2.9 (存在性与唯一性)： 设 g 是一个 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项，$\eta\in L^2(\mathcal{G}_T)$ 且 D 是 A_T^2 中的一个可选过程。根据定义 *2.5*，存在唯一的解$(Y,Z,K^1,\ldots,K^p)$ 属于 $S_T^2\times H_T^2\times H_{\lambda^1,T}^{2}\times\cdots\times H_{\lambda^p,T}^2$，并满足含多个违约跳跃的倒向随机微分方程。

证明。 证明采用标准的两步论证，其中第二步依赖于命题 2.7 中的先验 估计。

我们首先考虑驱动项为不依赖于（$y,z,k^1,\ldots,k^p$）的驱动过程 $g(t)$的情形。在这种情况下，解的第一个分量为 $Y_t=\mathbb{E}[\eta+\int_t^T g(s)ds+D_T-D_t|\mathcal{G}_t]$。对平方可积鞅 $\mathbb{E}[\eta+\int_0^T g(s)ds+D_T|\mathcal{G}_t]$ 应用 $\mathbb{G}$-鞅表示性质，可得过程 $Z\in\mathcal{H}_T^2$和 $K^i\in\mathcal{H}_{\lambda^i,T}^2$，其中 $i\in\{1,\ldots,p\}$。根据定理 2.1 中的 $\mathbb{G}$-鞅表示结果的唯一性，这些过程是唯一的。

因此，存在唯一的解满足驱动项为 $g(s)ds+dD_s$、终止时刻为 T 且终端条件为 $\eta\in L^2(\mathcal{G}_T)$ 的倒向随机微分方程。

现在我们聚焦于 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项 $g(t,y,z,k^1,\dots,k^p)$ 的情形。我们定义一个从 $\mathrm{H}_\beta^{2\,(p)}$ 映射到 $\mathrm{H}_\beta^{2\,(p)}$ 的映射 $\mathbf{\Phi}$，如下所示：对于 $(U,V,J^1,\dots,J^p)\in\mathrm{H}_\beta^{2\,(p)}$，$(Y,Z,K^1,\dots,K^p)=\mathbf{\Phi}(U,V,J^1,\dots,J^p)$ 是具有驱动项 $g(t,U_t,V_t,J_t^1,\dots,J_t^p)dt+dD_t$、终止时刻 T 和终端条件 $\eta\in L^2(\mathrm{G}_T)$ 的倒向随机微分方程的解。根据证明的第一步，该映射定义良好。我们证明该映射 $\mathbf{\Phi}$ 是严格压缩映射。令 $(\hat{U},\hat{V},\hat{J}^1,\dots,\hat{J}^p)\in\mathrm{H}^{2,_\beta{}^p}$，并令 $(\hat{Y},\hat{Z},\hat{K}^1,\dots,\hat{K}^p):=\mathbf{\Phi}(\hat{U},\hat{V},\hat{J}^1,\dots,\hat{J}^p)$ 为具有驱动项 $g(t,\hat{U}_t,\hat{V}_t,\hat{J}_t^1,\dots,\hat{J}_t^p)dt+dD_t$、终止时刻 T 和终端条件 $\eta\in L^2(\mathrm{G}_T)$ 的倒向随机微分方程的解。

我们设 $\bar{U}_t:=U_t-\hat{U}_t$, $\bar{V}_t:=V_t-\hat{V}_t$, $\bar{Y}_t:=Y_t-\hat{Y}_t$, $\bar{Z}_t:=Z_t-\hat{Z}_t$，并且对每个 $i\in\{1,\dots,p\}$，设 $\bar{J}_t^i:=J_t^i-\hat{J}_t^i$ 和 $\bar{K}_t^i:=K_t^i-\hat{K}_t^i$。我们设 $\Delta g_t:=g(t,U_t,V_t,J_t^1,\dots,J_t^p)-g(t,\hat{U}_t,\hat{V}_t,\hat{J}_t^1,\dots,\hat{J}_t^p)$。于是，根据命题 2.7 和注 2.8 中的先验估计，将其应用于驱动过程 $g_1(t):=g(t,U_t,V_t,J_t^1,\dots,J_t^p)$ 和 $g_2(t):=g(t,\hat{U}_t,\hat{V}_t,\hat{J}_t^1,\dots,\hat{J}_t^p)$（其中驱动项 $g_1(t)$ 满足 $C_1=0$ 为一个 $\lambda^{(p)}$-常数，因为 g_1 仅依赖于 (t,ω)），可得，对所有满足$\beta\geq\frac{p+2}{\xi}$ 的 $\xi,\beta>0$，

$$\begin{aligned}\|\bar{Y}\|_\beta^2+\|\bar{Z}\|_\beta^2+\sum_{i=1}^p\|\bar{K}^i\|_{\lambda^i,\beta}^2&\leq\xi T\|\Delta g\|_\beta^2+\xi\|\Delta g\|_\beta^2\\&=\xi(T+1)\|\Delta g\|_\beta^2.\end{aligned}\tag{2.18}$$

根据定义，g 是一个常数为 $\lambda^{(p)}$ $C>0$ 的 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项，我们得到，

$$\begin{aligned}e^{\beta s}(\Delta g_s)^2&\leq e^{\beta s}C^2(|\bar{U}_s|+|\bar{V}_s|+\sum_{i=1}^p|\bar{J}_s^i|\sqrt{\lambda_s^i})^2\\&\leq C^2(p+2)e^{\beta s}[\bar{U}_s^2+\bar{V}_s^2+\sum_{i=1}^p(\bar{J}_s^i)^2\lambda_s^i].\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\Delta g\|_\beta^2&\leq C^2(p+2)\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}(\bar{U}_s^2+\bar{V}_s^2+\sum_{i=1}^p(\bar{J}_s^i)^2\lambda_s^i)ds\right]\\&=C^2(p+2)(\|\bar{U}\|_\beta^2+\|\bar{V}\|_\beta^2+\sum_{i=1}^p\|\bar{J}^i\|_{\lambda^i,\beta}^2).\end{aligned}\tag{2.19}$$

利用不等式 (2.19) 和 (2.18)，我们得到，

$$\|\bar{Y}\|_\beta^2+\|\bar{Z}\|_\beta^2+\sum_{i=1}^p\|\bar{K}^i\|_{\lambda^i,\beta}^2\leq C^2(p+2)\xi(T+1)(\|\bar{U}\|_\beta^2+\|\bar{V}\|_\beta^2+\sum_{i=1}^p\|\bar{J}^i\|_{\lambda^i,\beta}^2),\tag{2.20}$$

对所有满足 $\beta\geq\frac{p+2}{\xi}$ 的 $\xi,\beta>0$，选择 $\xi=\frac{1}{2(T+1)(p+2)C^2}$ 和 $\beta\geq 2(p+2)^2(T+1)C^2$，可得 $\|\bar{Y},\bar{Z},\bar{K}^1,\dots,\bar{K}^p\|_{,\beta}^{2\,(p)}\leq\frac{1}{2}\|\bar{U},\bar{V},\bar{J}^1,\dots,\bar{J}^p\|_{,\beta}^{2\,(p)}$。

因此，对于 $\beta\geq 2(p+2)^2(T+1)C^2$，$\mathbf{\Phi}$ 是从$\mathcal{H}_\beta^{2\,(p)}$，到$\mathcal{H}_\beta^{2\,(p)}$，的（严格）压缩映射，因此在

巴拿赫空间$\mathcal{H}_{\beta}^{2\,(p)}$，中存在唯一的不动点，它也是具有驱动项$g(t,\ Y_t,\ Z_t,\ K_t^1,\ \ldots,\ K_t^p)dt+dD_t$、终止时刻 T和终端条件 $\eta\in L^2(\mathcal{G}_T)$的倒向随机微分方程的唯一解。

■

2.2.3 广义 $\lambda^{(p)}$-线性倒向随机微分方程与多个违约跳跃

我们研究具有多个违约跳跃的 $\lambda^{(p)}$-**线性** 倒向随机微分方程这一特殊情形。

定义 2.10 ($\lambda^{(p)}$-**线性驱动项与广义** $\lambda^{(p)}$-**线性驱动项**)**：** 驱动项 g 是 $\lambda^{(p)}$-线性的，当且仅当其形式为

$$g(t,y,z,k^1,\ldots,k^p)=\alpha_t y+\beta_t z+\sum_{i=1}^{p}\gamma_t^i k^i\lambda_t^i+\delta_t, \tag{2.21}$$

其中 $\delta:=(\delta_t)^{t\in[0,T]}\in H_T^2$以及 (α_t)、(β_t)和 (γ_t^i)对于 $i\in\{1,\ldots,p\}$，均为取值于 $\mathbb{R}$ 的可预测过程，且(α_t)、(β_t)和 $(\gamma_t^i\sqrt{\lambda_t^i})$对于 $i\in\{1,\ldots,p\}$ 均有界。给定 $D\in A_T^2$，我们将广义 $\lambda^{(p)}$-线性驱动项定义为：

$$(\alpha_t y+\beta_t z+\sum_{i=1}^{p}\gamma_t^i k^i\lambda_t^i)dt+dD_t. \tag{2.22}$$

注 2.11：若 g 由式 (2.21) 给出，则对每个 $i\in\{1,\ldots,p\}$，利用变换 $\nu_t^i:=\gamma_t^i\sqrt{\lambda_t^i}$，可知每个 (ν^i) 都是有界可预测过程，并且，

$$g(t,y,z,k^1,\ldots,k^p)=\alpha_t y+\beta_t z+\sum_{i=1}^{p}\nu_t^i k^i\sqrt{\lambda_t^i}+\delta_t. \tag{2.23}$$

因此，$\lambda^{(p)}$-线性驱动项也是 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项。

我们希望显式求出广义 $\lambda^{(p)}$-线性倒向随机微分方程的解。为此，我们首先需要在我们的框架下得到一个关于指数局部鞅的初步结果。

注 2.12：设 $\Gamma:=(\Gamma_t)^{t\in[0,T]}$ 为满足以下随机微分方程的过程，

$$d\Gamma_s=\Gamma_{s-}(\beta_s dW_s+\sum_{i=1}^{p}\gamma_s^i dM_s^i),\quad \Gamma_0=1. \tag{2.24}$$

根据引理 A.3，我们有：对所有 $s\geq 0$,

$$\Gamma_s=\exp\left(\int_0^s\beta_r dW_r-\frac{1}{2}\int_0^s\beta_r^2 dr\right)\exp\left(-\int_0^s\sum_{i=1}^{p}\gamma_r^i\lambda_r^i dr\right)\prod_{i=1}^{p}(1+\gamma_{\tau_i}^i\mathbb{1}_{\{s\geq\tau_i\}}),\ \text{a.s.} \tag{2.25}$$

若对所有 $i\in\{1,\ldots,p\}$ $\gamma_{\tau_i}^i\geq -1$（分别为 $\gamma_{\tau_i}^i>-1$）几乎处处成立，则 $\Gamma_s\geq 0$（分别为$\Gamma_s>0$）对所有 $s\geq 0$ 几乎处处成立。

命题 2.13： 设 $T>0$。若随机变量 $\int_0^T(\beta_s^2+\sum_{i=1}^{p}(\gamma_s^i)^2\lambda_s^i)ds$有界，则由(2.24)定义的指数局部鞅$(\Gamma_t)^{t\in[0,T]}$是一个鞅，并满足 $\mathbb{E}[\text{上确界}_{0\leq t\leq T}\,\Gamma_t^2]<+\infty$。

证明。 由 (2.24) 可知，过程 Γ 是一个局部鞅。我们证明 $\mathbb{E}[$上确界$_{0\le t\le T}\Gamma_t^2]<\infty$。设 $dX_t=\beta_t dW_t+\sum_{i=1}^p\gamma_t^i dM_t^i$。我们有 [1] $d\Gamma_t=\Gamma_{t-}dX_t$和 $\Delta\Gamma_t=\Gamma_{t-}\Delta X_t$。由此可得，

$$
\begin{aligned}
d[\Gamma]_t &= d\langle\Gamma^c\rangle_t + d\left(\sum_{0<s\le t}(\Delta\Gamma_s)^2\right) = \Gamma_{t-}^2 d\langle X^c\rangle_t + d\left(\sum_{0<s\le t}\Gamma_{s-}^2(\Delta X_s)^2\right)\\
&= \Gamma_{t-}^2\beta_t^2 dt + d\left(\sum_{i=1}^p\int_0^t\Gamma_{s-}^2(\gamma_s^i)^2 dN_s^i\right) = \Gamma_{t-}^2\beta_t^2 dt + \Gamma_{t-}^2\sum_{i=1}^p(\gamma_t^i)^2 dN_t^i.
\end{aligned}
$$

对（Γ_t^2）应用伊藤公式，并利用 $dN_t^i=dM_t^i+\lambda_t^i dt$ 这一事实，可得，

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_t^2 &= 2\Gamma_{t-}d\Gamma_t + d[\Gamma]_t = \Gamma_{t-}^2(2\beta_t dW_t + 2\sum_{i=1}^p\gamma_t^i dM_t^i + \beta_t^2 dt + \sum_{i=1}^p(\gamma_t^i)^2 dN_t^i)\\
&= \Gamma_{t-}^2\left[2\beta_t dW_t + \sum_{i=1}^p(2\gamma_t^i+(\gamma_t^i)^2)dM_t^i + \left(\beta_t^2+\sum_{i=1}^p(\gamma_t^i)^2\lambda_t^i\right)dt\right].
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

这可以写成 $d\Gamma_t^2=\Gamma_{t-}^2 dY_t$ 的形式，其中，

$$
dY_t := \left(\beta_t^2+\sum_{i=1}^p(\gamma_t^i)^2\lambda_t^i\right)dt + 2\beta_t dW_t + \sum_{i=1}^p(2\gamma_t^i+(\gamma_t^i)^2)dM_t^i.
$$

我们有 $dY_t := dY_{(1)t} + dY_{(2)}\int_0^t 2\beta_s dW_s + \int_0^t\sum_{i=1}^p 2\gamma_s^i + {}^t\gamma_s^i{}^2\, dM_s^i{}^t =$，

其中 $Y_{(1)} := \int_0^t(\beta_s^2+\sum_{i=1}^p(\gamma_s^i)^2\lambda_s^i)\,ds$ 以及 $Y_{(2)}$：(()。我们有，

$$
\mathcal{E}(Y^{(1)})_t = \exp\left(\int_0^t\left(\beta_s^2+\sum_{i=1}^p(\gamma_s^i)^2\lambda_s^i\right)ds\right). \tag{2.27}
$$

将引理 A.3 应用于 $Y^{(2)}$，可得，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(Y^{(2)})_t = \exp&\left(\int_0^t 2\beta_s dW_s - \int_0^t\sum_{i=1}^p(2\gamma_s^i+(\gamma_s^i)^2)\lambda_s^i ds - \int_0^t 2\beta_s^2 ds\right)\\
&\times\prod_{i=1}^p\left(1+(2\gamma_{\tau_i}^i+(\gamma_{\tau_i}^i)^2)\mathbb{1}_{\{\tau_i\le t\}}\right).
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

利用恒等式 $\mathcal{E}$（$Y_{(1)}+Y_{(2)}+[Y_{(1)}Y_{(2)}]$）$_t=\mathcal{E}$（$Y_{(1)}$）$_t\mathcal{E}$（$Y_{(2)}$）$_t$，并利用对所有 t a.s. 均有 $[Y_{(1)}Y_{(2)}]_t=0$ 这一事实，可得，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(Y^{(1)})_t\mathcal{E}(Y^{(2)})_t = \Gamma_t^2 = \exp&\left(\int_0^t\left(\beta_s^2+\sum_{i=1}^p(\gamma_s^i)^2\lambda_s^i\right)ds\right)\\
&\times\exp\left(\int_0^t 2\beta_s dW_s - \int_0^t\sum_{i=1}^p(2\gamma_s^i+(\gamma_s^i)^2)\lambda_s^i ds - \int_0^t 2\beta_s^2 ds\right)\\
&\times\prod_{i=1}^p\left(1+(2\gamma_{\tau_i}^i+(\gamma_{\tau_i}^i)^2)\mathbb{1}_{\{\tau_i\le t\}}\right).
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

[1]对此，我们使用 $\Delta\Gamma_t=\Gamma_t-\Gamma_{t-}$ 和 $\Gamma_t=\Gamma_{t-}+\Gamma_{t-}\Delta X_t$（根据 (2.25)）；可得 $\Delta\Gamma_t=\Gamma_{t-}\Delta X_t$。

令 $\zeta_t := \mathcal{E}(Y^{(2)})_t$，则 ζ 是一个具有如下动态的指数局部鞅： $d\zeta_t = \zeta_{t-} dY_t^{(2)}$ ；更具体地说，

$$d\zeta_t = \zeta_{t-}\left[2\beta_t dW_t + \sum_{i=1}^{p}(2\gamma_t^i + (\gamma_t^i)^2)dM_t^i\right], \quad \zeta_0 = 1. \tag{2.30}$$

因此，由 (2.29) 得到的指数局部鞅 Γ^2 变为，

$$\Gamma_t^2 = \zeta_t \exp\left(\int_0^t \left(\beta_s^2 + \sum_{i=1}^{p}(\gamma_s^i)^2\lambda_s^i\right) ds\right). \tag{2.31}$$

根据 (2.30)，局部鞅 ζ 非负。这意味着 ζ 是一个上鞅，因此 $\mathbb{E}[\zeta_T] \leq 1$。现在，根据假设 $\int_0^T(\beta_t^2 + \sum_{i=1}^{p}(\gamma_t^i)^2\lambda_t^i)dt$ 有界，我们得到，

$$\mathbb{E}[\Gamma_T^2] \leq \mathbb{E}[\zeta_T]K \leq K,$$

其中 $K > 0$ 是一个依赖于 $\int_0^T(\beta_t^2 + \sum_{i=1}^{p}(\gamma_t^i)^2\lambda_t^i)dt$ 的常数。根据鞅不等式，我们得到 $\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\Gamma_t^2] < \infty$。由此可得 Γ 是一个鞅。■

现在，我们建立广义 $\lambda^{(p)}$-线性驱动项的倒向随机微分方程解（解的第一分量）的显式形式。首先考虑有限变差过程 D 是**可预测**的情形。

定理 *2.14*（广义 $\lambda^{(p)}$-线性倒向随机微分方程的显式解，其中D 可预测）：设 (α_t)、(β_t) 和 (γ_t^i)（ $i \in \{1, \ldots, p\}$）是取值于 $\mathbb{R}$ 的可预测过程，且 (α_t)、(β_t) 和 $(\gamma_t^i\sqrt{\lambda_t^i})$（ $i \in \{1, \ldots, p\}$）有界。设$\eta \in L^2(\mathcal{G}_T)$，并设 D 是 $A_{p,T}^2$ 中的一个（可预测）过程。设 $(Y, Z, K^1, \ldots, K^p)$ 是下列具有广义$\lambda^{(p)}$-线性驱动项 $(\alpha_t y + \beta_t z + \sum_{i=1}^{p}\gamma_t^i k^i\lambda_t^i)dt + dD_t$、终止时刻 T 和终端条件 η 的倒向随机微分方程在 $S^2 \times H^2 \times H_{\lambda^1}^2 \times \cdots \times H_{\lambda^p}^2$ 中的解，

$$-dY_t = \left(\alpha_t Y_t + \beta_t Z_t + \sum_{i=1}^{p}\gamma_t^i K_t^i\lambda_t^i\right)dt + dD_t - Z_t dW_t - \sum_{i=1}^{p}K_t^i dM_t^i, \quad Y_T = \eta. \tag{2.32}$$

对于每个 $t \in [0, T]$，令$(\Gamma_{t,s})_{s\geq t}$ 为以下伴随正向随机微分方程的唯一解，

$$d\Gamma_{t,s} = \Gamma_{t,s-}\left(\alpha_s ds + \beta_s dW_s + \sum_{i=1}^{p}\gamma_s^i dM_s^i\right), \quad \Gamma_{t,t} = 1. \tag{2.33}$$

那么，过程 (Y_t) 具有如下显式形式：

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\Gamma_{t,T}\eta + \int_t^T \Gamma_{t,s-}dD_s \middle| \mathcal{G}_t\right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad a.s. \tag{2.34}$$

注 2.15：将引理 A.3 应用于过程 $(\Gamma_{t,s})_{s\geq t}$，可得 $(\Gamma_{t,s})_{s\geq t}$满足,

$$\begin{aligned}\Gamma_{t,s} &= \exp\left(\int_t^s \alpha_r dr\right)\mathcal{E}\left(\int_t^\cdot \beta_r dW_r + \int_t^\cdot \sum_{i=1}^p \gamma_r^i dM_r\right)_s \\ &= \exp\left(\int_t^s \alpha_r dr + \int_t^s \beta_r dW_r - \frac{1}{2}\int_t^s \beta_r^2 dr - \sum_{i=1}^p \gamma_r^i \lambda_r^i dr\right)\prod_{i=1}^p (1+\gamma_{\tau_i}^i \mathbb{1}_{\{t<\tau_i\leq s\}}),\end{aligned} \tag{2.35}$$

对所有 $t \leq s \leq T$，几乎必然成立。过程 $(e^{\int_t^s \alpha_r dr})_{t\leq s\leq T}$ 为正且 **有界**（因为 α 有界）；利用命题 2.13（因为对于每个 $i \in \{1,\dots,p\}$，β 和 $\gamma^i\sqrt{\lambda^i}$ 有界），可知 $(\Gamma_{t,s})_{t\leq s\leq T}$ 是鞅，并满足 $\mathbb{E}[\sup_{t\leq s\leq T}\Gamma_{t,s}^2] < +\infty$。

证明。固定 $t \in [0,T]$。由于 $D \in \mathcal{A}_{p,T}^2$ 是 可预测 的，且过程 $\Gamma_{t,\cdot}$ 至多有 p 次跳跃，并且只发生在 完全不可预知 的时刻 $\tau_1,\dots,\tau_p$，因此对 $s \geq t$，几乎必然有 $[\Gamma_{t,\cdot}, D]_s = 0$。对 $(Y_s\Gamma_{t,s})$ 应用伊藤乘积公式，得到:

$$-d(Y_s\Gamma_{t,s}) = -Y_{s-}d\Gamma_{t,s} - \Gamma_{t,s-}dY_s - d[Y,\Gamma_{t,\cdot}]_s. \tag{2.36}$$

此外,

$$\begin{aligned} d[Y,\Gamma_{t,\cdot}]_s &= d\left[\int_t^\cdot \left(\alpha_r Y_r + \beta_r Z_r + \sum_{i=1}^p \gamma_r^i K_r^i \lambda_r^i\right)dr, \Gamma_{t,\cdot}\right]_s + d[D,\Gamma_{t,\cdot}]_s \\ &\quad + d[Z\bullet W, \Gamma_{t,\cdot}]_s + d\left(\sum_{i=1}^p [K^i \bullet M^i, \Gamma_{t,\cdot}]_s\right) \\ &= d[D,\Gamma_{t,\cdot}]_s + d\left[\int_t^\cdot Z_r dW_r, \int_t^\cdot \Gamma_{t,r-}\beta_r dW_r\right]_s \\ &\quad + d\left(\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p \left[\int_t^\cdot K_r^i dM_r^i, \int_t^\cdot \Gamma_{t,r-}\gamma_r^j dM_r^j\right]_s\right) \\ &= d\left(\int_t^s \Gamma_{t,r-}\beta_r Z_r dr\right) + d\left(\int_t^s \sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p K_r^i\Gamma_{t,r-}\gamma_r^j d[M^i,M^j]_r\right) \\ &= \Gamma_{t,s-}\beta_s Z_s ds + d\left(\int_t^s \sum_{i=1}^p \Gamma_{t,r-}K_r^i\gamma_r^i dN_r^i\right) \\ &= \Gamma_{t,s-}\beta_s Z_s ds + \Gamma_{t,s-}\sum_{i=1}^p K_s^i\gamma_s^i dN_s^i, \end{aligned} \tag{2.37}$$

其中我们用到了以下事实：对于 $i \neq j$，$d[M^i,M^j]_s = 0$，因为 $P(\tau_i = \tau_j) = 0, i \neq j$; 而对于情形 $i = j$，则有 $d[M^i]_s = dN_s^i$。

将（2.37）代入（2.36），并利用 $dN_s^i = dM_s^i + \lambda_s^i ds$，可得:

$$-d(Y_s\Gamma_{t,s}) = -\Gamma_{t,s-}(Y_s\beta_s + Z_s)dW_s - \Gamma_{t,s-}\left(\sum_{i=1}^p (Y_{s-}\gamma_s^i + K_s^i(1+\gamma_s^i))dM_s^i\right) + \Gamma_{t,s-}dD_s. \tag{2.38}$$

令 $dm_s = \Gamma_{t,\ s-}(Y_s\beta_s + Z_s)dW_s + \Gamma_{t,\ s-}\left(\sum_{i=1}^{p}(Y_{s-}\gamma_s^i + K_s^i(1+\gamma_s^i))dM_s^i\right)$，则有$-d(Y_s\Gamma_{t,\ s}) = -dm_s + \Gamma_{t,\ s-}dD_s$。在 t 和 T 之间积分，可得：

$$Y_t = \eta\Gamma_{t,T} + \int_t^T \Gamma_{t,s-}dD_s - (m_T - m_t), \quad \text{a.s.} \tag{2.39}$$

根据注 2.15，我们有 $(\Gamma_{t,\ s})_{t\le s\le T} \in \mathcal{S}^2$。此外，对于每个 $i \in \{1, \ldots\ldots, p\}$，$Y \in \mathcal{S}^2$、$Z \in \mathcal{H}^2$ 和$K^i \in \mathcal{H}^2_{\lambda^i}$，以及对于每个 $i \in \{1, \ldots\ldots, p\}$，$\overline{\beta}$和 $\gamma^i\sqrt{\lambda^i}$都是有界的。因此，局部鞅 $m = (m_s)_{t\le s\le T}$ 是鞅。对（2.39）取条件期望，得到所需的等式（2.34）。■

现在考虑过程 D 只是一个**可选**过程（不一定是可预测过程）的情形。更确切地说，D 属于$\mathcal{A}_T^2$；因此，根据命题 2.6，它具有（2.6）的形式。

定理 2.16 （广义 $\lambda^{(p)}$-线性倒向随机微分方程的显式解（具有 D 可选））： 假设定理 *2.14* 中的假设均成立，但 D 现在属于 A_T^2（不一定属于 $A_{p,\ T}^2$）。令 $D' \in A_{p,\ T}^2$和 $\theta^i \in H_{\lambda^i,\ T}^2$（对于 $i \in \{1, \ldots\ldots, p\}$）为命题 *2.6* 中的唯一可预测过程，使得对所有 $t \in [0,T]$,

$$D_t = D'_t + \int_0^t \sum_{i=1}^{p} \theta_s^i dN_s^i, \ a.s. \tag{2.40}$$

设$(Y, Z, K^1, \ldots, K^p)$是满足广义 $\lambda^{(p)}$-线性驱动项$(\alpha_t y + \beta_t z + \sum_{i=1}^{p}\gamma_t^i k^i\lambda_t^i)dt + dD_t$、终止时刻$T$和终端条件 $\eta \in L^2(G_T)$的倒向随机微分方程在 $S^2 \times H^2 \times H^2_{\lambda^1} \times \cdots \times H^2_{\lambda^p}$ 中的解。

那么，对所有 $t \in [0,T]$，几乎必然有：

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left[\Gamma_{t,T}\eta + \int_t^T \Gamma_{t,s-}\left(dD'_s + \sum_{i=1}^{p}\theta_s^i(1+\gamma_s^i)dN_s^i\right)\middle|\mathcal{G}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Gamma_{t,T}\eta + \int_t^T \Gamma_{t,s-}dD'_s + \sum_{i=1}^{p}\Gamma_{t,\tau_i}\theta_{\tau_i}^i \mathbb{1}_{\{t<\tau_i\le T\}}\middle|\mathcal{G}_t\right], \end{aligned} \tag{2.41}$$

其中，过程$(\Gamma_{t,s})_{t\le s\le T}$ 是伴随正向随机微分方程(2.35)的解。

证明。 由于 D 满足 (2.40)，我们有：

$$\begin{aligned} d[D, \Gamma_{t,\cdot}]_s &= d[D', \Gamma_{t,\cdot}]_s + d\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left[\int_t^{\cdot}\theta_r^i dN_r^i, \int_t^{\cdot}\Gamma_{t,r-}\gamma_r^j dN_r^j\right]_s\right) \\ &= d\left(\int_t^s \Gamma_{t,r-}\sum_{i=1}^{p}\theta_r^i\gamma_r^i dN_r^i\right) = \Gamma_{t,s-}\sum_{i=1}^{p}\theta_s^i\gamma_s^i dN_s^i \quad \text{a.s.}, \end{aligned} \tag{2.42}$$

其中，我们利用了对于 $i \ne j.$，$\tau_i \ne \tau_j$ 几乎处处成立。对 $(Y_s\Gamma_{t,s})$ 应用伊藤乘积公式，并采用与定理 2.14 证明中类似的计算方法，且

利用 (2.42)，可得:

$$-d(Y_s\Gamma_{t,s}) = -\Gamma_{t,s-}(Y_s\beta_s + Z_s)dW_s - \Gamma_{t,s-}\left(\sum_{i=1}^{p}(Y_{s-}\gamma_s^i + K_s^i(1+\gamma_s^i))dM_s^i\right) - \Gamma_{t,s-}\left(dD_s + \sum_{i=1}^{p}\theta_s^i\gamma_s^i dN_s^i\right). \quad (2.43)$$

在（2.43）中使用 $\Gamma_{t,s-}(dD_s + \sum_{i=1}^{p}\theta_s^i\gamma_s^i dN_s^i) = \Gamma_{t,s-}(dD'_s + \sum_{i=1}^{p}\theta_s^i(1+\gamma_s^i)dN_s^i)$，从 t 到 T 积分并取条件期望，我们推得，

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\Gamma_{t,T}\eta + \int_t^T \Gamma_{t,s-}\left(dD'_s + \sum_{i=1}^{p}\theta_s^i(1+\gamma_s^i)dN_s^i\right)\middle|\mathcal{G}_t\right], \quad (2.44)$$

这就是（2.41）中的第一个等式。

现在，我们有，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_t^T \Gamma_{t,s-}\sum_{i=1}^{p}\theta_s^i(1+\gamma_s^i)dN_s^i\middle|\mathcal{G}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{p}\Gamma_{t,\tau_i-}\theta_{\tau_i}^i(1+\gamma_{\tau_i}^i)\mathbb{1}_{\{t<\tau_i\le T\}}\middle|\mathcal{G}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{p}\Gamma_{t,\tau_i}\theta_{\tau_i}^i\mathbb{1}_{\{t<\tau_i\le T\}}\middle|\mathcal{G}_t\right].\end{aligned} \quad (2.45)$$

（2.45）中的第二个等式源于 $\Gamma_{t,s}$ 具有如下表示，

$$\Gamma_{t,s} = \exp\left(\int_t^s\left(\alpha_r - \frac{1}{2}\beta_r^2 - \sum_{i=1}^{p}\gamma_r^i\lambda_r^i\right)dr + \int_t^s \beta_r dW_r\right)\prod_{i=1}^{p}(1+\gamma_{\tau_i}^i\mathbb{1}_{\{t<\tau_i\le s\}}),$$

对所有 $t \le s \le T$ 几乎处处成立；因此，对于每个 $i \in \{1,\dots,p\}$ $\Gamma_{t,\tau_i-}(1+\gamma_{\tau_i}^i)\mathbb{1}_{\{t<\tau_i\le T\}} = \Gamma_{t,\tau_i}\mathbb{1}_{\{t<\tau_i\le T\}}$（其中我们使用了 $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p$）。

将（2.45）代入（2.44），我们得到如下表示，

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\Gamma_{t,T}\eta + \int_t^T \Gamma_{t,s-}dD'_s + \sum_{i=1}^{p}\Gamma_{t,\tau_i}\theta_{\tau_i}^i\mathbb{1}_{\{t<\tau_i\le T\}}\middle|\mathcal{G}_t\right],$$

这就是式 (2.41) 中的第二个等式。 ■

2.3 多重违约跳跃倒向随机微分方程的比较定理

现在，我们给出与 $\mathcal{A}_T^2$ 中有限变差、适应且右连续并具有左极限的过程相关联的、具有广义 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项的倒向随机微分方程的比较结果和严格比较结果。

为方便起见，我们定义以下集合:

$$\begin{aligned}&A_0 := \{\tau_1 > T\}, A_1 := \{\tau_1 \le T, \tau_2 > T\}, ..., A_k := \{\tau_k \le T, \tau_{k+1} > T\}, ..., \\ &A_{p-1} := \{\tau_{p-1} \le T, \tau_p > T\}, \text{ and } A_p := \{\tau_p \le T\}.\end{aligned} \quad (2.46)$$

由于 $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_p$，上述集合构成 Ω 的一个划分。

定理 2.17（具有多个违约跳跃的倒向随机微分方程的比较与严格比较）： 设 η 和 $\hat{}\eta$ 属于 L^2（G_T）。设 g 和 $\hat{}g$ 是 $\lambda^{(p)}$- 可容许驱动项。设 D 和 $\hat{}D$ 是 A_T^2 中的过程。设 $(Y,\ Z,\ K^1,\ \ldots,\ K^p)$ 是 *BSDE* 在 $S^2 \times H_T^2 \times H^2_{\lambda^1,\ T} \times \cdots \times H^2_{\lambda^p,\ T}$ 中的解，

$$-dY_t = g(t, Y_t, Z_t, K_t^1, \ldots, K_t^p)dt + dD_t - Z_t dW_t - \sum_{i=1}^{p} K_t^i dM_t^i, \quad Y_T = \eta.$$

令 $(\hat{}Y, \hat{}Z, \hat{}K^1, \ldots, \hat{}K^p)$ 为该倒向随机微分方程在 $S^2 \times H_T^2 \times H^2_{\lambda^1,T} \times \cdots \times H^2_{\lambda^p,T}$ 中的解，

$$-d\hat{Y}_t = \hat{g}(t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \hat{K}_t^1, \ldots, \hat{K}_t^p)dt + d\hat{D}_t - \hat{Z}_t dW_t - \sum_{i=1}^{p} \hat{K}_t^i dM_t^i, \quad \hat{Y}_T = \hat{\eta}.$$

那么，以下两个陈述成立：

*(i)*比较：假设存在 p 可预测过程(γ_t^i)（其中$i \in \{1, \ldots, p\}$），满足$(\gamma_t^i \sqrt{\lambda_t^i})$ 对 $dP \otimes dt$-几乎处处（对于 $i \in \{1, \ldots, p\}$）有界，使得，

$$for\ each\ k \in \{1, ..., p\},\ on\ A_k, 1 + \gamma_{\tau_i}^i \geq 0\ a.s.\ for\ all\ i \in \{1, ..., k\}, \quad (2.47)$$

并且满足，

$$g(t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t, K_t^1, \ldots, K_t^p) - g(t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \hat{K}_t^1, \ldots, \hat{K}_t^p) \geq \sum_{i=1}^{p} \gamma_t^i (K_t^i - \hat{K}_t^i)\lambda_t^i \quad (2.48)$$

对 $t \in [0, T]$, $dP \otimes dt$-几乎处处。假设 $\eta \geq \hat{}\eta$ 几乎必然有 $\bar{D} := D - \hat{}D$ 非递减，并且

$$g(t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \hat{K}_t^1, \ldots, \hat{K}_t^p) \geq \hat{g}(t, \hat{Y}_t, \hat{Z}_t, \hat{K}_t^1, \ldots, \hat{K}_t^p) \quad (2.49)$$

对 $t \in [0, T]$, $dP \otimes dt$-几乎处处。因此，对所有 $t \in [0, T]$ 几乎必然有 $Y_t \geq \hat{}Y_t$。

*(ii)*严格比较：进一步假设 $\gamma_{\tau_i}^i > -1$ 几乎处处对每个 $i \in \{1, \ldots, p\}$ 均成立，并且存在 $t_0 \in [0, T]$ 使得 $Y_{t_0} = \hat{}Y_{t_0}$ 几乎处处成立。则，$\eta = \hat{}\eta$ 几乎处处成立，且（2.49）中的不等式在 $[t_0, T]$ 上取等号。此外，$\bar{D} := D - \hat{}D$ 在 $[t_0, T]$ 上为常数，而 $Y = \hat{}Y$ 在 $[t_0, T]$ 上为常数。

注 2.18：由于假设 $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_p$，公式（2.47）中的条件，即对每个 $k \in \{1, ..., p\}$, $A_k, 1 + \gamma_{\tau_i}^i \geq 0$ 对所有 $i \in \{1, ..., k\}$ 几乎处处成立，在我们的框架下等价于以下条件：

$$\text{for all } t \in [0, T], \prod_{i=1}^{p} (1 + \gamma_{\tau_i}^i \mathbb{1}_{\{t < \tau_i \leq s\}}) \geq 0, \text{ for all } s \in [t, T], \text{ a.s.,} \quad (2.50)$$

这保证了在比较定理的证明中，伴随过程 $(\Gamma_{t,\cdot})$ 的非负性。为证明这两个条件等价，我们进行如下论证：设公式（2.50）中的条件成立。取该条件中的 t=0 in，并令 $k \in \{1, ..., p\}$。考虑集合 A_k：取

依次将 $s=\tau_1(\omega)$，$s=\tau_2(\omega)$,...，$s=\tau_k(\omega)$代入公式（2.50）（并利用$\tau_1<\tau_2<...<\tau_p$），可得$1+\gamma^1_{\tau_1(\omega)}(\omega)\geq 0$, ..., $1+\gamma^k_{\tau_k(\omega)}(\omega)\geq 0$在 A_k上。反过来，设公式（2.47）中的条件成立。对于 $t\in[0,T]$，对于 $s\in[t,T]$，有$\prod_{i=1}^p(1+\gamma^i_{\tau_i}\mathbb{1}_{\{t<\tau_i\leq s\}})=\sum_{k=0}^p\mathbb{1}_{A_k}(\prod_{i=1}^p(1+\gamma^i_{\tau_i}\mathbb{1}_{\{t<\tau_i\leq s\}}))$。令 $k\in\{1,...,p-1\}$。考虑集合 $A_k\cap\{t<\tau_i\leq s\}=\{\tau_k\leq T,\tau_{k+1}>T\}\cap\{t<\tau_i\leq s\}$：对于每个满足 $1\leq i\leq k$ 的 i，在 $A_k\cap\{t<\tau_i\leq s\}$ 上有 $\gamma^i_{\tau_i}\geq -1$（根据条件（2.47））；对于 $i\geq k+1$，$A_k\cap\{t<\tau_i\leq s\}=\varnothing$（因为 $\tau_{k+1}>T$ 在 A_k 上，且各个 τ_i 严格有序）。在 A_p 上，$\gamma^i_{\tau_i}\geq -1$，对每个 $i\in\{1,...,p\}$ 均成立。最后注意到，对于每个 $i\in\{1,...,p\}$，都有$A_0\cap\{t<\tau_i\leq s\}=\varnothing$（因为 $\tau_1>T$ 在 A_0 上）。由此得出，对于 $t\in[0,T]$，对于 $s\in[t,T]$，$\prod_{i=1}^p(1+\gamma^i_{\tau_i}\mathbb{1}_{\{t<\tau_i\leq s\}})\geq 0$.

注 2.19：假设对每个 $i\in\{1,\dots,p\}$，$\gamma^i_{\tau_i}\geq -1$ 几乎处处成立。这意味着公式（2.47）中的条件成立：对每个 $k\in\{1,...,p\}$，对所有 $i\in\{1,...,k\}$，A_k、$1+\gamma^i_{\tau_i}\geq 0$ 几乎处处成立。此外，若对每个 $i\in\{1,\dots,p\}$，$\gamma^i_{\tau_i}>-1$ 几乎处处成立，则严格比较（ii）中的条件也成立。

证明。令 $\bar{Y}_s:=Y_s-\hat{Y}_s$、$\bar{Z}_s:=Z_s-\hat{Z}_s$ 和 $\bar{K}^i_s:=K^i_s-\hat{K}^i_s$，则对每个 $i\in\{1,\dots,p\}$，有：

$$-d\bar{Y}_s=h_sds+d\bar{D}_s-\bar{Z}_sdW_s-\sum_{i=1}^p\bar{K}^i_sdM^i_s,\quad \bar{Y}_T=\eta-\hat{\eta},$$

其中，

$$h_s:=g(s,Y_{s-},Z_s,K^1_s,\dots,K^p_s)-\hat{g}(s,\hat{Y}_{s-},\hat{Z}_s,\hat{K}^1_s,\dots,\hat{K}^p_s).\tag{2.51}$$

令，

$$\begin{aligned}\delta_s&:=\frac{g(s,Y_{s-},Z_s,K^1_s,\dots,K^p_s)-g(s,\hat{Y}_{s-},Z_s,K^1_s,\dots,K^p_s)}{\bar{Y}_{s-}}\mathbb{1}_{\{\bar{Y}_{s-}\neq 0\}},\\ \beta_s&:=\frac{g(s,\hat{Y}_{s-},Z_s,K^1_s,\dots,K^p_s)-g(s,\hat{Y}_{s-},\hat{Z}_s,K^1_s,\dots,K^p_s)}{\bar{Z}_s}\mathbb{1}_{\{\bar{Z}_s\neq 0\}}.\end{aligned}\tag{2.52}$$

根据定义，δ 和 β 均为可预测的。此外，由于 g 是一个 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项，因此满足：

$$\begin{aligned}&|g(\omega,t,y,z,k^1,\dots,k^p)-g(\omega,t,\hat{y},\hat{z},\hat{k}^1,\dots,\hat{k}^p)|\\ &\qquad\leq C\left(|y-\hat{y}|+|z-\hat{z}|+\sum_{i=1}^p\sqrt{\lambda^i_t(\omega)}|k^i-\hat{k}^i|\right);\end{aligned}$$

因此，过程 δ 和 β 有界。采用上述记号，

$$h_s=\delta_s\bar{Y}_{s-}+\beta_s\bar{Z}_s+g(s,\hat{Y}_{s-},\hat{Z}_s,K^1_s,\dots,K^p_s)-g(s,\hat{Y}_{s-},\hat{Z}_s,\hat{K}^1_s,\dots,\hat{K}^p_s)+\varphi_s,$$

其中，

$$\varphi_s:=g(s,\hat{Y}_{s-},\hat{Z}_s,\hat{K}^1_s,\dots,\hat{K}^p_s)-\hat{g}(s,\hat{Y}_{s-},\hat{Z}_s,\hat{K}^1_s,\dots,\hat{K}^p_s).\tag{2.53}$$

根据假设 (2.48)，并且由于 $Y_t=Y_{t-}$ $dP\otimes dt$-几乎处处有[2]，，我们有

$$h_s\geq\delta_s\bar{Y}_s+\beta_s\bar{Z}_s+\sum_{i=1}^p\gamma^i_s\bar{K}^i_s\lambda^i_s+\varphi_s,\quad dP\otimes ds\text{-a.e.}\tag{2.54}$$

[2]这是成立的，因为 $Y_t(\omega)$ 至多有可数个跳跃。

我们固定 $t \in [0,T]$。令 $\Gamma_{t,\cdot}$ 。为伴随过程，其定义为，

$$d\Gamma_{t,s} = \Gamma_{t,s-}\left(\delta_s ds + \beta_s dW_s + \sum_{i=1}^{p} \gamma_s^i dM_s^i\right), \quad \Gamma_{t,t} = 1.$$

由于对于每个 $i \in \overline{1,\ldots,p}$， δ、 β和 $\gamma^i\sqrt{\lambda^i}$均有界，根据注 2.15，我们有 $\Gamma_{t,\cdot} \in \mathcal{S}^2$。根据公式（2.47）中的条件、方程 (2.35) 以及注 2.18，我们得到对所有 $t \le s \le T$ 几乎处处有 $\Gamma_{t,s} \ge 0$ 。

步骤 *1.* 我们首先考虑 D 和 $\hat{D}$ 是 $\mathcal{A}^2_{p,T}$ 中的（可预测）过程的情形，并证明此情形下的比较结果和严格比较结果。对 $(Y_s\Gamma_{t,s})$ 应用伊藤乘积公式，得到 $-d(Y_s\Gamma_{t,s}) = -Y_{s-}d\Gamma_{t,s} - \Gamma_{t,s-}dY_s - d[Y,\Gamma_{t,\cdot}]_s$。我们有，

$$\begin{aligned}
d[\bar{Y},\Gamma_{t,\cdot}]_s &= d\left[\int_t^{\cdot} \bar{Z}_r dW_r, \int_t^{\cdot} \Gamma_{t,r-}\beta_r dW_r\right]_s + d\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left[\int_t^{\cdot} \bar{K}_r^i dM_r^i, \int_t^{\cdot} \Gamma_{t,r-}\gamma_r^j dM_r^j\right]_s\right) \\
&= \Gamma_{t,s-}\beta_s\bar{Z}_s ds + \left(\int_t^s \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \bar{K}_r^i\Gamma_{t,r-}\gamma_r^j d[M^i,M^j]_r\right) \\
&= \Gamma_{t,s-}\beta_s\bar{Z}_s ds + d\left(\int_t^s \Gamma_{t,r-}\sum_{i=1}^{p} \bar{K}_r^i\gamma_r^i dN_r^i\right) \\
&= \Gamma_{t,s-}\beta_s\bar{Z}_s ds + \Gamma_{t,s-}\sum_{i=1}^{p} \bar{K}_s^i\gamma_s^i\lambda_s^i ds + \Gamma_{t,s-}\sum_{i=1}^{p} \bar{K}_s^i\gamma_s^i dM_s^i,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

这里我们用到了：对于 $i \ne j$， $d[M^i,M^j]_s = 0$；这是因为对于 $i \ne j$， $P(\tau_i = \tau_j) = 0$；而对于情形 $i = j$， $d[M^i]_s = dN_s^i$。由此可得，

$$\begin{aligned}
-d(\bar{Y}_s\Gamma_{t,s}) &= -\Gamma_{t,s-}\left(\bar{Y}_{s-}\delta_s ds + \bar{Y}_{s-}\beta_s dW_s + \bar{Y}_{s-}\sum_{i=1}^{p}\gamma_s^i dM_s^i\right) \\
&\quad + \Gamma_{t,s-}\left(h_s ds + d\bar{D}_s - \bar{Z}_s dW_s - \sum_{i=1}^{p}\bar{K}_s^i dM_s^i\right) \\
&\quad - \Gamma_{t,s-}\beta_s\bar{Z}_s ds - \Gamma_{t,s-}\sum_{i=1}^{p}\bar{K}_s^i\gamma_s^i\lambda_s^i ds - \Gamma_{t,s-}\sum_{i=1}^{p}\bar{K}_s^i\gamma_s^i dM_s^i \\
&= \Gamma_{t,s-}\left(h_s - \delta_s\bar{Y}_{s-} - \beta_s\bar{Z}_s - \sum_{i=1}^{p}\bar{K}_s^i\gamma_s^i\lambda_s^i\right)ds + \Gamma_{t,s-}d\bar{D}_s \\
&\quad - \left(\Gamma_{t,s-}(\bar{Y}_{s-}\beta_s + \bar{Z}_s)dW_s + \Gamma_{t,s-}\left(\sum_{i=1}^{p}(\bar{K}_s^i(1+\gamma_s^i) + \bar{Y}_{s-}\gamma_s^i)dM_s^i\right)\right) \\
&= \Gamma_{t,s-}\left(h_s - \delta_s\bar{Y}_{s-} - \beta_s\bar{Z}_s - \sum_{i=1}^{p}\bar{K}_s^i\gamma_s^i\lambda_s^i\right)ds + \Gamma_{t,s-}d\bar{D}_s - dm_s,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

其中，过程 $(m_s)_{s\in[0,T]}$ 定义为

$$dm_s = \Gamma_{t,s-}(\bar{Y}_s\beta_s + \bar{Z}_s)dW_s + \Gamma_{t,s-}(\sum_{i=1}^{p}(\bar{K}_s^i(1+\gamma_s^i) + \bar{Y}_{s-}\gamma_s^i)dM_s^i). \tag{2.57}$$

过程 (m_s) 是一个鞅，因为 $\Gamma_{t,\cdot} \in \mathcal{S}^2$, $\bar{Y} \in \mathcal{S}^2$, $\bar{Z} \in \mathcal{H}^2$, $\bar{K}^i \in \mathcal{H}^2_{\lambda^i}$ 对每个 $i \in \{1, \ldots\ldots, p\}$ 都成立，并且对每个 $i \in \{1, \ldots\ldots, p\}$，$\beta$ 和 $\gamma^i\sqrt{\lambda^i}$ 都是有界的。利用方程 (2.54) 和 (2.56)，以及 Γ 非负这一事实，可得：

$$-d(\bar{Y}_s\Gamma_{t,s}) \geq \Gamma_{t,s-}\varphi_s ds + \Gamma_{t,s-}d\bar{D}_s - dm_s. \tag{2.58}$$

对 (2.58) 在 t 和 T 之间积分，并取条件期望，可得，

$$\bar{Y}_t \geq \mathbb{E}\left[\Gamma_{t,T}(\eta - \hat{\eta}) + \int_t^T \Gamma_{t,s-}\varphi_s ds + \int_t^T \Gamma_{t,s-}d\bar{D}_s \middle| \mathcal{G}_t\right], \quad 0 \leq t \leq T \text{ a.s.} \tag{2.59}$$

由 (2.49) 可知，$\varphi_t \geq 0$ $dP \otimes dt$-几乎处处成立。此外，由于 $\eta - \hat{\eta} \geq 0$，且 $\bar{D}$ 是非递减的，而伴随过程 $(\Gamma_{t,s})_{s\in[t,T]}$ 非负，因此 $\bar{Y}$ 条件期望中的所有项均非负；故 $Y_t = Y_t - Y_t \geq 0$ 几乎必然成立。由于这对所有 $t \in [0,T]$ 均成立，且 Y 和 $\hat{Y}$ 均右连续且有左极限，因此 $D, \hat{D} \in \mathcal{A}^2_{p,T}$ 的比较结果 (i) 得证。

下面证明 $D, \hat{D} \in \mathcal{A}^2_{p,T}$ 的 (ii)。假设存在 $t_0 \in [0,T]$，使得 $Y_{t_0} = \hat{Y}_{t_0}$ 几乎必然成立，且对所有 $s \in [t_0, T]$，$\prod_{i=1}^p (1 + \gamma^i_{\tau_i}\mathbb{1}_{t_0<\tau_i\leq s}) > 0$ 几乎必然成立（参见式 (2.35)）。这意味着对所有 $s \in [t_0, T]$，$\Gamma_{t_0,s} > 0$ 几乎必然成立。另一方面，方程 (2.59)（对于 $t = t_0$）给出：

$$0 = \bar{Y}_{t_0} \geq \mathbb{E}\left[\Gamma_{t_0,T}(\eta - \hat{\eta}) + \int_{t_0}^T \Gamma_{t_0,s-}\varphi_s ds + \int_{t_0}^T \Gamma_{t_0,s-}d\bar{D}_s \middle| \mathcal{G}_{t_0}\right]. \tag{2.60}$$

此外，由条件期望内部各项的非负性以及 ($\Gamma_{t,s}$ $\eta = \eta$ $\varphi_t = 0$ $t \in [t_0, T]$,) 的正性可知，$\hat{}$ 几 $dP \otimes dt$ $\tilde{D}_t = \int_{t_0}^t \Gamma_{t_0,s-}d\bar{D}_s$ $t \in [t_0, T]$ $\tilde{D}_T \geq 0$ 乎处处成立，且对所有 -几乎处处成立。现在令：,对每个 。我们有 ¯几乎处处成立，当 $\Gamma_{t_0,s} > 0$ 时；并且由于 D 是非递减的（根据假设），当 D 时，˜ ˜我们得到 $0 = \mathbb{E}[D_T|\mathcal{G}_{t_0}]$ 几乎处处成立，因此 $D_T = 0$ 几乎处处成立。由于对所有 $T \geq s \geq t_0$ 几乎处处有 $\Gamma_{t_0,s} > 0$，所以有 $\bar{D}_T - \bar{D}_{t_0} = \int_{t_0}^T (\Gamma_{t_0,s-})^{-1}d\tilde{D}_s$，这意味着 $\bar{D}_{t_0} = \bar{D}_T$ 几乎处处成立。因此，严格比较 结果 (ii) 已得到证明，适用于 $D, \hat{D} \in \mathcal{A}^2_{p,T}$。

ˆ步骤 *2*。现在考虑可选过程 D，D 不一定是可预测过程的情形；更确切地说，D，$\hat{D} \in \mathcal{A}^2_T$。根据命题 2.6（分别应用于 D 和 $\hat{D}$），存在 $D' \in \mathcal{A}^2_{p,T}$、$\hat{D}' \in \mathcal{A}^2_{p,T}$ 以及 θ^i，$\hat{\theta}^i \in \mathcal{H}^2_{\lambda^i,T}$（其中 $i \in \{1, \ldots\ldots, p\}$），使得 D 和 $\hat{D}$ 均可唯一地写成如下形式，

$$D_t = D'_t + \int_0^t \sum_{i=1}^p \theta^i_s dN^i_s, \quad \text{a.s. and } \hat{D}_t = \hat{D}'_t + \int_0^t \sum_{i=1}^p \hat{\theta}^i_s dN^i_s, \quad \text{a.s.} \tag{2.61}$$

¯ ˆ由于 $D := D - D$ 是非递减的，且由于 $\tau_1 < \cdots < \tau_p$，根据引理 A.2，我们得到 $\bar{D}' := D' - \hat{D}'$ 是非递减的，并且对每个 $i \in 1 \ldots p$ $\theta^i_{\tau_i} \geq \theta^i_{\tau_i}\{,,\}$ˆ，在 $\{\tau_i \leq T\}$ 上几乎处处成立。对 $(Y_s\Gamma_{t,s})$ 应用伊藤乘积公式，我们得到 $-d(Y_s\Gamma_{t,s}) =$ $-Y_{s-}d\Gamma_{t,s} - \Gamma_{t,s-}dY_s - d[Y, \Gamma_{t,\cdot}]_s$。这里，$d[Y, \Gamma_{t,\cdot}]_s$ 等于

$\bar{}$ $\bar{}$(2.55) 加上附加项 $d[D,\Gamma_{t,\cdot}]_s$。项 $d[D,\Gamma_{t,\cdot}]_s$ 可以表示为 s

$$
\begin{aligned}
d[\bar{D},\Gamma_{t,\cdot}]_s &= d[\bar{D}',\Gamma_{t,\cdot}]_s + d\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left[\int_t^{\cdot}(\theta_r^i-\hat{\theta}_r^i)dN_r^i,\int_t^{\cdot}\Gamma_{t,r-}\gamma_r^j dN_r^j\right]_s\right)\\
&= d\left(\int_t^s \Gamma_{t,r-}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}(\theta_r^i-\hat{\theta}_r^i)\gamma_r^j d[N^i,N^j]_r\right) \qquad (2.62)\\
&= d\left(\int_t^s \Gamma_{t,r-}\sum_{i=1}^{p}(\theta_r^i-\hat{\theta}_r^i)\gamma_r^i dN_r^i\right) = \Gamma_{t,s-}\sum_{i=1}^{p}(\theta_s^i-\hat{\theta}_s^i)\gamma_s^i dN_s^i,
\end{aligned}
$$

其中我们利用了 $d[N^i,N^j]_s=0$，对于 $i\neq j$，因为 $P(\tau_i=\tau_j)=0$，对于 $i\neq j$，以及 $d[N^i]_s=dN_s^i$（当 $i=j$ 时）。因此，我们有，

$$
\begin{aligned}
-d(\bar{Y}_s\Gamma_{t,s}) = \Gamma_{t,s-}&\left(h_s-\delta_s\bar{Y}_s-\beta_s\bar{Z}_s-\sum_{i=1}^{p}\bar{K}_s^i\gamma_s^i\lambda_s^i\right)ds+\Gamma_{t,s-}d\bar{D}_s-dm_s\\
&+\Gamma_{t,s-}\sum_{i=1}^{p}(\theta_s^i-\hat{\theta}_s^i)\gamma_s^i dN_s^i, \quad (2.63)
\end{aligned}
$$

其中，(m_t) 与公式 (2.57) 中的鞅相同，(h_t) 是公式 (2.51) 中的过程，而 (δ_t) 和 (β_t) 是公式 (2.52) 中的过程。利用不等式 (2.54) 以及 $d\bar{D}_t=d\bar{D}'_t+\sum_{i=1}^{p}(\theta_t^i-\hat{}\theta_t^i)dN_t^i$ 这一事实，在 t 与 T 之间积分（其中 $t\in[0,T]$），并取条件期望，我们得到，

$$
\bar{Y}_t \geq \mathbb{E}\left[\Gamma_{t,T}(\eta-\hat{\eta})+\int_t^T\Gamma_{t,s-}\left(d\bar{D}'_s+\sum_{i=1}^{p}(\theta_s^i-\hat{\theta}_s^i)(1+\gamma_s^i)dN_s^i+\varphi_s ds\right)\middle|\mathcal{G}_t\right], \text{ a.s.} \qquad (2.64)
$$

其中，过程 (φ_t) 与公式 (2.53) 中的过程相同。注意，对于$i\in\{1,\ldots,p\}$,

$$
\int_t^T\Gamma_{t,s-}(\theta_s^i-\hat{\theta}_s^i)(1+\gamma_s^i)dN_s^i=\Gamma_{t,\tau_i-}(\theta_{\tau_i}^i-\hat{\theta}_{\tau_i}^i)(1+\gamma_{\tau_i}^i)\mathbb{1}_{\{T\geq\tau_i\geq t\}}. \qquad (2.65)
$$

固定 i。现在我们检验这一项在每个 A_k 上均为非负，其中 $k\in\{1,\ldots,p\}$，而 A_k 是假设 (2.47) 中出现的那些项。如上所述，在 $\{\tau_i\leq T\}$ 上，$\theta_{\tau_i}^i\geq\hat{}\theta_{\tau_i}^i$ 几乎处处成立。此外，伴随过程 $(\Gamma_{t,s})_{s\in[0,T]}$ 非负。并且，根据 A_k 的定义，对于 $0\leq k\leq i-1$，有 $\mathbb{1}_{\{T\geq\tau_i\geq t\}}\mathbb{1}_{A_k}=0$；根据假设 (2.47)，有 $(1+\gamma_{\tau_i}^i)\mathbb{1}_{\{T\geq\tau_i\geq t\}}\mathbb{1}_{A_k}\geq 0$（对每个 $k\in\{i,\ldots,p\}$）。因此，式 (2.65) 中的项非负。由假设 (2.49) 和 (2.53)，我们有 $\varphi_t\geq 0$ $dP\otimes dt$-几乎处处成立。此外，$\bar{}$由于 $\eta-\hat{}\eta\geq 0$，且 (D'_t) 非递减、伴随过程 $(\Gamma_{t,s})_{s\in[0,T]}$ 非负，因此条件期望中的所有项均非负；故 $\bar{Y}_t=Y_t-\hat{}Y_t\geq 0$ 几乎处处成立。由于这对所有 $t\in[0,T]$ 均成立，且 (Y_t) 和 $(\hat{}Y_t)$ 均为右连续且有左极限，故关于 D、$\hat{}D\in\mathbb{A}_T^2$ 的比较结果 (i) 得证。

现在假设存在 $t_0\in[0,T]$ 使得 $\bar{Y}_{t_0}=0$，并且对每个 $i\in\{1,\ldots,p\}$ $\gamma_{\tau_i}^i>-1$ 几乎处处成立。因此，$\Gamma_{t,s}>0$ 对所有 $s\in[t,T]$ 几乎处处成立。对于 $t=t_0$，式 (2.64) 得出，

$$
0=\bar{Y}_{t_0}\geq\mathbb{E}\left[\Gamma_{t_0,T}(\eta-\hat{\eta})+\int_{t_0}^T\Gamma_{t,s-}\left(d\bar{D}'_s+\sum_{i=1}^{p}(\theta_s^i-\hat{\theta}_s^i)(1+\gamma_s^i)dN_s^i+\varphi_s ds\right)\middle|\mathcal{G}_{t_0}\right]. \qquad (2.66)
$$

结合条件期望中各项的非负性以及 $(\Gamma_{t,s})$ 的正性，可得 $\eta = \hat{\eta}$ 几乎处处成立，$\varphi_t = 0$ 对所有 $t \in [t_0, T]$ $dP \otimes dt$-几乎处处成立，并且对每个 $i \in \{1, \ldots, p\}$，$\theta^i_{\tau_i} = \hat{\theta}^i_{\tau_i}$ 在 $\{t_0 < \tau_i \leq T\}$ 上几乎处处成立。我们令 $\tilde{D}'_t := \int_{t_0}^t \Gamma_{t_0,s-} d\bar{D}'_s$ 对每个 $t \in [t_0, T]$。由于 $\Gamma_{t_0,s} > 0$，且 $\bar{D}'$ $\tilde{}$ 是非递减的，因此 $\tilde{D}'_T \geq 0$ 几乎处处成立。利用这一点和 (2.66)，得到 $\mathbb{E}[D'_T | \mathcal{G}_{t_0}] = 0$ 几乎处处成立；因此，$D'_T = 0$ 几乎处处成立。由于 $\Gamma_{t_0,s} > 0$ 对所有 $T \geq s \geq t_0$ 几乎处处成立，我们有 $\bar{D}'_T - \bar{D}'_{t_0} = \int_{t_0}^T (\Gamma_{t_0,s-})^{-1} d\tilde{D}'_s$，这意味着 $\bar{D}'_{t_0} = \bar{D}'_T$ 几乎处处成立。由此证明了 $D, \hat{D} \in \mathcal{A}^2_T$ 的严格比较结果 (ii)。

■

现在给出一个例子，说明如果不满足定理 2.17 的假设，则该定理中的比较（以及严格比较）结果的结论不一定成立。

例 2.20：假设对于每个 $i \in \{1, \ldots, p\}$，过程 λ^i 均为有界过程。令 g 为一个 $\lambda^{(p)}$-线性驱动项（参见定义 2.21），其形式为：

$$g(\omega, t, y, z, k^1, \ldots, k^p) = \alpha_t(\omega) y + \beta_t(\omega) z + \sum_{i=1}^p \gamma^i k^i \lambda^i_t(\omega), \tag{2.67}$$

其中每个 γ^i 都是实常数。伴随过程 $\Gamma_{0,\cdot}$ 的动态为（参见（2.33））：

$$d\Gamma_{0,s} = \Gamma_{0,s-} \left(\alpha_s ds + \beta_s dW_s + \sum_{i=1}^p \gamma^i dM^i_s \right), \quad \Gamma_{0,0} = 1. \tag{2.68}$$

根据注 2.15，$\Gamma_{0,\,T}$ 满足：

$$\Gamma_{0,T} = H_T \exp\left(- \int_0^T \sum_{i=1}^p \gamma^i \lambda^i_s ds \right) \prod_{i=1}^p (1 + \gamma^i \mathbb{1}_{\{0 < \tau_i \leq T\}}), \tag{2.69}$$

其中 H 的动态为 $dH_t = H_t(\alpha_t dt + \beta_t dW_t)$，且 $H_0 = 1$。
我们具体指定 $p = 2$。将终端条件定义为：

$$\eta^{(1)} := \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq T, \tau_2 > T\}}. \tag{2.70}$$

令 $Y^{(1)}$ 为与驱动项 g、终止时刻 T 和终端条件 $\eta^{(1)}$ 相关联的倒向随机微分方程解的第一个分量。根据定理 2.14 的显式公式，我们得到：

$$Y^{(1)}_0 = (1 + \gamma^1) \mathbb{E}\left[H_T e^{-\sum_{j=1}^2 \gamma^j \int_0^T \lambda^j_s ds} \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq T, \tau_2 > T\}} \right].$$

在假设 $P(\tau_1 \leq T,\ \tau_2 > T) > 0$ 下，若 $1 + \gamma^1 < 0$，则 $Y_{(1)0} < 0$。然而，$\eta^{(1)} \geq 0$ 几乎必然成立。因此，比较结果不成立。现在我们将终端条件定义为：

$$\eta^{(2)} := \mathbb{1}_{\{\tau_2 \leq T\}}. \tag{2.71}$$

设 $(Y^{(2)})$ 是与驱动项 g、终止时刻 T 和终端条件 $\eta^{(2)}$ 相关的倒向随机微分方程的解。

根据定理 2.14 的显式公式，

$$Y_0 = (1+\gamma^1)(1+\gamma^2)\mathbb{E}\left[H_T e^{-\sum_{j=1}^{2}\gamma^j\int_0^T \lambda_s^j ds}\mathbb{1}_{\{T\geq\tau_2\}}\right], \tag{2.72}$$

其中我们使用了 $\tau_1 < \tau_2$。在假设 $P(\tau_2 \leq T) > 0$ 的条件下，如果 $(1+\gamma^1)(1+\gamma^2) < 0$，则 (2.72) 导出 $Y_0 < 0$。然而， $\eta^{(2)} \geq 0$ 几乎处处成立。因此，比较结果不成立。

读者可以将这一推理推广到 $p > 2$ 的情形，方法是采用基于公式 (2.46) 中各集合的终端条件。

如果 γ^1 和 γ^2 中任一个（或二者）等于 -1，则 (2.72) 给出 $Y_0 = 0$。在假设 $P(\tau_2 \leq T) > 0$ 的条件下，我们有 $P(\eta^{(2)} > 0) > 0$，而 $Y_0 = 0$，因此严格比较结果不成立。

3 多重违约市场中的欧式期权定价

3.1 含有两种可违约风险资产的线性金融市场中的定价

我们考虑一个市场模型，其中主要资产包括价格过程为 B 的无风险储蓄账户、价格过程为 S^0的无违约资产，以及价格过程分别为 S^1 和 S^2的两种资产；它们分别会在时刻 τ^1和 τ^2发生违约或其他信用事件。

更确切地说，我们采用第 2 节的概率框架，其中设定 $p = 2$。这里，时刻 τ_1 和 τ_2 分别表示风险资产S^1和 S^2发生违约（或发生某些其他外部信用事件，前提是这些时刻有序）的时刻。与前文相同， $M_t^1 = N_t^1 - \int_0^t \lambda_s^1 ds$和 $M_t^2 = N_t^2 - \int_0^t \lambda_s^2 ds$。我们考虑以下资产价格动态:

$$\begin{aligned}
&dB_t = B_t r_t dt, \quad B_0 = 1;\\
&dS_t^0 = S_t^0[\mu_t^0 dt + \sigma_t^0 dW_t], \quad S_0^0 > 0;\\
&dS_t^1 = S_{t-}^1[\mu_t^1 dt + \sigma_t^1 dW_t + \beta_t^1 dM_t^1], \quad S_0^1 > 0;\\
&dS_t^2 = S_{t-}^2[\mu_t^2 dt + \sigma_t^2 dW_t + \beta_t^2 dM_t^2], \quad S_0^2 > 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

过程 r 以及过程 μ^i和 σ^i（对于 $i \in \{0, 1、 2\}$）均为可预测的，并且 $\sigma^i > 0$对于 $i \in \{0、 1、2\}$，且 r， μ^i， σ^i和 $(\sigma^i)^{-1}$均有界（对于 $i \in \{0, 1, 2\}$）。我们注意到，并不要求强度过程 λ^i 有界。我们假设 $\beta_t^1 \neq 0$、 $\beta_t^2 \neq 0$和 $\mu_t^0 \neq r_t$。此外，我们假设对于$i \in \{1, 2\}$， $\beta_t^i \geq -1$ 。

注 3.1： 由注 2.12 可知，对于 S^i，其中 $i \in \{1, 2\}$，其显式公式为：对于$t \in [0, T]$,

$$S_t^i = \exp\left(\int_0^t \left(\mu_s^i - \frac{1}{2}(\sigma_s^i)^2 - \beta_s^i\lambda_s^i\right)ds + \int_0^t \sigma_s^i dW_s\right)(1+\beta_{\tau_i}^i \mathbb{1}_{\{t\geq\tau_i\}}), \text{ a.s.} \tag{3.2}$$

如果 $\beta_{\tau_i}^i = -1$，那么第 i 个资产的价格将在 τ_i 跳至零。

我们考虑一位投资者，他在时刻 0 将金额 $x \in \mathbb{R}$ 投资于市场。对于 $i \in \{0,1,2\}$，我们用 ϕ_t^i 表示时刻 $t \in [0,T]$ 资产 S_t^i 中的金额。

若 $\beta_{\tau_i}^i = -1$ 几乎处处成立，则在集合 $\{T \geq t \geq \tau_i\}$ 上，$S_t^i = 0$，且投资者将不再投资于该资产；因此，在集合 $\{T \geq t > \tau_i$ 上，$\phi_t^i = 0$。
在 $p=1$ 且 $\beta^1 = -1$ 的情况下，该模型已在 [3] 和 [7 中得到研究]。过程 $\phi = (\phi^0, \phi^1, \phi^2) \in (\mathbf{H}_T^2, \mathbf{H}^{\lambda^1,T}, \mathbf{H}^{\lambda^2,T})$ 称为风险资产策略（或简称策略）。现在令 $(C_t)_{t\in[0,T]}$ 为 $\mathbf{A}_T^2$ 中的有限变差可选过程，它表示从投资组合中提取的累计现金。与初始值 x、交易策略 ϕ 和“提取”过程 C 相对应的投资组合在时刻 t 的价值记为 $V_t^{x,\phi,C}$。若 ϕ 是风险资产 S^0, S^1, S^2 中的策略，则投资于无风险银行账户的金额为：$V_t^{x,\phi,C} - \sum_{i=0}^2 \phi_t^i$。

财富过程 $V^{x,\phi,C} = V$ 的自融资条件导出以下动态：

$$
\begin{aligned}
dV_t &= \left(\frac{V_t - \sum_{i=0}^2 \phi_t^i}{B_t^0}\right) dB_t^0 + \sum_{i=0}^2 \frac{\phi_t^i dS_t^i}{S_{t-}^i} - dC_t \\
&= (V_t - \phi_t^0 - \phi_t^1 - \phi_t^2) r_t dt + \phi_t^0(\mu_t^0 dt + \sigma_t^0 dW_t) \\
&\quad + \phi_t^1(\mu_t^1 dt + \sigma_t^1 dW_t + \beta_t^1 dM_t) + \phi_t^2(\mu_t^2 dt + \sigma_t^2 dW_t + \beta_t^2 dM_t^2) - dC_t \\
&= (V_t r_t + \phi_t^0(\mu_t^0 - r_t) + \phi_t^1(\mu_t^1 - r_t) + \phi_t^2(\mu_t^2 - r_t))dt \\
&\quad + (\phi_t^0\sigma_t^0 + \phi_t^1\sigma_t^1 + \phi_t^2\sigma_t^2)dW_t + \phi_t^1\beta_t^1 dM_t^1 + \phi_t^2\beta_t^2 dM_t^2 - dC_t \\
&= (V_t r_t + \phi_t'\sigma_t\Theta_t^0 + \phi_t^1\Theta_t^1\beta_t^1\lambda_t^1 + \phi_t^2\Theta_t^2\beta_t^2\lambda_t^2)dt - dC_t + \phi_t'\sigma_t dW_t \\
&\quad + \phi_t^1\beta_t^1 dM_t^1 + \phi_t^2\beta_t^2 dM_t^2,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

其中 $\phi_t'\sigma_t = \sum_{i=0}^2 \phi_t^i\sigma_t^i$，且

$$
\Theta_t^0 = \frac{\mu_t^0 - r_t}{\sigma_t^0}, \quad \Theta_t^1 = \frac{\mu_t^1 - r_t - \sigma_t^1\Theta_t^0}{\beta_t^1\lambda_t^1}\mathbb{1}_{\{\beta_t^1\lambda_t^1 \neq 0\}}, \quad \Theta_t^2 = \frac{\mu_t^2 - r_t - \sigma_t^2\Theta_t^0}{\beta_t^2\lambda_t^2}\mathbb{1}_{\{\beta_t^2\lambda_t^2 \neq 0\}}.
$$

假设 3.1.1： 我们假设过程 Θ^0、$\Theta^1\sqrt{\lambda^1}$ 和 $\Theta^2\sqrt{\lambda^2}$ 有界。

令 $T > 0$。令 $\eta \in L^2(\mathcal{G}_T)$，并令 D 为 $\mathcal{A}_T^2$ 中的有限变差可选过程。我们考虑一种终止时刻为 T 的欧式期权，该期权产生终端支付 η 以及中间现金流，通常称为“股息”（但不一定严格为正，例如参见 [5]）。对于每个 $t \in [0,T]$，D_t 表示该期权在 $[0,t]$ 之间产生的累积中间现金流。由于“股息”不一定为正，过程 D 不一定是非递减的。

我们从这样一位代理人的角度出发：他希望在时刻 $t=0$ 卖出该期权。他们希望利用出售所得构建一个（自融资）投资组合，以便在时刻 T 向合约买方支付金额 η，并支付中间的“股息” D。

令 $Z_t \coloneqq \phi_t' \sigma_t$ 和 $K_t^i = \phi_t^i \beta_t^i$，对于 $i \in \{1,2\}$，并使用 (3.3)（其中 $C = D$），可得过程 (V, Z, K^1, K^2) 满足以下动态，

$$-dV_t = -(r_t V_t + \Theta_t^0 Z_t + \Theta_t^1 K_t^1 \lambda_t^1 + \Theta_t^2 K_t^2 \lambda_t^2)dt + dD_t - Z_t dW_t - K_t^1 dM_t^1 - K_t^2 dM_t^2. \tag{3.4}$$

对于每个 $(\omega, t, y, z, k^1, k^2)$，我们定义：

$$g(\omega, t, y, z, k^1, k^2) \coloneqq -r_t(\omega)y - \Theta_t^0(\omega)z - \Theta_t^1(\omega)k^1\lambda_t^1(\omega) - \Theta_t^2(\omega)k^2\lambda_t^2(\omega). \tag{3.5}$$

根据前述假设和假设 3.1.1，我们有 r、Θ^0 和 $\Theta^i\sqrt{\lambda^i}$（对于 $i \in \{1, 2\}$）均为可预测且有界的。因此，驱动项 g 是一个 $\lambda^{(p)}$-线性驱动项（参见公式 (2.21)）。根据命题 2.9，存在一个与终止时刻 T、广义 $\lambda^{(p)}$-线性驱动项 $g(t, y, z, k^1, k^2)dt + dD_t$ 以及终端条件 $\eta \in L^2(\mathsf{G}_T)$ 相关联的倒向随机微分方程的唯一解 $(X, Z, K^1, K^2) \in \mathsf{S}^2 \times \mathrm{H}^2 \times \mathrm{H}^2_{\lambda^1} \times \mathrm{H}^2_{\lambda^2}$。

倒向随机微分方程 (X, Z, K^1, K^2) 的解给出了一个复制投资组合，其中卖方根据以下变量替换选择风险资产策略 ϕ：

$$\mathbf{\Phi} : \mathcal{H}^2_T \times \mathcal{H}^2_{\lambda^1,T} \times \mathcal{H}^2_{\lambda^2,T} \to \mathcal{H}^2_T \times \mathcal{H}^2_{\lambda^1,T} \times \mathcal{H}^2_{\lambda^2,T}; (Z, K^1, K^2) \mapsto \mathbf{\Phi}(Z, K^1, K^2) \coloneqq \phi, \tag{3.6}$$

其中 $\phi \coloneqq (\phi^0, \phi^1, \phi^2)$，而投资于第 i 个资产的金额 ϕ^i（其中 $i \in \{0, 1, 2\}$）为，

$$\phi_t^0 = \frac{Z_t - \frac{K_t^1\sigma_t^1}{\beta_t^1} - \frac{K_t^2\sigma_t^2}{\beta_t^2}}{\sigma_t^0}, \quad \phi_t^1 = \frac{K_t^1}{\beta_t^1}, \quad \phi_t^2 = \frac{K_t^2}{\beta_t^2}. \tag{3.7}$$

这里，过程 D 对应于卖方从其套期保值（复制）投资组合中“提取”的累计现金。上述投资组合是欧式或有索取权卖方的复制投资组合，因为卖方能够将出售所得全部再投资于市场，并在 T 的期权到期日支付 η，以及支付该期权期间产生的“股息”。

金额 X_0（即倒向随机微分方程在时刻零的第一个分量）是期权在时刻 $t = 0$ 的对冲价格（或复制定价），记作 $X_{0,\,T}(\eta,\ D)$。对于 $t \in [0, T]$，对冲价格（或复制定价）X_t 记作 $X_{t,\,T}(\eta,\ D)$。

3.1.1 当 D 可预测时的情形

设累计“股息”过程 D 是 A_p^2 中的一个（**可预测**）过程。由于 (3.5) 中的驱动项是 $\lambda^{(p)}$-**线性**的，根据定理 2.14，我们可以得到 $X_{t,T}(\eta, D)$ 的一个显式公式。对于每个 $t \in [0, T]$，伴随过程 $(\Gamma_{t,s})_{s\in[t,T]}$ 是下列随机微分方程的唯一解，

$$d\Gamma_{t,s} = \Gamma_{t,s-}(-r_s ds - \Theta_s^0 dW_s - \Theta_s^1 dM_s^1 - \Theta_s^2 dM_s^2), \quad \Gamma_{t,t} = 1.$$

根据注 2.14，$(\Gamma_{t,\,s})_{s\in[t,T]}$ 可写为，

$$\begin{aligned}\Gamma_{t,s} &= \exp\left(-\int_t^s r_u du\right)\exp\left(-\int_t^s \Theta_u^0 dW_s - \frac{1}{2}\int_t^s (\Theta_u^0)^2 - \Theta_u^1\lambda_u^1 - \Theta_u^2\lambda_u^2 du\right) \\ &\quad \times (1 - \Theta_{\tau_1}^1 \mathbb{1}_{\{t<\tau_1\le s\}})(1 - \Theta_{\tau_2}^2 \mathbb{1}_{\{t<\tau_2\le s\}}) \\ &= e^{-\int_t^s r_u du}\zeta_{t,s},\end{aligned}$$

其中，过程 $(\zeta_{t,\ s})_{s\in[t,T]}$ 满足以下动态，

$$d\zeta_{t,s} = \zeta_{t,s-}(-\Theta_s^0 dW_s - \Theta_s^1 dM_s^1 - \Theta_s^2 dM_s^2), \quad \zeta_{t,t} = 1. \tag{3.8}$$

因此，根据显式公式（参见定理 2.14，其中 D 是可预测的），

$$X_{t,T}(\eta, D) = X_t = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\zeta_{t,T}\eta + \int_t^T e^{-\int_t^s r_u du}\zeta_{t,s-}dD_s \middle| \mathcal{G}_t\right]. \tag{3.9}$$

3.1.2 D 为可选的情形

现在考虑 D 不一定可预测、而仅为可选的情形；更确切地说， $D \in \mathcal{A}^2$。根据命题 2.6，存在唯一过程$D' \in \mathcal{A}_p^2$ 以及唯一过程 $\psi^1 \in \mathcal{H}^2_{\lambda^1}, \psi^2 \in \mathcal{H}^2_{\lambda^2}$，使得对所有 $t \in [0,T]$,

$$D_t = D'_t + \int_0^t \sum_{i=1}^2 \psi_s^i dN_s^i, \quad \text{a.s.} \tag{3.10}$$

从金融角度看，随机变量 $\psi^i_{\tau_i}$ 表示或有债权（期权）在第 i个违约时刻 τ_i 产生的现金流（另见[2] 第一部分，其中讨论了现金流取决于违约时刻的或有债权）。根据定理 2.16，时刻 t 的对冲价格 $X_{t,T}(\eta, D)$等于：

$$\begin{aligned} X_{t,T}(\eta, D) = \mathbb{E}\Bigg[&e^{-\int_t^T r_s ds}\zeta_{t,T}\eta + \int_t^T e^{-\int_t^s r_u du}\zeta_{t,s-}dD'_s \\ &+ e^{-\int_t^{\tau_1} r_s ds}\zeta_{t,\tau_1}\psi^1_{\tau_1}\mathbb{1}_{\{t<\tau_1\le T\}} + e^{-\int_t^{\tau_2} r_s ds}\zeta_{t,\tau_2}\psi^2_{\tau_2}\mathbb{1}_{\{t<\tau_2\le T\}}\Bigg|\mathcal{G}_t\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.1.3 测度变换

测度变换技巧常用于金融数学中的线性市场模型。在本小节中，我们对“夏普比率” Θ^0、 Θ^1 和 Θ^2作出如下假设。

假设 3.1.2： 我们假设，对于所有 $0 \le t \le$， $\prod_{i=1}^2(1 - \Theta^i_{\tau_i}\mathbb{1}_{\{t<\tau_i\le s\}}) > 0$ $s \le T$ 几乎处处成立。

由注 2.12 和假设 3.1.2 可知，对于所有 $s \in [t,T]$, $\zeta_{t,s} > 0$。由假设 3.1.1 可知， $\int_0^T((\Theta_s^0)^2 + (\Theta_s^1)^2\lambda_s^1 + (\Theta_s^2)^2\lambda_s^2)ds$ 有界；因此，根据命题 2.13，$(\zeta_{t,s})_{s\in[t,T]}$ 是平方可积鞅。令 Q 为一个新的概率测度，它由相对于P 在$\mathcal{G}_T$上的拉东–尼科迪姆导数定义：

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{G}_T} = \zeta_{0,T} = \mathcal{E}\left(-\int_0^{\cdot}\Theta_s^0 dW_s - \int_0^{\cdot}\Theta_s^1 dM_s^1 - \int_0^{\cdot}\Theta_s^2 dM_s^2\right)_T. \tag{3.12}$$

.....的情形 D 是可预测的 在“股息”过程D 是**可预测的**的情形下，我们使用贝叶斯公式对（3.9）中的条件期望进行测度变换（参见例如 [16]中的命题1.7.1.5），得到：

$$X_{t,T}(\eta, D) = X_t = \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\eta + \int_t^T e^{-\int_t^s r_u du}dD_s \middle| \mathcal{G}_t\right] \quad \text{a.s.} \tag{3.13}$$

.....的情形 D **是可选的** 如果“股息”过程 D 是**可选的**，则欧式期权在时刻 t 、概率测度 Q 下的价格可写为：

$$X_{t,T}(\eta, D) = \mathbb{E}^Q \Big[e^{-\int_t^T r_s ds}\eta + \int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} dD'_s + e^{-\int_t^{\tau_1} r_s ds}\psi^1_{\tau_1}\mathbb{1}_{\{t<\tau_1\le T\}} + e^{-\int_t^{\tau_2} r_s ds}\psi^2_{\tau_2}\mathbb{1}_{\{t<\tau_2\le T\}} \Big| \mathcal{G}_t \Big] \quad (3.14)$$

我们注意到，该市场的定价系统是线性的。

3.2 含 p 可违约资产的非线性完备市场中的定价

现在我们假设市场存在不完善之处，并通过财富过程动态中的驱动项非线性来体现。我们考虑存在 p 项可违约资产的情形。

我们引入以下记号来表示主要资产的价格过程：B，S^0，S^1，.....，S^p，其中 B和 S^0分别表示无风险储蓄账户和无违约风险资产的价格过程；对于每个 $i \in \{1, ..., p\}$，S^i表示第 i项可违约资产（或第 i项信用风险资产）的价格过程。所采用的概率框架与第2节开头引入的相同，我们继续沿用相同的假设。 B和 S^0的价格过程仍与（3.1）中的相同。对于每个 $i \in \{1, ..., p\}$，第 i项可违约资产的价格过程为

$$dS^i_t = S^i_{t-}\left[\mu^i_t\, dt + \sigma^i_t\, dW_t + \beta^i_t\, dM^i_t\right], \quad S^i_0 > 0. \quad (3.15)$$

对于每个 $i \in \{1, ..., p\}$，假设过程 μ^i和 σ^i均为可预测的，且满足$\sigma^i > 0$，并且 μ^i、 σ^i和 $(\sigma^i)^{-1}$ 均有界。假设利率过程 r 是可预测且有界的。我们假设，对于每个 $i \in \{1, ..., p\}$，$\beta^i_t \neq 0$。回顾一下，对于每个 $i \in \{1, ..., p\}$，过程 $M^i = N^i - \int_0^{\cdot} \lambda^i_s\, ds$是 $\mathbb{G}$-补偿违约鞅。

我们再次考虑一位投资者，他在时刻 0 将初始金额 $x \in \mathbb{R}$ 投资于该市场。对于 $i \in \{1, ..., p\}$，令 ϕ^i_t表示时刻 $t \in [0,T]$投资于S^i_t的金额。若对于给定的 $i \in \{1, ..., p\}$，有 $\beta^i_{\tau_i} = -1$ a.s.，则在集合 $\{t \ge \tau_i\}$上，第 i项资产的价格变为 0，因此投资者将不再投资于该资产。若 $\beta_{\tau_i} = -1$，则在 $\{t \ge \tau_i\}$上，令 $\phi^i_t = 0$ 。

与线性框架类似，对于给定的风险资产策略，记为$\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^p) \in \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_{\lambda^1} \times \cdots \times \mathcal{H}^2_{\lambda^p}$，给定的现金提取有限变差可选过程 $C \in \mathcal{A}^2_T$，以及给定的初始财富（资本） $x \in \mathbb{R}$，时刻 $t \in [0,T]$的财富过程记为 $V^{x,\ \phi\, C,}_{\ t}$（若无歧义，也可简记为 V_t），满足自融资条件：

$$-dV_t = g(t, V_t, \phi'_t\sigma_t, \phi^1_t\beta^1_t, \ldots, \phi^p_t\beta^p_t)dt - \phi'_t\sigma_t\, dW_t - \sum_{i=1}^p \phi^i_t\beta^i_t\, dM^i_t + dC_t; \quad V_0 = x, \quad (3.16)$$

其中 g 是一个可能非线性的 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项。等价地，令 $Z_t = \phi_t' \sigma_t$，并对每个 $i \in \{1,\ldots,p\}$，取 $K_t^i = \phi_t^i \beta_t^i$，则有

$$-dV_t = g(t, V_t, Z_t, K_t^1, \ldots, K_t^p)dt - Z_t\, dW_t - \sum_{i=1}^{p} K_t^i\, dM_t^i + dC_t; \quad V_0 = x. \quad (3.17)$$

我们考虑一个到期日为 T、终端支付为$\eta \in L^2(\mathcal{G}_T)$，且具有可选“股息”过程 $D \in \mathcal{A}_T^2$的欧式或有索取权。
令$(X^g \cdot {}_T(\eta, D)\ Z^g \cdot {}_T(\eta, D)\ K^g, 1 \cdot {}_T(\eta, D) \ldots, K^g, p \cdot {}_T(\eta, D))$, 或简记为$(X, Z, K^1, \ldots, K^p)$, 表示终止时刻为 T、终端条件为 η、广义驱动项为 $g(t, y, z, k^1, \ldots, k^p)\ dt + dD_t$的倒向随机微分方程（BSDE）的解，即满足以下动态的倒向随机微分方程:

$$-dX_t = g(t, X_t, Z_t, K_t^1, \ldots, K_t^p)dt + dD_t - Z_t\, dW_t - \sum_{i=1}^{p} K_t^i\, dM_t^i, \quad X_T = \eta. \quad (3.18)$$

因此，过程 $X = X^g \cdot {}_T(\eta, D)$与对应于初始财富 $x = X_0$、累计现金提取过程 D以及风险资产策略 $\phi = \mathbf{\Phi}(Z, K^1, \ldots, K^p)$的财富过程一致，其中 $\mathbf{\Phi}$ 是（3.6）的以下推广:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi} : \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_{\lambda^1} \times \cdots \times \mathcal{H}^2_{\lambda^p} &\to \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_{\lambda^1} \times \cdots \times \mathcal{H}^2_{\lambda^p}, \\ (Z, K^1, \ldots, K^p) &\mapsto \mathbf{\Phi}(Z, K^1, \ldots, K^p) \coloneqq \phi, \end{aligned}$$

其中 $\phi \coloneqq (\phi^0,\ \phi^1,\ \ldots\ldots,\ \phi^p)$，投资于第 i 个资产的金额（其中$i \in \{0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ p\}$）为:

$$\phi_t^0 = \frac{Z_t - \frac{K_t^1 \sigma_t^1}{\beta_t^1} - \frac{K_t^2 \sigma_t^2}{\beta_t^2}}{\sigma_t^0}, \quad \phi_t^i = \frac{K_t^i}{\beta_t^i}, \quad \text{for } i \in \{1, \ldots, p\}. \quad (3.19)$$

因此，$X = V^{X_0,\ \phi,\ D}$。

从初始财富 $X_0 = X_0^g \cdot {}_T(\eta,\ D)$ 出发，卖方可以构造一个风险资产策略 ϕ，以支付中间的“股息” D 和最终支付 η。因此，我们称初始财富 X_0 为期权在时刻 $t = 0$ 的对冲价格（或复制价格），并称过程 ϕ 为对冲策略（或复制策略）。

更一般地，考虑到期日 $S \in [0, T]$。对于每个 $S \in [0, T]$以及每个支付-股息对 $(\eta,\ D) \in L^2(\mathcal{G}_S) \times \mathcal{A}_S^2$，过程 $X^g \cdot {}_S(\eta,\ D)$ 称为到期日为 S 、支付-股息对为 (η, D) 的期权的对冲价格。这给出了以下适用于 p-违约非线性市场模型的定价系统:

$$\mathbf{X}^g : (S, \eta, D) \mapsto X^g_{\cdot, S}(\eta, D), \quad (3.20)$$

其通常关于二元组 $(\eta,\ D)$ 是非线性的（因为驱动项 g 通常是非线性的）。

现在给出该定价系统的一些性质（对于单一违约的情形，参见 [7] ；对于无跳跃的情形，参见 [10] ）。

3.2.1 可违约资产情形下非线性定价系统 $\mathbf{X}^g$

- **一致性：** 根据带违约跳跃的倒向随机微分方程的流性质，定价系统 $\mathbf{X}^g$ 是一致的。更准确地说，设 $S\prime\in[0,T]$、$\eta\in L^2(\mathcal{G}_{S\prime})$、$D\in\mathcal{A}^2_{S\prime}$ 以及 $S\in[0,S\prime]$。则与终端支付 η、累积股息过程 D 和到期日 $S\prime$ 相关的欧式或有索取权的对冲价格，与终止时刻为 S、支付为 $X^g_{S,\,S\prime}(\eta,\,D)$ 且股息过程为 $(D_t)_{t\le S}$ 的欧式期权的对冲价格一致，即

$$X^g_{\cdot,S\prime}(\eta,D)=X^g_{\cdot,S}\left(X^g_{S,S\prime}(\eta,D),D\right).$$

  注 3.2：注意，当 $g(t,\,0,\,0,\,\ldots,\,0)=0$ 时，零收益且无股息的欧式期权价格在所有到期日 $S\in[0,T]$ 均为 0，因此 $X^g_{\cdot,S}(0,\,0)=0$。

由于可能存在违约跳跃，非线性定价系统关于收益和股息过程不一定具有单调性。我们引入以下假设（参见比较定理 2.17）。

假设 3.2.1： 我们假设，对于每个 $i\in\{1,\ldots,p\}$，都存在一个映射，

$$\gamma^i:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R};\ (\omega,t,y,z,k^i,\hat{k}^i)\mapsto\gamma_t^{y,z,k^i,\hat{k}^i}(\omega)$$

该映射是 $P\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^4)$-可测的，并且对每个 $(y,z,k^i,\hat{k}^i)\in\mathbb{R}^4$，几乎处处满足 $dP\otimes dt$，

$$\left|\gamma_t^{y,z,k^i,\hat{k}^i}\sqrt{\lambda_t^i}\right|\le C\quad and\quad \gamma_t^{y,z,k^i,\hat{k}^i}\ge-1,\tag{3.21}$$

并且满足

$$g(t,y,z,k^1,\ldots,k^p)-g(t,y,z,\hat{k}^1,\ldots,\hat{k}^p)\ge\sum_{i=1}^p\gamma_t^{y,z,k^i,\hat{k}^i}(k^i-\hat{k}^i)\lambda_t^i.\tag{3.22}$$

现在我们引入以下偏序关系（另见 [7]）。设 $S\in[0,T]$ 给定。对于 $(\eta,\,D)$，$(\hat{\eta},\,\hat{D})\in L^2(\mathcal{G}_S)\times\mathcal{A}^2_S$，我们称 $(\eta,\,D)$ 支配 $(\hat{\eta},\,\hat{D})$，并记作如下关系，

$$(\eta,D)\succ(\hat{\eta},\hat{D})\quad\text{if}\quad\eta\ge\hat{\eta}\text{ a.s. and }D-\hat{D}\text{ is non-decreasing.}$$

命题 3.3： 在假设 *3.2.1* 下，非线性定价系统 $\mathbf{X}^g$ 具有以下性质：

*(a)*单调性： 非线性定价系统 $\mathbf{X}^g$ 关于支付-股息对是非递减的。更准确地说，对于所有到期时点 $S\in[0,T]$、所有支付 η、$\hat{\eta}\in L^2(\mathcal{G}_S)$ 以及所有累积股息过程 D，$\hat{D}\in\mathcal{A}^2_S$，以下蕴含关系成立：

$$If\ (\eta,D)\succ(\hat{\eta},\hat{D}),\ then\ we\ have\ X^g_{t,S}(\eta,D)\ge X^g_{t,S}(\hat{\eta},\hat{D}),\quad t\in[0,S]\ a.s.$$

(b) 凸性： 如果 g 关于向量 $(y, z, k^1, \ldots, k^p)$是凸的，那么非线性定价系统 $\mathbf{X}^g$ 关于支付-股息对(η, D)是凸的，也就是说，对于任意 $\alpha \in [0,1]$, $S \in [0,T]$, η、$\hat{\eta} \in L^2(\mathcal{G}_S)$和 D、$\hat{D} \in \mathcal{A}_S^2$，对于所有 $t \in [0,S]$，有：

$$X_{t,S}^g(\alpha\eta + (1-\alpha)\hat{\eta}, \alpha D + (1-\alpha)\hat{D}) \leq \alpha X_{t,S}^g(\eta, D) + (1-\alpha)X_{t,S}^g(\hat{\eta}, \hat{D}) \quad a.s.$$

(c) 非负性： 当 $g(t, 0, 0, 0, \ldots, 0) = 0$时，非线性定价系统$\mathbf{X}^g$是非负的，也就是说，对所有 $S \in [0,T]$、所有非负终端支付 $\eta \in L^2(\mathcal{G}_S)$ 以及所有非递减可选股息过程$D \in \mathcal{A}_S^2$，对所有 $t \in [0,S]$，我们都有 $X_{t,S}^g(\eta, D) \geq 0$，几乎必然成立。

(d) 无套利：我们假设附加条件：对每个 $i \in \{1, \ldots, p\}$，$\gamma_t^{y, z, k^i} > -1$，$dP \otimes dt$-几乎处处成立。于是，非线性定价系统 $\mathbf{X}^g$ 满足无套利性质。也就是说，对所有到期日 $S \in [0,T]$、所有终端支付 η、$\hat{\eta} \in L^2(\mathcal{G}_S)$ 以及所有可选累积股息过程 D、$\hat{D} \in \mathcal{A}_S^2$，以下结论成立：若 $(\eta, D) \succ (\hat{\eta}, \hat{D})$，且在时刻 $t_0 \in [0,S]$ 我们有 $X_{t_0,S}^g(\eta, D) = X_{t_0,S}^g(\hat{\eta}, \hat{D})$ 几乎必然成立，则 $\eta = \hat{\eta}$ 几乎必然成立，并且 $(D_t - \hat{D}_t)_{t_0 \leq t \leq S}$ 为常数。

证明。 对于非线性定价系统$\mathbf{X}^g$ 的**单调性**，我们使用定理 2.17 中的比较结果（该结果在假设 3.2.1 下适用），并在该定理中令 $g = \hat{g}$。

对于非线性定价系统$\mathbf{X}^g$的**凸性**，我们再次使用定理 2.17 中的比较结果。证明遵循标准论证。
由单调性可直接推出**非负性**。若 $\hat{\eta} = 0$, $\hat{D} = 0$, $\eta \geq 0$ a.s.，且 D 非递减，则根据偏序关系 $\succ$ 的定义，我们有 $(\eta, D) \succ (\hat{\eta}, \hat{D})$。根据定理 2.17 中的比较结果和注 3.2，我们有 $X_{t,S}^g(\eta, D) \geq X_{t,S}^g(\hat{\eta}, \hat{D}) = X_{t,S}^g(0,0) = 0$。

无套利性质的**证明**直接来自定理 2.17 的严格比较结果，其中我们设定 $\hat{g} = g$。■

3.2.2 $g(\cdot, D)$-条件评价 $\mathcal{E}^{g, D}$：针对 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项

设 g 是一个 $\lambda^{(p)}$-可容许驱动项，并设 D 是给定的、属于 $\mathcal{A}_T^2$ 的可选股息过程。对于每个 $S \in [0,T]$ 以及每个 $\eta \in L^2(\mathcal{G}_S)$，我们定义 η 的（g, D）-条件评价如下：

$$\mathcal{E}_{t,S}^{g,D}(\eta) := X_{t,S}^g(\eta, D), \quad 0 \leq t \leq S.$$

（g, D）-条件评价 $\mathcal{E}^{g, D \cdot S}(\eta)$ 是与终止时刻 S、广义驱动项 $g(t, y, z, k^1, \ldots, k^p)dt + dD_t$ 和终端条件 η 相关联的倒向随机微分方程之解的第一分量，其中我们已在空间 $\mathcal{A}_T^2$ 中固定了 D。

注 3.4： 在 $D = 0$ 的情况下，我们的（g, D）条件评价可化为 g 个违约时刻情形下的条件评价（记为$\mathcal{E}^g$）。此外，若 $g = 0$，则（g, D）条件评价可化为 P 下的标准条件期望，即 $\mathcal{E}^{0, 0}_{t, S} = \mathbb{E}^P[\eta | \mathcal{G}_t]$，其中 $t \in [0,S]$。

注 3.5：注意，事实上，我们可以通过如下设定，在整个区间 $[0,T]$ 上定义（g, D）条件评价 $\mathcal{E}^{g,\ D\cdot S}(\eta)$,

$$\mathcal{E}^{g,D}_{t,S}(\eta) := \mathcal{E}^{g^S,D^S}_{t,T}(\eta) \text{ for } t \geq S,$$

其中，我们设 $g^S(t,\ \cdot) := g(t,\ \cdot)\mathbb{1}_{t\leq S}$ 以及 $D^S_t := D_{t\wedge S}$。

现在，令 $\mathcal{T}_0$ 为所有停时的集合。对于每个终端停时 $\tau \in \mathcal{T}_0$ 以及每个 $\eta \in L^2(\mathcal{G}_\tau)$, 我们将 $(g,\ D)$-条件评价的定义扩展为与终止时刻 T、$\lambda^{(p)}$-可容许驱动项 $g^\tau(t,\ \cdot) := g(t,\ \cdot)\mathbb{1}_{t\leq\tau}$及可选过程 $D^\tau_t := D_{t\wedge\tau}$相关联的倒向随机微分方程解的第一分量。

非线性 $(g,\ D)$-评价的一些性质如下（单次违约跳跃情形参见 [7] ）：

- **一致性：** 令 $\tau,\ \tau'\in\mathcal{T}_0$满足 $\tau \overset{D}{\leq} \tau'$几乎处处成立，并令 $\eta \in L^2(\mathcal{G}_{\tau'})$。那么，$\mathcal{E}^{g,\ t\tau,\ \tau'}(\eta) \overset{D}{=} \mathcal{E}^{g,\ t\tau,\ \tau}(\mathcal{E}^{g,\ \tau\tau,\ \tau'}(\eta))$ 几乎处处成立。
- **广义零一律：** 设 $\tau\in\mathcal{T}_0$，令 $\eta \in L^2(\mathcal{G}_\tau)$。对于 $t \in [0,T]$ 以及 $A \in\mathcal{F}_t$，我们有，

$$\mathcal{E}^{g^A,D^A}_{t,\tau}(\mathbb{1}_A\eta) = \mathbb{1}_A\mathcal{E}^{g,D}_{t,\tau}(\eta) \text{ a.s.},$$

  其中 $g^A(s,\ \cdot) := g(s,\ \cdot)\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{(t,T]}(s)$ 且 $D^A_s := (D_s - D_t)\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{s\geq t}$. 在 $D = 0$ 的情形下，这一性质已在 [13] 中得到证明（针对布朗–泊松滤过的情形）。

- **单调性：** 根据比较定理（定理 2.17），在假设 3.2.1 下，$(g,\ D)$-条件评价 $\mathcal{E}^{g,\ D}(\cdot)$ 关于终端支付是单调的。

- **凸性：** 在假设 3.2.1 下，若进一步假设 g 关于向量 $(y,\ z,\ k^1,\ \ldots,\ k^p)$ 是凸的，则 $\mathcal{E}^{g,\ D}(\cdot)$ 关于终端支付是凸的。

- **无套利性质：** 在假设 3.2.1 下，若进一步假设对每个 $i \in \{1,\ldots,p\}$，$\gamma^{y,\ z\ k^i\ k^i}_t > -1$, $dP\otimes dt$-a.e., 则根据严格比较定理（定理 2.17 (ii)），$\mathcal{E}^{g,D}$ 具有无套利性质。

现在我们给出两个例子。

3.3 示例：影响第 i 次违约概率的大型卖方

我们采用与小节 3.2 相同的概率框架。考虑一份到期日为 $T > 0$、终端支付为 $\eta \in L^2(\mathcal{G}_T)$，且可选股息过程为 $D \in \mathcal{A}^2_T$ 的欧式期权。我们考虑该欧式期权的卖方是大型交易者的情形。交易者的对冲策略（及其对应的财富过程）可能会影响资产的违约概率。在此例中，我们假设大型卖方仅影响第 i 个违约概率（其中 i 是固定索引）。我们还假设第 i 个违约强度有界。大型卖方在其市场模型中会考虑这种反馈效应。

令 i 为（整个子节中）**{固定** 索引**}**$\{1,\dots,p\}$ 中的一个固定索引。给定一族由风险资产策略 ϕ 和（自融资）财富过程 V 参数化的概率测度。更确切地说，令 $\phi \in \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_{\lambda^1} \times \cdots \times \mathcal{H}^2_{\lambda^p}$，并令 $V \in \mathcal{S}^2$。令 $Q^{V,\phi,i}$ 为由拉东-尼科迪姆密度过程（相对于 P）定义的概率测度：

$$\left.\frac{dQ^{V,\phi,i}}{dP}\right|_{\mathcal{G}_t} = L_t^{V,\phi,i}, \tag{3.23}$$

其中 $L^{V,\phi,i}$ 是该随机微分方程的解，

$$dL_t^{V,\phi,i} = L_{t-}^{V,\phi,i}\gamma^i(t, V_{t-}, \phi_t)dM_t^i; \quad L_0^{V,\phi,i} = 1. \tag{3.24}$$

我们对函数 γ^i作出以下假设。

假设 *3.5.1*：函数 $\gamma^i : (\omega, t, y, \phi^0, \phi^1, \dots, \phi^p) \mapsto \gamma^i(\omega, t, y, \phi^0, \phi^1, \dots, \phi^p)$ 是定义在 $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^{p+2}$ 上的 $P \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+2})$-可测函数，且有界，并且映射 $y \mapsto \gamma^i(\omega, t, y, \phi^0, \phi^1, \dots, \phi^p)/\phi^i$ 一致利普希茨。此外，我们假设 $\gamma^i(t,\cdot) > -1$, $dt \otimes dP$- 几乎处处成立。

在金融背景下，我们用函数 γ^i 表示卖方策略对第 i个资产违约强度的影响，其中 ϕ 是卖方的风险资产策略， V是其投资组合的价值。

根据假设 3.5.1、注 2.12 和命题 2.13，过程 $L^{V,\phi,i}$ 为正，且属于$\mathcal{S}^2$。

利用吉尔萨诺夫定理（以及我们对 λ_i 和 γ^i的假设），下文中的过程 $(W^{V,\phi,i}_t)$ 是一个 $Q^{V,\phi,i}$- 布朗运动，而过程 $(M^{V,\phi,i}_t)$ 是一个 $Q^{V,\phi,i}$- 鞅，其中

$$W_t^{V,\phi,i} := W_t - \int_0^t \frac{d\langle W, L^{V,\phi,i}\rangle_s}{L_{s-}^{V,\phi,i}} = W_t; \tag{3.25}$$

$$M_t^{V,\phi,i} := M_t^i - \int_0^t \frac{d\langle M^i, L^{V,\phi,i}\rangle_s}{L_{s-}^{V,\phi,i}} = M_t^i - \int_0^t \gamma^i(s, V_{s-}, \phi_s)\lambda_s^i ds \tag{3.26}$$

因此，在 $Q^{V,\phi,i}$ 下，第 i 个 $\mathbb{G}$-违约强度过程等于 $\lambda_t^i(1+\gamma^i(t, V_{t-}, \phi_t))$，因为我们可以将 (3.26) 改写为：

$$M_t^{V,\phi,i} := M_t^i - \int_0^t \gamma^i(s, V_-, \phi_s)\lambda_s^i ds = N_t^i - \int_0^t \lambda_s^i(1+\gamma^i(s, V_{s-}, \phi_s))ds.$$

注 3.6：对于 $j \neq i$ 的情形（其中 $j \in \{1, \dots, p\}$），由吉尔萨诺夫定理可知， $M^{V,\phi,j}_t := M_t^j$是一个 $Q^{V,\phi,i}$-鞅。对于所有满足 $j \neq i$ 的 $j \in \{1, \dots, p\}$，这是因为 $\langle M^j, M^i\rangle_s = 0$（因此，对于 ，）。

大型卖方随后考虑以下定价模型，该模型将其对市场的影响纳入考量。对于固定的财富/风险资产策略对 $(V, \phi) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_{\lambda^1} \times \cdots \times \mathcal{H}^2_{\lambda^p}$，其动态如下：

在概率 $Q^{V,\phi,i}$下， $p+1$ 风险资产的

$$\begin{aligned}
dS_t^0 &= S_t^0[\mu_t^0 dt + \sigma_t^0 dW_t],\\
dS_t^j &= S_{t-}^j[\mu_t^j dt + \sigma_t^j dW_t + \beta_t^j dM_t^j], \quad j \neq i,\ j \in \{1,\dots,p\}\\
dS_t^i &= S_{t-}^i[\mu_t^i dt + \sigma_t^i dW_t + \beta_t^i dM_t^{V,\phi,i}].
\end{aligned}$$

与初始财富 $x \in \mathbb{R}$、风险资产策略 ϕ以及可选累积提取过程（卖方将选择使其等于期权的可选股息过程 D）相对应的卖方投资组合价值过程 $(V_t)^{t\in[0,T]}$ 满足以下动态方程,

$$\begin{aligned}
-dV_t = -\left(r_t V_t + \phi_t'\sigma_t\Theta_t^0 + \sum_{j=1}^p \phi_t^j\beta_t^j\Theta_t^j\lambda_t^j\right)dt + dD_t - \phi_t'\sigma_t dW_t\\
- \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^p \phi_t^j\beta_t^j dM_t^j - \phi_t^i\beta_t^i dM_t^{V,\phi,i}, \quad V_0 = x, \quad (3.27)
\end{aligned}$$

其中 $\phi_t'\sigma_t = \sum_{j=0}^p \phi_t^j\sigma_t^j$， 并且,

$$\Theta_t^0 = \frac{\mu_t^0 - r_t}{\sigma_t^0}, \quad \Theta_t^j = \frac{\mu_t^j - r_t - \sigma_t^j\Theta_t^0}{\beta_t^j\lambda_t^j}\mathbb{1}_{\{\beta_t^j\lambda_t^j\neq 0\}},\ \text{for } j \in \{1,\dots,p\}.$$

利用 (3.26) 中 $M_t^{V,\phi i}$ 的表达式，我们得到,

$$\begin{aligned}
-dV_t = -\left(r_t V_t + \phi_t'\sigma_t\Theta_t^0 + \sum_{j=1}^p \phi_t^j\beta_t^j\Theta_t^j\lambda_t^j + \gamma^i(t,V_{t-},\phi_t)\lambda_t^i\phi_t^i\beta_t^i\right)dt + dD_t\\
- \phi_t'\sigma_t dW_t - \sum_{j=1}^p \phi_t^j\beta_t^j dM_t^j, \quad V_0 = x. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

根据关于 γ^i 的假设 3.5.1，对于给定的风险资产策略 ϕ，存在唯一过程 $V^{x,\phi}$，满足初始条件为 $V_0^{x,\phi} = x$ 的前向随机微分方程 (3.28)，其中 x 是投资者的初始财富。

我们设定 $Z_t := \phi_t'\sigma_t$，并且对每个 $j \in \{1,\dots,p\}$，令 $K_t^j := \beta_t^j\phi_t^j$。(3.28) 的动态可改写为,

$$-dV_t = g(t,V_t,Z_t,K_t^1,\dots,K_t^p)dt + dD_t - Z_t dW_t - \sum_{j=1}^p K_t^j dM_t^j, \quad V_0 = x, \quad (3.29)$$

其中函数 g 定义为:

$$\begin{aligned}
g(t,y,z,k^1,\dots,k^p) := -r_t y - \Theta_t^0 z - \sum_{j=1}^p \Theta_t^j\lambda_t^j k^j\\
- \gamma^i\Big(t,y,\frac{z - \sum_{j=1}^p \frac{k^j\sigma_t^j}{\beta_t^j}}{\sigma_t^0}, \frac{k^1}{\beta_t^1},\dots,\frac{k^p}{\beta_t^p}\Big)\lambda_t^i k^i.
\end{aligned}$$

若我们假设存在 $C > 0$，使得 g 满足（2.3），那么 g 是一个$\lambda^{(p)}$-可容许驱动项（定义 2.2）。

因此，对于在时刻 T 具有收益 η 且中间可选过程为D的期权，我们得到小节 3.2.1 中定价系统 $\mathbf{X}^g(\eta,\ D)$ 的一个特例，其中 g 是上述非线性驱动项。根据小节 3.2，卖方价格过程等于 X，其中 X 是以下倒向随机微分方程的解（X，Z，K^1，…，K^p）的第一分量，

$$-dX_t = g(t, X_t, Z_t, K_t^1, \ldots, K_t^p)dt + dD_t - Z_t dW_t - \sum_{j=1}^{p} K_t^j dM_t^j, \quad X_T = \eta. \tag{3.30}$$

此外，卖方对冲策略 ϕ 由变量替换公式得到，

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}:\ & H_T^2 \times H^2_{\lambda^1,\ T} \times \cdots \times H^2_{\lambda^p,\ T} \to H_T^2 \times H^2_{\lambda^1,\ T} \times \cdots \times H^2_{\lambda^p,\ T}, \\ & (Z, K^1, \ldots, K^p) \mapsto \mathbf{\Phi}(Z, K^1, \ldots, K^p) \coloneqq \phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^p), \end{aligned} \tag{3.31}$$

其中

$$\phi_t^0 = \frac{Z_t^0 - \sum_{j=1}^p \frac{K_t^j \sigma_t^j}{\beta_t^j}}{\sigma_t^0}; \quad \phi_t^j = \frac{K_t^j}{\beta_t^j} \text{ for all } j \in \{1, \ldots, p\}.$$

3.4 示例：影响所有 p违约概率的大型卖方

在本例中，我们假设大型卖方会影响所有 p 违约概率。我们还假设，对于每个 $i \in \{1,\ \ldots,\ p\}$，第 i 个违约强度都是有界的。

令$\mathcal{Q}^{V,\ \phi}$ 为由拉东-尼科迪姆密度过程（相对于 P）定义的概率测度：

$$\left.\frac{d\mathcal{Q}^{V,\phi}}{dP}\right|_{\mathcal{G}_t} = \mathscr{L}_t^{V,\phi}, \tag{3.32}$$

其中，$\mathscr{L}^{V,\ \phi}$ 是以下随机微分方程的解：

$$d\mathscr{L}_t^{V,\phi} = \mathscr{L}_{t-}^{V,\phi}\left(\sum_{i=1}^{p} \gamma^i(t, V_{t-}, \phi_t) dM_t^i\right); \quad \mathscr{L}_0^{V,\phi} = 1. \tag{3.33}$$

假设 3.6.1： 对于每个 $i \in \{1,\ \ldots,\ p\}$，函数 γ^i 满足假设 *3.5.1*。

根据假设 3.6.1、注 2.12 和命题 2.13，过程 $\mathscr{L}^{V,\ \phi}$ 为正，并且属于空间$\mathcal{S}^2$。

根据吉尔萨诺夫定理（以及我们的假设），此处的过程 $(\mathscr{W}^{V,\ \phi}_t)$ 以下记为 $\mathsf{a}\mathcal{Q}^{V,\phi}$-布朗运动；并且，对于每个 $i \in \{1, \ldots, p\}$，过程 $(\mathscr{M}^{V,\ \phi\, i,}_{t})$ 是一个$\mathcal{Q}^{V,\phi}$-鞅，其中

$$\mathscr{W}_t^{V,\phi} \coloneqq W_t - \int_0^t \frac{d\langle W, \mathscr{L}^{V,\phi}\rangle_s}{\mathscr{L}_{s-}^{V,\phi}} = W_t, \text{ and,} \tag{3.34}$$

$$\mathscr{M}_t^{V,\phi,i} := M_t^i - \int_0^t \sum_{j=1}^{p} \gamma^j(s, V_{s-}, \phi_s) d\langle M^j, M^i \rangle_s = M_t^i - \int_0^t \gamma^i(s, V_{s-}, \phi_s) \lambda_s^i ds. \tag{3.35}$$

对于 (3.35) 中的最终等式，我们用到了：对所有 $i, j \in \{1, \ldots, p\}$， $P(\tau_i = \tau_j) = 0$，使得 $i \neq j$。

因此，在测度 $\mathcal{Q}^{V,\phi}$ 下，对于每个 $i \in \{1, \ldots, p\}$，第 i 个违约强度过程等于 $\lambda_t^i(1 + \gamma^i(t, V_{t-}, \phi_t))$，因为我们可以将（3.35）重写为：

$$\mathscr{M}_t^{V,\phi,i} := M_t^i - \int_0^t \gamma^i(s, V_{s-}, \phi_s) \lambda_s^i ds = N_t^i - \int_0^t \lambda_s^i (1 + \gamma^i(s, V_{s-}, \phi_s)) ds.$$

对于给定的财富/风险资产策略对 $(V, \phi) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_{\lambda^1} \times \cdots \times \mathcal{H}^2_{\lambda^p}$， $p+1$ 风险资产在测度 $\mathcal{Q}^{V,\phi}$ 下具有如下动态：

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= S_t^0[\mu_t^0 dt + \sigma_t^0 dW_t], \\ dS_t^i &= S_{t-}^i[\mu_t^i dt + \sigma_t^i dW_t + \beta_t^i d\mathscr{M}_t^{V,\phi,i}], \quad i \in \{1, \ldots, p\}. \end{aligned}$$

与初始财富 $x \in \mathbb{R}$、风险资产策略 ϕ 以及累积提取可选过程相关的卖方投资组合的价值过程（V_t）$_{t\in[0,T]}$（其中卖方选择该累积提取可选过程，使其等于该期权的可选股息过程 D）满足以下关系：

$$\begin{aligned} -dV_t = -\left(r_t V_t + \phi_t' \sigma_t \Theta_t^0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_t^i \beta_t^i \Theta_t^i \lambda_t^i \right) dt + dD_t \\ - \phi_t' \sigma_t dW_t - \sum_{i=1}^{p} \phi_t^i \beta_t^i d\mathscr{M}_t^{V,\phi,i}, \quad V_0 = x, \end{aligned} \tag{3.36}$$

其中，我们有 $\phi_t' \sigma_t := \sum_{i=0}^{p} \phi_t^i \sigma_t^i$ 并且：

$$\Theta_t^0 = \frac{\mu_t^0 - r_t}{\sigma_t^0}, \quad \Theta_t^i = \frac{\mu_t^i - r_t - \sigma_t^i \Theta_t^0}{\beta_t^i \lambda_t^i} \mathbb{1}_{\{\beta_t^i \lambda_t^i \neq 0\}}, \text{ for } i \in \{1, \ldots, p\}.$$

我们利用 (3.35) 中 $\mathscr{M}^{V,\phi,i}_t$ 的表达式，得到：

$$\begin{aligned} -dV_t = -\left(r_t V_t + \phi_t' \sigma_t \Theta_t^0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_t^i \beta_t^i \Theta_t^i \lambda_t^i + \sum_{i=1}^{p} \gamma^i(t, V_{t-}, \phi_t) \lambda_t^i \phi_t^i \beta_t^i \right) dt + dD_t \\ - \phi_t' \sigma_t dW_t - \sum_{i=1}^{p} \phi_t^i \beta_t^i dM_t^i, \quad V_0 = x. \end{aligned} \tag{3.37}$$

根据假设 3.6.1，对于给定的策略 ϕ，存在唯一过程 $V^{x,\phi}$ 满足（3.37），其初始条件为 $V_0^{x,\phi} = x$，其中 x 是交易者的初始财富。利用（3.37），并令 $Z_t := \phi_t' \sigma_t$ 且 $K_t^i := \beta_t^i \phi_t^i$，对于每个 $i \in \{1, \ldots, p\}$，可得：

$$-dV_t = g(t, V_t, Z_t, K_t^1, \ldots, K_t^p) dt + dD_t - Z_t dW_t - \sum_{i=1}^{p} K_t^i dM_t^i, \quad V_0 = x, \tag{3.38}$$

其中，函数 g 定义为：

$$g(t,y,z,k^1,\dots,k^p) \coloneqq -r_t y - \Theta_t^0 z - \sum_{i=1}^{p} \Theta_t^i \lambda_t^i k^i \\ - \sum_{i=1}^{p} \gamma^i\Big(t, y, \frac{z - \sum_{j=1}^{p} \frac{k^j \sigma_t^j}{\beta_t^j}}{\sigma_t^0}, \frac{k^1}{\beta_t^1}, \dots, \frac{k^p}{\beta_t^p}\Big) \lambda_t^i k^i.$$

若存在 $C > 0$ 使得函数 g 满足条件 (2.3)，则我们得到小节 3.2.1 中定价系统 $\mathbf{X}^g$ 的另一个例子，其中非线性驱动项 g 就是上述驱动项。

附录A 一些技术引理

引理 A.1： 设 h 是一个非递减的可选右连续左极限过程，且满足 $h_0 = 0$ 和 $\mathbb{E}[h_T^2] < \infty$，也就是说， h 是 A_T^2 中的一个非递减过程。那么 h 至多有 p 个不可预见跳跃，且这些跳跃发生在 $\tau_1, \ldots, \tau_p$。此外， h 可以唯一分解如下：
$h_t = B_t + \Delta h_{\tau_1} \mathbb{1}_{\{\tau_1 \le t\}} + \cdots + \Delta h_{\tau_p} \mathbb{1}_{\{\tau_p \le t\}} = B_t + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \psi_t^i dN_t^i$，其中$(B_t)_{t\in[0,T]}$是 $A_{p,T}^2$中的一个（可预测）过程，并且对每个 $i \in \{1, \ldots, \{v40>\}, \psi^i \in H_{\lambda^i,T}^2$。

证明。 由于 h 是平方可积、非递减的可选右连续且有左极限过程， h 是平方可积（右连续且有左极限）次鞅。因此，对 h 应用 Doob-Meyer分解，可得唯一的可预测过程 $a \in \mathcal{A}_{p,\,T}^2$ 以及唯一的平方可积鞅 m ，满足 $m_0 = 0$ ，使得 $h_t = a_t + m_t$。 利用定理 2.1 式 (2.2) 中的鞅表示性质， $\mathbb{G}$-鞅 $(m_t)_{t\in[0,T]}$ 可唯一表示为 $m_t = \int_0^t z_s dW_s + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \psi_s^i dM_s^i$，其中 $z \in \mathcal{H}_T^2$且 $\psi^1 \in \mathcal{H}_{\lambda^1,\,T}^2$， $\ldots$， $\psi^p \in \mathcal{H}_{\lambda^p,\,T}^2$。利用 $dM_s^i = dN_s^i - \lambda_s^i ds$（由 (2.1) 得），可得，

$$m_t = \int_0^t z_s dW_s - \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \psi_s^i \lambda_s^i ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \psi_s^i dN_s^i.$$

因此，过程 h $h_t = a_t + \int_0^t z_s dW_s - \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \psi_s^i \lambda_s^i ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \psi_s^i dN_s^i$ 可唯一地写为 $B_t = a_t + \int_0^t z_s dW_s - \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \psi_s^i \lambda_s^i ds$。令： ，可得，

$$h_t = B_t + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \psi_s^i dN_s^i = B_t + \sum_{i=1}^{p} \psi_{\tau_i}^i \mathbb{1}_{\{t \ge \tau_i\}}.$$

过程 B 具有可预测性，因为它是可预测项之和。此外， B是平方可积的。

等式 $h_t = B_t + \sum_{i=1}^{p} \psi_t^i \mathbb{1}_{\{t\ge\tau_i\}}$，结合 (B_t) 的可预测性、 h 的非递减性以及假设 $0 \le \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_p$ 几乎处处成立，可推出 $\Delta h_{\tau_1} = \psi_{\tau_1}^1 \ge 0$ 在 $\{\tau_1 \le T\}$上几乎处处成立， $\Delta h_{\tau_2} = \psi_{\tau_2}^2 \ge 0$ 在 $\{\tau_2 \le T\}$上几乎处处成立，且 $\Delta h_{\tau_p} = \psi_{\tau_p}^p \ge 0$ 在 $\{\tau_p \le T\}$上几乎处处成立，因此 (B_t) 是非递减的。■

引理 A.2： 设 D 和 $\hat{}D$ 是 A_T^2 中的可选过程。设 D'、$\hat{}D'$ 属于 $A_{p,\,T}^2$ 且θ^i、$\hat{}\theta^i \in H_{\lambda^i,\,T}^2$ 对于 $i \in \{1, \ldots..., p\}$，是满足以下条件的唯一过程，

$$\begin{aligned} D_t &= D'_t + \int_0^t \sum_{i=1}^{p} \theta_s^i dN_s^i = D'_t + \sum_{i=1}^{p} \theta_{\tau_i}^i \mathbb{1}_{\{\tau_i \le t\}}, \quad a.s. \\ \hat{D}_t &= \hat{D}'_t + \int_0^t \sum_{i=1}^{p} \hat{\theta}_s^i dN_s^i = \hat{D}'_t + \sum_{i=1}^{p} \hat{\theta}_{\tau_i}^i \mathbb{1}_{\{\tau_i \le t\}}, \quad a.s. \end{aligned} \tag{A.1}$$

如果 $\bar{D} := D - \hat{}D$ 是非递减的，那么 $\bar{D}' := D' - \hat{}D'$ 也是非递减的，并且对于每个$i \in \{1, \ldots, p\}$， $\theta_{\tau_i}^i \ge \hat{}\theta_{\tau_i}^i$在 $\{\tau_i \le T\}$ 上几乎处处成立。

证明。 由命题 2.6 可知，(A.1) 成立。利用 (A.1)，我们有：

$$\begin{aligned}\bar{D}_t &\coloneqq \bar{D}'_t + \left(\sum_{i=1}^{p}\left(\theta^i_{\tau_i} - \hat{\theta}^i_{\tau_i}\right)\mathbb{1}_{\{\tau_i \le t\}}\right) \\ &= \left(D'_t - \hat{D}'_t\right) + \left(\sum_{i=1}^{p}\left(\theta^i_{\tau_i} - \hat{\theta}^i_{\tau_i}\right)\mathbb{1}_{\{\tau_i \le t\}}\right).\end{aligned} \tag{A.2}$$

由于右连续且有左极限的可预测过程在完全不可预知停时处不会跳跃 $\bar{}$ $\bar{}$（参见 [17], 命题 2.24），因此对于所有 $i \in \{1, \ldots\ldots, p\}$，几乎必然有 $\Delta D'_{\tau_i} = 0$。由于 D 非递减，对于 $i \in \{1, \ldots\ldots, p\}$，几乎必然有 $\Delta \bar{D}_{\tau_i} = \theta^i_{\tau_i} - \hat{}\theta^i_{\tau_i} \ge 0$。

考虑由 (2.46) 中的划分得到的每个集合 A_k。在 $A_0 = \{\tau_1 > T\}$ 上，有 $\bar{D}_t(\omega) = D'_t(\omega) - \hat{}D'_t(\omega) = \bar{D}'_t(\omega)$；因此，$t \mapsto \bar{D}'_t(\omega)$ 在 $\_A_0$ 上非递减（因为 $t \mapsto D_t(\omega)$ 非递减）。令 $k \in \{1, \ldots, p-1\}$。在 A_k 上，依次对 $t \in [0, \tau_1(\omega))$、……、$t \in [\tau_{k-1}, \tau_k(\omega))$ 以及 $t \in [\tau_k(\omega)\ T]$ 推理，利用公式 (A.2) 和 D 非递减这一假设，并注意到 D' 是可预测的（因此不会在任何 τ_k 处跳跃），可得 $\_t \mapsto D'_t(\omega)$ 在 A_k 上非递减。由于 A_k 构成一个划分，结论得证。■

引理 A.3： 以下前向随机微分方程的解，

$$d\zeta_t = \zeta_{t-}(\beta_t dW_t + \sum_{i=1}^{p}\gamma^i_t dM^i_t); \quad \zeta_0 = 0, \tag{A.3}$$

其中过程 M^i 由(2.2)给出：对于 $t \in [0, T]$,

$$\zeta_t = \exp\left(\int_0^t \beta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds\right)\exp\left(-\int_0^t \sum_{i=1}^{p}\gamma^i_s\lambda^i_s ds\right)\prod_{i=1}^{p}(1+\gamma^i_{\tau_i}\mathbb{1}_{\{\tau_i\le t\}}),\ a.s. \tag{A.4}$$

证明。 对半鞅 $(X_t)_{t\in[0,T]}$，应用多兰-戴德公式（例如参见 [17]）即可求解方程 (A.3) 中的随机微分方程，其中 $X_t \coloneqq \int_0^t \beta_s dW_s + \int_0^t \sum_{i=1}^{p}\gamma^i_s dM^i_s$（其中 $X_0 = 0$）。我们有

$$\zeta_t = \mathcal{E}(X)_t = \exp\left(X_t - X_0 - \frac{1}{2}[X^c]_t\right)\prod_{0<s\le t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}, \tag{A.5}$$

其中

$$[X^c]_t = \int_0^t \beta_s^2 ds. \tag{A.6}$$

由于对于 $i,\ j \in \{1, \ldots\ldots, p\}$，满足 $i \ne j$ 时，$P(\tau_i = \tau_j) = 0$，因此我们得到，

$$\prod_{0<s\le t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s} = \exp\left(-\int_0^t\sum_{i=1}^{p}\gamma^i_s dM^i_s - \int_0^t\sum_{i=1}^{p}\gamma^i_s\lambda^i_s ds\right)\prod_{i=1}^{p}\left(1+\gamma^i_{\tau_i}\mathbb{1}_{\{\tau_i\le t\}}\right). \tag{A.7}$$

将 (A.6) 和 (A.7) 代入 (A.5)，即可得到所需结果 (A.4)。 ■

参考文献

[1] Becherer, D., Büttner, M. & Kentia, K. 关于带跳跃的倒向随机微分方程单调稳定性方法：扩展、具体判据与示例。*BSDE* 国际研讨会. 1–41 (2017)[2] Bielecki, T., Björk, T., Jeanblanc, M., Rutkowski, M., Scheinkman, J., Xiong, W. 违约债权的套期保值。*2003*年巴黎—普林斯顿数理金融讲座. 1–132 (2004)[3] Bielecki, T., Jeanblanc, M., Rutkowski, M., 信用衍生品估值与套期保值的偏微分方程方法，定量金融 5, 257–270, (2005)。[4] Bismut, J. 最优随机控制中的共轭凸函数。《数学分析与应用杂志》。**44**, 384-404 (1973)[5] Crépey, S. 融资约束下的双边交易对手风险——第一部分：定价。《数学金融》。**25**, 1–22 (2015)[6] Delong, Ł. 带跳跃的倒向随机微分方程及其精算与金融应用。（施普林格，2013）[7] Dumitrescu, R., Grigorova, M., Quenez, M. & Sulem, A. 带违约跳跃的倒向随机微分方程。《动力学、随机过程与控制中的计算与组合：阿贝尔研讨会，挪威罗森达尔，*2016*年*8*月》. 233–263 (2018)[8] Dumitrescu, R., Quenez, M. & Sulem, A. 广义戴金博弈与带跳跃的双重反射倒向随机微分方程。*Electron. J. Probab.* **21**, 1–32 (2016)[9] El Karoui, N., Peng, S. & Quenez, M. 金融中的倒向随机微分方程。《数学金融》。**7**, 1-71 (1997)[10] El Karoui, N. & Quenez, M. 非线性定价理论与倒向随机微分方程。金融数学。第 191-246 页 (1997)[11] Kusuoka, S. 关于违约风险模型的一点注记。《数理经济学进展》. 69–82 (1999)[12] Grigorian, K. & Jarrow, R. 滤过扩张：核心思想阐述及金融实例。*arXiv* 预印本 *arXiv:2303.03573*. (2023)[13] Grigorova, M. & Quenez, M. 离散时间下由倒向随机微分方程诱导的风险度量所对应的最优停止与非零和戴金博弈。《随机过程》。**89**, 259–279 (2017)[14] Grigorova, M., Quenez, M. & Sulem, A. 带违约的非线性不完全市场模型中的欧式期权。《工业与应用数学学会金融数学期刊》。**11**, 849–880 (2020)[15] Grigorova, M., Quenez, M. & Sulem, A. 带违约的非线性不完全市场模型中的美式期权。《随机过程及其应用》。**142**, 479–512 (2021)

[16] Jeanblanc, M.、Yor, M. 和 Chesney, M.《金融市场数学方法》。（Springer Science & Business Media，2009）[17] Jacod, J. 和 Shiryaev, A.《随机过程的极限定理》。（Springer Science & Business Media，2013）[18] Papapantoleon, A.、Possamaï, D. 和 Saplaouras, A.《带跳跃的倒向随机微分方程的存在性与唯一性结果：全面论述》。*Electronic Journal ofProbability* 23，121，1–68（2018）[19] Pardoux, E. 和 Peng, S.《倒向随机微分方程的适应解》。*Systems & Control Letters*。14，55-61（1990）[20] Quenez, M.-C. 和 Sulem, A.《带跳跃的倒向随机微分方程、优化及其在动态风险度量中的应用》。《随机过程及其应用》123，8，3328-3357（2013）[21] Royer, M.《带跳跃的倒向随机微分方程及相关的非线性期望》。《随机过程及其应用》116，10，1358–1376（2006）。[22] Zhang, J.《倒向随机微分方程》。概率论与随机建模。（2017）