PRO-ℓ-圆分与温和分歧版新基尔希–内田定理

IDO KARSHON 和 MARK SHUSTERMAN

Abstract. 我们证明了新基尔希–内田定理的一个推广。具体而言，我们证明，数域 K 的同构类型可以从其绝对伽罗瓦群 $G_{K/K}$ 的最大 pro-ℓ-by-cyclotomic 商中恢复。这与先前的结果形成对比：一般而言，无法从最大原幂零商中恢复同构类型。我们还证明，可以从最大温和分歧商中恢复同构类型。

arXiv:2601.01251v1 [math.NT] 3 Jan 2026

1. Introduction

新基尔希–内田定理陈述如下。

定理 1.1. 设 K_1, K_2 为数域，其代数闭包分别为 K_1, K_2。若 $\alpha\colon G_{K_1/K_1} \to G_{K_2/K_2}$ 是赋范群的一个同构，则存在域扩张的同构 $\sigma : K_1/K_1 \to K_2/K_2$，它诱导出 α，且该同构唯一。

这里，域扩张 $\sigma\colon L_1/K_1 \to L_2/K_2$ 的同构是一个同构 $\sigma\colon L_1 \to L_2$，满足 $\sigma(K_1) = K_2$。

许多结果将定理 1.1 推广到了以某个商群替代 G_{K_i/K_i} 的情形。例如，针对最大 pro-可解商[1], ，后来又针对最大三步可解商 [2], ，证明了 Neukirch-Uchida 变体，不过在后一种情形下，需要放宽对 σ的唯一性要求。受限分歧的变体已在 [3, 4, 5]中得到证明。针对 p-闭扩张的变体（研究了本文也探讨的一种性质，但得出的结果性质截然不同）已在 [6]中得到证明。最近，针对商群 $G_{K(\mu_\infty)^{\mathrm{ur}}/K}$ [7], 一种 Neukirch-Uchida 变体得到了证明。关于数域的 Neukirch-Uchida 变体的进一步研究包括[8] 以及 Pop 和 Topaz 正在进行的一项工作。至于否定性结果，已有研究表明，$G_{K/K}$ 的二步幂零商无法恢复 K [9]，后来又证明其原幂零商也无法恢复它 [10]。此外，研究还表明，$G_{K/K}$ 的 p-西洛子群的同构类型无法恢复 K [11]。

本文证明了新基尔希–内田定理的另一个变体。我们的主要技术结果陈述于定理 9.4 中，其表述用到了定义 3.1 和定义 6.1。这里我们陈述一些推论。

定理 1.2。设 K_1, K_2 为数域，且 Ω_i/K_i 为 $K_i(\mu_\infty)$ 的最大 *pro-*ℓ 扩张。若 $\alpha : G_{\Omega_1/K_1} \to G_{\Omega_2/K_2}$ 是有限生成群的同构，则存在域扩张的同构 $\sigma : \Omega_1/K_1 \to \Omega_2/K_2$，它诱导出 α，且该同构唯一。

由定理 9.4 还可得出，当用 K 的最大阿贝尔扩张替换 $K(\mu_\infty)$ 时，该结论仍然成立。因此，$G_{K/K}$ 的最大原-ℓ-阿贝尔商群决定了 K。由于一个原幂零群同构手其西洛子群的直积，因此最大原幂零-阿贝尔商群也决定了 K。在此前所述的 [10], 中，已经证明 $G_{K/K}$ 的最大原幂零商并不能决定 K。

Date: 2026年1月6日。M.S. 是数学领域 A. Edward Friedmann 博士职业发展讲席。

我们注意到，最大原超可解商严格位于最大原幂零-阿贝尔商与最大原幂零商之间。此外， $K(\mu_\ell)$ 的最大原-ℓ 扩张（与我们的证明相关）是 K 的一个原超可解扩张，因为它是一个原-ℓ群与一个指数整除 $\ell-1$ 的阿贝尔群的扩张。这些观察表明，原超可解 Neukirch-Uchida 变体可作为未来研究的一个方向。

定理 1.3. 设 K_1、K_2 为数域，并令 K_i^{tame} 表示 K_i 的最大温和分歧扩张。若 α : $G_{K_1^{\mathrm{tame}}/K_1} \to G_{K_2^{\mathrm{tame}}/K_2}$ 是赋范群的同构，则存在一个域扩张 σ： $K_1^{\mathrm{tame}}/K_1 \to K_2^{\mathrm{tame}}/K_2$ 的同构，该同构诱导出 α，且此同构唯一。

这可以视为另一种受限分歧 Neukirch-Uchida 变体：这一次消除了所有素点处的野分歧，而不是消除一部分素点处的分歧。

本文结构如下。

- 在第 2 节中，我们定义所用的记号。
- 在第 3 节中，我们定义 ℓ-封闭域的概念，并研究其上同调。
- 在第 4 节中，我们证明布劳尔正合列的一个 ℓ-封闭类比。
- 在第 5 节中，我们利用 Brauer 序列证明诺伊基希定理的一个 ℓ-封闭类比。本节首先概述这一证明。
- 在第 6 节中，我们定义丰域。借助丰域，只利用群论信息便可区分剩余特征不同的素点。对于同时满足 ℓ-封闭且丰沛条件的扩张，我们得到诺伊基希定理的一个加强版本。
- 在第 7 节中，我们构造基域的素点之间的一个保剩余特征双射，并由此推得这些基域算术等价。
- 在第 8 节中，在假设基域包含 μ_ℓ的前提下，我们改造 Uchida 在 [1] 中的方法，将算术等价提升为基域之间的同构。这已经可以看作 Neukirch-Uchida 定理的一个弱版本。Uchida 最初运用这一方法，在完全一般的情形下证明了可解 Neukirch-Uchida 变体；而我们选择给出其论证的简化版本，仅处理具有 μ_ℓ 的情形，并且只证明基域之间存在同构。
- 在第 9 节中，我们从前面得到的弱版本推出完整的新基尔希–内田定理，从而完成主要结果的证明。本节首先概述证明思路。我们还证明定理 1.2 和定理 1.3。

2. Notation and Preliminaries

我们用 $\overline{K}$ 表示 K 的代数闭包。若 K 是数域或局部域，我们还用 K^{ur} 表示其最大非分歧扩张，用 K^{tame} 表示其最大温和分歧扩张。我们用 $G_{L/K}$ 表示 $\mathrm{Gal}(L/K)$，用 G_K 表示 $G_{K/K}$。提及数域或局部域时，我们总是假设其在素域上的次数有限。

设 E 是 $\mathbb{Q}$ 的代数扩张。我们用 $\mathcal{P}(E)$ 表示 E 的赋值集合；若 $E/\mathbb{Q}$ 的次数为无限，则将其定义为 $\varprojlim_{K\subseteq E} \mathcal{P}(K)$，其中 K 遍历包含于 E 的数域，且极限是相对于限制映射取的。我们将 $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ 的元素称为有理赋值。注意， $\mathcal{P}(E)$ 具有局部仿紧拓扑空间的结构。我们用 $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(E)$ 表示非阿基米德赋值构成的子空间。给定 $S\subseteq\mathcal{P}(E)$ 和代数扩张 E'/E，我们用 $S(E')$ 表示 E' 中位于 S 中某个赋值之上的赋值集合。若 $S=\{\mathfrak{p}\}$ 是单元素集，我们也将 $S(E')$ 记作 $\mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(E')$。若赋值 $\mathfrak{p}\in\mathcal{P}(E)$ 在 E'/E 中满足 $|\mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(E')|>1$，则称其可分解；否则称其不可分解。我们还定义 $E_{\mathfrak{p}}=\bigcup_{K\subseteq E} K_{\mathfrak{p}|_K}$；注意，该域可能并不完备。对于伽罗瓦扩张 E'/E 和 $\mathfrak{P}\in\mathcal{P}(E')$，我们用 $G_{E'/E,\mathfrak{P}}$ 表示固定 $\mathfrak{P}$ 的 $G_{E'/E}$ 子群，它与 $G_{E'_{\mathfrak{P}}/E_{\mathfrak{P}|_E}}$ 同构。

设 F 是一个非阿基米德局部域。我们用 $\mathcal{O}_F$ 表示其整数环，用 $\mathfrak{m}_F$ 表示其极大理想。对于有限扩张 E/F，我们分别用 $f_{E/F}$ 和 $e_{E/F}$ 表示其惯性次数和分歧次数。

我们将特征零域的代数闭包中 n 次单位根组成的群记为 μ_n，并将所有 $n \geq 1$ 的 μ_n 的并记为 μ_∞。对于素数 p，我们将所有 $n \geq 1$ 的 μ_{p^n} 的并记为 μ_{p^∞}。

我们将有限集 A 的基数记为 $|A|$，并对赋范有限集的超自然基数使用相同的记号。凡是提及赋范群的子群，我们都默认其为闭子群；同样，我们要求赋范群之间的同态以及赋范群上的模之间的同态均为连续的。

对于群中的元素 g, σ，我们记 ${}^{\sigma}g = \sigma g \sigma^{-1}$。我们将这一记号推广至子群的共轭和模的共轭。若 A 是阿贝尔群，我们将其 n- 挠子群记为 $A[n]$。

通常我们有一个数域 K、一个伽罗瓦扩张 Ω/K，以及 Ω 上位于 K 的赋值 $\mathfrak{p}$ 上方的赋值 $\mathfrak{P}$，并考虑 $G_{\Omega_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}$ 的一个上同调群，例如 $H^i(G_{\Omega_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}, \Omega_\mathfrak{P}^\times)$。设 $\mathfrak{P}'$ 是 Ω 上位于 $\mathfrak{p}$ 上方的另一个素数。那么存在 $g \in G_{\Omega/K}$ 使得 $g\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$，由此得到一列自然同构

$$H^i(G_{\Omega_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}, \Omega_\mathfrak{P}^\times) \cong H^i(G_{\Omega/K,\mathfrak{P}}, \Omega_\mathfrak{P}^\times) \cong H^i({}^gG_{\Omega/K,\mathfrak{P}}, {}^g\Omega_\mathfrak{P}^\times) \cong H^i(G_{\Omega/K,g\mathfrak{P}}, \Omega_{g\mathfrak{P}}^\times) \cong H^i(G_{\Omega_{\mathfrak{P}'}/K_\mathfrak{p}}, \Omega_{\mathfrak{P}'}^\times).$$

事实上，群上同调的标准理论表明，这个复合映射不依赖于 g 的选取。将其记为 $\Phi_{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$，也不难证明 $\Phi_{\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''} \circ \Phi_{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'} = \Phi_{\mathfrak{P}\mathfrak{P}''}$。因此，我们可以通过 $\left(\bigoplus_{\mathfrak{P}\in\mathcal{P}_\mathfrak{p}(\Omega)} H^i(G_{\Omega_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}, \Omega_\mathfrak{P}^\times)\right)/R$ 来定义“上同调群” $H^i(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \Omega^{\mathfrak{p}\times})$，其中 R 由形如 $[\alpha]_\mathfrak{P} - [\Phi_{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}(\alpha)]_{\mathfrak{P}'}$ 的关系生成。这是一个仅依赖于 $\mathfrak{p}$ 的典范构造，并且与每个 $H^i(G_{\Omega_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}, \Omega_\mathfrak{P}^\times)$ 都有自然同构，且这些同构与 $\Phi_{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$ 相容。涉及此记号的映射都默认要求关于同构 $\Phi_{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$ 自然。例如，限制映射 $\mathrm{Res}: H^i(G_{\Omega/K}, \Omega^\times) \to H^i(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \Omega^{\mathfrak{p}\times})$ 定义良好，因为下图交换：

$$\begin{array}{ccc} H^i(G_{\Omega/K}, \Omega^\times) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & \searrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & \\ H^i(G_{\Omega_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}, \Omega_\mathfrak{P}^\times) & \xrightarrow{\Phi_{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}} & H^i(G_{\Omega_{\mathfrak{P}'}/K_\mathfrak{p}}, \Omega_{\mathfrak{P}'}^\times). \end{array}$$

$G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}$ 的其他“上同调群”包括 $H^i(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \Omega^{\mathfrak{p}\times}/\Omega^{\mathfrak{p}\times\ell})$、$H^i(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \mu_\ell)$，其中 $\mu_\ell \subseteq \Omega$，等等。

3. Cohomologies of ℓ-Sealed Fields

从现在起，ℓ 表示一个素数，S 表示一个有理赋值的有限集。

Defi定义 3.1。设 ℓ 为一个素数，且 Ω 是 $\mathbb{Q}$的代数扩张 .

(1) 如果 $\mu_\ell \subseteq \Omega$，且不存在 Ω 的 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-扩张，使得 $S(\Omega)$ 的每个赋值都完全分裂，则称 Ω 关于 S 是 ℓ-封闭的。(2) 如果 Ω 关于某个 S是 ℓ-封闭的，则称 Ω 是 ℓ-封闭的。

对于一个数域 K，考虑映射 $\Phi_{K,\ell,S}: K^\times/K^{\times\ell} \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} K_\mathfrak{p}^\times/K_\mathfrak{p}^{\times\ell}$。

命题 3.2。$\Phi_{K,\ell,S}$ 是满射。

证明。令 $(\alpha_\mathfrak{P})_{\mathfrak{P}\in S(K)} \in \bigoplus_{\mathfrak{P}\in S(K)} K_\mathfrak{P}^\times/K_\mathfrak{P}^{\times\ell}$，其中 $\alpha_\mathfrak{P} \in K_\mathfrak{P}^\times$ 是类 $\alpha_\mathfrak{P}$ 的代表元。根据[13, 第二章第 5 节，7], 可知子集 $K_\mathfrak{P}^{\times\ell} \subseteq K_\mathfrak{P}^\times$ 是开集。因此，根据中国剩余定理

存在定理，有 $\alpha \in K$ 使得商群 $\frac{\alpha}{\alpha_{\mathfrak{P}}}$ 对所有 $\mathfrak{P} \in S(K)$ 都属于 $K_{\mathfrak{P}}^{\times \ell}$。这意味着$\Phi_{K,\ell,S}(\alpha K^{\times \ell}) = (\alpha_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P} \in S(K)}$。□

我们可以将前面对$\Phi_{K,\ell,S}$ 的定义推广到一般代数扩张 $\Omega/\mathbb{Q}$，将 $\Phi_{\Omega,\ell,S}$定义为如下复合

$$\Omega^\times/\Omega^{\times \ell} \to \varinjlim_{K \subseteq \Omega} K^\times/K^{\times \ell} \to \varinjlim_{K \subseteq \Omega} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S(K)} K_{\mathfrak{p}}^\times/K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell}$$

其中，直接极限取遍包含于 Ω 中的数域 K。由命题 3.2 可立即得到$\Phi_{\Omega,\ell,S}$ 是满射。

命题 3.3。 Ω </style]关于 是 -封闭的，当且仅当 Ω 且 $\Phi_{\Omega,\ell,S}$ 是单射（因而是同构）。

证明。设 $\mu_\ell \subseteq \Omega$ 且 $\Phi_{\Omega,\ell,S}$ 是单射，并反设 Ω 有一个 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-扩张，其中 $S(\Omega)$的每个赋值都完全分裂。该扩张具有 $\Omega(\alpha^{\frac{1}{\ell}})/\Omega$ 的形式，其中某个 $\alpha \in \Omega^\times \setminus \Omega^{\times \ell}$。于是，对每个 $\mathfrak{P} \in S(\Omega)$， α 都是 $\Omega_{\mathfrak{P}}$中的 ℓ 次幂，这意味着存在一个数域 $L \subseteq \Omega$，使得 α 是 $L_{\mathfrak{P}|_L}$ 中的 ℓ 次幂。因此，集合 $U_L = \{\mathfrak{P} \in S(\Omega) \mid \alpha \text{ 在 } L_{\mathfrak{P}|_L}\}$ 中是 ℓ 次幂，构成紧空间 $S(\Omega)$的一个开覆盖。由于$U_{L_1} \cup U_{L_2} \subseteq U_{L_1 L_2}$，可知存在一个数域 $L \subseteq \Omega$，使得对每个 $\mathfrak{P} \in S(\Omega)$， α 都是 $L_{\mathfrak{P}|_L}$ 中的 ℓ 次幂。然而，这意味着 $\alpha\Omega^{\times \ell} \in \ker(\Phi_{\Omega,\ell,S})$，从而 $\alpha \in \Omega^{\times \ell}$，矛盾。

反之，设 Ω 关于 S 是 ℓ-封闭的。令 $\alpha \in \Omega^\times$，并假设 $\alpha\Omega^{\times \ell} \in \ker(\Phi_{\Omega,\ell,S})$。那么存在一个包含 μ_ℓ 和 α 的数域 $L \subseteq \Omega$，使得对于每个 $\mathfrak{p} \in S(L)$， α 都是 $L_{\mathfrak{p}}$ 中的 ℓ 次幂。因此， $S(L)$ 的每个赋值都在 $L(\alpha^{\frac{1}{\ell}})/L$ 中完全分裂，进而 $S(\Omega)$ 的每个赋值都在 $\Omega(\alpha^{\frac{1}{\ell}})/\Omega$ 中完全分裂。这意味着 $\Omega(\alpha^{\frac{1}{\ell}}) = \Omega$，因此 $\alpha \in \Omega^{\times \ell}$。□

Exa例 3.4. 设 Ω 是 $\mathbb{Q}$ 的一个代数扩张，且 ℓ是一个素数。那么：

(1) 若 Ω 包含 μ_ℓ 且没有 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-扩张，则 Ω 关于 $S = \emptyset$ 是 ℓ-封闭的。(2) 若 Ω 没有非平凡的温和分歧扩张，则 Ω 关于 $S = \{\ell\}$ 是 ℓ-封闭的。特别地，对于数域 K， K^{tame} 以及 $K(\mu_\ell)$ 的极大 pro-ℓ 扩张都是 ℓ-封闭的。

证明。 第一部分显然。对于第二部分，假设 $\alpha \in \Omega^\times$ 满足 $\alpha\Omega^{\times \ell} \in \ker(\Phi_{\Omega,\ell,\{\ell\}})$。那么存在一个数域 $K \subseteq \Omega$，使得 $\alpha \in K^\times$, $\mu_\ell \subseteq K$，并且对所有 $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_\ell(K)$ 都成立。令$L = K(\alpha^{\frac{1}{\ell}})$，并注意到 $\mathcal{P}_\ell(K)$ 的每个赋值都在 L 中完全分裂。由于 L/K 是次数为 1 或 ℓ 的伽罗瓦扩张，因此在不位于 ℓ之上的赋值处不会有野分歧，故其为温和分歧。驯分歧在基变换下保持不变，因此 $\Omega(\alpha^{\frac{1}{\ell}})/\Omega$ 也温和分歧，这意味着根据 Ω 的假设，$\alpha \in \Omega^{\times \ell}$。因此，$\ker(\Phi_{\Omega,\ell,\{\ell\}})$ 是平凡的。□

引理 3.5。 假设Ω 相对于 S 是 ℓ-封闭的。那么对每个 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus S(\Omega)$，都有$\Omega_{\mathfrak{P}}^\times = \Omega_{\mathfrak{P}}^{\times \ell}$。

证明。 设 $\alpha_{\mathfrak{P}} \in \Omega_{\mathfrak{P}}^\times$。设 $K \subseteq \Omega$ 是一个包含 μ_ℓ 且满足 $\alpha_{\mathfrak{P}} \in K_{\mathfrak{P}|_K}$ 的数域。由命题 3.2（针对集合 $S \cup \{\mathfrak{P}|_{\mathbb{Q}}\}$），存在 $\alpha \in K^\times$，其在 $K_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \in S(K)$ 中的像都是 ℓ 次幂，而其在 $K_{\mathfrak{P}|_K}$ 中的像属于 $\alpha_{\mathfrak{P}} \cdot K_{\mathfrak{P}|_K}^{\times \ell}$。由命题 3.3 可知 $\alpha \in \Omega^{\times \ell}$，因此 $\alpha_{\mathfrak{P}} \in \Omega_{\mathfrak{P}}^{\times \ell}$。□

引理 3.6。 设 F 是一个特征零的非阿基米德局部域，且设 Ξ 是 F 的一个代数扩张，包含 μ_ℓ 并满足 $\Xi^\times = \Xi^{\times \ell}$。则 $\ell^\infty \mid [\Xi : F]$。

证明。 反设 $\ell^\infty \nmid [\Xi : F]$。则存在 Ξ/F 的一个有限子扩张F'/F，使得 $\ell \nmid [\Xi : F']$。不妨设 $\mu_\ell \subseteq F'$。取一个整数 n，使映射 $\mu_\ell \to \mathcal{O}_{F'}/\mathfrak{m}_{F'}^n \mathcal{O}_{F'}$ 是单射。

ℓ 次幂映射 $(\mathcal{O}_{F'}/\mathfrak{m}_{F'}^n \mathcal{O}_{F'})^\times \xrightarrow{\ell} (\mathcal{O}_{F'}/\mathfrak{m}_{F'}^n \mathcal{O}_{F'})^\times$ 是同阶有限群之间的同态，其核的大小为 ℓ。特别地，它不是满射，因此存在 $\alpha \in \mathcal{O}_{F'}$，其

在 $\mathcal{O}_{F'}/\mathfrak{m}_{F'}^n\mathcal{O}_{F'}$ 中的像不是一个 ℓ 次幂。因此， α 不是 F' 中的 ℓ 次幂，而 $F'(\alpha^{\frac{1}{\ell}})/F'$ 是一个 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-扩张。然而，由 $\Xi^\times = \Xi^{\times\ell}$ 可得 $\alpha^{\frac{1}{\ell}} \in \Xi$。这意味着 $\ell \mid [\Xi : F']$，与假设矛盾。□

引理 3.7。设 K 是一个数域，且 Ω/K 是一个相对于 S 为 ℓ-封闭的伽罗瓦扩张。那么对每个 $i \geq 0$，限制映射诱导出一个同构

$$H^i\left(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}\right) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} H^i\left(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \Omega^{\mathfrak{p}\times}/\Omega^{\mathfrak{p}\times\ell}\right).$$

证明。

$$\begin{aligned}
&H^i(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) \\
&\cong \varinjlim_{L\subseteq\Omega,\ L/K \text{ Galois}} H^i\left(G_{L/K}, \bigoplus_{\mathfrak{P}\in S(L)} L_\mathfrak{P}^\times/L_\mathfrak{P}^{\times\ell}\right) \\
&\cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} \varinjlim_{L\subseteq\Omega,\ L/K \text{ Galois}} H^i\left(G_{L/K}, \bigoplus_{\mathfrak{P}\in \mathcal{P}_\mathfrak{p}(L)} L_\mathfrak{P}^\times/L_\mathfrak{P}^{\times\ell}\right) \\
&\cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} \varinjlim_{L\subseteq\Omega,\ L/K \text{ Galois}} H^i\left(G_{L^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, L^{\mathfrak{p}\times}/L^{\mathfrak{p}\times\ell}\right) \\
&\cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} H^i\left(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \Omega^{\mathfrak{p}\times}/\Omega^{\mathfrak{p}\times\ell}\right)
\end{aligned}$$

其中，第一个同构由 [12, 1.5.1] 得出，其逆系统为 $G_{\Omega/K} \cong \varprojlim_{L\subseteq\Omega,\ L/K \text{ 伽罗瓦}} G_{L/K}$ 以及 $\Omega^\times/\Omega^{\times\ell} \cong \varprojlim_{L\subseteq\Omega,\ L/K \text{ 伽罗瓦}} \bigoplus_{\mathfrak{P}\in S(L)} L_\mathfrak{P}^\times/L_\mathfrak{P}^{\times\ell}$；第二个同构显然；第三个同构由 Shapiro 引理的 $G_{L^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}$-版本得出；第四个同构由 $G_{L^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}$-版本的 [12, 1.5.1] 得出。□

4. Brauer Exact Sequence for ℓ-sealed extensions

本节证明 ℓ-封闭扩张情形下的布劳尔正合列类比。具体而言，我们证明序列 $0 \to H^2(G_{\Omega/K}, \mu_\ell) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}(K)} H^2(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \mu_\ell) \to \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 是正合的，其中 Ω 是 ℓ-封闭的伽罗瓦扩张，且包含于 K 中。

引理 4.1。设 K 是一个特征零域，并设 Ω/K 是一个包含 μ_ℓ 的伽罗瓦扩张。则存在一个五项正合列

$$K^\times/K^{\times\ell} \to H^0(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) \to H^2(G_{\Omega/K}, \mu_\ell) \to \mathrm{Br}(\Omega/K)[\ell] \to H^1(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell})$$

此外，如果 K 是 $\mathbb{Q}$ 的代数扩张，且 $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(K)$，那么该序列关于限制是自然的，即限制映射会诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^\times/K^{\times\ell} & \longrightarrow & H^0(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) & \longrightarrow & H^2(G_{\Omega/K}, \mu_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(\Omega/K)[\ell] & \longrightarrow & H^1(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K_\mathfrak{p}^\times/K_\mathfrak{p}^{\times\ell} & \to & H^0(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \Omega^{\mathfrak{p}\times}/\Omega^{\mathfrak{p}\times\ell}) & \to & H^2(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \mu_\ell) & \to & \mathrm{Br}(\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p})[\ell] & \to & H^1(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \Omega^{\mathfrak{p}\times}/\Omega^{\mathfrak{p}\times\ell}).
\end{array}$$

证明。 证明这一点的一种方法是考虑正合序列 $0 \to \mu_\ell \to \Omega^\times \xrightarrow{\ell} \Omega^\times \to \Omega^\times/\Omega^{\times\ell} \to 0$，它诱导出一个收敛到零的谱序列，其第一页如下：

$$\begin{array}{cccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H^2(G_{\Omega/K}, \mu_\ell) \longrightarrow & \mathrm{Br}(\Omega/K) \xrightarrow{\ell} & \mathrm{Br}(\Omega/K) \longrightarrow & H^2(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) \\ H^1(G_{\Omega/K}, \mu_\ell) \longrightarrow & 0 \longrightarrow & 0 \longrightarrow & H^1(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) \\ H^0(G_{\Omega/K}, \mu_\ell) \longrightarrow & K^\times \xrightarrow{\ell} & K^\times \longrightarrow & H^0(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}). \end{array}$$

为简洁起见，我们给出此证明的初等版本。短正合列 $0 \to \mu_\ell \to \Omega^\times \xrightarrow{\ell} \Omega^{\times\ell} \to 0$ 诱导出如下正合上同调序列

$$0 \to H^1(G_{\Omega/K}, \Omega^{\times\ell}) \xrightarrow{\delta} H^2(G_{\Omega/K}, \mu_\ell) \to \mathrm{Br}(\Omega/K) \to H^2(G_{\Omega/K}, \Omega^{\times\ell}) \tag{4.1}$$

其中我们对 $H^1(G_{\Omega/K}, \Omega^\times) = 0$ 使用了希尔伯特第90定理。同样，短正合列$0 \to \Omega^{\times\ell} \to \Omega^\times \to \Omega^\times/\Omega^{\times\ell} \to 0$ 诱导出如下正合序列

$$0 \to \Omega^{\times\ell} \cap K^\times \to K^\times \to H^0(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) \xrightarrow{\delta} H^1(G_{\Omega/K}, \Omega^{\times\ell}) \to 0 \tag{4.2}$$

and

$$0 \to H^1(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) \xrightarrow{\delta} H^2(G_{\Omega/K}, \Omega^{\times\ell}) \to \mathrm{Br}(\Omega/K) \to H^2(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}). \tag{4.3}$$

接着，我们将映射 $H^0(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) \to H^2(G_{\Omega/K}, \mu_\ell)$ 定义为以下映射的复合

$$H^0(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) \xrightarrow{\delta} H^1(G_{\Omega/K}, \Omega^{\times\ell}) \xrightarrow{\delta} H^2(G_{\Omega/K}, \mu_\ell)$$

其中第一个映射来自 (4.2)，第二个来自 (4.1)。我们还定义映射 $\mathrm{Br}(\Omega/K)[\ell] \to H^1(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell})$：将元素 $\alpha \in \mathrm{Br}(\Omega/K)[\ell]$ 映射到它经由 (4.1) 在 $\beta \in H^2(G_{\Omega/K}, \Omega^{\times\ell})$ 中的像。注意，随后通过 (4.3) 将 β 映入 $\mathrm{Br}(\Omega/K)$，所得结果等于 $\ell\alpha = 0$ （因为复合映射 $\Omega^\times \xrightarrow{\ell} \Omega^{\times\ell} \to \Omega^\times$ 就是乘以 ℓ），由此可知，根据序列 (4.3) 的正合性，β 在 $H^1(G_{\Omega/K}, \Omega^\times/\Omega^{\times\ell})$ 中有唯一原像。接下来很容易验证，这些映射构成所需的正合序列。

第二部分由上述构造的自然性得出。

□

推论 4.2。 设 F 是一个特征零的域，且 Ξ/F 是一个伽罗瓦扩张，使得$\mu_\ell \subseteq \Xi$ 且 $\Xi^\times = \Xi^{\times\ell}$。那么自然映射 $H^2(G_{\Xi/F}, \mu_\ell) \to$ 布劳尔群$(\Xi/F)[\ell]$ 是一个同构。

证明。 由于 $\Xi^\times/\Xi^{\times\ell} = 0$，引理 4.1 中的五项正合列退化为同构 $H^2(G_{\Xi/F}, \mu_\ell) \to$ 布劳尔群$(\Xi/F)[\ell]$。
□

定理 4.3. 设 K 是一个数域，且 Ω/K 是一个 ℓ-封闭伽罗瓦扩张。那么限制映射导出一个正合列

$$0 \to H^2(G_{\Omega/K}, \mu_\ell) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(K)} H^2(G_{\Omega^\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}, \mu_\ell) \to \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

它嵌入于一个交换图中

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^2(G_{\Omega/K},\mu_\ell) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}(K)} H^2(G_{\Omega^{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}},\mu_\ell) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}(\Omega/K)[\ell] & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}(K)} \mathrm{Br}(\Omega^{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})[\ell] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \end{array}$$

具有正合行。

证明。 考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} K^\times/K^{\times\ell} & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} K_{\mathfrak{p}}^\times/K_{\mathfrak{p}}^{\times\ell} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(G_{\Omega/K},\ \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} H^0(G_{\Omega^{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}},\ \Omega^{\mathfrak{p}\times}/\Omega^{\mathfrak{p}\times\ell}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(G_{\Omega/K},\ \mu_\ell) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}(K)} H^2(G_{\Omega^{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}},\ \mu_\ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{布劳尔群}(\Omega/K)[\ell] & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}(K)} \text{布劳尔群}(\Omega^{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})[\ell] \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(G_{\Omega/K},\ \Omega^\times/\Omega^{\times\ell}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S(K)} H^1(G_{\Omega^{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}},\Omega^{\mathfrak{p}\times}/\Omega^{\mathfrak{p}\times\ell}). \end{array}$$

在第二列中，注意第三项和第四项对 $\mathcal{P}(K)$ 求和，而第一项、第二项和第五项对 $S(K)$ 求和。因此，根据引理 4.1 和推论 4.2，该图表的各列均为正合列。由命题 3.2 可知，顶部水平映射是满射；由引理 3.7 可知，第二个和第五个水平映射是同构。根据经典布劳尔正合列，我们还知道第四个水平映射是单射，其余核同构于 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 或为 0。现在通过图追逐即可得到所需的正合列。□

5. Neukirch's Theorem

本节将证明 ℓ-封闭扩张的诺伊基希定理（定理 5.8）。也就是说，对于一个 ℓ-封闭的伽罗瓦扩张 Ω/K 以及一个子群 $H \le G_{\Omega/K}$，如果 H 同构于满足某些条件的局部伽罗瓦群，那么 H 在 $G_{\Omega/K}$ 中是局部的；也就是说，对于 Ω 的某个赋值 $\mathfrak{P}$，H 包含于 $G_{\Omega/K,\ \mathfrak{P}}$。

我们先概述证明。取 $E = \Omega^H$，研究第 4 节中关于扩张 Ω/E 的布劳尔正合列的类似结果。由于整体上同调群 $H^2(G_{\Omega/E},\mu_\ell)$ 仅取决于 H 的同构类型（在假设 $\mu_\ell \subseteq K$ 下），该正合列为我们提供了有关局部上同调群 $H^2(G_{\Omega^{\mathfrak{P}}/E_{\mathfrak{P}}},\mu_\ell)$ 的信息，由此可推出存在唯一的 E 的赋值 $\mathfrak{P}_E$，使得局部上同调群非零。对于任意开子群 $H' \le H$ 及其对应的不动域 $E' = \Omega^{H'}$，定理的假设均成立，因此对于任意有限子扩张 E'/E，都存在唯一的 E' 的赋值 $\mathfrak{P}_{E'}$，使得局部上同调群非零。我们可以利用这一赋值系来证明，E 中存在一个在 Ω 中不可分解的赋值，因此对于 Ω 的某个赋值 $\mathfrak{P}$，有 $H \le G_{\Omega/K,\ \mathfrak{P}}$。在 $\mathfrak{P}_E \notin S(E)$ 的情形下，这一最后部分很容易处理：其中 S 是一组有限的有理赋值，Ω 关于这些赋值是 ℓ-封闭的；而在 $\mathfrak{P}_E \in S(E)$ 的情形下则更加复杂。我们通过对空间 $S(E)$ 进行拓扑论证来处理 $\mathfrak{P}_E \in S(E)$ 的情形，并利用其紧致性，而该紧致性源于 S 的有限性。

现在我们证明一个 s equ证明诺伊基希定理所需的引理和命题。

命题 5.1。设 K 是一个数域，且Ω/K 是一个 ℓ-封闭的伽罗瓦扩张。则对于任意两个不同的赋值 $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$，有 $\ell \nmid \left|G_{\Omega/K,\ \mathfrak{P}_1} \cap G_{\Omega/K,\ \mathfrak{P}_2}\right|$。

证明。设 S 是一个有理赋值有限集，使得 Ω 相对于该集合是 ℓ-封闭的。令 $H = G_{\Omega/K,\ \mathfrak{P}_1} \cap G_{\Omega/K,\ \mathfrak{P}_2}$ 以及 $E = \Omega^H$。注意， $\mathfrak{P}_1|_E$ 和 $\mathfrak{P}_2|_E$ 在 Ω 中不可分解，因此必定彼此不同。

反设 $\ell \mid |H|$。那么 Ω/E 中存在一个有限子扩张 E''/E，其阶可被 ℓ 整除。我们不妨设 E''/E 是伽罗瓦扩张，且 $\mu_\ell \subseteq E''$。由于 $G_{E''/E}$ 是一个阶可被 ℓ 整除的有限群，它含有一个阶为 ℓ 的元素，因此存在一个子域 $E''/E'/E$，使得$[E'' :\ E'] = \ell$。由此可知， E' 也包含 μ_ℓ；根据库默尔理论，存在 $\alpha \in E'$，使得$E'' = E'(\sqrt[\ell]{\alpha})$。

设 $L \subseteq E'$ 为一个数域，使得 $\mathfrak{P}_1|_L \neq \mathfrak{P}_2|_L$、 $\mu_\ell \subseteq L$和 $\alpha \in L$。由集合 $S \cup \{\mathfrak{P}_1|_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{P}_2|_{\mathbb{Q}}\}$的命题 3.2，存在 $\beta \in L^\times$，使得 β 在 $L_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \in S(L) \cup \{\mathfrak{P}_1|_L\}$ 中的像全都是 ℓ次幂，而其在 $L_{\mathfrak{P}_2|_L}$ 中的像属于 $\alpha \cdot L_{\mathfrak{P}_2|_L}^{\times \ell}$。由此可得 $\beta^{\frac{1}{\ell}} \in \Omega$。设 $\widetilde{L} = L(\beta^{\frac{1}{\ell}}) \subseteq \Omega$。由于$\sim_{\mathfrak{P}_1|_L}$ 在 L中完全分裂，我们得到 $\mathfrak{P}_1|_{E'}$ 在 LE'中完全分裂。然而，Ω 中在 $\mathfrak{P}_1|_{E'}$之上只有一个赋值，因此必有 $\widetilde{L} \subseteq E'$。于是 $\alpha^{\frac{1}{\ell}} \in \widetilde{L}_{\mathfrak{P}_2|_{\widetilde{L}}} \subseteq E'_{\mathfrak{P}_2|_{E'}}$，这意味着 $\mathfrak{P}_2|_{E'}$在 $E'' = E'(\sqrt[\ell]{\alpha})$ 中完全分裂。由于 Ω 中在 $\mathfrak{P}_2|_{E'}$之上只有一个赋值，这意味着$E' = E''$，与 $[E'' :\ E'] = \ell$矛盾。□

引理 5.2. 设 G 是一个赋范群， M 是一个 G-模。设 $H \leq G$。则

$$H^n(H, M) \cong \varinjlim_{H \subseteq U \subseteq G} H^n(U, M)$$

其中 U 遍历 G 中包含 H 的开子群，极限是相对于限制映射取得的。

证明. 将 [12, 1.5.1] 应用于逆系统 $H = \varprojlim_{H \subseteq U \subseteq G} U$。 □

引理 5.3. 设 ℓ 是一个素数， F 是一个特征零的非阿基米德局部域。设 $\Xi/E/F$ 是一个代数扩张塔，满足 $\mu_\ell \subseteq \Xi$ 和 $\Xi^\times = \Xi^{\times \ell}$。则 $H^2(G_{\Xi/E}, \mu_\ell)$ 同构于 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，当且仅当 $\ell^\infty \nmid [E :\ F]$；否则同构于 0 。

证明. 由推论 4.2 得到 $H^2(G_{\Xi/E}, \mu_\ell) \cong$ 布劳尔群$(\Xi/E)[\ell]$。由引理 5.2 得到布劳尔群$(\Xi/E)[\ell] \cong \varinjlim_{F'}$布劳尔群$(\Xi/F')[\ell]$，其中 F' 遍历 E/F 的有限子扩张，直接极限是相对于限制映射取得的。

由引理 3.6 可知，对于每个这样的 F'， $\ell \mid [\Xi :\ F']$，因此我们有布劳尔群$(\Xi/F')[\ell] \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$。此外，对于塔 $E/F''/F'/F$，限制映射布劳尔群$(\Xi/F')[\ell] \to$布劳尔群$(\Xi/F'')[\ell]$在 $\ell \mid [F'' :\ F']$时为零，否则为同构。结论得证。□

推论 5.4。设 ℓ 是一个素数， F 是一个特征零的非阿基米德局部域。设 $\Xi/E'/E/F$ 是一个代数扩张塔，其中 $\mu_\ell \subseteq \Xi$、 $\Xi^\times = \Xi^{\times \ell}$ 和 E'/E 均有限。则$H^2(G_{\Xi/E}, \mu_\ell) \neq 0$当且仅当 $H^2(G_{\Xi/E'}, \mu_\ell) \neq 0$，且在此情形下，它们都同构于 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$。

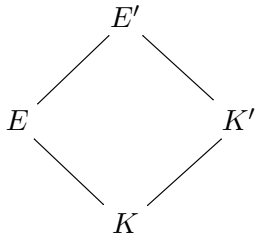
证明。根据引理 5.3， $H^2(G_{\Xi/E}, \mu_\ell) \neq 0$当且仅当 $\ell^\infty \nmid [E :\ F]$，此时它同构于$\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$。对于满足条件 $\ell^\infty \nmid [E' :\ F]$的 $H^2(G_{\Xi/E'}, \mu_\ell)$，结论也相同。由于 E'/E是有限的，这些条件等价。□

引理 5.5. 设 K 是一个数域，并给定一个赋值 $\mathfrak{p}$；设 Ω/K 是一个代数扩张，并设 $n \geq 1$ 是一个整数。若对每个 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(\Omega)$，都有 $n \mid [\Omega\mathfrak{P} :\ K_{\mathfrak{p}}]$，则 $n \mid [\Omega : K]$。特别地，若对每个 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(\Omega)$，都有 $\ell^\infty \mid [\Omega\mathfrak{P} :\ K_{\mathfrak{p}}]$，则 $\ell^\infty \mid [\Omega : K]$。

证明。 考虑赋有限空间 $\mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(\Omega)$。对于 Ω/K 的每个有限子扩张 L/K，都有一个开子集 $U_L \subseteq \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(\Omega)$，它由满足 $n \mid [L_{\mathfrak{P}|_L} : K_{\mathfrak{p}}]$ 的赋值 $\mathfrak{P}$ 组成。这些开子集构成 $\mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(\Omega)$ 的一个开覆盖，因此可以从 U_L 中取出有限子覆盖。由于 $U_{L_1} \cup U_{L_2} \subseteq U_{L_1 L_2}$，存在 Ω/K 的一个有限子扩张 L/K，使得对每个 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(L)$，都有 $n \mid [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}]$。这意味着 $[L:K] = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}]$ 也能被 n 整除。□

引理 5.6. 设 $E'/E/\mathbb{Q}$为代数扩张塔。那么，在 E' 中不可分解的 E 的赋值构成 $\mathcal{P}(E)$的一个闭子集。

证明。 设 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}(E)$是 E'中可分解的一个赋值。设 $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \mathcal{P}_{\mathfrak{P}}(E')$是两个不同的赋值，并设 $K' \subseteq E'$ 是一个满足 $\mathfrak{P}_1|_{K'} \neq \mathfrak{P}_2|_{K'}$的数域。设 $K = E \cap K'$。



我们发现，$\mathfrak{P}_1|_{K'}$ 和$\mathfrak{P}_2|_{K'}$ 是位于 $\mathfrak{P}|_K$之上的两个不同赋值，因此 $\mathfrak{P}|_K$ 在 K'中可分解。因此，$\mathcal{P}_{\mathfrak{P}|_K}(E)$的每个赋值在 E'中都是可分解的。集合 $\mathcal{P}_{\mathfrak{P}|_K}(E)$是 $\mathcal{P}(E)$中$\mathfrak{P}$ 的一个开邻域，由此证明可分解赋值的集合是开集。□

命题 5.7。 设$\Omega/E/\mathbb{Q}$ 是一个代数扩张塔，且 S 是一个有理赋值有限集。假设对于Ω/E 的任意有限子扩张 E'/E，都存在 $\mathfrak{P} \in S(E)$ 在 E'中不可分解。那么存在 $\mathfrak{P} \in S(E)$ 在Ω中不可分解。

证明。 对于任意有限 E'/E，在 E' 中不可分解的赋值集合$C_{E'} \subseteq S(E)$由引理 5.6 可知是闭集。考虑这些集合的有限交，可得 $C_{E'_1} \cap \cdots \cap C_{E'_n} \supseteq C_{E'_1 \ldots E'_n}$；根据假设，该集合非空。由 $S(E)$的紧致性即可得出结论。□

现在我们可以证明适用于 ℓ-封闭扩张的 Neukirch 定理。

定理 5.8。 设 K 是一个数域，Ω/K 是一个 ℓ-封闭伽罗瓦扩张。假设 $H \leq G_{\Omega/K}$ 是一个同构于 $G_{\Xi/F}$的子群，其中 F 是一个特征零非阿基米德局部域，且 Ξ/F是满足 $\mu_\ell \subseteq \Xi$ 和 $\Xi^\times = \Xi^{\times \ell}$的伽罗瓦扩张。那么存在唯一的$\Omega$ 的非阿基米德赋值 $\mathfrak{P}$，使得$H \leq G_{\Omega/K,\mathfrak{P}}$。

证明。 由引理 3.6 可知 $\ell^\infty \mid |H|$。因此，根据命题 5.1 可得唯一性，只需证明存在一个满足 $H \leq G_{\Omega/K,\ \mathfrak{p}}$ 的非阿基米德 $\mathfrak{P}$。事实上，阿基米德赋值不可能满足这一条件，因为对于 $\mathfrak{P}$ 阿基米德，$G_{\Omega/K,\ \mathfrak{P}}$ 的大小为 1 或 2，而这不能被 ℓ^∞ 整除。因此，我们不考虑非阿基米德条件。令 $E = \Omega^H$。性质 $H \leq G_{\Omega/K,\ \mathfrak{p}}$ 等价于 $\mathfrak{P}|_E$ 在 Ω 中不可分解。因此，我们需要证明存在一个属于 E 且在 Ω 中不可分解的赋值。

设 S 为有理赋值的一个有限集，使得 Ω 关于该集合是 ℓ-封闭的。我们先证明 $\mu_\ell \subseteq K$ 和 $\mu_\ell \subseteq F$ 的情形下的定理。由于 $G_{\Omega/E} = H \cong G_{\Xi/F}$，且 $\mu_\ell \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 既是一个 $G_{\Omega/E}$-模，也是一个 $G_{\Xi/F}$-模，因此有

$$H^2(G_{\Omega/E}, \mu_\ell) \cong H^2(H, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong H^2(G_{\Xi/F}, \mu_\ell) \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

其中最后一个同构用到了引理 5.3。

对于 E/K 的每个子扩张 L/K，我们将群 $H^2(G_{\Omega/L}, \mu_\ell)$ 记为 $\mathcal{H}_L$，将群 $H^2(G_{\Omega^{\mathfrak{q}}/L_{\mathfrak{q}}}, \mu_\ell)$ 记为 $\mathcal{H}_{L,\mathfrak{q}}$。当 L/K 有限时，定理 4.3 给出一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_L & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}(L)} \mathcal{H}_{L,\mathfrak{q}} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \underset{[\ell]}{\succ} \Omega/L \text{ 的布劳尔群} & \underset{[\ell]}{\longrightarrow} & \succ \bigoplus_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}(L)} \text{布劳尔群}(\Omega^{\mathfrak{q}}/L_{\mathfrak{q}}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \end{array}$$

并通过限制映射对 $K \subseteq L \subseteq E$ 取直接极限，我们得到具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_E & \longrightarrow & \varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \bigoplus_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}(L)} \mathcal{H}_{L,\mathfrak{q}} & \longrightarrow & \varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}(\Omega/E)[\ell] & \longrightarrow & \varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \bigoplus_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}(L)} \mathrm{Br}(\Omega^{\mathfrak{q}}/L_{\mathfrak{q}})[\ell] & \longrightarrow & \varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \end{array}$$

左侧各项由引理 5.2 计算。回忆一下，$\mathcal{H}_E \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$。此外，根据 Brauer 正合序列的经典理论，底行中的极限 $\varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$是相对于乘以次数的映射取的。因此，若 $\ell^\infty \nmid [E:K]$，则它同构于 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$；否则为 0。当然，顶行中的极限 $\varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 也同样如此。由此可得 $\varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \bigoplus_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}(L)} \mathcal{H}_{L,\mathfrak{q}}$ 是 $\mathbb{F}_\ell$ 上的向量空间；当 $\ell^\infty \nmid [E:K]$ 时，其维数为 2，否则为 1。记其维数为 d。

对于有限子集 $T \subseteq \mathcal{P}(E)$，存在一个同态

$$\pi_T : \varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \bigoplus_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}(L)} \mathcal{H}_{L,\mathfrak{q}} \to \bigoplus_{\mathfrak{Q}\in T} \mathcal{H}_{E,\mathfrak{Q}}$$

该同态由限制映射诱导。由于限制映射 $T \to \mathcal{P}(L)$ 在 L 足够大时是单射，并且 $\varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \mathcal{H}_{L,\mathfrak{Q}|_L} \cong \mathcal{H}_{E,\mathfrak{Q}}$，映射 π_T 是满射。特别地，我们得到对于每个有限子集 $T \subseteq \mathcal{P}(E)$，$\bigoplus_{\mathfrak{Q}\in T} \mathcal{H}_{E,\mathfrak{Q}}$ 的维数至多为 d；因此，对于无限直和 $\bigoplus_{\mathfrak{Q}\in\mathcal{P}(E)} \mathcal{H}_{E,\mathfrak{Q}}$，同样成立。

特别地，可知存在一个赋值 $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}(K)\setminus S(K)$，使得对于每个 $\mathfrak{Q} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{q}}(E)$，$\mathcal{H}_{E,\mathfrak{Q}} = 0$。由引理 5.3，我们看到对于每个 $\mathfrak{Q} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{q}}(E)$，$\ell^\infty \mid [E_{\mathfrak{Q}} : K_{\mathfrak{q}}]$；由引理 5.5，这意味着$\ell^\infty \mid [E:K]$。因此，$\varinjlim \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 消失。于是，$d = 1$。

假设（为求矛盾）$\mathcal{H}_{E,\mathfrak{P}}$ 对所有$\mathfrak{P} \in \mathcal{P}(E)$ 都为零。我们将证明直和 $\varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \bigoplus_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}(L)} \mathcal{H}_{L,\mathfrak{q}}$ 也为零。令 L/K 为 E/K的一个有限子扩张，令$\mathfrak{q} \in \mathcal{P}(L)$为任意赋值，并令 $\alpha \in \mathcal{H}_{L,\mathfrak{q}}$。对于 E/L的任意有限子扩张 L'/L，考虑子集$U_{L'} \subseteq \mathcal{P}_{\mathfrak{q}}(E)$，它由满足以下条件的赋值 $\mathfrak{Q}$ 组成：α 在到 $\mathcal{H}_{L',\mathfrak{Q}|_{L'}}$的限制映射下为零。这些都是开子集，并且构成 $\mathcal{P}_{\mathfrak{q}}(E)$的一个开覆盖，因为 $\varinjlim_{K\subseteq L'\subseteq E} \mathcal{H}_{L',\mathfrak{Q}|_{L'}} \cong \mathcal{H}_{E,\mathfrak{Q}} = 0$。我们有 $U_{L'_1} \cup U_{L'_2} \subseteq U_{L'_1 L'_2}$，由 $\mathcal{P}_{\mathfrak{q}}(E)$的紧致性可知，存在 E/L 的一个有限子扩张L'/L，使得 α 在到 $\bigoplus_{\mathfrak{Q}\in\mathcal{P}_{\mathfrak{q}}(L')} \mathcal{H}_{L',\mathfrak{Q}}$的限制映射下为零。这意味着 $\varinjlim_{K\subseteq L\subseteq E} \bigoplus_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}(L)} \mathcal{H}_{L,\mathfrak{q}}$ 消失了，这与 $d = 1$ 矛盾。

我们发现，存在唯一的 $\mathfrak{P}_E \in \mathcal{P}(E)$ 使得 $\mathcal{H}_{E,\mathfrak{P}_E} \neq 0$。注意，对于 Ω/E 的任意有限子扩张E'/E，将相同的论证应用于 $H' = G_{\Omega/E'}$，可知存在唯一的 $\mathfrak{P}_{E'} \in \mathcal{P}(E')$ 使得 $\mathcal{H}_{E',\mathfrak{P}_{E'}} \neq 0$。

若事实是 $\mathfrak{P}_E \in \mathcal{P}(E) \setminus S(E)$，那么引理 3.5 和推论 5.4 将推出，任意$\widetilde{\ }$赋值 $\mathfrak{P}_E \in \mathcal{P}_{\mathfrak{P}_E}(E')$ 都满足 $\mathcal{H}_{E',\widetilde{\mathfrak{P}_E}} \neq 0$。由 $\mathfrak{P}_{E'}$ 的唯一性可知，$\mathfrak{P}_E$ 是不可分解的

对每个有限的 $E \subseteq E' \subseteq \Omega$， E' 都成立，因而在 Ω 中也成立。这就完成了 $\mu_\ell \subseteq K$、 $\mu_\ell \subseteq F$ 以及 $\mathfrak{P}_E \in \mathcal{P}(E) \setminus S(E)$ 情形的证明。

现在，假设 $\mathfrak{P}_E \in S(E)$。由此可知，对于 Ω/E 的每个有限子扩张 E'/E，都有 $\mathfrak{P}_{E'} \in S(E')$；否则，引理 3.5 和推论 5.4 将推出 $\mathcal{H}_{E,\ \mathfrak{P}_{E'|E}} \neq 0$，这与 $\mathfrak{P}_E$ 的唯一性矛盾。

对于 Ω/E 的有限伽罗瓦子扩张 E'/E，以及 E' 中位于 $\mathfrak{P}_{E'|E}$ 之上的任意两个赋值 $\mathfrak{P}_1$，$\mathfrak{P}_2$，我们有 $G_{\Omega^{\mathfrak{P}_1}/E'_{\mathfrak{P}_1}} \cong G_{\Omega^{\mathfrak{P}_2}/E'_{\mathfrak{P}_2}}$（作为群的同构类型），因为它们在 $G_{\Omega/E}$ 中共轭。因此，$\mathcal{H}_{E',\ \mathfrak{P}_1} \cong \mathcal{H}_{E',\ \mathfrak{P}_2}$。然而，对于 $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{E'}$，$\mathcal{H}_{E',\ \mathfrak{P}}$ 非零，而对于位于 $\mathfrak{P}_{E'|E}$ 之上的任何其他赋值，它为零。由此可知，$\mathfrak{P}_{E'|E}$ 在 E' 中是不可分解的。

因此，我们已经证明，对于 Ω/E 的每个有限伽罗瓦子扩张 E'/E，在$S(E)$ 中都存在一个在 E' 中不可分解的赋值。通过考察这些扩张的伽罗瓦闭包，这一性质对任意有限子扩张也成立。由命题 5.7 可知，在 $S(E)$ 中存在一个在 Ω 中不可分解的赋值，从而完成了 $\mu_\ell \subseteq K$ 和 $\mu_\ell \subseteq F$ 的情形下的证明。

现在我们将一般情形归结为刚刚证明的情形。令 $K' = K(\mu_\ell)$。那么 $G_{\Omega/K'}$ 是 $G_{\Omega/K}$ 的一个开~子群。因此，存在 Ξ/F 的一个有限子扩张 F/F，使得 $G_{\Xi/\widetilde{F}} \cong H \cap G_{\Omega/K'}$。令~$F' = F(\mu_\ell)$。那么 $G_{\Xi/F'}$同构于一个子群 $H' \leq G_{\Omega/K'}$，该子群是 H 的一个开子群。根据刚刚证明的情形，存在 Ω 的一个赋值 $\mathfrak{P}$，使得 $H' \leq G_{\Omega/K',\ \mathfrak{P}}$。

令 $h \in H$。 H' 和 ${}^hH'$ 都是 H的开子群，因此 $H' \cap {}^hH'$ 也是H的开子群。特别地，它在 H中的指数有限，因此 $\ell^\infty \mid \left|H' \cap {}^hH'\right|$。由于$H' \subseteq G_{\Omega/K',\ \mathfrak{P}}$ 且${}^hH' \subseteq G_{\Omega/K',\ h(\mathfrak{P})}$，命题 5.1 推出 $h(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$。由于这对每个 $h \in H$都成立，我们便有$H \leq G_{\Omega/K,\ \mathfrak{P}}$，如所要求。□

6. Characteristic Detection

定义 6.1. 若代数扩张 $\Xi/\mathbb{Q}_p$ 包含 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}$或 $\mathbb{Q}_p$的 $\mathbb{Z}_p^2$-扩张，我们就称其为丰沛。若代数扩张 $\Omega/\mathbb{Q}$ 满足：对于除去一个零密度集合外的所有有理素数p，以及所有 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_p(\Omega)$，域 $\Omega^{\mathfrak{P}}$ 都是丰沛的，则称代数扩张 $\Omega/\mathbb{Q}$ 为丰沛。

这个定义的动机在于：对于有限扩张 $F/\mathbb{Q}_p$ 和丰沛的伽罗瓦扩张 Ξ/F，群 $G_{\Xi/F}$ 无法嵌入任何形如 $G_{\Xi'/F'}$ 的伽罗瓦群，其中 F' 是剩余特征不同的局部域。特别地，群 $G_{\Xi/F}$ 决定了 p。这就是命题 6.7。

例 6.2. 域 $\mathbb{Q}(\mu_\infty)$ 和 $\mathbb{Q}^{\mathrm{tame}}$ 都是丰沛的（它们的代数扩张也都是如此）。

证明. $\mathbb{Z}_p^2$-扩张 $\mathbb{Q}_p$ 是非分歧的 $\mathbb{Z}_p$-扩张与由 μ_{p^∞}导出的全野分歧 $\mathbb{Z}_p$-扩张的合成。这两个扩张都包含在 $\mathbb{Q}_p(\mu_\infty)$ 中，说明 $\mathbb{Q}(\mu_\infty)$ 是丰沛的。为证明 $\mathbb{Q}^{\mathrm{tame}}$ 是丰沛的，我们将证明，对于每个剩余特征为 p的 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{tame}})$，都有 $(\mathbb{Q}^{\mathrm{tame}})_{\mathfrak{P}} \cong \mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}$。这由下一个引理得出。□

引理 6.3。设 K 是一个数域，设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(K)$，且设 $F/K_{\mathfrak{p}}$ 是一个次数为 d 的有限驯分歧扩张。则存在一个次数为 d 的有限驯分歧扩张 L/K，其中 $\mathfrak{p}$ 是不可分解的，并且存在一个 $K_{\mathfrak{p}}$-代数的同构 $F \cong L^{\mathfrak{p}}$。这里， $L^{\mathfrak{p}}$ 表示 L 在位于 $\mathfrak{p}$ 之上的唯一赋值处的完备化。

证明。 若 $\mathfrak{p}$ 是复阿基米德赋值，我们可以取 $L = K$。若 $\mathfrak{p}$ 是实阿基米德赋值，我们可以取 $L = K(\mu_3)$。因此，我们可以假设 $\mathfrak{p}$ 是一个非阿基米德赋值。由本原元定理，存在 $\alpha \in F$ 使得 $F = K_{\mathfrak{p}}(\alpha)$。令 $f_{\mathfrak{p}} \in K_{\mathfrak{p}}[X]$ 为α的最小多项式，则 $\deg(f_{\mathfrak{p}}) = d$ 且 $F \cong K_{\mathfrak{p}}[X]/(f_{\mathfrak{p}})$。令 S 为所有小于或等于 d的有理素数的集合。对每个满足 $\mathfrak{q} \in S(K) \setminus \{\mathfrak{p}\}$的素数 $\mathfrak{q} \in S$，取一个次数为 d 的首一不可约多项式 $f_{\mathfrak{q}} \in K_{\mathfrak{q}}[X]$，使得 $K_{\mathfrak{q}}[X]/(f_{\mathfrak{q}})$同构于 $K_{\mathfrak{q}}$ 的次数为 d的非分歧扩张。由中国剩余定理，存在次数为 d 的首一多项式 $f \in K[X]$，它在 $K_{\mathfrak{q}}[X]$中与 $f_{\mathfrak{q}}$ 任意接近

对每个 $\mathfrak{q} \in S(K)$均成立。由克拉斯纳引理，我们可以假设 f 在 $K_{\mathfrak{q}}[X]$中不可约，且对每个 $\mathfrak{q} \in S(K)$，$K_{\mathfrak{q}}[X]/(f) \cong K_{\mathfrak{q}}[X]/(f_{\mathfrak{q}})$。令 $L = K[X]/(f)$。那么， L/K是一个次数为 d的扩张，其中 $\mathfrak{p}$ 是不可分解的，且 $L^{\mathfrak{P}} \cong F$；此外， L/K 在 $S(K) \setminus \{\mathfrak{p}\}$的每个素点处均非分歧（特别是温和分歧）。考虑 L，即 L/K的伽罗瓦闭包。由于两个驯分歧扩张的合成仍是驯分歧的，因此 L/K 在 $S(K)$处驯分歧。~然而，L/K 是次数整除 $d!$的伽罗瓦扩张，因此在所有不整除 $d!$的素数~处均驯分歧，而这些素数恰好是 $S(K)$之外的素数。这表明 L/K 是驯分歧的，因而 L/K 也是驯分歧的。证明完毕。□

注记 6.4。 例 6.2 中的域 Ω 满足如下性质：对于每个 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$，$\Omega^{\mathfrak{P}}$ 都是丰沛的，尽管定义只要求这一性质对位于密度为一的有理素数集合之上的 $\mathfrak{P}$ 成立。

The 下一个引理汇集了关于赋范群的 p-西洛子群的标准事实 s.

引理 6 .5. 设 $\pi : G' \to G$ 是赋范群之间的满射。设 p 是一个素数 r.

(1) 若 $P \leq G$ 是一个 *pro-*p 子群，则存在一个 *pro-*p 子群 $P' \leq G'$，使得 $\pi(P') = P$。*(2)* 若 $P' \leq G'$ 是一个 p-西洛子群，则 $\pi(P') \leq G$ 是一个 p-西洛子群。*(3)* 若 $p \nmid |\ker(\pi)|$，则 G' 的 p-西洛子群与 G 的西洛子群同构。

证明。 根据 [14, 2.3.6], ，任意赋范群都有一个 p-西洛子群，且所有 p-西洛子群都彼此共轭，因此 p-西洛子群的同构类型是良定义的。

对于第一部分，令 P' 为 $\pi^{-1}(P)$ 的一个 p-西洛子群。由于 $[P\colon \pi(P')] \mid [\pi^{-1}(P)\colon P']$ 且 $p \nmid [\pi^{-1}(P)\colon P']$，我们得到 $p \nmid [P\colon \pi(P')]$,，因此 $\pi(P') = P$。对于第二部分，同理可得 $[G\colon \pi(P')] \mid [G'\colon P']$ 且 $p \nmid [G'\colon P']$，从而 $p \nmid [G\colon \pi(P')]$ 且 $\pi(P') \leq G$ 是一个 p-西洛子群。对于第三部分，令 $P' \leq G'$ 为一个 p- 西洛子群。则 $\pi|_{P'}\colon P' \to \pi(P')$ 是从 G' 的一个 p- 西洛子群到 G 的一个 p- 西洛子群的满射。然而，$\ker(\pi|_{P'}) = \ker(\pi) \cap P'$ 由 $p \nmid |\ker(\pi)|$可知是平凡的，因此 $\pi|_{P'}$ 实际上是一个同构。□

对于一个具有伽罗瓦扩张 Ξ/F 的有限扩张 $F/\mathbb{Q}_p$，我们定义 $I_{\Xi/F} = G_{\Xi/\Xi\cap F^{\mathrm{ur}}}$（惯性子群）和 $W_{\Xi/F} = G_{\Xi/\Xi\cap F^{\mathrm{tame}}}$（野分歧子群）。

设 r 是素数， n 是一个不能被 r 整除的正整数，且 Z 是一个带有指定拓扑生成元 $1 \in Z$ 的前循环群 ˆ（例如 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}_p$），使得 n 在 $\mathbb{Z}_r^\times \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ 中的阶整除 $|Z|$。那么我们记 $\mathbb{Z}_r \rtimes_n Z$ 为半直积，其中 $1 \in Z$ 通过乘以 n 的方式作用于 $\mathbb{Z}_r$。

引理 6.6。 设 F 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其剩余域的大小为 q，设 Ξ/F 是一个伽罗瓦扩张，且 $r \neq p$ 是一个素数。那么：

(1) $I_{F/F}$的 r-西洛子群同构于 $\mathbb{Z}_r$，而 $G_{F/F}$的 r-西洛子群同构于 $\mathbb{Z}_r \rtimes_{q^{r-1}} \mathbb{Z}_r$。*(2)* 若 Ξ 包含 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}$，则存在单射 $\mathbb{Z}_r \rtimes_q \hat{\mathbb{Z}} \to G_{\Xi/F}$。ˆ*(3)* 若 $n > 1$ 是一个与 r 互素的整数，且存在单射 $\mathbb{Z}_r \rtimes_n \mathbb{Z} \to G_{\Xi/F}$，则存在ˆ $u \in \mathbb{Z}$，使得 $n = q^u$ 属于 $\mathbb{Z}_r$。

证明。 对于第一部分，注意野分歧子群 $W_{F/F}$包含于 $I_{F/F}$且正规于 $G_{F/F}$，是一个 pro-p 群。因此，由引理 6.5 可知， $I_{F/F}$和$G_{F/F}$的 r-西洛子群分别同构于 $I_{F^{\mathrm{tame}}/F}$和 $G_{F^{\text{温和}}/F}$的 r-西洛子群。

由于 $I_{F^{\mathrm{tame}}/F} \cong \prod_{r' \neq p} \mathbb{Z}_{r'}$，$I_{F^{\text{驯性}}/F}$ 的 r-西洛子群同构于 $\mathbb{Z}_r$。此外，与 $\prod_{r' \neq p,\ r} \mathbb{Z}_{r'}$ 对应的子群 $N \leq G_{F^{\text{驯性}}/F^{\mathrm{ur}}}$ 是 $G_{F^{\text{驯性}}/F}$ 的正规子群，并且满足 $r \nmid |N|$。根据引理 6.5，$G_{F^{\text{驯性}}/F}$ 的 r-西洛子群同构于 $G_{F^{\mathrm{tame}}/F}/N \cong \mathbb{Z}_r \rtimes_q \mathbb{Z}$ 的相应子群。令 ˆ ˆτ， $\sigma \in \mathbb{Z}_r \rtimes_q \mathbb{Z}$ 分别为 $\mathbb{Z}_r$ 部分和 $\mathbb{Z}$ 部分的拓扑生成元，其中 ${}^{\sigma}\tau = \tau^q$。令 $u \in \hat{\mathbb{Z}}$ 为概形整数，它在 $\mathbb{Z}_r$ 中与 $r-1$ 等价，并且对于每个素数 $r' \neq r$，在 $\mathbb{Z}_{r'}$ 中等于 0。

于是 σ^u 生成 $\mathbb{Z}$ 的 r-西洛子群；又由于 $u \equiv r-1$（模 $(r-1)r^\infty$）（这是 $\mathbb{Z}_r^\times$ 的阶），我们有 ${}^{\sigma^u}\tau = {}^{\sigma^{r-1}}\tau = \tau^{q^{r-1}}$。由此可得 $\langle \tau,\ \sigma^u\rangle \cong \mathbb{Z}_r \rtimes_{q^{r-1}} \mathbb{Z}_r$。由于这是 $\mathbb{Z}_r \rtimes_q \mathbb{Z}$ 的一个正规子群，且其商群与 r 互素，因此它是唯一的 r-西洛子群。这就证明了第一部分。

对于第二部分，考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I_{\Xi/F} & \longrightarrow & G_{\Xi/F} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi_I} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_G} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot f} & & \\ 0 & \longrightarrow & I_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}/\mathbb{Q}_p} & \longrightarrow & G_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}/\mathbb{Q}_p} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $f = f_{F/\mathbb{Q}_p} = \log_p q$ 和 ϕ_I，ϕ_G 具有开像（指标分别为 $e_{F\cap\mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}/\mathbb{Q}_p}$ 和 $[F\cap\mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}:\ \mathbb{Q}_p]$）。

令 $R \le I_{\Xi/F}$ 为一个 r-Sylow 子群。考虑满射 $I_{F/F} \to I_{\Xi/F}/I_{F/F}$ 的 r-Sylow 子群与 $\mathbb{Z}_r$ 同构，因此根据引理 6.5，R 与 $\mathbb{Z}_r$ 的一个商群同构。然而，$I_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}/\mathbb{Q}_p}$ 的 r-Sylow 子群也与 $\mathbb{Z}_r$ 同构，因此 $\phi_I(R)$ 与 $\mathbb{Z}_r$ 的一个开子群同构。这表明 $R \cong \mathbb{Z}_r$。

令 $\sigma \in G_{\Xi/F}$ 为 Frobenius 元素，$\phi(\tau)$ 的一个原像 $\in \mathbb{Z}$。并令 $G_{\Xi/F}$ 为 τ 生成元素，$\phi(\tau)$ 的一个原像 σ。由于 $\hat{R},\ {}^\sigma R$ 是 $I_{\Xi/F}$ 的两个 r-西洛子群，因此存在 $x \in I_{\Xi/F}$ 使得 ${}^{x\sigma}R = R$。记 $\sigma' = x\sigma$。于是我们有 ${}^{\sigma'}\tau \in R$，并且还有 $\phi_I({}^{\sigma'}\tau) = \phi_I(\tau)^q$。由于 $R \cong \mathbb{Z}_r$，我们发现 ϕ_I 在 R 上是单射的，这意味着 ${}^{\sigma'}\tau = \tau^q$。因此，$\langle \tau,\ \sigma'\rangle \cong \mathbb{Z}_r \rtimes_q \hat{\mathbb{Z}}$，从而证明了第二部分。

对于第三部分，假设 $\mathbb{Z}_r \rtimes_n \hat{\mathbb{Z}} \cong \langle a,\ b \mid a^{r^\infty} = e,\ {}^b a = a^n\rangle$ 嵌入 $G_{\Xi/F}$，并将 a、b 在 $G_{\Xi/F}$ 中的像分别记为 τ、σ。

考虑短正合列 $0 \to I_{\Xi/F} \to G_{\Xi/F} \xrightarrow{j} G_{\Xi/F}/I_{\Xi/F} \to 0$。由于 j 的陪域是阿贝尔的，我们有 $j(\tau) = j({}^\sigma\tau) = j(\tau)^n$，这意味着 $j(\tau^{n-1}) = e$。注意，还有另一个单射 $\mathbb{Z}_r \rtimes_n \hat{\mathbb{Z}} \to G_{\Xi/F}$，将 $a \mapsto \tau^{n-1}$ 和 $b \mapsto \sigma$ 映至相应元素。因此，我们可以不失一般性地假设 $\tau \in I_{\Xi/F}$。

令 $\sigma_0 \in G_{\Xi/F}$ 表示 $G_{\Xi/F}/I_{\Xi/F}$ 中 Frobenius 元素的一个原像。则存在 $u \in \mathbb{Z}$ 使得 $\sigma \cdot \sigma_0^{-u} \in I_{\Xi/F}$。考虑商映射 $\pi\colon G_{\Xi/F} \to G_{\Xi/F}/W_{\Xi/F}$。注意，对每个 $x \in I_{\Xi/F}$，都有 $\pi(\sigma_0 x) = \pi(x)^q$，因此 $\pi(\tau)^n = \pi({}^\sigma\tau) = \pi({}^{(\sigma\sigma_0^{-u})\sigma_0^u}\tau) = \pi(\tau)^{q^u}$。由于 π 的核是一个 pro-p 群，其在 $\langle\tau\rangle$ 上的限制是单射，这意味着 $\tau^n = \tau^{q^u}$，从而 $n = q^u$ 属于 $\mathbb{Z}_r$。□

命题 6.7。设 F 和 F' 是特征零的非阿基米德局部域，设 Ξ/F 和 Ξ'/F' 是伽罗瓦扩张，且 Ξ 丰沛。假设存在一个赋范群嵌入 $\alpha\colon G_{\Xi/F} \to G_{\Xi'/F'}$。则 F 和 F' 具有相同的剩余特征。

证明。记 F，F' 的剩余特征分别为 p，p'，并记它们的剩余域大小分别为 q，q'。为导出矛盾，假设 $p \ne p'$。

首先，假设 Ξ 包含 $\mathbb{Z}_p^2$-扩张 $E/\mathbb{Q}_p$。考虑自然的连续同态 $\phi\colon G_{EF/F} \to G_{E/\mathbb{Q}_p} \cong \mathbb{Z}_p^2$。由于 $[F:\ \mathbb{Q}_p] < \infty$，可知 ϕ 具有开像。由于 $\mathbb{Z}_p^2$ 的开子群同构于 $\mathbb{Z}_p^2$，我们得到 $G_{EF/F}$，因此 $G_{\Omega/F}$ 具有一个与 $\mathbb{Z}_p^2$ 同构的商群。由引理 6.5 可知，存在一个 pro-p 子群 $P_0 \le G_{\Xi/F}$，其商群同构于 $\mathbb{Z}_p^2$。再次将引理 6.5 应用于 $\alpha(P_0) \le G_{\Xi'/F'}$ 以及满射 $G_{F'/F'} \to G_{\Xi'/F'}$，我们得到存在一个 pro-$p$ 子群 $P \le G_{F'/F'}$，其商群同构于 $\mathbb{Z}_p^2$。设 $\widetilde{P} \le G_{F'/F'}^{\sim}$ 是一个包含 P 的 p-Sylow 子群。由于 $p \ne p'$，根据引理 6.6 的第一部分，我们有 $P \cong \mathbb{Z}_p \rtimes_{(q')^{p-1}} \mathbb{Z}_p$。

设 τ, σ 表示对应于半直积结构的生成元，使得 $\langle\tau\rangle \cong \langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}_p$、${}^\sigma\tau = \tau^{(q')^{p-1}}$、$\langle\tau,\ \sigma\rangle = \widetilde{P}$ 以及 $\langle\tau\rangle \cap \langle\sigma\rangle = \{e\}$。考虑商映射 $\pi\colon \widetilde{P} \to$

$\widetilde{P}/\langle\tau\rangle$。由于 P有一个同构于 $\mathbb{Z}_p^2$的商群，因此它不能包含在前循环群 $\langle\tau\rangle$中，所以$\pi(P) \neq \{e\}$。由于 $\widetilde{P}/\langle\tau\rangle = \langle\pi(\sigma)\rangle \cong \mathbb{Z}_p$，存在一个整数 $k \geq 0$，使得 $\pi(P) = \langle\pi(\sigma^{p^k})\rangle$。令 $\Sigma \in P$为 $\pi(\sigma^{p^k})$的一个原像，并令 $T \in P$为前循环群 $P \cap \langle\tau\rangle$的一个生成元。于是有$P = \langle T,\ \Sigma\rangle$ 以及 ${}^{\Sigma}T = T_{(q')^{(p-1)p^k}}$。由此可知，$P^{\mathrm{ab}}$是 $\mathbb{Z}_p/((q')^{(p-1)p^k} - 1) \times \mathbb{Z}_p$的一个商群。该群没有同构于 $\mathbb{Z}_p^2$的商群，这就产生了矛盾。这表明，在 Ξ 包含 $\mathbb{Q}_p$的 $\mathbb{Z}_p^2$-扩张的情形下，$p = p'$。

现在假设 Ξ包含 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}$。设 ℓ是一个不整除 $p \cdot \log_p q$ 的素数。考虑数域 $K = \mathbb{Q}(\mu_\ell, (q')^{\frac{1}{\ell}})$ 和 $L = \mathbb{Q}(\mu_\ell, (q')^{\frac{1}{\ell}}, q^{\frac{1}{\ell}})$。注意到 ${}^{-}L$在 p处分歧，而 K不分歧，因此 $K \subsetneq L$。由于 K 和 L 在 $\mathbb{Q}$上是伽罗瓦扩张，切博塔廖夫密度定理意味着存在无穷多个有理素数，它们在 K 中完全分裂，但在 L中不完全分裂。取这样一个素数 $r \neq p, p'$。分裂条件等价于 $r \equiv 1$ (模 ℓ)，其中 q' 是模 r的一个 ℓ 次幂，而 q 不是模 r的 ℓ 次幂。由引理 6.6 的第二部分可知，$\mathbb{Z}_r \rtimes_q \mathbb{Z}$ 嵌入到 $G_{\Xi/F}$ 中，因此也嵌入到 $G_{\Xi'/F'}$ 中；由引理 6.6 的第三部分可知，q 属于由 q' 生成的 $\mathbb{Z}_r^\times$ 的素循环子群。然而，这是不可能的，因为 q' 是模 r 的一个 ℓ 次幂，而 q 不是。这个矛盾表明，在 Ξ 包含 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}$ 的情形下，$p = p'$，从而完成证明。□

由此推论可得定理 5.8 的一个加强版本，适用于 ℓ-封闭且丰沛的扩张。

推论 6.8. 沿用定理 *5.8* 中的记号，假设 Ξ 丰沛。那么 F 和 $\mathfrak{P}$ 具有相同的剩余特征。

证明. 由于 $G_{\Xi/F} \cong H \leq G_{\Omega/K,\ \mathfrak{P}} \cong G_{\Omega_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{P}|_K}}$，结论由命题 6.7 得出。 □

7. Prime Bijection

定义 7.1. 设 Ω_1/K_1 和 Ω_2/K_2 是伽罗瓦扩张，且 $\alpha : G_{\Omega_1/K_1} \to G_{\Omega_2/K_2}$是赋范群的一个同构。于是，由伽罗瓦对应可知，$\Omega_1/K_1$ 的子扩张格与 Ω_2/K_2 的子扩张格之间存在一个保序双射，我们也将其记作 α。

注意 $\alpha(L \cap L') = \alpha(L) \cap \alpha(L')$, $\alpha(L \cdot L') = \alpha(L) \cdot \alpha(L')$, $\alpha(G_{\Omega_1/L}) = G_{\Omega_2/\alpha(L)}$, $\alpha(g(L)) = \alpha(g)(\alpha(L))$, and $[\alpha(L') : \alpha(L)] = [L' : L]$.

命题 7.2. 设 K_1, K_2 是数域，且 Ω_i/K_i 是伽罗瓦扩张，对于某个由有理素数组成的有限集 S，它们相对于 S 是 ℓ-封闭且丰沛的。假设 $\alpha : G_{\Omega_1/K_1} \to G_{\Omega_2/K_2}$是有限生成群之间的同构。那么存在一个全密度的有理素数集 R，与 S不相交；并且在子扩张 $\Omega_1/L/K_1$上存在双射族 $R(L) \to R(\alpha(L))$，记作 α，满足以下性质：

(1) 若 L/K_1 是伽罗瓦扩张，则对于 $\mathfrak{p} \in R(L)$，有 $\alpha(G_{L/K_1,\mathfrak{p}}) = G_{\alpha(L)/K_2,\alpha(\mathfrak{p})}$。*(2)* 这些双射保持剩余特征。*(3)* 对于 $g \in G_{\Omega_1/K_1}$ 和 $\mathfrak{p} \in R(L)$，有 $\alpha(g\mathfrak{p}) = \alpha(g)\alpha(\mathfrak{p})$（作为 $\alpha(g(L)) = \alpha(g)(\alpha(L))$ 的素点）。*(4)* 对于子扩张 $\Omega_1/L'/L/K_1$ 和 $\mathfrak{p} \in R(L')$，有 $\alpha(\mathfrak{p}|_L) = \alpha(\mathfrak{p})|_{\alpha(L)}$ 且 $[\alpha(L')^{\alpha(\mathfrak{p})} : \alpha(L)^{\alpha(\mathfrak{p}|_L)}] = [L'_{\mathfrak{p}} : L_{\mathfrak{p}|_L}]$。

证明。令 R 为有理素数的全密度集合 p，其中不包含 S，使得对于每个 $\mathfrak{P}_1 \in \mathcal{P}_p(\Omega_1)$ 和 $\mathfrak{P}_2 \in \mathcal{P}_p(\Omega_2)$，域 $(\Omega_1)_{\mathfrak{P}_1}$ 和 $(\Omega_2)_{\mathfrak{P}_2}$ 都是丰沛的。我们首先为满足前三个条件的 $L = \Omega_1$ 构造一个双射。令 $\mathfrak{P} \in R(\Omega_1)$。根据引理 3.5，我们有 $\mu_\ell \subseteq (\Omega_1)_{\mathfrak{P}}$ 和 $(\Omega_1)_{\mathfrak{P}}^\times = (\Omega_1)_{\mathfrak{P}}^{\times\ell}$。因此，将定理 5.8 应用于闭子群 $\alpha(G_{\Omega_1/K_1,\ \mathfrak{P}}) \leq G_{\Omega_2/K_2}$ 可知，存在唯一的非阿基米德赋值 $\mathfrak{Q}$ of Ω_2，使得 $\alpha(G_{\Omega_1/K_1,\ \mathfrak{P}}) \subseteq G_{\Omega_2/K_2,\ \mathfrak{Q}}$。于是，推论 6.8 表明 $\mathfrak{Q}$ 和 $\mathfrak{P}$ 具有相同的剩余特征，这尤其意味着

$\mathfrak{Q} \in R(\Omega_2)$。这定义了一个映射 $\alpha: R(\Omega_1) \to R(\Omega_2)$，该映射保持剩余特征，并具有性质 $\alpha(G_{\Omega_1/K_1,\ \mathfrak{P}}) \subseteq G_{\Omega_2/K_2,\ \alpha(\mathfrak{P})}$。

类似地，我们可以定义映射 $\alpha^{-1}: R(\Omega_2) \to R(\Omega_1)$，使得对每个 $\mathfrak{Q} \in R(\Omega_2)$，都有 $\alpha^{-1}(G_{\Omega_2/K_2,\mathfrak{Q}}) \subseteq G_{\Omega_1/K_1,\alpha^{-1}(\mathfrak{Q})}$。将它们复合可得 $G_{\Omega_1/K_1,\mathfrak{P}} \subseteq G_{\Omega_1/K_1,\alpha^{-1}(\alpha(\mathfrak{P}))}$。根据定理 5.8 的唯一性，这意味着 $\alpha^{-1}(\alpha(\mathfrak{P})) = \mathfrak{P}$。类似地，对每个 $\mathfrak{Q} \in R(\Omega_2)$，我们有 $\alpha(\alpha^{-1}(\mathfrak{Q})) = \mathfrak{Q}$，因此 α 和 α^{-1} 互为逆双射。我们还得到 $\alpha(G_{\Omega_1/K_1,\mathfrak{P}}) = G_{\Omega_2/K_2,\alpha(\mathfrak{P})}$。由此可知，$\alpha: R(\Omega_1) \to R(\Omega_2)$ 满足第一和第二个性质。对于第三个性质，注意到

$$\alpha(G_{\Omega_1/K_1,g\mathfrak{P}}) = \alpha\left({}^{g}G_{\Omega_1/K_1,\mathfrak{P}}\right) = {}^{\alpha(g)}\alpha(G_{\Omega_1/K_1,\mathfrak{P}}) = {}^{\alpha(g)}G_{\Omega_2/K_2,\alpha(\mathfrak{P})} = G_{\Omega_2/K_2,\alpha(g)(\alpha(\mathfrak{P}))}$$

并利用定理 5.8 中的唯一性。

现在，令 $\Omega_1/L/K_1$ 为一个子扩张，并令 $\mathfrak{p} \in R(L)$。设 $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(\Omega_1)$。于是存在某个 $g \in G_{\Omega_1/L}$ 满足 $g\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$，因此 $\alpha(\mathfrak{P}_2) = \alpha(g)\alpha(\mathfrak{P}_1)$。由于 $\alpha(g)|_{\alpha(L)} = \mathrm{id}^{\alpha(L)}$，这意味着$\alpha(\mathfrak{P}_2)|_{\alpha(L)} = \alpha(\mathfrak{P}_1)|_{\alpha(L)}$。由此，我们得到一个定义良好的映射 $\alpha: R(L) \to R(\alpha(L))$，它将任意 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(\Omega_1)$ 中的 $\mathfrak{p}$ 映至$\alpha(\mathfrak{P})|_{\alpha(L)}$。对于一般的 L，前三个性质可由$L = \Omega_1$ 情形限制得到。对于第四个性质，根据定义，显然有 $\alpha(\mathfrak{p}|_L) = \alpha(\mathfrak{p})|_{\alpha(L)}$。令$\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(\Omega_1)$。那么

$$[\alpha(L')_{\alpha(\mathfrak{p})} : \alpha(L)_{\alpha(\mathfrak{p}|_L)}] = [G_{\Omega_2/\alpha(L),\alpha(\mathfrak{P})} : G_{\Omega_2/\alpha(L'),\alpha(\mathfrak{P})}] = [G_{\Omega_1/L,\mathfrak{P}} : G_{\Omega_1/L',\mathfrak{P}}] = [L'_{\mathfrak{p}} : L_{\mathfrak{p}|_L}].$$

□

推论 7.3. 设 K_1, K_2 为数域，并设 Ω_i/K_i 为 ℓ-封闭且丰沛的伽罗瓦扩张。假设 $\alpha: G_{\Omega_1/K_1} \to G_{\Omega_2/K_2}$ 是赋范群之间的同构。那么 K_1 与 K_2 算术等价。

证明。根据命题 7.2，存在一个全密度的有理素数集合 R，以及一个保持剩余特征的双射 $\alpha: R(K_1) \to R(K_2)$。特别地，对于每个 $p \in R$，K_1 和 K_2 在 p 上方的素点数目相同。根据 [16], 的主定理，这意味着 K_1 和 K_2在算术上等价。□

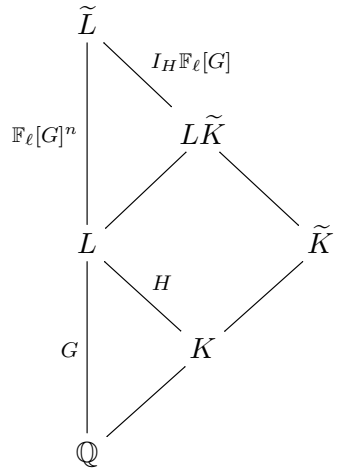
8. Weak Neukirch-Uchida

设 G 是一个有限群。我们将 $\mathbb{F}_\ell[G]^n$ 视为左 G-模，并将其元素记作$\sum_{i=1}^n \sum_{g\in G} \lambda_{ig} g e_i$，其中 $\lambda_{ig} \in \mathbb{F}_\ell$。对于一个 G-模 M及其子群 $H \leq G$，我们将 $I_H M$定义为由所有 $h \in H,\ m \in M$对应的元素 $hm - m$生成的 M的H-子模。

当 $L/L/\mathbb{Q}$ 是一个数域塔，且其中的 $L/\mathbb{Q}$、$L/\mathbb{Q}$ 均为伽罗瓦扩张、L/L 为阿贝尔扩张时，阿贝尔群 $G_{\widetilde{L}/L}$ 自然构成一个 $G_{L/\mathbb{Q}}$-模。

引理 8.1。设 ℓ是一个素数，S 是一个有理赋值有限集。假设 $L/\mathbb{Q}$ 是一个包含 μ_ℓ 的有限伽罗瓦扩张，并令 $G = G_{L/\mathbb{Q}}$。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个阿贝尔的扩张 L/L，其中 $S(L)$ 的每个赋值都完全分裂，并且 $L/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦的，且 $G_{\widetilde{L}/L} \cong \mathbb{F}_\ell[G]^n$ 是一个 G-模。此外，可以选取 L，使得对于每个包含 μ_ℓ的子域 $K \subseteq L$，都存在 L/K的一个指数为 ℓ的阿贝尔子扩张 K/K，其中 $S(K)$ 的每个赋值都完全分裂

，并且满足 $G_{\widetilde{L}/L\widetilde{K}} = I_H G_{\widetilde{L}/L}$（对 $H = G_{L/K}$）。



证明。根据切博塔廖夫密度定理，有无穷多个素数在 L 中完全分裂。令 T 为由 n 个不属于 S 的此类素数组成的集合。于是，$T(L)$ 是一个基数为 $n \cdot |G|$ 的自由 G 集合。

令 $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n$ 为 $T(L)$ 中 G-轨道的代表元。对于每个 $1 \le k \le n$，应用集合 $S \cup T$ 的命题 3.2，可知存在 $\alpha_{\mathfrak{P}_k} \in L^\times$，其在 $L_{\mathfrak{P}}$、$\mathfrak{P} \in S(L) \cup T(L) \setminus \{\mathfrak{P}_k\}$ 中的像是 ℓ 次幂，而其在 $L_{\mathfrak{P}_k}$ 中的像不是。将函数 $\mathfrak{P}_k \mapsto \alpha_{\mathfrak{P}_k}$ 延拓为一个从 $T(L)$ 到 $L^\times$ 的 G 集合态射 $\mathfrak{P} \mapsto \alpha_{\mathfrak{P}}$，并将 $L(\alpha_{\mathfrak{P}}^{\ell})$ 记为 $L_{(\mathfrak{P})}$。于是，$S(L) \cup T(L) \setminus \{\mathfrak{P}\}$ 中的每个赋值都在 $L_{(\mathfrak{P})}$ 中完全分裂，而 $\mathfrak{P}$ 是不可分解的。此外，注意到 G 作用于 L 的阿贝尔扩张集合，并且在此作用下，$g(L_{(\mathfrak{P})}) = L_{(g\mathfrak{P})}$。此作用还定义了满足 $\phi_e = \mathrm{id}$ $\phi_{gg'} = \phi_g \circ \phi_{g'}$ 的同构 $G_{L_{(\mathfrak{P})}/L} \xrightarrow{\phi_g} G_{L_{(g\mathfrak{P})}/L}$，对所有 $g, g' \in G$ 均成立。

考虑合成 $\widetilde{L} = \prod_{\mathfrak{P} \in T(L)} L_{(\mathfrak{P})}$，它是 $\mathbb{Q}$ 上的伽罗瓦扩张。由于 $L_{(\mathfrak{P})}$ 是 $L_{(\mathfrak{P}')}$ 中唯一满足 $\mathfrak{P}$ 不可分解的扩张，因此可得 $L_{(\mathfrak{P})} \nsubseteq \prod_{\mathfrak{P}' \ne \mathfrak{P}} L_{(\mathfrak{P}')}$，故 $[\widetilde{L} : L] = \ell^{|T(L)|}$。因此，单射 $G_{\widetilde{L}/L} \to \prod_{\mathfrak{P} \in T(L)} G_{L_{(\mathfrak{P})}/L}$ 是一个同构。不过，这是一个 G-等变映射，其中右侧的 G 作用由 $g \cdot (\lambda_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P} \in T(L)} = (\phi_g(\lambda_{g^{-1}\mathfrak{P}}))_{\mathfrak{P} \in T(L)}$ 给出。该作用使右侧与 $\mathbb{F}_\ell[G]^n$ 同构，从而证明了引理的第一部分。

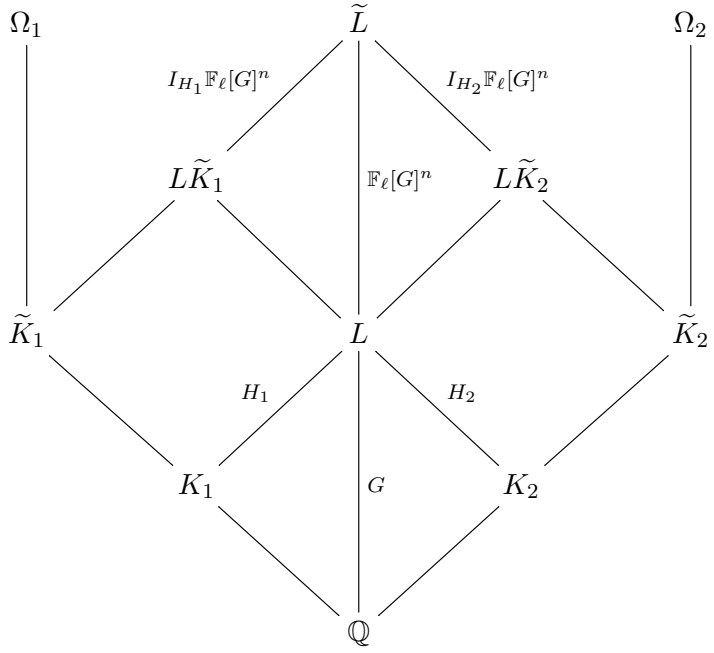
令 $K \subseteq L$ 为包含 μ_ℓ 的子域，并令 $H = G_{L/K}$。对于 $\mathfrak{p} \in T(K)$，定义 $\beta_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Nm}_K^L \alpha_{\mathfrak{P}}$，其中 $\mathfrak{P}$ 表示任意 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(L)$，并定义 $K_{(\mathfrak{p})} = K(\beta_{\mathfrak{p}}^{\ell})$。

对于每个 $\mathfrak{P} \in T(L)$ $\mathfrak{Q} \in S(L) \cup T(L)$，记 $\alpha_{\mathfrak{P};\mathfrak{Q}}$ 为 $\alpha_{\mathfrak{P}}$ 在完备化 $L_{\mathfrak{Q}}$ 中的像；对于每个 $\mathfrak{p} \in T(K)$ $\mathfrak{q} \in S(K) \cup T(K)$，记 $\beta_{\mathfrak{p};\mathfrak{q}}$ 为 $\beta_{\mathfrak{p}}$ 在完备化 $K_{\mathfrak{q}}$ 中的像。于是，对任意 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(L)$，有 $\beta_{\mathfrak{p};\mathfrak{q}} = \prod_{\mathfrak{Q} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{q}}(L)} \mathrm{Nm}_{K_{\mathfrak{q}}}^{L_{\mathfrak{Q}}} \alpha_{\mathfrak{P};\mathfrak{Q}}$。由于 $\mathrm{Nm}_{K_{\mathfrak{q}}}^{L_{\mathfrak{Q}}} \colon L_{\mathfrak{Q}} \to K_{\mathfrak{q}}$ 是一个同构，并且 $\alpha_{\mathfrak{P};\mathfrak{Q}}$ 是 ℓ 次幂当且仅当 $\mathfrak{P} \ne \mathfrak{Q}$，我们得到：$\beta_{\mathfrak{p};\mathfrak{q}}$ 是 ℓ 次幂当且仅当 $\mathfrak{p} \ne \mathfrak{q}$。由此可知，$S(K) \cup T(K)$ 的所有赋值 $\setminus \{\mathfrak{p}\}$ 都在 $K_{(\mathfrak{p})}/K$ 中完全分裂，而 $\mathfrak{p}$ 不可分解。由于它们都在 L 中完全分裂，因此 $S(L) \cup T(L) \setminus \mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(L)$ 中的所有赋值都在 $K_{(\mathfrak{p})}L$ 中完全分裂，而 $\mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(L)$ 中的赋值在 $K_{(\mathfrak{p})}L$ 中不可分解。考虑合成 $\widetilde{K} = \prod_{\mathfrak{p} \in T(K)} K_{(\mathfrak{p})}$。这是 K 的一个指数为 ℓ 的阿贝尔扩张。由上可得 $[\widetilde{K} : K] = [\widetilde{K}L : L] = \ell^{|T(K)|}$，尤其是 $\widetilde{K} \cap L = K$。

考虑 H-子模 $I_H G_{\widetilde{L}/L} \le G_{\widetilde{L}/L}$。它等于换位子群 $[G_{\widetilde{L}/K}, G_{\widetilde{L}/L}]$。该群的元素在 L 上的作用是平凡的，并且由于 K/K 是阿贝尔的，它们在 K 上的作用也平凡。因此我们有 $I_H G_{\widetilde{L}/L} \subseteq G_{\widetilde{L}/L\widetilde{K}}$。我们还有 $[\widetilde{L} : L\widetilde{K}] = \frac{[\widetilde{L} : L]}{[L\widetilde{K} : L]} = \frac{[\widetilde{L} : L]}{[\widetilde{K} : K]} = \left|I_H G_{\widetilde{L}/L}\right|$，这表明 $I_H G_{\widetilde{L}/L} = G_{\widetilde{L}/L\widetilde{K}}$。□

定理 8.2. 设 K_1、K_2 是包含 μ_ℓ 的数域，令 Ω_i/K_i 为 ℓ-封闭且丰裕的伽罗瓦扩张，并假设存在同构 $\alpha: G_{\Omega_1/K_1} \to G_{\Omega_2/K_2}$。那么 K_1 与 K_2 同构。

证明。令 L 为 $\mathbb{Q}$ 上 K_1K_2 的伽罗瓦闭包。记 $G = G_{L/\mathbb{Q}}$ 和 $H_i = G_{L/K_i} \leq G$。令 $n = |H_1|$。对满足条件的 S 应用引理 8.1，使得 Ω_i 相对于它均为 ℓ-封闭的，我们得到一个 $\widetilde{\ }$ 扩张 L/L，其伽罗瓦群作为 G-模同构于 $\mathbb{F}_\ell[G]^n$，且 $S(L)$ 的每个赋值都在其中完全分裂。我们还得到 L/K_i 的阿贝尔子扩张 K_i/K_i，其指数为 ℓ，其中 $S(K_i)$ 的每个 $\widetilde{\ }$ 赋值都完全分裂，并且满足 $G_{\widetilde{L}/L\widetilde{K}_i} = I_{H_i}\mathbb{F}_\ell[G]^n$。由此可得 $K_i \subseteq \Omega_i$。



$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$由推论 7.3 可推出，K_1 与 $\alpha(K_1)$ 算术等价。根据 [15, 定理 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$1]，它们在 $\mathbb{Q}$ 上有相同的伽罗瓦闭包，因此 $\alpha(K_1) \subseteq L$。我们还知道，$\alpha(K_1)$ 是 K_2 的阿贝尔$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$扩张，其指数为 ℓ。考虑数域 $K_2' = K_2 \cdot \alpha(K_1)$，它是 K_2 的阿贝尔扩张$\widetilde{\ }$，指数为 ℓ。由于 $I_{H_2}G_{\widetilde{L}/L} = [G_{\widetilde{L}/K_2}, G_{\widetilde{L}/L}]$ 在 L 和 K_2' 上的作用均为平凡作用，我们得到

$$I_{H_2}G_{\widetilde{L}/L} \subseteq G_{\widetilde{L}/L\widetilde{K}_2'} \subseteq G_{\widetilde{L}/L\widetilde{K}_2} = I_{H_2}G_{\widetilde{L}/L}$$

因此 $L\widetilde{K}_2' = L\widetilde{K}_2$。类似地，对于 $\widetilde{K}_1' = \widetilde{K}_1 \cdot \alpha^{-1}(\widetilde{K}_2)$，我们得到 $L\widetilde{K}_1' = L\widetilde{K}_1$。注意，根据定义，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$$\alpha(K_1')$ $= K_2'$，因此将推论 7.3 应用于扩张 Ω_i/K_i'，可得 $K_1'^{\widetilde{\ }}$ 与 K_2' 算术等价。根据 [1, 引理 1], ，与 $\mathbb{Q}$ 的伽罗瓦扩张作合成后，算术等价性仍然成立，因此我们得到 $LK_1' = LK_1$ 与 $LK_2' = LK_2$ 也算术等价。因此，它们在 $G_{\widetilde{L}/\mathbb{Q}}$ 中对应的子群 $G_{\widetilde{L}/L\widetilde{K}_i} = I_{H_i}\mathbb{F}_\ell[G]^n$ 加斯曼等价 [15]。特别地，对每个元素 $\lambda \in I_{H_1}\mathbb{F}_\ell[G]^n$，必定存在 $g \in G$ 使得 $g\lambda \in I_{H_2}\mathbb{F}_\ell[G]^n$。

将 H_1 枚举为 $h_1, \ldots, h_n$，并考虑元素 $\lambda = \sum_{1\leq k\leq n}(h_k - e)e_k \in I_{H_1}\mathbb{F}_\ell[G]^n$。令 $g \in G$ 满足 $g\lambda \in I_{H_2}\mathbb{F}_\ell[G]^n$。由此可得 $\sum_{1\leq k\leq n}(gh_k - g)e_k \in I_{H_2}\mathbb{F}_\ell[G]^n$，因此对每个 $h \in H_1$，都有 $gh - g \in I_{H_2}\mathbb{F}_\ell[G]$。于是，元素 gh 和 g 在商群 $\mathbb{F}_\ell[G]/I_{H_2}\mathbb{F}_\ell[G] \cong \mathbb{F}_\ell[H_2\backslash G]$ 中相同，因此 $H_2gh = H_2g$，这意味着 ${}^gh \in H_2$。所以 ${}^gH_1 \subseteq H_2$。类似地，存在 $k \in G$ 使得${}^kH_2 \subseteq H_1$。由于 G 是有限的，这意味着 H_1 和 H_2 在 G 中共轭。该共轭诱导出一个同构 $K_1 \cong K_2$。□

9. Full Neukirch-Uchida

本节将介绍一种方法，利用定理 8.2 中的弱版本来证明 Neukirch-Uchida 定理的完整版本。

我们概述证明过程；首先证明一个引理，指出在我们的 Neukirch-Uchida 变体的语境下，在附加某些假设的情况下，存在一个同构 $\sigma: K_1 \to K_2$，其在素点上诱导的双射与 α 在素点上诱导的双射一致。然后，在一般情形下，我们构造任意大的扩张 L_i'/K_i，使引理的条件得到满足。将引理应用于 L_i'，并考察群在 L_i'的素点上的作用，我们推得 α 在 G_{Ω_i/K_i}的任意大商群上都与一个共轭 $g \mapsto {}^{\sigma}g$ 一致，从而通过紧致性论证得到所需结果。

引理 9.1。设 K 是一个包含 μ_ℓ 的数域，且 Ω/K 是一个相对于有限集 S 个有理赋值为 ℓ-封闭的伽罗瓦扩张。设 $\mathfrak{p}_1$、…、$\mathfrak{p}_n$ 是 $\mathcal{P}_{fin}(K) \setminus S(K)$ 的不同赋值，并设 a_1、…、a_n 为非负整数。则存在 Ω/K 的一个有限子扩张 L/K，使得$[L_{\mathfrak{P}}: K_{\mathfrak{p}_i}] = \ell^{a_i}$ 对所有 $1 \le i \le n$ 以及所有 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}_i}(L)$均成立。

证明。只需证明，对于每个 $1 \le i \le n$，都存在一个 L_i/K，其对应于序列

$$0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0$$

在第 i 个赋值处取 a_i。事实上，如果存在这样的 L_i，那么 $L = L_1 \cdot \dots \cdot L_n$就是对应于序列 a_1，……，a_n 的一个扩张。因此，我们可以假设 a_i 是该序列中唯一的非零值。

如果 $a_i = 0$，我们可以取 $L_i = K$。否则，根据命题 3.2，对于集合 $S \cup \{\mathfrak{p}_1|_{\mathbb{Q}}, \dots, \mathfrak{p}_n|_{\mathbb{Q}}\}$，存在 $\alpha \in K$，其在 $K_{\mathfrak{p}}$，$\mathfrak{p} \in S(K) \cup \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ 中的像是 ℓ 次幂，而其在 $K_{\mathfrak{p}_i}$ 中的像不是。因此，$K' = K(\alpha^{\frac{1}{\ell}})$ 是 Ω 的一个子扩张，其中 $\mathfrak{p}_1$，……，$\mathfrak{p}_{i-1}$，$\mathfrak{p}_{i+1}$，……，$\mathfrak{p}_n$ 完全分裂，而 $\mathfrak{p}_i$ 是不可分解的，并且对于 $\mathfrak{p}_i'$，$\mathfrak{p}_i$ 到 K' 的唯一提升满足 $[K'_{\mathfrak{p}_i'}: K_{\mathfrak{p}_i}] = \ell$。这将原问题归结为处理具有整数序列的 K'

$$0, \dots, 0, a_i - 1, 0, \dots, 0$$

其长度为 $\ell(n-1)+1$，且其中 $a_i - 1$ 位于 $\ell(i-1)+1$ 赋值处。归纳地应用此论证即可证明该引理。□

注 9.2。注意，上面构造的扩张 L/K 不一定是伽罗瓦扩张。

~下文中，我们用记号 K 表示代数扩张 $K/\mathbb{Q}$的伽罗瓦闭包。

引理 9.3。设 K_1、K_2 是包含 μ_ℓ的数域，且设 Ω_i/K_i 是ℓ-封闭且丰沛的伽罗瓦扩张。假设 $\alpha: G_{\Omega_1/K_1} \to G_{\Omega_2/K_2}$ 是赋范群的同构。进一步假设 $\widetilde{K_2} \cap \Omega_2 = K_2$。设 R 为命题 7.2 中具有全密度的有理素数集合。则存在同构 $\sigma: K_1 \to K_2$，使得双射 $\sigma: R(K_1) \to R(K_2)$ 与命题 7.2 中的双射 $\alpha: R(K_1) \to R(K_2)$ 重合。

证明。由于可能的同构 $\sigma: K_1 \to K_2$ 只有有限多个，因此可将最后一个要求改为：对于所有 $\mathfrak{p} \in R'(K_1)$，均有 $\sigma(\mathfrak{p}) = \alpha(\mathfrak{p})$，其中 R' 是 R 的任意有限子集。将 $R'(K_1)$ 枚举为 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$。由引理 9.1，可找到 Ω_1/K_1 的一个有限子扩张 L_1/K_1，使得对于每个 $1 \le i \le n$ 以及每个 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}_i}(L_1)$，均有 $[(L_1)_{\mathfrak{P}}: (K_1)_{\mathfrak{p}_i}] = \ell^i$。

令 $L_2 = \alpha(L_1)$。由定理 8.2，存在一个同构 $\sigma: L_1 \to L_2$。注意，$\sigma(K_1)$ 是 L_2 的一个子域，且与 K_1 同构。然而，根据定理 8.2，K_1 与 K_2 同构。因此，$\backsim\sigma(K_1) \subseteq K_2 \cap \Omega_2 = K_2$，从而 $\sigma(K_1) = K_2$。

任取一个 $\mathfrak{p}_i \in R'(K_1)$ 和 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{p}_i}(L_1)$。由命题 7.2 的第四部分可得 $[(L_2)_{\alpha(\mathfrak{P})}: (K_2)_{\alpha(\mathfrak{p}_i)}] = [(L_1)_{\mathfrak{P}}: (K_1)_{\mathfrak{p}_i}] = \ell^i$。因此，$[(L_1)_{\sigma^{-1}(\alpha(\mathfrak{P}))}: (K_1)_{\sigma^{-1}(\alpha(\mathfrak{p}_i))}]$ 也等于ℓ^i。

根据命题 7.2 的第二部分，赋值 $\mathfrak{p}_i$ 和 $\sigma^{-1}(\alpha(\mathfrak{p}_i))$ 具有相同的剩余特征。特别地，$\sigma^{-1}(\alpha(\mathfrak{p}_i)) \in R'(K_1)$。根据 L_1 的构造，它依据 $R'(K_1)$ 的赋值在其扩张中的次数来区分这些赋值，等式 $[(L_1)_{\sigma^{-1}(\alpha(\mathfrak{P}))} : (K_1)_{\sigma^{-1}(\alpha(\mathfrak{p}_i))}] = \ell^i$ 只有在 $\sigma^{-1}(\alpha(\mathfrak{p}_i)) = \mathfrak{p}_i$ 时才可能成立，即 $\sigma(\mathfrak{p}_i) = \alpha(\mathfrak{p}_i)$。□

现在我们可以陈述并证明我们的主要定理。

定理 9.4。设 ℓ 为一个素数，设 K_1、K_2 为数域，并设 Ω_i/K_i 为温和分歧且丰沛的伽罗瓦扩张。如果 $\alpha : G_{\Omega_1/K_1} \to G_{\Omega_2/K_2}$ 是赋范群的一个同构，则存在一个域扩张的同构 $\sigma : \Omega_1/K_1 \to \Omega_2/K_2$，其诱导出 α，且该同构是唯一的。

证明。我们首先证明 σ的存在性。设 L_1/K_1 是 Ω_1/K_1的一个有限伽罗瓦子扩张，包含 $K_1(\mu_\ell) \cdot \alpha^{-1}(K_2(\mu_\ell))$，并设 $L_2 = \alpha(L_1)$。设 $L_2' = \widetilde{L}_2 \cap \Omega_2$ 和 $L_1' = \alpha^{-1}(L_2')$。注意到$\sim \quad \sim \quad \sim L_2' \cap \Omega_2 \subseteq L_2 \cap \Omega_2 \cap \Omega_2 = L_2'$。还要注意，$L_i'/K_i$ 是伽罗瓦扩张并包含 μ_ℓ。根据引理 9.3，存在一个同构 $\sigma : L_1' \to L_2'$，使得对于某个具有全密度的有理素数集合 R 中的每个赋值 $\mathfrak{P} \in R(L_1')$，都有 $\sigma(\mathfrak{P}) = \alpha(\mathfrak{P})$。根据切博塔廖夫密度定理，存在一个在 L_2'中完全分裂的素数 $p \in R$。于是对于每个 $g \in G_{L_1'/K_1}$ 和 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_p(L_2')$，我们有

$$({}^\sigma g)\mathfrak{P} = \sigma(g(\sigma^{-1}(\mathfrak{P}))) = \alpha(g(\alpha^{-1}(\mathfrak{P}))) = \alpha(g)\mathfrak{P}$$

作为 L_2' 中的素点。由于 L_2'/K_2 和 $L_2'/\sigma(K_1)$ 都是伽罗瓦扩张，我们得到 $L_2'/(K_2 \cap \sigma(K_1))$ 是伽罗瓦扩张。由于 $G_{L_2'/(K_2\cap\sigma(K_1))}$ 在 $\mathcal{P}_p(L_2')$ 上自由作用，上述结果表明，对每个 $g \in G_{L_1'/K_1}$，等式${}^\sigma g = \alpha(g)$ 在 $G_{L_2'/(K_2\cap\sigma(K_1))}$ 中成立。特别地，我们有

$$G_{L_2'/K_2} = \alpha(G_{L_1'/K_1}) = {}^\sigma G_{L_1'/K_1} = G_{L_2'/\sigma(K_1)}$$

作为 $G_{L_2'/(K_2\cap\sigma(K_1))}$ 的子群。这意味着 $\sigma(K_1) = K_2$。同样，我们有

$$G_{L_2'/L_2} = \alpha(G_{L_1'/L_1}) = {}^\sigma G_{L_1'/L_1} = G_{L_2'/\sigma(L_1)}$$

作为 G_{L_2'/K_2} 的子群，这意味着 $\sigma(L_1) = L_2$。注意，共轭 ${}^\sigma(-) : G_{L_1/K_1} \to G_{L_2/K_2}$ 与 $\alpha : G_{L_1/K_1} \to G_{L_2/K_2}$ 相同。

对每个 Ω_1/K_1 的有限伽罗瓦子扩张 L_1/K_1，我们将 $C_{L_1} \subseteq G_{\mathbb{Q}}$ 定义为满足以下条件的 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ 的集合：$\sigma(K_1) = K_2$，$\sigma(L_1) = \alpha(L_1)$，且共轭 ${}^\sigma(-) : G_{L_1/K_1} \to G_{\alpha(L_1)/K_2}$ 与$\alpha : G_{L_1/K_1} \to G_{\alpha(L_1)/K_2}$ 相同。于是 C_{L_1} 是 $G_{\mathbb{Q}}$ 的闭子集；当L_1 包含 $K_1(\mu_\ell) \cdot \alpha^{-1}(K_2(\mu_\ell))$ 时，已证明它非空。显然，$C_{L_1} \cap C_{L_1'} = C_{L_1 L_1'}$。因此，$G_{\mathbb{Q}}$ 的紧致性保证存在一个属于 $\bigcap_{L_1} C_{L_1}$ 的元素 σ，其中交集遍历 Ω_1/K_1 的所有有限伽罗瓦子扩张。由此可得 $\sigma(K_1) = K_2$，$\sigma(\Omega_1) = \Omega_2$,，且共轭映射${}^\sigma(-) : G_{\Omega_1/K_1} \to G_{\Omega_2/K_2}$ 与 $\alpha : G_{\Omega_1/K_1} \to G_{\Omega_2/K_2}$ 相同。至此，存在性证明完成。

对于唯一性，我们可以假设 $K_1 = K_2$ 和 $\Omega_1 = \Omega_2$,，将它们分别记为 K 和 Ω。设 S 是一个有理素数有限集，使得 Ω/K 相对于它是 ℓ-封闭的。设 $\sigma \in G_{\Omega/K}$ 是一个元素，使得由它诱导的共轭作用在 $G_{\Omega/K}$上给出恒等自同构，即 $\sigma \in Z(G_{\Omega/K})$。设 L 是 Ω/K 的一个包含 μ_ℓ的有限伽罗瓦子扩张。由于 $G_{\Omega/\sigma(L)} = {}^\sigma G_{\Omega/L} = G_{\Omega/L}$，我们有 $\sigma(L) = L$。对于每个 $\mathfrak{P} \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\Omega) \setminus S(\Omega)$，都有

$$G_{\Omega/K,\mathfrak{P}} = {}^\sigma G_{\Omega/K,\mathfrak{P}} = G_{\Omega/K,\sigma(\mathfrak{P})}$$

这意味着根据引理 3.6 和命题 5.1，σ 在 $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\Omega) \setminus S(\Omega)$ 上作用为恒等。设 $B \subseteq L$是 σ 在 L中的不动域。根据切博塔廖夫密度定理，存在 $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(B) \setminus S(B)$，它在 L中完全分裂。由于 $G_{L/B} = \langle \sigma|_L \rangle$ 在 $\mathcal{P}_{\mathfrak{p}}(L)$上传递地作用，而 σ 在其上平凡作用，因此必有 $B = L$，即 $\sigma|_L = \mathrm{id}_L$。由于 L 是 Ω/K 的任意大的有限子扩张，因此σ 是平凡的。证明至此完成。□

注记 9.5。上述证明中关于唯一性的部分并未用到丰裕性假设。

由例 3.4 和例 6.2 可知，定理 1.2 和定理 1.3 中所述的扩张 Ω_i/K_i 是 ℓ-封闭且丰沛的。因此，这两个定理均可由定理 9.4 推出。

10. Acknowledgments

作者的研究由欧盟（欧洲研究委员会，函数域，101161909）共同资助。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的立场。欧盟和资助机构均不对此承担责任。

References

[1] Uchida, K. (1979). 可解闭伽罗瓦扩张的伽罗瓦群同构。东北数学杂志（第二辑），31(3)，359-362. [2] Saidi, M., & Tamagawa, A. (2022). 数域的 m 步可解算术几何。纯粹与应用数学杂志（Crelles Journal），2022(789)，153-186. [3] Shimizu, R. (2020). 受限分歧下的新基尔希–内田定理。arXiv 预印本 arXiv:2009.10431. [4] Shimizu, R. (2023). 受限分歧下数域伽罗瓦群的同构。数学新闻，296(7)，3026-3033. [5] Ivanov, A. (2013). 关于新基尔希–内田定理的一种推广。arXiv 预印本 arXiv:1309.3046. [6] Sueyoshi, Y. (1988 28, 145 151). 由 p-闭扩张刻画数域。数论杂志，- .[7] Ozaki, M. (2025). 有限域上曲线的 Grothendieck 猜想的数域类比。arXiv 预印本 arXiv:2507.20159.[8] Shimizu, R. (2023). 数域的 pro-C 算术几何。[9] Koymans, P., & Pagano, C. (2024). 二步幂零扩张并非算术几何。数学杂志，306(2)，31. [10] Golich, M., & McReynolds, D. B. (2023). 菱形：群的同调与中心列。arXiv 预印本 arXiv:2310.08283.[11] Lubotzky, A., & Neftin, D. (2023). Sylow 共轭数域。以色列数学杂志，257(2)，465-480. [12] Neukirch, J., Schmidt, A., & Wingberg, K. (2013). 数域的上同调（第323卷）。施普林格科学与商业媒体。[13] Neukirch, J. (2013). 代数数论（第322卷）。施普林格科学与商业媒体。 [14] Ribes, L., & Zalesskii, P. (2010). 赋范群。载于《赋范群》（第19-74页）。柏林，海德堡：施普林格柏林海德堡。 [15] Perlis, R. (1977). 关于方程 $\zeta_k(s) = \zeta_{k'}(s)$。数论杂志，9(3)，342-360. [16] Stuart, D., & Perlis, R. (1995). 算术等价的新刻画。数论杂志，53(2)，300-308.

Faculty of Mathematics and Computer Science, Weizmann Institute of Science, 234 Herzl Street, Rehovot 76100 , Israel.
Email address: ido.karshon@weizmann.ac.il

Faculty of Mathematics and Computer Science, Weizmann Institute of Science, 234 Herzl Street, Rehovot 76100 , Israel.
Email address: mark.shusterman@weizmann.ac.il