Seymour拟阵分解定理形式化蓝图

IVANSERGEEV、MARTIN DVORAK、CAMERON RAMPELL、MARK SANDEY 和 PIETRO MONTICONE

arXiv:2601.01255v1 [math.CO] 3 Jan 2026

Abstract. 本文旨在为 Lean 中形式化 Seymour拟阵分解定理所依据的正则拟阵结构理论提供一份蓝图。我们通过全幺模表示，对正则性的模块化描述进行阐述；证明正则性在 1-和、2-和与 3-和下保持不变；并确立若干特殊拟阵类的正则性，包括图拟阵的、余图拟阵以及拟阵 R_{10}。

本蓝图记录了证明的逻辑结构、结果之间的精确依赖关系，以及它们与 Lean 声明的对应关系。它既旨在为正在进行的形式化工作提供指南，也旨在作为一份便于人类阅读的证明组织参考资料。

Contents

1. 引言 2. 预备知识 2.1. 全幺模性 2.2. 枢轴变换 2.3. 向量拟阵 2.4. 正则拟阵 3. 1-和的正则性 4. 2-和的正则性 5. 3-和的正则性 5.1. 定义 5.2. 规范符号赋值 5.3 规范符号化的性质 5.4. 正则性证明 6. 特殊拟阵 6.1. 余图拟阵的正则性 7. 结论 参考文献

1
2
2
3
4
5
6
6
7
7
8
10
13
14
15
17
17

1. 引言

Seymour分解定理通过将正则拟阵表示为图拟阵、余图拟阵以及一个特殊拟阵的迭代 1-和、2-和与 3-和，为正则拟阵提供了结构刻画 R_{10}。这一结果处于拟阵理论、线性优化和组合几何的交汇处，在全幺模矩阵理论和多项式时间算法中发挥着核心作用。本蓝图主要研究有限拟阵。若干结果可推广到有限秩拟阵或无限拟阵，但本文不系统探讨这些推广。

我们对正则拟阵结构理论的介绍，基本遵循 Truemper专著 [1], 中的论述和术语；该专著是拟阵

Date：2026年1月6日。

理论以及本蓝图始终采用的基于矩阵的方法的主要参考文献。我们感谢 Klaus Truemper 就 3-和的正则性提供的有益通信。

本文档是使用 Lean4 证明助手将该理论形式化的蓝图。本文不采用传统的数学论述方式，而是记录证明的逻辑结构，将中间结果拆分为模块化组件，并追踪各陈述之间的精确依赖关系。每个定义、引理和定理都旨在对应一个 Lean 声明；许多证明则交由 Lean 完成，并据此标明。

蓝图分为几个主题部分。我们首先介绍全幺模矩阵、枢轴操作和向量拟阵所需的背景知识。随后证明拟阵的正则性在 1-和、2-和及 3-和下保持不变。最后，我们证明若干特殊拟阵——图拟阵、余图拟阵以及拟阵R_{10} ——具有正则性，从而补齐 Seymour 分解所需的各项要素。

2. Preliminaries

2.1. 全幺模性。

定义 1. 矩阵是一个函数，它接受行指标并返回一个向量；向量则是一个接受列指标并返回一个值的函数。前述恒等关系是定义性的，而后者是句法性的。为简便起见，$\left(R^Y\right)^X \equiv R^{X\times Y}$ 本文不对函数作柯里化处理。当矩阵是有限的（也就是说，X 和 Y 均为有限集），且其元素为数值时，我们通常用数值表来表示它。

定义 2. 设 A 是交换环上的方阵，其行和列由整数 $\{1,\dots,n\}$索引。 A 的行列式为

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n}\left(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right),$$

其中，求和遍历所有排列 $\sigma\in S_n$，sgn(σ)表示排列σ的符号，而$a_{i,\ j}\in R$ 是 A 中对应于第 i行和第 j列的元素。

定义 3. 设 R 是交换环。如果一个矩阵 $A\in R^{X\times Y}$ 满足：对于任意 $k\in\mathbb{N}$， A 的每个（不一定连续的） $k\times k$子矩阵 T，其行列式 $\det T\in\{0,\pm1\}$，则称该矩阵为全幺模矩阵，简称 TU。

引理 4. 设 A 是全幺模矩阵。假设将 A 的行乘以 $\{0,\pm1\}$ 因子，则所得矩阵 A' 也是全幺模矩阵。

证明。根据定义 3，我们证明 A' 是全幺模矩阵。为此，设 T' 是 A'的一个方子矩阵。我们的目标是证明 $\det\ T'\in\{0,\pm1\}$。设 T是 A的子矩阵，它表示枢轴变换之前的 T'。如果 T的某些行乘以了零元，那么 T' 含有零行，因此 $\det\ T'=0$。否则， T'是通过将某些行乘以 -1从 T得到的。由于 T'只有有限行，这类乘法的次数也是有限的。由于将一行乘以-1 会使行列式乘以 -1，因此我们得到 $\det\ T'=\pm\det\ T\in\{0,\pm1\}$，证毕。□

引理 5. 设 A 是一个全幺模矩阵。假设将 A 的列乘以 $\{0,\pm1\}$ 因子。则所得矩阵 A' 也是全幺模矩阵。

证明. 应用引理4于 $A^\top$。 □

定义 6. 给定 $k\in\mathbb{N}$，若矩阵 A的每个（不一定连续，也不一定是单射的） $k\times k$ 子矩阵 T的行列式$T\in\{0,\pm1\}$，则称 A为 k-部分全幺模矩阵，简称 k-PU。

引理 7. 矩阵 A 是全幺模矩阵，当且仅当对于每个 $k\in\mathbb{N}$， A 都是 k-PU。

证明。 这由定义 3和6得出。 □

2.2. **枢轴变换**。

定义 8。设 $A \in R^{X\times Y}$为一个矩阵，且 $(x,y) \in X \times Y$满足 $A(x,y) \neq 0$。在 A 上关于 (x,y) 的长表枢轴变换是将 A 映射为矩阵 A' 的运算，其中

$$\forall i \in X,\ \forall j \in Y,\ A'(i,j) = \begin{cases} \frac{A(i,j)}{A(x,y)}, & \text{if } i = x, \\ A(i,j) - \frac{A(i,y)\cdot A(x,j)}{A(x,y)}, & \text{if } i \neq x. \end{cases}$$

引理 9. 设 $A \in \mathbb{Q}^{X\times Y}$是一个全幺模矩阵，并设 $(x,y) \in X \times Y$满足 $A(x,y) \neq 0$。然后在 A 中对 (x,y) 执行长表枢轴变换，所得矩阵是全幺模矩阵。

证明。参见 Lean 中的实现。 □

定义 10. 设 $A \in R^{X\times Y}$是一个矩阵，并设 $(x,y) \in X \times Y$满足 $A(x,y) \neq 0$。执行以下一系列操作。

(1) 将单位矩阵 $1 \in R^{X\times X}$ 附加到 A，得到矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & A \end{bmatrix} \in_{R^{X\times(X\oplus Y)}}$。(2) 对 B 中的 (x,y) 执行长枢轴变换，并令 C 表示所得结果。(3) 交换 C中的列 x 和 y，并令 D 表示所得矩阵。(4) 最后，从 D中移除索引属于 X 的列，并令 A' 表示所得矩阵。

在 A 中对 (x,y) 执行短表枢轴，是将 A 映射为上述定义的矩阵 A' 的操作。

引理 11. 设 $A \in R^{X\times Y}$为一个矩阵，且 $(x,y) \in X \times Y$满足 $A(x,y) \neq 0$。那么，在 A 中对 (x,y) 执行短表枢轴，将 A 映射为 A'，其中

$$\forall i \in X,\ \forall j \in Y,\ A'(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{A(x,y)}, & \text{if } i = x \text{ and } j = y, \\ \frac{A(x,j)}{A(x,y)}, & \text{if } i = x \text{ and } j \neq y, \\ -\frac{A(i,j)}{A(x,y)}, & \text{if } i \neq x \text{ and } j = y, \\ A(i,j) - \frac{A(i,y)\cdot A(x,j)}{A(x,y)}, & \text{if } i \neq x \text{ and } j \neq y. \end{cases}$$

证明。由直接计算可得。 □

引理 12. 设 $B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{\{X_1\cup X_2\}\times\{Y_1\times Y_2\}}$。设 $B' = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} \\ B'_{21} & B'_{22} \end{bmatrix}$ 是在 B中对 $(x,y) \in X_1 \times Y_1$ 执行短表枢轴后得到的结果。那么 $B'_{12} = 0$、$B'_{22} = B_{22}$，且 $\begin{bmatrix} B'_{11} \\ B'_{21} \end{bmatrix}$是在 $\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$中对 (x,y) 执行短表枢轴后得到的矩阵。

证明. 这可通过直接计算得出。事实上，由于 B中的零块，B_{12} 和 B_{22}保持不变；又因为 $\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$ 是包含枢轴元素的 B 的子矩阵，所以在其中执行短表枢轴等价于先在 B 中执行短表枢轴，再取相应的子矩阵。□

引理 13. 设 $k \in \mathbb{N}$、$A \in \mathbb{Q}^{k\times k}$ 和 A' 是在 A 中对 $(x,\ y)$ 进行短表枢轴后得到的结果，其中 $x,\ y \in \{1,\dots,k\}$，且 $A(x,\ y) \neq 0$。那么 A' 包含一个大小为 $(k-1)$ 的子矩阵A''，其 $|$行列式 $A''| = |$行列式 $A|/|A(x,\ y)|$。

证明。设 $X = \{1,\dots,k\} \setminus \{x\}$和 $Y = \{1,\dots,k\} \setminus \{y\}$，并设 $A'' = A'(X,Y)$。由于A''不包含枢轴行或枢轴列，$\forall (i,j) \in X \times Y$我们有 $A''(i,j) = A\ i\ \ -\frac{A\ i\ y\cdot A\ x\ j}{A\ x\ \ (,j)\ (,)\ (,)\ A(x,y)}$。对于 $\forall j \in Y$，令 B_j 为从中删除行和列 j 后得到的矩阵，并令 B''_j 为将列 j 替换为 $A(X,y)$（即不含枢轴元素的枢轴列）后从 A'' 得到的矩阵。沿 A 中的第 x 行进行余子式展开，得到

$$\det A = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{y+j} \cdot A(x,j) \cdot \det B_j.$$

通过重新排列每个 B_j 的列，使其顺序与 B''_j中的顺序一致，我们得到

$$\det A = (-1)^{x+y} \cdot \left(A(x,y) \cdot \det A' - \sum_{j \in Y} A(x,j) \cdot \det B''_j \right).$$

对 A'' 应用行列式的线性性质，我们有

$$\det A'' = \det A' - \sum_{j \in Y} \frac{A(x,j)}{A(x,y)} \cdot \det B''_j$$

因此，$|\det A''| = |\det A|/|A(x,\ y)|$。 □

引理 14。设 $A \in \mathbb{Q}^{X \times Y}$ 是全幺模矩阵，且 $(x,\ y) \in X \times Y$ 满足 $A(x,\ y) \neq 0$。那么，在 A 中对 $(x,\ y)$ 执行短表枢轴变换后，所得矩阵仍是全幺模矩阵。

证明。参见 Lean 中的实现，该实现使用了引理9。 □

2.3. **向量拟阵**。

定义 15. 拟阵 M 是一个有序对 $(E,\ \mathcal{I})$，其中 E 是一个（可能无限的）集合，且 $\mathcal{I} \in 2^E$ 满足：

(1) $\emptyset \in \mathcal{I}$(2) 若 $I \in \mathcal{I}$ 且 $J \subseteq I$，则 $I \in \mathcal{I}$。(3) 若 $I \in \mathcal{I}$ 不是极大的（相对于集合包含）且 $B \in \mathcal{I}$ 是极大的，则存在一个 $x \in B \setminus I$ 使得 $I \cup \{x\} \in \mathcal{I}$。(4) 若 $X \subseteq E$ 且 $I \subseteq X$ 满足 $I \in \mathcal{I}$，则存在一个 $J \in \mathcal{I}$，使得 $I \subseteq J \subseteq X$相对于集合包含是极大的。

我们称 E 为 M 的基集，称 $\mathcal{I}$ 为 M中的独立集族。若 B 在 $\mathcal{I}$中是极大的，则称$B \in \mathcal{I}$ 为 M 的基。

定义 16. 设 R 为除环，设 X 和 Y 为集合，并设 $A \in R^{X \times Y}$ 为矩阵。A 的向量拟阵是拟阵 $M = (Y,\ \mathcal{I})$，其中集合 $I \subset Y$ 在 M 中独立，当且仅当 A中由 I 索引的列线性无关。

定义 17. 设 R 为一个除环，设 X 和 Y 为不相交的集合，并设 $S \in R^{X \times Y}$ 为一个矩阵。令 $A = \begin{bmatrix} 1 & S \end{bmatrix} \in R^{X \times (X \cup Y)}$ 为通过将单位矩阵作为列附加到 S 而得到的矩阵，并令 M 为 A 的向量拟阵。则称 S 为 M的标准表示。

引理 18. 设 $S \in R^{X \times Y}$ 为向量拟阵 M的一个标准表示。则 X 是 M中的一个基。

证明. 参见 Lean 中的实现。 □

引理19. 向量拟阵的完整表示矩阵中添加额外的零行不会改变该拟阵。

证明. 参见 Lean 中的实现。 □

引理 20. 设 $A \in \mathbb{Q}^{X \times Y}$ 为一个全幺模矩阵，设 M 为 A的向量拟阵，并设 B 为 M的一个基。则存在一个矩阵 $S \in \mathbb{Q}^{B \times (Y \setminus B)}$，使得 S是全幺模矩阵，且 S是 M的标准表示。

证明。参见 Lean 实现，其中使用了引理9和 19。 □

定义21。设 R 为一个含零元的岩浆。矩阵 $A \in R^{X \times Y}$ 的支撑$A^{\#} \in \{0,1\}^{X \times Y}$定义为

$$\forall i \in X,\ \forall j \in Y,\ A^{\#}(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{if } A(i,j) = 0, \\ 1, & \text{if } A(i,j) \neq 0. \end{cases}$$

Lemma 22. 支撑矩阵的转置等于转置矩阵的支撑 .

证明。 按定义相等。 □

引理 23. 支撑矩阵的子矩阵等于该子矩阵的支撑矩阵。

证明. 根据定义，两者相等。 □

引理 24. 若 A 是一个定义在 $\mathbb{Z}_2$上的矩阵，则 $A^{\#} = A$。

证明. 逐元素检验等式。 □

引理 25。 同一拟阵的两个标准表示矩阵若具有相同的基，则它们具有相同的支撑。

证明。 请参见 Lean 实现。 □

引理 26。 方阵可逆，当且仅当其行列式可逆。

证明。 此结果已在 Mathlib 中证明。 □

引理 27。 设 A 为有限行数且有限列数的有理 TU 矩阵。其行线性无关，当且仅当其支撑矩阵的行线性无关。

证明。 请参见 Lean 实现，其中使用了引理23和 26。 □

引理 28. 设 A是一个有理全幺模矩阵，且行数有限。当且仅当其支撑矩阵的行线性无关时，其行才线性无关。

证明. 参见 Lean 实现，其中使用了引理 27。 □

引理 29. 设 A 是一个有理全幺模矩阵。当且仅当其支撑矩阵的行线性无关时，其行才线性无关。

证明. 参见 Lean 实现，其中使用了引理 28。 □

引理 30. 设 A 是一个全幺模矩阵。

(1) 如果一个拟阵由 A表示，那么它也由 $A^{\#}$表示。(2) 如果一个拟阵由 $A^{\#}$表示，那么它也由 A表示。

证明。 参见 Lean 实现，其中使用了引理 22、23和29。 □

2.4. **正则拟阵。**

定义 31。 如果存在一个全幺模矩阵 $A \in \mathbb{Q}^{X\times Y}$，使得 M 是 A 的向量拟阵，则称拟阵 M 为正则拟阵。

定义 32。 如果 A' 是全幺模矩阵，则称 $A' \in \mathbb{Q}^{X\times Y}$ 是 $A \in \mathbb{Z}_2^{X\times Y}$ 的全幺模符号化，并且

$$\forall i \in X,\ \forall j \in Y,\ |A'(i,j)| = A(i,j).$$

引理 33。 设 $B \in \mathbb{Z}_2^{X\times Y}$ 是拟阵 M 的标准表示矩阵。那么， M 是正则拟阵，当且仅当 B 存在全幺模符号化。

证明。假设 M 是正则拟阵。根据定义 31，存在一个全幺模矩阵 $A \in \mathbb{Q}^{X\times Y}$，使得 M 是 A 的向量拟阵。根据引理 18， X （ B 的行集）是 M 的基。根据引理 20，可以将 A 转换为 M 的标准表示矩阵 $B' \in \mathbb{Q}^{X\times Y}$，且 B' 也是全幺模矩阵。由于 B' 和 B 都是 M 的标准表示，根据引理 25，支撑矩阵（B'）$^{\#}$ 和 $B^{\#}$ 相同。引理 24 给出 $B^{\#} = B$。因此， B' 是全幺模矩阵且（B'）$^{\#} = B$，所以 B' 是 B 的全幺模符号化。

假设 B 具有全幺模符号化 $B' \in \mathbb{Q}^{X\times Y}$。那么 $A = [1 \mid B']$ 是全幺模矩阵，因为它是通过在B' 中添加单位矩阵得到的。此外，根据引理 30， A 表示与 $A^{\#} = [1 \mid B]$相同的拟阵，而后者是 M。因此， A 是表示 M的全幺模矩阵，所以 M 是正则的。 □

3. Regularity of 1-Sum

定义 34。令 R 为一个含零元的岩浆（我们将使用 $R = \mathbb{Z}_2$ 和 $R = \mathbb{Q}$）。令$B_\ell \in R^{X_\ell \times Y_\ell}$ 和 $B_r \in R^{X_r \times Y_r}$ 为矩阵，其中 X_ℓ、Y_ℓ、X_r、Y_r 为两两不交集。$B = B_\ell \oplus_1 B_r$ 与 B_ℓ 和 B_r 的 1-和为

$$B = \begin{bmatrix} B_\ell & 0 \\ 0 & B_r \end{bmatrix} \in R^{(X_\ell \cup X_r) \times (Y_\ell \cup Y_r)}.$$

定义 35. 拟阵 M 是拟阵 M_ℓ 与 M_r 当且仅当存在标准的 $\mathbb{Z}_2$表示矩阵 B_ℓ，B_r和 B (分别对应 M_ℓ，M_r和 M)具有定义 34中给出的形式。

引理 36. 设 A 是形如 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$的方阵。那么 $\det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22}$。

证明. 此结果已在 Mathlib 中证明。 □

引理37. 设 B_ℓ 和 B_r 为定义 34 中的全幺模矩阵（在 $\mathbb{Q}$上）。那么 $B = B_\ell \oplus_1 B_r$是全幺模矩阵。

证明。我们证明 B 根据定义 3 是全幺模矩阵。为此，取 T 为 B的一个方子矩阵。我们的目标是证明 $\det T \in \{0, \pm 1\}$。

令 T_ℓ 和 T_r 分别表示 T 与 B_ℓ 和 B_r的交集所形成的子矩阵。于是 T 具有如下形式

$$T = \begin{bmatrix} T_\ell & 0 \\ 0 & T_r \end{bmatrix}.$$

首先，假设 T_ℓ和 T_r都是方阵。那么 $\det T = \det T_\ell \cdot \det T_r$由引理 36得出。此外，$\det T_\ell$，$\det T_r \in \{0, \pm 1\}$，因为 T_ℓ和 T_r分别是全幺模矩阵 B_ℓ和 B_r的方子矩阵。因此，$\det T \in \{0, \pm 1\}$，正如所需。

不失一般性，我们可以假设 T_ℓ 的行数少于列数。否则，我们可以对所有矩阵取转置并使用相同的证明，因为全幺模性和行列式在转置下保持不变。因此，T 可以表示为

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

其中 T_{11} 包含 T_ℓ 以及若干零行，T_{22} 是 T_r的一个子矩阵，并且 T_{12} 包含 T_r 中剩余的行（不包含在 T_{22}中）以及若干零行。由引理 36，我们有 $\det T = \det T_{11} \cdot \det T_{22}$。由于 T_{11}至少包含一行零行，$\det T_{11} = 0$。因此，$\det T = 0 \in \{0, \pm 1\}$，正如所需。 □

定理 38. 设 M 是正则拟阵 M_ℓ 和 M_r的1-和。那么 M 也正则。

证明。设 B_ℓ、B_r和 B 是定义 35 中的标准表示矩阵。由于 M_ℓ和 M_r 是正则拟阵，根据引理 33，B_ℓ 和 B_r 分别具有全幺模符号化 B'_ℓ 和 B'_r。于是$B' = B'_\ell \oplus_1 B'_r$ 是 B的全幺模符号化。事实上，根据引理 37，B' 是全幺模的；直接计算可得，B' 是 B的符号化。因此，根据引理 33，M 是正则的。□

4. Regularity of 2-Sum

定义39. 设 R 是一个半环（我们将使用 $R = \mathbb{Z}_2$ 和 $R = \mathbb{Q}$）。设 $B_\ell \in R^{X_\ell \times Y_\ell}$ 和 $B_r \in R^{X_r \times Y_r}$，其中 $X_\ell \cap X_r = \{x\}$、$Y_\ell \cap Y_r = \{y\}$、X_ℓ 与 Y_ℓ 和 Y_r不相交，且 X_r 与 Y_ℓ 和 Y_r不相交。此外，设 $A_\ell = B_\ell(X_\ell \setminus \{x\},\ Y_\ell)$和 $A_r = B_r(X_r,\ Y_r \setminus \{y\})$，并假设 $r = B_\ell(x,\ Y_\ell) \neq 0$ 以及 $c = B_r(X_r,\ y) \neq 0$。则 B_ℓ 和B_r 的 2-和$B = B_\ell \oplus_{2,\ x,\ y} B_r$ 定义为

$$B = \begin{bmatrix} A_\ell & 0 \\ D & A_r \end{bmatrix} \quad \text{where} \quad D = c \otimes r.$$

这里 $D \in R^{X_r \times Y_\ell}$，并且索引在各处保持一致。

定义 40. 一个拟阵 M 是拟阵的 2-和 M_ℓ 且 M_r 当且仅当存在标准 $\mathbb{Z}_2$表示矩阵 B_ℓ，B_r和 B (分别对应 M_ℓ，M_r和 M，其形式如定义 39所述。

引理41。 设 B_ℓ 和 B_r 来自定义 39 ，且为（关于 $\mathbb{Q}$的）全幺模矩阵。那么 $C = \begin{bmatrix} D & A_r \end{bmatrix}$是全幺模矩阵。

证明。 由于 B_ℓ是全幺模矩阵，其所有元素都属于 $\{0, \pm 1\}$。特别地， r是一个 $\{0, \pm 1\}$向量。因此， D 的每一列都是 y、 $-y$或零列的副本。由此， C 可通过在 B_r 中添加零列、复制 y 列，并将某些列乘以 -1得到。由于所有这些操作都保持全幺模性，且 B_r 是全幺模矩阵，因此 C 也是全幺模矩阵。□

引理 42。 设 B_ℓ 和 B_r 是定义39中的矩阵。设 B'_ℓ 和 B' 分别是在 B_ℓ 和 B中对（x_ℓ， y_ℓ） $\in X_\ell \times Y_\ell$ 执行短表枢轴后得到的矩阵。那么 $B' = B'_\ell \oplus_{2,\ x,\ y} B_r$。

证明。设

$$B'_\ell = \begin{bmatrix} A'_\ell \\ r' \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} \\ B'_{21} & B'_{22} \end{bmatrix}$$

其中，分块的维度分别与 B_ℓ 和 B中的相同。根据引理 12，$B'_{11} = A'_\ell$、 $B'_{12} = 0$和 $B'_{22} = A_r$。等式 $B'_{21} = c \otimes r'$可通过直接计算验证。因此， $B' = B'_\ell \oplus_{2,\ x,\ y} B_r$。□

引理43。 设定义 39 中的 B_ℓ 和 B_r 是全幺模矩阵（在 $\mathbb{Q}$上）。则$B_\ell \oplus_{2,\ x,\ y} B_r$ 是全幺模矩阵。

证明。 根据引理 7，只需证明对每个 $k \in \mathbb{N}$， $B_\ell \oplus_{2,\ x,\ y} B_r$ 都是 k-PU。我们对 k使用归纳法证明这一断言。 $k = 1$ 的基例成立，因为根据构造， $B_\ell \oplus_{2,\ x,\ y} B_r$ 的所有元素都属于$\{0, \pm 1\}$ 。

假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$，我们已知任意全幺模矩阵 B'_ℓ和 B'_r （来自定义 39）的 2-和$B'_\ell \oplus_{2,\ x,\ y} B'_r$ 都是 k-PU。现在，给定全幺模矩阵 B_ℓ 和 B_r （来自定义 39），我们的目标是证明$B = B_\ell \oplus_{2,\ x,\ y} B_r$ 是$(k+1)$-PU，也就是说， B 的每个$(k+1) \times (k+1)$子矩阵T 的行列式都满足 $T \in \{0, \pm 1\}$。

首先，假设 T 在 X_ℓ中没有行。那么 T 是$\begin{bmatrix} D & A_r \end{bmatrix}$的一个子矩阵，而根据引理 41，它是全幺模的，因此行列式 $T \in \{0, \pm 1\}$。因此，我们可以假设 T包含一行 $x_\ell \in X_\ell$。

接下来，注意到不失一般性，我们可以假设存在 $y_\ell \in Y_\ell$ ，使得$T(x_\ell,\ y_\ell) \neq 0$。事实上，若对所有 y， $T(x_\ell,\ y) = 0$，则行列式 $T = 0$，结论成立；并且只要 $y \in Y_r$， $T(x_\ell,\ y) = 0$就成立。

由于 B 是 1-PU， T 的所有元素都属于 $\{0, \pm 1\}$，因此 $T(x_\ell, y_\ell) \in \{\pm 1\}$。于是，根据引理 13，在 T 中对 (x_ℓ, y_ℓ) 进行短表枢轴，得到一个矩阵，其中包含一个$k \times k$子矩阵 T''，使得 $|$行列式 $T| = |$行列式 $T''|$。由于 T 是 B 的一个子矩阵，矩阵 T'' 是对同一元素 (x_ℓ, y_ℓ) 在 B 中进行短表枢轴后所得矩阵 B' 的一个子矩阵。根据引理 42，我们有 $B' = B'_\ell \oplus_{2,x,y} B_r$ ，其中 B'_ℓ 是对 (x_ℓ, y_ℓ) 在 B_ℓ 中进行短表枢轴的结果。由于 B_ℓ 是全幺模的，根据引理 14， B'_ℓ 也全幺模。因此，将归纳假设应用于 T'' 和 $B'_\ell \oplus_2$，由 $_{x,y} B_r$，我们有行列式 $T'' \in \{0, \pm 1\}$。由于$|$行列式 $T| = |$行列式 $T''|$，我们得出行列式 $T \in \{0, \pm 1\}$。□

定理 44. 设 M 是正则拟阵 M_ℓ 和 M_r的2-和。那么 M 也是正则的。

证明. 设 B_ℓ、 B_r和 B 是定义 40 中的标准表示矩阵。由于 M_ℓ和 M_r 是正则拟阵，根据引理 33， B_ℓ 和 B_r 分别具有全幺模符号化 B'_ℓ 和 B'_r。于是， $B' = B'_\ell \oplus_{2、\ x、\ y} B'_r$是 B的全幺模符号化。事实上，根据引理43， B'是全幺模的；直接计算可验证 B' 是 B的符号化。因此，根据引理 33， M 是正则的。□

5. Regularity of 3-Sum

5.1. 定义。

定义 45。 令 X_ℓ、 Y_ℓ、 X_r和 Y_r 为满足以下性质的集合：

- $X_\ell \cap X_r = \{x_2, x_1, x_0\}$ 对于某些互不相同的 x_0、 x_1 和 x_2;
- $Y_\ell \cap Y_r = \{y_0, y_1, y_2\}$ 对于某些互不相同的 y_0、 y_1 和 y_2;
- X_ℓ 与 Y_r不相交；并且
- Y_ℓ 与 X_r不相交。

设 $B_\ell \in \mathbb{Z}_2^{X_\ell \times Y_\ell}$和 $B_r \in \mathbb{Z}_2^{X_r \times Y_r}$为如下形式的矩阵

$$B_\ell = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{3}{|c|}{A_\ell} & 0 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & 1 & 1 & 0 \\ \hline D_\ell & \multicolumn{2}{|c|}{D_0} & 1 \\ \cline{4-4} & & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{and} B_r = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{D_0} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \cline{3-3} & & 1 & \multicolumn{1}{c|}{A_r} \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{D_r} & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \end{array}$$

其中 D_0 可逆。则 B_ℓ 与 B_r 的 3-和 $B = B_\ell \oplus_3 B_r$ 定义为

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{3}{|c|}{A_\ell} & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & 1 & 1 & 0 & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline D_\ell & \multicolumn{2}{|c|}{D_0} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \cline{4-4} & & & 1 & \multicolumn{1}{c|}{A_r} \\ \hline D_{\ell r} & \multicolumn{2}{|c|}{D_r} & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \end{array} \quad \text{其中} \quad D_{\ell r} = D_r \cdot (D_0)^{-1} \cdot D_\ell。$$

这里所有矩阵的索引方式一致， $D_0 \in \mathbb{Z}_2^{\{x_1,x_0\}\times\{y_0,y_1\}}$， 且子矩阵$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{3}{|c|}{} & \multicolumn{2}{c|}{D_0} & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{|c|}{} & \multicolumn{2}{c|}{} & 1 \\ \hline \multicolumn{3}{|c|}{} & \multicolumn{2}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{3}{|c|}{} & \multicolumn{2}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array}$ 的索引为 $\{x_2, x_1, x_0\} \times \{y_0, y_1, y_2\}$ 在 B_ℓ， B_r， 以及 B。

定义 46。 拟阵 M 是拟阵 M_ℓ 和 M_r 的 3-和，当且仅当存在标准 $\mathbb{Z}_2$表示矩阵 B_ℓ， B_r， 以及 B （分别对应 M_ℓ， M_r， 以及 M），其形式如定义45所示。

5.2. **典范符号化**。

引理 47。 设 $D_0 \in \mathbb{Z}_2^{\{x_1,x_0\}\times\{y_0,y_1\}}$ 是一个可逆矩阵。那么，在对行和列重新索引后，要么 $D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$， 要么 $D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

证明。 穷举。 □

为简化记号，以下我们假设定义 D_0 中的子矩阵 45 属于引理47中所述的两个特殊情形之一。

定义 48. 我们将 $D_0' \in \mathbb{Q}^{\{x_1,x_0\}\times\{y_0,y_1\}}$ 称为 $D_0 \in \mathbb{Z}_2^{\{x_1,x_0\}\times\{y_0,y_1\}}$ i 的典范符号化 f

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad D_0' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{or} \quad D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad D_0' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

同样， 我们将 $S' \in \mathbb{Q}^{\{x_2,x_1,x_0\}\times\{y_0,y_1,y_2\}}$ 称为 $S \in \mathbb{Z}_2^{\{x_2,x_1,x_0\}\times\{y_0,y_1,y_2\}}$ 的典范符号化，若

$$S = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{D_0} & 1 \\ \cline{3-3} & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{and } S' = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{D_0'} & 1 \\ \cline{3-3} & & 1 \\ \hline \end{array}$$

为简化记号，以下用 D_0、 D_0'、 S 和 S' 表示上述形式的矩阵。注意， S' 的典范符号化 S （定义 48）是全幺模的。

引理 49。设 Q 是 S 的一个全幺模符号化（定义 48）。令 $u \in \{0,\pm1\}^{\{x_2,x_1,x_0\}}$、$v \in \{0,\pm1\}^{\{y_0,y_1,y_2\}}$ 和 Q' 定义如下：

$$u(i) = \begin{cases} Q(x_2,y_0)\cdot Q(x_0,y_0), & i = x_0,\\ Q(x_2,y_0)\cdot Q(x_0,y_0)\cdot Q(x_0,y_2)\cdot Q(x_1,y_2), & i = x_1,\\ 1, & i = x_2, \end{cases}$$

$$v(j) = \begin{cases} Q(x_2,y_0), & j = y_0,\\ Q(x_2,y_1), & j = y_1,\\ Q(x_2,y_0)\cdot Q(x_0,y_0)\cdot Q(x_0,y_2), & j = y_2, \end{cases}$$

$$Q'(i,j) = Q(i,j)\cdot u(i)\cdot v(j) \quad \forall i \in \{x_2,x_1,x_0\},\ \forall j \in \{y_0,y_1,y_2\}.$$

那么 $Q' = S'$（根据定义48）。

证明。由于 Q 是 S 的一个全幺模符号化，且 Q' 是通过将 Q 的行和列乘以 ±1 个因子得到的，因此 Q' 也是 S的一个全幺模符号化。根据构造，我们有

$$\begin{aligned}
&Q'(x_2,y_0) = Q(x_2,y_0)\cdot 1\cdot Q(x_2,y_0) = 1,\\
&Q'(x_2,y_1) = Q(x_2,y_1)\cdot 1\cdot Q(x_2,y_1) = 1,\\
&Q'(x_2,y_2) = 0,\\
&Q'(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0)\cdot (Q(x_2,y_0)\cdot Q(x_0,y_0))\cdot Q(x_2,y_0) = 1,\\
&Q'(x_0,y_1) = Q(x_0,y_1)\cdot (Q(x_2,y_0)\cdot Q(x_0,y_0))\cdot Q(x_2,y_1),\\
&Q'(x_0,y_2) = Q(x_0,y_2)\cdot (Q(x_2,y_0)\cdot Q(x_0,y_0))\cdot (Q(x_2,y_0)\cdot Q(x_0,y_0)\cdot Q(x_0,y_2)) = 1,\\
&Q'(x_1,y_0) = 0,\\
&Q'(x_1,y_1) = Q(x_1,y_1)\cdot (Q(x_2,y_0)\cdot Q(x_0,y_0)\cdot Q(x_0,y_2)\cdot Q(x_1,y_2))\cdot (Q(x_2,y_1)),\\
&Q'(x_1,y_2) = Q(x_1,y_2)\cdot (Q(x_2,y_0)\cdot Q(x_0,y_0)\cdot Q(x_0,y_2)\cdot Q(x_1,y_2))\cdot (Q(x_2,y_0)\cdot Q(x_0,y_0)\cdot Q(x_0,y_2)) = 1.
\end{aligned}$$

因此，只需证明 $Q'(x_0,\ y_1) = S'(x_0,\ y_1)$以及 $Q'(x_1,\ y_1) = S'(x_1,\ y_1)$。

考虑条目 $Q'(x_0,\ y_1)$。如果 $D_0(x_0,\ y_1) = 0$，那么 $Q'(x_0,\ y_1) = 0 = S'(x_0,\ y_1)$。否则，我们有 $D_0(x_0,\ y_1) = 1$，因此 $Q'(x_0,\ y_1) \in \{\pm1\}$，因为 Q' 是 S 的一种符号化。如果 $Q'(x_0,\ y_1) = -1$，那么

$$\det Q'(\{x_0,x_2\},\{y_0,y_1\}) = \det\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \notin \{0,\pm1\},$$

这与 Q' 的全幺模性矛盾。因此，$Q'(x_0,\ y_1) = 1 = S'(x_0,\ y_1)$。

考虑条目 $Q'(x_1,\ y_1)$。由于 Q' 是 S 的一种符号化，我们有 $Q'(x_1,\ y_1) \in \{\pm1\}$。分两种情况讨论。

(1) 假设 $D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。如果 $Q'(x_1,y_1) = 1$，则 $\det Q = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -2 \notin \{0,\pm1\}$，这与 Q' 的全幺模性相矛盾。因此，$Q'(x_1,y_1) = -1 = S'(x_1,y_1)$。(2) 假设 $D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。如果 $Q'(x_1,y_1) = -1$，则 $\det Q(\{x_1,x_0\},\{y_1,y_2\}) = \det\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \notin \{0,\pm1\}$，这与 Q' 的全幺模性相矛盾。因此，$Q'(x_1,y_1) = 1 = S'(x_1,y_1)$。

□

定义 50。设 X 和 Y 为集合，且满足 $\{x_2, x_1, x_0\} \subseteq X$ 和 $\{y_0, y_1, y_2\} \subseteq Y$。设 $Q \in \mathbb{Q}^{X\times Y}$ 为一个全幺模矩阵。定义 $u \in \{0, \pm 1\}^X$、$v \in \{0, \pm 1\}^Y$ 和 Q' 如下：

$$u(i) = \begin{cases} Q(x_2, y_0) \cdot Q(x_0, y_0), & i = x_0, \\ Q(x_2, y_0) \cdot Q(x_0, y_0) \cdot Q(x_0, y_2) \cdot Q(x_1, y_2), & i = x_1, \\ 1, & i = x_2, \\ 1, & i \in X \setminus \{x_2, x_1, x_0\}, \end{cases}$$

$$v(j) = \begin{cases} Q(x_2, y_0), & j = y_0, \\ Q(x_2, y_1), & j = y_1, \\ Q(x_2, y_0) \cdot Q(x_0, y_0) \cdot Q(x_0, y_2), & j = y_2, \\ 1, & j \in Y \setminus \{y_0, y_1, y_2\}, \end{cases}$$

$$Q'(i, j) = Q(i, j) \cdot u(i) \cdot v(j) \quad \forall i \in X,\ \forall j \in Y.$$

我们将 Q' Q的规范重符号化称为规范重符号化。

引理 51. 设 X和 Y是满足 $\{x_2, x_1, x_0\} \subseteq X$和 $\{y_0, y_1, y_2\} \subseteq Y$的集合。设 $Q \in \mathbb{Q}^{X\times Y}$是 $Q_0 \in \mathbb{Z}_2^{X\times Y}$的全幺模符号化，且 $Q_0(\{x_2, x_1, x_0\}, \{y_0, y_1, y_2\}) = S$（见定义48）。那么，$Q$ 的规范重符号化 Q'（见定义 50）是 Q_0的全幺模符号化，并且 $Q'(\{x_2, x_1, x_0\}, \{y_0, y_1, y_2\}) = S'$（见定义48）。

证明。由于 Q 是 Q_0 的全幺模符号化，且 Q' 由 Q通过将一些行和列乘以 ± 1 因子得到，Q' 也是 Q_0的全幺模符号化。等式 $Q'(\{x_2, x_1, x_0\},\ \{y_0, y_1, y_2\}) = S'$由引理49得出。□

定义 52. 假设定义 45 中的 B_ℓ 和 B_r 分别具有全幺模符号化 B'_ℓ 和 B'_r。设 B''_ℓ 和 B''_r 分别是 B'_ℓ 和 B'_r 的规范重符号化（见定义 50 ）。设 A''_ℓ、A''_r、D''_ℓ、D''_r 和 D''_0 是 B''_ℓ 和 B''_r 中的分块，分别与 B_ℓ 和 B_r 中的分块 A_ℓ、A_r、D_ℓ、D_r 和 D_0 相对应。B 的典范符号化 B'' 定义为

$$B'' = \left[\begin{array}{ccc} A''_\ell & & 0 \\ & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline \end{array} & \\ \begin{array}{|c|}\hline D''_\ell \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|}\hline D''_0 \\ \hline \end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} & A''_r \\ \begin{array}{|c|}\hline D''_{\ell r} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|}\hline D''_r \\ \hline \end{array} & \end{array}\right] \quad \text{其中 } D''_{\ell r} = D''_r \cdot (D''_0)^{-1} \cdot D''_\ell。$$

注意，D''_0 按构造是非奇异的，因此 $D''_{\ell r}$，进而 B''，都是定义良好的 d.

5.3. **典范符号化的性质**。

引理 53. B'' 根据定义 52 是 B的一个符号化。

证明。根据引理 51，B''_ℓ和 B''_r 是 B_ℓ 和 B_r的全幺模符号化。因此，分块A''_ℓ，A''_r，D''_ℓ，D''_r以及 D''_0在 B''中分别是 B中对应分块的符号化。因此，只需证明 $D''_{\ell r}$ 是 $D_{\ell r}$的符号化。这可以通过直接计算验证。□

引理 54。假设 B_r（定义 45 ）具有全幺模符号化 B'_r。令 B''_r 为50（定义 B'_r）的规范重符号化。令 $c''_0 = B''_r(X_r, y_0)$、$c''_1 = B''_r(X_r, y_1)$以及 $c''_2 = c''_0 - c''_1$。则以下结论成立。

(1) 对每个 $i \in X_r$, $\left[c''_0(i)\ c''_1(i)\right] \in \{0, \pm 1\}^{\{y_0, y_1\}} \setminus \left\{\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\right\}$。
(2) 对每个 $i \in X_r$, $c''_2(i) \in \{0, \pm 1\}$。(3) $\begin{bmatrix}c''_0 & c''_2 & A''_r\end{bmatrix}$ 是全幺模的。(4) $\begin{bmatrix}c''_1 & c''_2 & A''_r\end{bmatrix}$ 是全幺模的。(5) $\begin{bmatrix}c''_0 & c''_1 & c''_2 & A''_r\end{bmatrix}$ 是全幺模的。

证明。在整个证明过程中，我们使用 B''_r 是全幺模的，这由引理 51得出。

(1) 由于 B_r'' 是全幺模的，其所有条目都属于 $\{0,\pm1\}$，特别地，$\begin{bmatrix} c_0''(i) & c_1''(i) \end{bmatrix} \in \{0,\pm1\}^{\{y_0,y_1\}}$。如果 $\begin{bmatrix} c_0'(i) & c_1''(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$，那么

$$\det B_r''(\{x_2,i\},\{y_0,y_1\}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \notin \{0,\pm1\},$$

这与 B_r'' 的全幺模性矛盾。类似地，如果 $\begin{bmatrix} c_0''(i) & c_1''(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$，那么

$$\det B_r''(\{x_2,i\},\{y_0,y_1\}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \notin \{0,\pm1\},$$

这与 B_r'' 的全幺模性矛盾。因此，所需结论成立。

(2) 由第 1 项和直接计算可得。

(3) 在 B_r'' 上对 (x_2, y_0) 执行短表枢轴，得到：

$$B_r'' = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ c_0 & c_1 & A_r \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -c_0 & c_1'' - c_0 & A_r \end{bmatrix}$$

通过删除行 x_2，并将列 y_0 和 y_1 乘以 -1，可将所得矩阵变换为 $\begin{bmatrix} c_0'' & c_2'' & A_r'' \end{bmatrix}$。由于 B_r'' 是全幺模的，且全幺模性在进行枢轴变换、取子矩阵以及将列乘以 ±1 个因子后仍得以保持，因此我们得出结论：$\begin{bmatrix} c_0'' & c_2'' & A_r'' \end{bmatrix}$ 是全幺模的。

(4) 与条目 4 类似，在 B_r'' 中对（x_2，y_1）进行短表枢轴，得到：

$$B_r'' = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ c_0 & c_1 & A_r \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c_0'' - c_1 & -c_1 & A_r \end{bmatrix}$$

通过删除行 x_2、将列 y_1 乘以 -1，并交换列 y_0 和 y_1的顺序，可将所得矩阵变换为 $\begin{bmatrix} c_1'' & c_2'' & A_r'' \end{bmatrix}$。由于 B_r'' 是全幺模的，且全幺模性在进行枢轴变换、取子矩阵、将列乘以 ±1 个因子以及重新排列列后仍得以保持，因此我们得出结论：$\begin{bmatrix} c_1'' & c_2'' & A_r'' \end{bmatrix}$ 是全幺模的。

(5) 令 V 为 $\begin{bmatrix} c_0'' & c_1'' & c_2'' & A_r'' \end{bmatrix}$的一个方子矩阵。我们的目标是证明 $\det V \in \{0,\pm1\}$。

假设列 c_2'' 不在 V 中。那么 V 是 B_r'' 的一个子矩阵，而 B_r'' 是全幺模的。因此，$\det V \in \{0,\pm1\}$。接下来我们假设列 z 在 V 中。

假设列 c_0'' 和 c_1'' 都在 V 中。那么 V 包含列 c_0''、c_1'' 和 $c_2'' = c_0'' - c_1''$，它们线性相关。因此，$\det V = 0$。接下来我们假设列 c_0'' 和 c_1'' 中至少有一列不在 V 中。

假设列 c_1'' 不在 V 中。那么 V 是 $\begin{bmatrix} c_0'' & c_2'' & A_r'' \end{bmatrix}$的一个子矩阵，根据条目 3，它是全幺模的。因此，$\det V \in \{0,\pm1\}$。类似地，如果列 c_0'' 不在 V 中，那么 V 是 $\begin{bmatrix} c_1'' & c_2'' & A_r'' \end{bmatrix}$的一个子矩阵，根据条目 4，它是全幺模的。因此，$\det V \in \{0,\pm1\}$。

□

引理 55。 假设 B_ℓ 来自定义 45 具有全幺模符号化 B_ℓ'。令 B_ℓ'' 为 B_ℓ'的规范重符号化（来自定义 50）。令 $d_0'' = B_\ell''(x_0, Y_\ell)$，$d_1'' = B_\ell''(x_1, Y_\ell)$，并令 $d_2'' = d_0'' - d_1''$。则以下结论成立。

(1) For every $j \in Y_\ell$, $\begin{bmatrix} d_0''(i) \\ d_1''(j) \end{bmatrix} \in \{0,\pm1\}^{\{x_1,x_0\}} \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(2) For every $j \in Y_\ell$, $d_2''(j) \in \{0,\pm1\}$.

(3) $\begin{bmatrix} A_\ell'' \\ d_0'' \\ d_2'' \end{bmatrix}$ is TU.

(4) $\begin{bmatrix} A_\ell'' \\ d_1'' \\ d_2'' \end{bmatrix}$ is TU.

(5) $\begin{bmatrix} A''_\ell \\ d''_0 \\ d''_1 \\ d''_2 \end{bmatrix}$ is TU.

证明。 将引理 54应用于 $B_\ell^\top$，或者重复相同的论证，直至转置为止。 □

引理 56。 设 B'' 取自定义 52。设 $c''_0 = B''(X_r, y_0)$, $c''_1 = B''(X_r, y_1)$, 以及 $c''_2 = c''_0 - c''_1$。类似地，设 $d''_0 = B''(x_0, Y_\ell)$, $d''_1 = B''(x_1, Y_\ell)$, 以及 $d''_2 = d''_0 - d''_1$。则以下结论成立。

(1) 对每个 $i \in X_r$, $c''_2(i) \in \{0, \pm 1\}$。(2) 若 $D''_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，则 $D'' = c''_0 \otimes d''_0 - c''_1 \otimes d''_1$。若 $D''_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $D'' = c''_0 \otimes d''_0 - c''_0 \otimes d''_1 + c''_1 \otimes d''_1$。(3) 对每个 $j \in Y_\ell$, $D''(X_r, j) \in \{0, \pm c''_0, \pm c''_1, \pm c''_2\}$。(4) 对每个 $i \in X_r$, $D''(i, Y_\ell) \in \{0, \pm d''_0, \pm d''_1, \pm d''_2\}$。(5) $\begin{bmatrix} A''_\ell \\ D'' \end{bmatrix}$ 是全幺模。

证明。

(1) 由引理54.2成立。(2) 注意到

$$\begin{bmatrix} D''_\ell \\ D''_{\ell r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D''_0 \\ D''_r \end{bmatrix} \cdot (D''_0)^{-1} \cdot D''_\ell, \quad \begin{bmatrix} D''_0 \\ D''_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D''_0 \\ D''_r \end{bmatrix} \cdot (D''_0)^{-1} \cdot D''_0, \quad \begin{bmatrix} D''_0 \\ D''_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c''_0 & c''_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} D''_\ell & D''_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d''_0 \\ d''_1 \end{bmatrix}.$$

因此，

$$D'' = \begin{bmatrix} D''_\ell & D''_0 \\ D''_{\ell r} & D''_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D''_0 \\ D''_r \end{bmatrix} \cdot (D''_0)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} D''_\ell & D''_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c''_0 & c''_1 \end{bmatrix} \cdot (D''_0)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} d''_0 \\ d''_1 \end{bmatrix}.$$

考虑 D''_0 的两种情况并进行计算，即可得到所需结果。

(3) 设 $j \in Y_\ell$。由引理 55.1, $\begin{bmatrix} d''_0(i)\,(j) \\ d''_1 \end{bmatrix} \in \{0, \pm 1\}^{\{x_1, x_0\}} \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$。分两种情况讨论。

(a) 若 $D''_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，则根据第 2 项，我们有 $D''(X_r, j) = d''_0(j) \cdot c''_0 + (-d''_1(j)) \cdot c''_1$。

考虑 $d''_0(j)$ 和 $d''_1(j)$ 的所有可能情况后，我们得出 $D''(X_r, j) \in \{0, \pm c''_0, \pm c''_1, \pm(c''_0 - c''_1)\}$。

(b) 若 $D''_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则根据第 2 项可得 $D''(X_r, j) = (d''_0(j) - d''_1(j)) \cdot c''_0 + d''_1(j) \cdot c''_1$。

考察 $d''_0(j)$ 和 $d''_1(j)$ 的所有可能情形后，我们得出 $D''(X_r, j) \in \{0, \pm c''_0, \pm c''_1, \pm(c''_0 - c''_1)\}$。

(4) 设 $i \in X_r$。根据引理 54。1, $\begin{bmatrix} c''_0(i)\, c''_1(i) \end{bmatrix} \in \{0, \pm 1\}^{\{y_0, y_1\}} \setminus \{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \}$。分两种情形讨论。

(a) 若 $D''_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，则根据第 2 项可得 $D''(i, Y_\ell) = c''_0(i) \cdot d''_0 + (-c''_1(i)) \cdot d''_1$。

考察 $c''_0(i)$ 和 $c''_1(i)$ 的所有可能情形后，我们得出 $D''(i, Y_\ell) \in \{0, \pm d''_0, \pm d''_1, \pm d''_2\}$。

(b) 若 $D''_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则根据第 2 项可得 $D''(i, Y_\ell) = c''_0(i) \cdot d''_0 + (c''_1(i) - c''_0(i)) \cdot d''_1$。

通过考察 $c''_0(i)$ 和 $c''_1(i)$ 的所有可能情形，我们得出 $D''(i, Y_\ell) \in \{0, \pm d''_0, \pm d''_1, \pm d''_2\}$。

(5) 由引理 55。5，$\begin{bmatrix} A''_\ell \\ d''_0 \\ d''_1 \\ d''_2 \end{bmatrix}$ 是全幺模的。由于添加零行、现有行的副本以及将行乘以 ± 1 因子 $\begin{bmatrix} A''_\ell \\ 0 \\ \pm d''_0 \\ \pm d''_1 \\ \pm d''_2 \end{bmatrix}$ 后，全幺模性仍然保持，因此 $\begin{bmatrix} A''_\ell \\ 0 \\ \pm d''_0 \\ \pm d''_1 \\ \pm d''_2 \end{bmatrix}$ 也是全幺模的。根据第4项，$\begin{bmatrix} A''_\ell \\ D'' \end{bmatrix}$ 是后一个矩阵的子矩阵，因此它也全幺模。

□

5.4. **正则性的证明**。

定义 57。设 X'_ℓ、Y'_ℓ、X'_r、Y'_r 为集合，且 x_0 和 x_1 是两个不同元素，均不属于 X'_ℓ 或 X'_r。此外，设 c_0，$c_1 \in \mathbb{Q}^{X'_r \cup \{x_1, x_0\}}$ 为列向量。我们将$\mathcal{C}(X'_\ell$，Y'_ℓ，X'_r，Y'_r；c_0，$c_1)$ 定义为如下形式的矩阵族 $\begin{bmatrix} A_\ell & 0 \\ D & A_r \end{bmatrix}$：

(1) $A_\ell \in \mathbb{Q}^{X'_\ell \times Y'_\ell}$，$A_r \in \mathbb{Q}^{(X'_r \cup \{x_1, x_0\}) \times Y'_r}$，且 $D \in \mathbb{Q}^{(X'_r \cup \{x_1, x_0\}) \times Y'_\ell}$；

(2) $\begin{bmatrix} A_\ell \\ D \end{bmatrix}$ 是全幺模；(3) 对每个 $j \in Y'_\ell$，$D(X'_r$，$j)$，都有 $\in \{0, \pm c_0, \pm c_1, \pm(c_0 - c_1)\}$；(4) $\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_0 - c_1 & A_r \end{bmatrix}$ 是全幺模；

(5) $\begin{bmatrix} A_\ell & 0 \\ D\ x_0\ Y'_\ell & 1(,)(,)1 \\ D\ x_1\ Y'_\ell & \end{bmatrix}$ 是全幺模；(6) $c_0(x_0) = 1$ 且 $c_0(x_1)$ $= 0$；(7) 要么 $c_1(x_0) = 0$ 且 $c_1(x_1) = -1$，要么 $c_1(x_0) = 1$ 且 c_1 $(x_1) = 1$。

引理 58. 设 B'' 来自定义 52。那么 $B'' \in \mathcal{C}(X'_\ell, Y'_\ell, X'_r, Y'_r; c''_0, c''_1)$ 中，$X'_\ell = X_\ell \setminus \{x_1, x_0\}$，$X'_r = X_r \setminus \{x_2, x_1, x_0\}$，$Y'_\ell = Y_\ell \setminus \{y_2\}$，$Y'_r = Y_r \setminus \{y_0, y_1\}$，$x_0$ 和 x_1 相同，$c''_0 = B''(X'_r, y_0)$，且 $c''_1 = B''(X'_r, y_1)$。

证明. 回忆由引理 56.1 可知 $c''_0 - c''_1 \in \{0, \pm 1\}^{X'_r}$，因此 $\mathcal{C}(X'_\ell, Y'_\ell, X'_r, Y'_r; c''_0, c''_1)$ 定义良好。为说明 $B'' \in \mathcal{C}(X'_\ell, Y'_\ell, X'_r, Y'_r; c''_0, c''_1)$，注意定义 57 中的所有性质均满足：由引理 56.3 可得性质 3，由引理 54.5 可得性质 4，由引理 56.5 可得性质 2。□

引理 59. 设 $C \in \mathcal{C}(X'_\ell, Y'_\ell, X'_r, Y'_r; c_0, c_1)$ 来自定义 57。设 $x \in X'_\ell$ 和 $y \in Y'_\ell$ 满足 $A_\ell(x, y) \neq 0$，并设 C' 是在 C 中对 (x, y) 执行短表枢轴后得到的结果。则 $C' \in \mathcal{C}(X'_\ell, Y'_\ell, X'_r, Y'_r; c_0, c_1)$。

证明。我们的目标是证明 C' 满足定义 57中的所有性质。设 $C' = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ C'_{21} & C'_{22} \end{bmatrix}$，并设 $\begin{bmatrix} A'_\ell \\ D' \end{bmatrix}$ 是在 $\begin{bmatrix} A_\ell \\ D \end{bmatrix}$ 中对（x、y）执行短表枢轴后得到的结果。观察如下。

- 根据引理 12，$C'_{11} = A'_\ell$，$C'_{12} = 0$，$C'_{21} = D'$，以及 $C'_{22} = A_r$。
- 由于 $\begin{bmatrix} A_\ell \\ D \end{bmatrix}$ 根据性质 2 对 C是全幺模的，因此 A_ℓ的所有元素都属于 $\{0, \pm 1\}$。
- $A_\ell(x,\ y) \in \{\pm 1\}$，因为根据上述观察，$A_\ell(x,\ y) \in \{0, \pm 1\}$，而根据假设，$A_\ell(x,\ y) \neq 0$。
- 由于 $\begin{bmatrix} A_\ell \\ D \end{bmatrix}$ 根据性质 2 具有全幺模性 C，且枢轴变换保持全幺模性，$\begin{bmatrix} A'_\ell \\ D' \end{bmatrix}$ 也具有全幺模性。

这些观察立即推出 C'满足性质 4 和性质 2。事实上， C'满足性质 4，因为 $C'_{22} = A_r$，且根据 C的性质 4， $\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_0 - c_1 & A_r \end{bmatrix}$ 具有全幺模性。另一方面，性质 2 可由 $C'_{11} = A'_\ell$、$C'_{21} = D'$和 $\begin{bmatrix} A'_\ell \\ D' \end{bmatrix}$ 具有全幺模性得出。因此，只需证明 C' 满足性质 3。令 $j \in Y_r$。我们的目标是证明 $D'(X'_r, j) \in \{0, \pm c_0, \pm c_1, \pm(c_0 - c_1)\}$。

假设 $j = y$。根据主元公式， $D'(X'_r, y) = -\frac{D(X'_r, y)}{A_r(x,y)}$。由于 $D(X'_r, y) \in \{0, \pm c_0, \pm c_1, \pm(c_0 - c_1)\}$（由 C 的性质 3），并且 $A_\ell(x, y) \in \{\pm 1\}$，我们得到 $D'(X'_r, y) \in \{0, \pm c_0, \pm c_1, \pm(c_0 - c_1)\}$。

现在假设 $j \in Y_\ell \setminus \{y\}$。根据主元公式， $D'(X'_r, j) = D(X'_r, j) - \frac{A_\ell(x,j)}{A_\ell(x,y)} D(X'_r, y)$。这里 $D(X'_r, j)$ $D(X'_r, y) \in \{0, \pm c_0, \pm c_1, \pm(c_0 - c_1)\}$（由 C 的性质 3），且 $A_\ell(x, j) \in \{0, \pm 1\}$ 和 $A_\ell(x, y) \in \{\pm 1\}$，由前述观察可知。对 $D(X'_r, j)$、$D(X'_r, y)$、 $A_\ell(x, j)$ 和 $A_\ell(x, y)$ 进行穷尽的分类讨论。利用对称性可以大幅减少情况数。在所有剩余情况下，我们要么可以证明 $D'(X'_r, j) \in \{0, \pm c_0, \pm c_1, \pm(c_0 - c_1)\}$，从而得到所需结论；要么会导出与性质 5 矛盾的结果。□

引理 60。 设 $C \in \mathcal{C}(X'_\ell, Y'_\ell, X'_r, Y'_r; c_0, c_1)$ 来自定义 57。则 C是全幺模的。

证明。 根据引理 7，只需证明 C 对每个 k都是 $k \in \mathbb{N}$-PU。我们对 k使用归纳法证明这一结论。当 $k = 1$ 时，基例成立，因为定义 57 中的性质 4 和 2 意味着 A_ℓ、 A_r和 D 都是全幺模的，因此它们的 $C = \begin{bmatrix} A_\ell & 0 \\ D & A_r \end{bmatrix}$ 的所有元素都属于 $\{0, \pm 1\}$，如需所证。

假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$，我们知道每个 $C' \in \mathcal{C}(X'_\ell, Y'_\ell, X'_r, Y'_r; c_0, c_1)$ 都是 k-PU。我们的目标是证明 C 是 $(k+1)$-PU，也就是说， C 的每个 $(k+1) \times (k+1)$ 子矩阵 S 的行列式 $V \in \{0, \pm 1\}$均为 。

首先，假设 V 在 X'_ℓ中没有行。那么 V 是 $\begin{bmatrix} D & A_r \end{bmatrix}$的子矩阵，根据定义57 中的性质4，它是全幺模的，因此行列式$V \in \{0, \pm 1\}$。因此，我们可以假设 S包含一行$x_\ell \in X'_\ell$。

接下来，注意到不失一般性，我们可以假设存在 $y_\ell \in Y'_\ell$，使得$V(x_\ell, y_\ell) \neq 0$。事实上，若对所有 y，都有 $V(x_\ell, y) = 0$，则行列式$V = 0$，结论即得；并且当 $y \in Y'_r$ 时， $V(x_\ell, y) = 0$成立。

由于 C 是 1-PU， V 的所有元素都属于 $\{0, \pm 1\}$，因此 $V(x_\ell, y_\ell) \in \{\pm 1\}$。于是，根据引理 13，在 V 中对 (x_ℓ, y_ℓ) 执行短表枢轴，得到一个矩阵，其中包含一个$k \times k$子矩阵 S''，使得 $|$行列式 $V| = |$行列式$V''|$。由于 V 是 C 的子矩阵，矩阵 V'' 是通过在 C 中对同一元素 (x_ℓ, y_ℓ) 执行短表枢轴而得到的矩阵 C' 的子矩阵。根据引理 59，有 $C' \in \mathcal{C}(X'_\ell, Y'_\ell, X'_r, Y'_r; c_0, c_1)$。于是，将归纳假设应用于 V'' 和 C'，可得行列式 $V'' \in \{0, \pm 1\}$。由于 $|$行列式 $V| = |$行列式 $V''|$，我们得出行列式$V \in \{0, \pm 1\}$。□

引理 61。 B'' 根据定义 52是全幺模的。

证明。 结合引理 58 和60的结果。 □

定理 62。 设 M 是正则拟阵 M_ℓ 和 M_r的一个3-和。那么， M 也是正则的 .

证明。设 B_ℓ、 B_r和 B 是定义 46 中的标准 $\mathbb{Z}_2$ 表示矩阵。由于 M_ℓ和 M_r 是正则的，根据引理 33， B_ℓ 和 B_r 具有全幺模符号化。于是，定义 52 中的典范符号化 B''是 B的一个全幺模符号化。事实上，根据引理 53， B'' 是 B 的一个符号化，而根据引理 61， B'' 是全幺模的。因此，根据引理 33， M 是正则的。□

6. Special Matroids

定义 63. 设 $A \in \mathbb{Q}^{X \times Y}$为一个矩阵。若对于所有 $j \in Y$，都有 $a_{i,\,j} = 0$ 对所有 $i \in X$成立，或者存在 i_1， $i_2 \in X$ 使得

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = i_1 \\ -1 & \text{if } i = i_2 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

那么我们称 A 为一个（有向）图的节点关联矩阵，该图的节点由 X索引，边由 Y索引。

定义 64. 如果一个拟阵可以由节点关联矩阵表示，我们就称它为图拟阵。

定义 65. 设 S 是由矩阵 B 给出的标准表示。 S 的对偶由 $-B^\intercal$ 给出。

定义 66. 如果一个拟阵的对偶是图拟阵，我们就称该拟阵为余图拟阵。

定义 67. 具有标准表示的拟阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

在 $\mathbb{Z}_2$ 上称为 R_{10}.

定理 68. 拟阵 R_{10} 是正则的。

证明。 参见 Lean 实现。 □

定理 69. 每个图拟阵都是正则的。

证明。 参见 Lean 实现。 □

6.1. **余图拟阵的正则性**。

引理 70（标准表示的行空间）。 设 X 和 Y 是不相交有限集，并设

$$B \in \mathbb{F}_2^{X \times Y}.$$

考虑矩阵

$$A := [\,\mathbf{1}_x \mid B\,] \in \mathbb{F}_2^{X \times (X \cup Y)},$$

其中列由 E 索引：$= X \cup Y$，行由 X索引。则 A的行空间为

$$\mathrm{row}(A) \;=\; \{\,(u,\, uB) \mid u \in \mathbb{F}_2^X\,\} \;\subseteq\; \mathbb{F}_2^X \oplus \mathbb{F}_2^Y \cong \mathbb{F}_2^E.$$

证明。 A 的第 x行是（e_x，$B_{x,\,*}$），其中 e_x 是 $\mathbb{F}_2^X$中的标准基向量，而$B_{x,\,*}$ 是 B的第 x行。因此，行的任意线性组合为

$$\sum_{x \in X} u_x (e_x, B_{x,*}) = \big(u,\, \sum_{x \in X} u_x B_{x,*}\big) = (u,\, uB),$$

其中 $u =$ （u_x）$_{x \in X} \in \mathbb{F}_2^X$。反之，每一对（$u$，$uB$）都可以通过这种方式得到，因此这些恰好就是行向量。□

引理 71（标准行空间的正交补）。 设 $A = [\mathbf{1}_x \mid B]$如引理 70中所述，并设

$$U := \mathrm{row}(A) \subseteq \mathbb{F}_2^{X \cup Y}.$$

那么， U 的正交补为

$$U^\perp = \{\,(bB^\intercal,\, b) \mid b \in \mathbb{F}_2^Y\,\}.$$

等价地，如果 $B^* := -B^\intercal$，那么

$$U^\perp = \{\,(bB^*,\, b) \mid b \in \mathbb{F}_2^Y\,\}.$$

证明。 将 $\mathbb{F}_2^{X\cup Y}$ 中的向量写成有序对 $(a,\ b)$，其中 $a\in\mathbb{F}_2^X$ 且 $b\in\mathbb{F}_2^Y$。根据引理 70， U 中的任意元素都可写成 $(u,\ uB)$，其中 $u\in\mathbb{F}_2^X$。正交条件 $(a,\ b)\in U^\perp$ 意味着

$$\begin{aligned}0&=(a,b)\cdot(u,uB)\\&=a\cdot u+b\cdot(uB)\\&=a\cdot u+(bB^{\mathsf{T}})\cdot u\\&=(a+bB^{\mathsf{T}})\cdot u\end{aligned}$$

对所有 $u\in\mathbb{F}_2^X$。因此，我们必须有 $a=bB^{\mathsf{T}}$，于是

$$U^\perp=\{\,(bB^{\mathsf{T}},b)\mid b\in\mathbb{F}_2^Y\,\}.$$

在 $\mathbb{F}_2$ 上，我们有 $-1=1$，所以 $B^*=-B^{\mathsf{T}}=B^{\mathsf{T}}$，从而得到另一种描述。 □

引理 72（对偶标准矩阵的行空间）。 如上所述，给定 B 和 $B^*=-B^{\mathsf{T}}$，定义 e

$$A^*:=[\,\mathbf{1}_y\mid B^*\,]\in\mathbb{F}_2^{Y\times(X\cup Y)}.$$

Then

$$\operatorname{row}(A^*)=U^\perp,$$

其中 $U=$ 行(A) 和 $U^\perp$ 由引理 71给出。

证明。 A^* 的第 y 行为 $(e_y,\ B^*_{y,\ *})$，其中 $e_y\in\mathbb{F}_2^Y$。各行的一般线性组合为

$$\sum_{y\in Y}b_y(e_y,B^*_{y,*})=\big(b,\,bB^*\big),$$

其中 $b=(b_y)_{y\in Y}\in\mathbb{F}_2^Y$。因此

$$\operatorname{row}(A^*)=\{\,(b,bB^*)\mid b\in\mathbb{F}_2^Y\,\}.$$

Iden将 $\mathbb{F}_2^{X\cup Y}$视为坐标按（X，Y）排列的 $\mathbb{F}_2^X\oplus\mathbb{F}_2^Y$，这恰好是集合

$$\{\,(bB^*,b)\mid b\in\mathbb{F}_2^Y\,\},$$

它与 $U^\perp$ 由引理 71给出的集合一致。 □

引理 73（对偶向量拟阵的正交补）。 设 A和 A' 是域 F 上的矩阵，且具有相同的列指标集 E，并假设

$$\operatorname{row}(A')=\operatorname{row}(A)^\perp\subseteq F^E.$$

设 $M(A)$ 和 $M(A')$ 分别是由 A和 A'表示的向量拟阵。那么

$$M(A')=M(A)^*.$$

证明。令 $F\subseteq E$。

（⇒）假设 F在 $M(A)$ 中是相关的。那么存在一个非零向量 $c\in F^F$，使得$A_Fc=0$。将 c 在 F 之外的部分扩展为零（仍记为 c）。条件 $Ac=0$ 意味着 A 的每一行r 都满足 $r\cdot c=0$，因此 $c\in\operatorname{row}(A)^\perp=\operatorname{row}(A')$。写作

$$c=\sum_i\lambda_i r'_i,$$

其中 r'_i 是 A' 的行，且并非所有 λ_i 都是零元。对于每个 $e\in E\setminus F$，都有 $c_e=0$，因此

$$\left(\sum_i\lambda_i r'_i\right)\big|_{E\setminus F}=0.$$

因此，由 $E\setminus F$ 索引的 A' 的各行存在一个非平凡线性组合，使其等于零行，所以 $E\setminus F$在 $M(A')$ 中是相关的。

(⇐) 交换 A 和 A'，并使用 $\operatorname{row}(A)=(\operatorname{row}(A')^\perp)$ 进行相同的论证，可以证明：如果 $E\setminus F$ 在 $M(A')$ 中相关，那么 F 在 $M(A)$ 中相关。

Thus

$$F\text{ dependent in }M(A)\iff E\setminus F\text{ dependent in }M(A'),$$

这就是对偶性的定义性质。 □

定理 74 (标准表示的对偶对应于对偶拟阵)。 设 M 是基集为 $E = X \cup Y$ 的二元拟阵，其标准表示为 B，使得

$$A = [\mathbf{1}_X \mid B].$$

设 $B^* := -B^\mathsf{T}$ 且

$$A^* := [\mathbf{1}_Y \mid B^*].$$

则 $M(A^*) = M(A)^* = M^*$。

证明。 由引理 70 和引理 71，如果 $U =$ 行(A) 则 $U^\perp$ 具有如下形式

$$U^\perp = \{ (bB^*, b) \mid b \in \mathbb{F}_2^Y \}.$$

根据引理 72，我们有

$$\mathrm{row}(A^*) = U^\perp = \mathrm{row}(A)^\perp.$$

因此，根据引理 73，列拟阵 $M(A^*)$ 是 $M(A)$ 的对偶:

$$M(A^*) = M(A)^* = M^*.$$

□

引理 75。 正则拟阵的对偶拟阵也是正则拟阵。

证明。 设 M 是正则拟阵。我们希望证明 M^* 也是正则的。

取一个正则拟阵 $\mathbb{Z}_2$-表示矩阵 B，它表示 M。根据引理 33，由于 M 是正则的，存在 B' 的全幺模符号化： B 是一个在 B' 上的全幺模矩阵，并且对所有元素都有 $\mathbb{Q}$ 和 $|B'(i,\ j)| = B(i,\ j)$。因此， M 在 $\mathbb{Q}$ 上由一个全幺模矩阵表示， B' 其零元和非零元的模式与 B 完全相同。

根据定理 74，如果拟阵 M 的标准表示矩阵为 B，那么其对偶拟阵 M^* 的标准表示矩阵为 $B^* = -B^\intercal$。这个对偶标准矩阵的全幺模符号化（B'）$^* = -(B')^\intercal$ 保持全幺模性，因此（B'）* 是一个全幺模矩阵，其支撑恰好为B^*。

由于我们刚刚展示了 M^*（即 $(B')^*$）的一个全幺模符号化，因此对偶拟阵 M^*根据引理33 是正则的。 □

定理 76。 每个余图拟阵都是正则的。

证明。 根据定理 69，我们知道所有图拟阵都是正则的。回顾一下，如果一个拟阵的对偶是图拟阵，我们就称它为余图拟阵。因此，只需证明正则性在取对偶时保持不变，而我们已在引理75中证明了这一点。 □

7. Conclusion

定义 77。 任意图拟阵都是 good。任意余图拟阵都是 good。任意与 R10 同构的拟阵都是 good。任意由 good 拟阵作 1-和（定义 35中所述的意义下）得到的拟阵都是 good。任意由 good 拟阵作 2-和（定义40中所述的意义下）得到的拟阵都是 good。任意由 good 拟阵作 3-和（定义46中所述的意义下）得到的拟阵都是 good。

推论 78. 任何良拟阵都是正则的。这是西摩定理中易证方向的一个推论。

证明. 利用定理进行结构归纳法69，76，68，38，44，以及62。 □

References

[1] K. Truemper，*Matroid Decomposition*，莱布尼茨信息学中心，2016 年。可访问：https://www2.math.ethz.ch/EMIS/monographs/md/。[2] J. Oxley，*Matroid Theory*，第 2 版，牛津大学出版社，2011 年。https://doi.org/10.1093/acprof:oso/ 9780198566946.001.0001。[3] H. Bruhn、R. Diestel、M. Kriesell、R. Pendavingh 和 P. Wollan，*Axioms for Infinite Matroids*，arXiv 预印本，2013 年。可访问：https://arxiv.org/abs/1303.5277。

Ivan Sergeev, Institute of Science and Technology Austria
Email address: ivan.sergeev@ist.ac.at

Martin Dvorak, Institute of Science and Technology Austria
Email address: martin.dvorak@ista.ac.at

Cameron Rampell*Email address*:
cameronrampell@gmail.com

Mark Sandey*Email address*:
mark@sandey-family.com

Pietro Monticone, University of Trento
Email address: pit.monticone@gmail.com