arXiv:2601.01258v1 [physics.flu-dyn] 3 Jan 2026

准二维受迫浅层流的局部各向异性：一项实验研究

GhassanAntar[1], JamalEl Kuweiss[1], KaiSchneider[2],Charbel Habchi[3] 和 Sadruddin Benkadda[41] 贝鲁特美国大学物理系，*Riad El-Solh*，贝鲁特，*1107 2020*，贝鲁特，黎巴嫩[2] 马赛数学研究所（*I2M*），艾克斯-马赛大学，法国国家科学研究中心，维克多·雨果广场*3*号，*13331* 马赛 *Cedex 3*，法国[3] 圣母大学-卢埃兹机械工程系，祖克·莫斯贝，祖克·米凯尔，邮政信箱*72*，黎巴嫩，以及[4] *PIIM*，艾克斯-马赛大学，法国国家科学研究中心，诺曼底-涅曼中队大道，*13397* 马赛 *Cedex 20*，法国

摘要

我们通过实验研究了存在固体边界时的准二维（Q2D）受迫浅层流，并分析其偏离柯尔莫哥洛夫－克赖奇南（KK）理论的情况。我们利用受电磁力作用的薄层电解液产生复杂运动，并采用粒子跟踪测速法，将流动特性解析至柯尔莫哥洛夫尺度。尽管速度概率分布函数与高斯分布非常相似，但随着尺度减小，速度增量会出现偏离高斯性的现象。二阶结构函数表明，小尺度上开始出现局部各向异性。三阶结构函数的符号表明，能量传递中逆级联占主导地位；而纵向与横向之间的交叉相关性在大尺度上显著。局部各向同性的破坏与底部摩擦的影响相符，底部摩擦主要影响纵向运动，而不影响垂直方向。这种局部各向异性通过逆能量级联向更大尺度传播，非线性相互作用最终会影响垂直方向。

关键词：湍流、边界层、统计分析、摩擦

I. 引言

准二维（Q2D）湍流出现在动力学主要由两个方向的运动主导的流动中。在地球物理流体动力学中，地球大气和海洋的厚度远小于地球半径；因此，研究大尺度大气和海洋环流模式时，通常会采用二维近似。准二维（Q2D）湍流有助于我们理解天气模式、洋流以及气候现象的动力学，例如急流（急流带）和涡旋（气旋、反气旋及湍流涡旋）的形成。另一种降低第三维影响的方式见于磁约束等离子体，其中平行于磁场方向的扰动远小于垂直平面内的扰动 [1]。旋转流或分层流（如大气环流、洋流和星系旋转）也表现出一个维度上的动力学减弱 [2, 3]。

三维（3D）湍流呈现出发生在三维空间中的不可预测旋转运动。A. N. Kolmogorov 的理论研究将这种复杂性归因于能量级联。在雷诺数较大、局部各向同性且具有自相似性的假设下，他得出了著名的 2/3 定律预测 [4, 5]。Kraichnan 将类似的论证应用于二维湍流，其中不仅湍动能（速度平方的平均值）守恒，涡量平方（涡量平方的平均值）也守恒 [6]。由此预测，在强迫尺度两侧将同时存在两种级联。在直接级联中，涡量平方向较小尺度传递；而在逆级联中，能量则向较大尺度传递。

为了解准二维流的动力学，人们开展了两类主要的实验室实验 [7–10]。第一类是重力驱动皂膜，其厚度约为100 μm，湍流由栅格产生 [11, 12]。另一方面，电磁驱动流通过安装在容器下方的一组永磁体，并在电极之间通入电流 [13–15]。在这种情况下，厚度可从一毫米调整到数毫米，湍流则由涡旋之间的非线性相互作用产生。不同研究团队获得的准二维流统计性质，对于实验室流动是否遵循 Kolmogorov-Kraichnan 理论，尚未达成一致。有些研究表明两者吻合良好 [16, 17], ，但另一些研究则没有发现这种吻合 [10, 18]。

凝聚体是一个大型稳态涡旋，它的存在可能是

实验结果与理论不符的原因之一 [17]。强烈的凝聚体会在底层湍流中留下印记，因为它会降低流动的随机性，并削弱逆能量级联的效率 [19]。在底部耗散较低的有界流动中，逆能量级联会使自由表面下方形成谱凝聚体。这种相干流动能够破坏流层主体区域中的三维涡旋，并使整个流层厚度范围内的流动保持平面性 [20]。对湍流扩散的定量研究表明，在谱凝聚过程中，径向输运显著降低 [21]。

另一个主要现象是容器底部的固体无滑移边界，这可能导致实际情况与针对二维湍流建立的 KK 理论出现显著偏差。有人指出，通常认为浅层流体流动是准二维的这一假设是错误的，其中仍存在一些三维效应。研究表明，这些效应并非源于底部阻力，而是源于边界的不可渗透性 [22]。

本文专门对一种准二维流动开展实验研究，该流动由两个电极和一组永磁体通过电磁方式驱动。我们希望研究固体无滑移边界对速度涨落统计量的影响。因此，固体底部与电解液之间不设置中间流体层。我们采用粒子跟踪测速（PTV）表征流动，其中 50 μm个荧光粒子最初被喷洒在表面上，并通过可见光成像进行跟踪。我们将在第二节继续介绍实验装置和所采用的诊断方法。在第III节中，我们展示增大电流并达到湍流状态所产生的影响。需要强调的是，本文始终明确区分“湍流状态”和“充分发展湍流状态”。在前一种状态（即本文所研究的情况）下，流动表现出复杂且不规则的动力学，并伴有强烈的非线性相互作用，但仍可能保留一定程度的空间或时间相干性，这在转捩流动或部分湍流中经常可以观察到。相比之下，充分发展湍流状态对应于雷诺数足够高的条件，此时湍流变得统计均匀，流动具有宽广且彼此分离良好的相互作用尺度范围，从最大的含能涡旋一直延伸到最小的耗散结构。第四节讨论速度及其增量的概率分布函数，结果显示小尺度下偏离高斯分布。第五节给出了实验室参考系和运动参考系中的二阶结构函数，接下来是

第六节对三阶结构函数的讨论。第七节给出结论，其中我们讨论底部无滑移边界的作用：该边界使摩擦能够破坏流动在小尺度下的局部各向同性。较大尺度受到逆级联的影响，结果表明逆级联主导能量传递。纵向运动与横向运动之间的强互相关导致不仅纵向矩、而且横向矩均偏离KK理论。

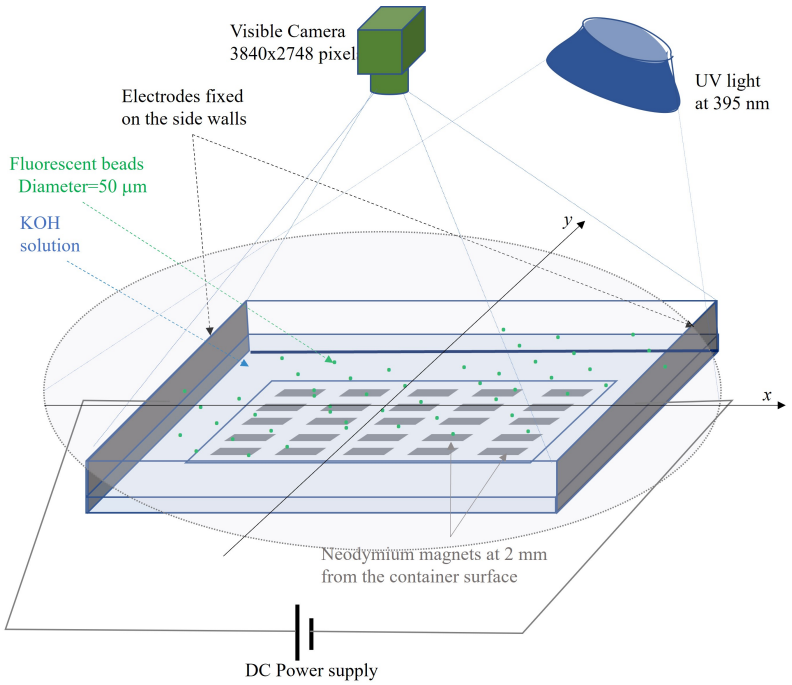

图1. 实验装置如图所示：容器内设有两块连接至可调直流电源的矩形电极。容器下方放置了一组极性相反的永磁体。绿色圆点表示沉积在流动表面上的荧光微珠。紫外光源照亮流动，摄像机检测微珠发出的可见光。

II. 实验装置

A. 流体装置

实验装置如图1所示。我们使用一个由有机玻璃制成的方形容器，内长为 $W = 16$ cm，高度为 2 cm。两块不锈钢

电极安装在相对的两面壁上，并连接到可调直流电源。将纯水与氢氧化钾（KOH）混合，使其浓度达到 26%。这会产生带正电的离子（K^+）和带负电的离子（OH^-），它们分别在阴极和阳极表面受到吸引和排斥。该电解质溶液的电导率为 55 S/m，约为铜的 10^{-6} 。因此，就电子迁移率而言，该溶液仍是绝缘体，测得的电流是由电极表面上的电荷交换产生的，而溶液内部没有电子净流动。倒入容器中的 KOH 溶液量决定流动的高度 H ，且可以调整。实验装置经过精确调平，因此流体各处受到相同的重力。一组 6×5 钕永磁体以相反极性安装在容器下方；如图2所示，轴向磁场随 y变化，由此可推得磁场梯度约为 28 T/m。

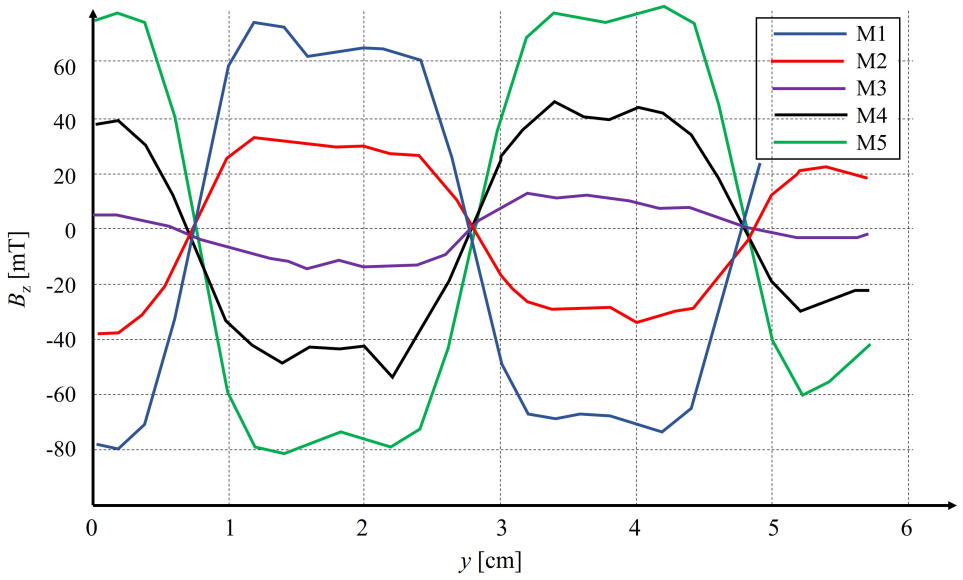

图2. 特斯拉计放置在距磁体顶面5 mm处，测得磁场的 z分量 B_z随 y 的变化情况；测量位置有五个不同的 x ，图中分别以M1-M5标示。

使用水的运动黏度来评估雷诺数，其定义为 $Re = UD/\nu$。由于不存在平均流动，我们采用速度的均方根值，得到 $U \simeq 2$ cm/s。水平面内湍流的典型宏观尺度取为磁体之间的距离 $L \simeq 2$ cm。在表 I 中，我们列出了一些重要的

para流动参数，其中 I 表示流经电极的电流。

I [A]	H [毫米]	H/W	H/L	$Re = UL/\nu$
0.1	3	0.019	0.15	100
0.5	3	0.019	0.15	200
0.7	5	0.03	0.25	180

表 I. 此处研究的两种高度和两种电流对应的主要流动参数。 L 为磁体之间的距离。

B. 粒子跟踪测速

为了获得随空间和时间变化的速度场，我们在流体表面撒布了来自 Cospheric 的荧光微珠，其密度为 0.98 g/cm^3，直径为 38-45 μm。它们吸收紫外光（UV）并在可见光范围内发光。为激发这些微珠，我们安装了两盏 LED 聚光灯，在距离电解质溶液约 40 cm 处发射波长约为 395 nm 的光，总功率为 30 W。可见光相机采用 Basler ACA3800-14uc，在每秒 14 帧的条件下，完整分辨率为 3840×2748 像素。该相机配备了一个 50 mm C 接口镜头，可有效覆盖整个实验装置，因此空间分辨率为 42×58 μm。于是，每个微珠在摄像机图像中约占一个像素，这大幅降低了确定其位置及速度时的误差。

将 KOH 溶液倒入容器后，我们在其表面撒上约 500 颗微珠。这个数量代表了一种平衡：微珠过多会妨碍通过粒子跟踪测速（PTV）准确确定其速度场，而微珠过少则会降低结果的统计可靠性。微珠的运动以 1,000 帧的速度记录（对应一段 1 分钟的影片），每部影片约生成 500,000 个数据点。为提高统计量，在每种实验条件下记录十部影片。本文使用的数据点总数为：高度为 $H = 3$ mm 时 3,219,310 个， $H = 5$ mm 时 5,812,925 个。

图 3 展示了一个 1 cm^2 区域的放大视图。图中叠加了根据 100 帧确定的微珠速度。电流为 100 mA 时，图中呈现出协调一致的旋转运动，清晰显示出顺时针旋转。

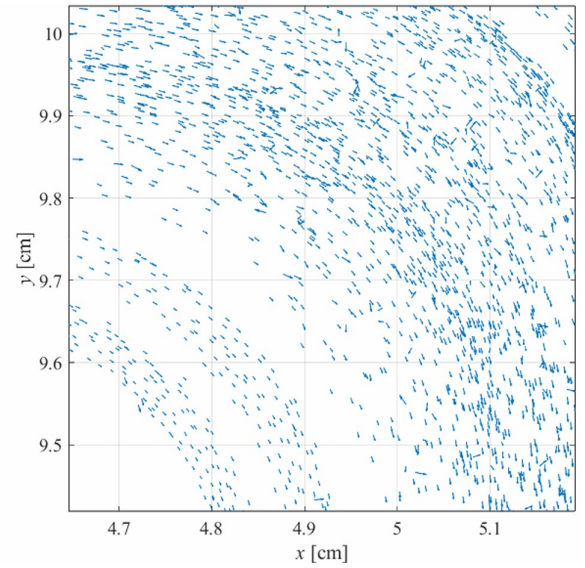

图 3. 电流为 100 mA 时，约 1×1 cm^2 区域内的速度矢量，箭头表示 $H = 3$ mm。

C. 速度场及其增量的确定

对可见光相机拍摄的每张图像，首先进行背景扣除。将微珠的位置识别为局部强度极大值。为排除团聚微珠的影响，我们滤除空间范围大于 2×2 像素的所有光源。在实验室参考系中，第 j 帧中的每颗微珠 i 在 $\hat{}x$ 和 $\hat{}y$ 方向上的位置为 $(x_{i,\,j},\ y_{i,\,j})$。使用中心差分格式计算每颗微珠的速度，该格式通过跟踪微珠在连续三帧中的运动来确定速度。由此得到的最小可分辨空间尺度为 $\lambda_{\min} \approx 100\ \mu$ 米，最小速度为 $u_{min} \simeq 0.07$ 厘米/秒。

$$u_{i,j} = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\delta t}, v_{i,j} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\delta t}.$$

为尽量避免与错误邻居发生错误连接，最大跟踪距离被限制为平均微珠间距。此限制将可分辨的最大速度设为 $u_{\max} \simeq 7$ cm/s。因此，实验室参考系中的速度增量定义如下:

$$\delta u(\vec{r}) = u_{i,j} - u_{i',j},\ \ \delta v(\vec{r}) = v_{i,j} - v_{i',j}\,.$$

where $\vec{r}$ 是同一帧 j中两个微珠 i 和 i' 之间的矢量距离。

已知微珠的位置和速度场后，我们可以在微珠的运动参考系中计算纵向 δu_L 和横向 δu_T 速度增量

根据

$$\delta u_L = (\vec{u}_{i,j} - \vec{u}_{i',j}) \cdot \hat{r},\ \delta u_T = (\vec{u}_{i,j} - \vec{u}_{i',j}) \cdot \hat{t}\,.$$

其中，$\cdot$是标量积，$\hat{}r = \vec{r}/r$和$\hat{}t \cdot \hat{}r = 0$。

D. 特征尺度

二维湍流中的尺度很重要，因为它们决定了速度涨落的统计性质。柯尔莫哥洛夫尺度是与湍流中最小涡旋相关的最小长度尺度。其定义为 $\lambda_K = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$，其中$\varepsilon$ 是单位质量的湍流耗散率。在我们的流动中，该尺度为 $\lambda_K \sim 63\ \mu$米，约等于粒子追踪方法的空间分辨率。我们将大于 λ_K 且小于 H的尺度定义为“准二维范围”，因此其范围为0.06至 $3-5$ 毫米。在这个有限范围内，可能存在湍流三维运动，从而影响流动的性质。

在低电流条件下，如图4(a)所示，涡旋生成于 $L \simeq 2$ 厘米的特征尺度。根据柯尔莫哥洛夫－克赖奇南（KK）理论， [6, 23], 介于 H 和 L 之间的尺度应属于正向级联区间，在此区间内，能量从L 向较小尺度传递，直至 λ_K。在我们的实验中，该区间覆盖一个数量级，即0.3至3厘米。对于大于 L的尺度，其最大值为容器的尺寸（$W = 16$ 厘米）。因此，按照KK理论，我们确定该区间为逆级联区间，覆盖半个数量级。

III. 低电流和高电流下的空间结构

在分析湍流的统计性质之前，我们先考察流动的空间性质。图4展示了在固定高度 $H = 3$ mm 下，两种不同电流对应的连续100帧中微珠位置的叠加图：(a) 100 mA，(b) 500 mA。

在 $I = 100$ mA（图4(a)）时，我们观察到清晰的相干涡旋，它们由各磁体周围的磁场梯度所产生的强迫形成，并产生旋转加速度 [24]。在 (x、y) 平面内，强迫具有各向同性，没有方向偏好。此处，各向同性意味着统计性质在参考系旋转时保持不变。这与局部各向同性定义不同，后者见

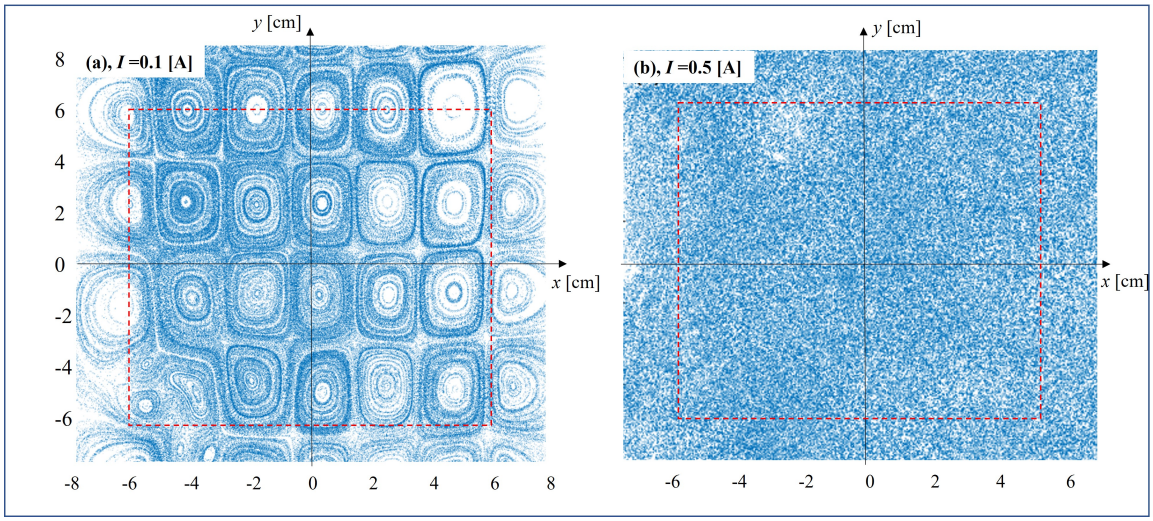

图4。（a）和（b）分别展示了高度为 $H = 3$ mm 时，电流为 $I = 100$ 和 $I = 500$ mA 时荧光微珠的位置。图中叠加了连续 100 帧中的微珠位置。虚线矩形标示出用于统计分析的空间域。

Kolmogorov理论 [4], 要求统计性质在运动参考系中对平移和旋转均保持不变。

当电流为 500 mA 时（图4(b)），微珠分布显示流体呈随机运动，相干结构完全消失。此外，我们没有观察到涡旋凝聚成一个或多个大尺度结构的现象，这与 Paret 和 Tabeling [25] 的发现一致。因此，随着电流增大，我们记录到流动从由相干涡旋主导转变为不含相干涡旋的流动，后者被描述为湍流。

IV. 速度及其增量的概率分布函数

速度场及其增量的概率分布函数（概率密度函数）使我们能够量化上述运动的随机性。高斯随机场的偏度和平坦度因子分别为 0 和 3。概率密度函数偏离高斯分布，是由反映其偏离 Kolmogorov 理论的非随机事件造成的。

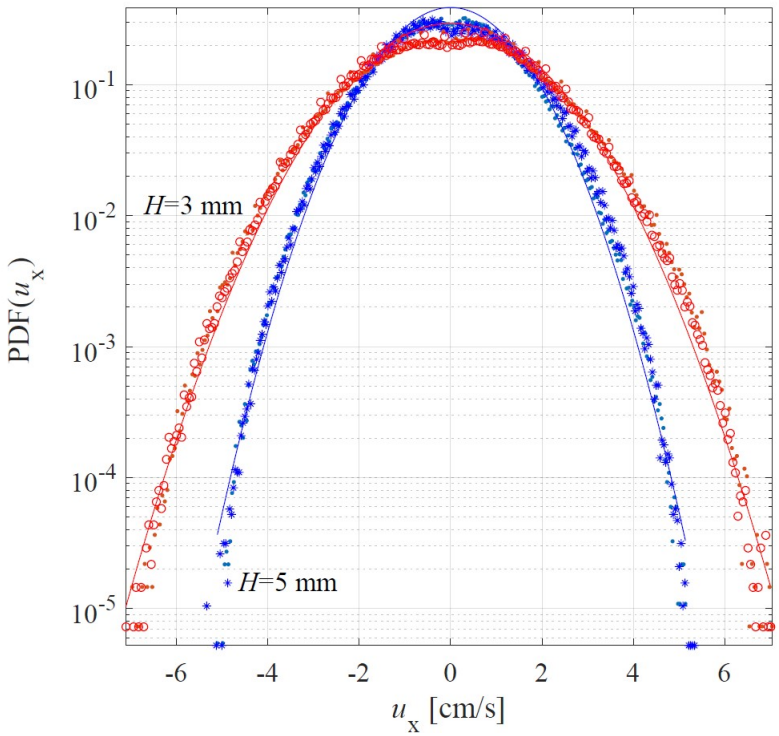

图5. 分别用圆形和星形标记表示 $H = 3$ mm 和 $H = 5$ mm 时速度的 x 分量的概率密度函数。实线表示通过最小二乘拟合得到的相应高斯分布。测得的分布偏度接近于零（≈ 0），平坦度因子分别为 2.7（$H = 3$ mm）和 2.8（$H = 5$ mm），表明其与高斯统计量略有偏差。

A. 速度的概率密度函数

图5绘出了速度场 x 分量在 $H = 3$ 和 5 mm 处的概率密度函数。采用最小二乘法进行拟合，两个分布均以高斯函数拟合。在小尺度下，概率密度函数略微偏离高斯分布，这很可能是使用中心差分确定速度场所致。为量化概率密度函数偏离高斯统计的程度，我们计算速度涨落的归一化三阶和四阶矩，分别称为偏度和平坦度因子。偏度定义为 $S_x = \langle u^3 \rangle / \langle u^2 \rangle^{3/2}$，在两个高度处均为 $S_x = 0$，证实分布关于 $u = 0$ 对称。平坦度因子$F_x = \langle u^4 \rangle / \langle u^2 \rangle^2$ 在 $H = 3$ mm 处为 2.7，在 $H = 5$ mm 处为 2.8，略低于高斯值 3。这种差异源于高强度速度脉动的不足

与高斯预测相比，正如图5所示，尾部概率低于理论分布。不过，这些偏差仍然很小，且仅影响罕见事件（其发生概率比主体区域低三个数量级）。因此，我们得出结论：速度场近似服从高斯统计，这与图4中观察到的随机运动一致。

B. 速度增量的概率密度函数

Paret 和 Tabeling [25] 在电磁驱动流中产生湍流，采用薄而稳定分层的流层来尽量减小底部摩擦。研究者叠加比较了逆级联区间内不同间隔的纵向增量的概率密度函数，发现它们仍服从高斯分布。作者据此推断，这表明逆级联区间内不存在间歇事件。另一方面，Belmonte 等 [12]也讨论了肥皂膜中二维流动的概率密度函数。他们发现，随着 r减小，$\delta u_L(r)$的概率密度函数变为非高斯分布，这与三维湍流的情况类似，表明小尺度上偏离了 Kolmogorov 的随机扰动假设。

在本节中，我们研究速度增量 $\delta u_L(r)$ 和 $\delta u_T(r)$ 的概率密度函数。此项分析的基本思路是检验由 r 定义的尺度上的涨落是否具有随机性。如果粒子的运动是随机的，那么速度增量也应呈现高斯随机分布。

在图6中，我们绘出了三个 r 值对应的速度增量概率密度函数，它们分别位于准二维范围（$r = 0.15$ cm）、正向级联区间（$r = 0.8$ cm）和逆级联区间（$r = 4$ cm）。图中展示的是 $H = 3$ mm 时的结果，而 $H = 5$ mm 时也得到类似结果。

图6(a)显示了逆级联区间内分离距离为 $r = 4$cm时纵向（δu_L）和横向（δu_T）速度增量的概率密度函数。两种分布几乎完全相同，反映出局部各向同性，或珠子的参考系中的各向同性。两种概率密度函数都与高斯分布高度吻合，这一点也由其平坦度因子得到证实：纵向为 $F_L = \langle \delta u_L^4 \rangle / \langle \delta u_L^2 \rangle^2$ （横向<sty le id='5'>idem ）。记录值 $F_L = 2.9$ 和 $F_T = 2.8$接近3，即高斯值。两个方向上速度增量的偏度因子均为0。

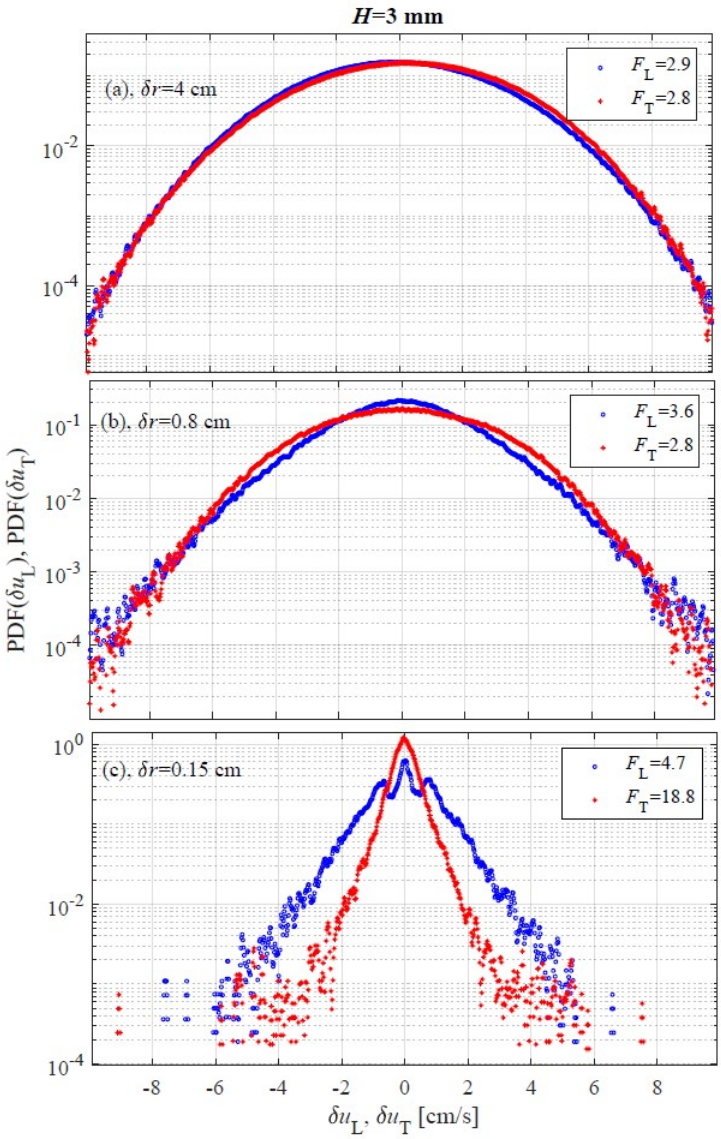

图6. 对于 $H=3$，我们分别在 (a)、(b) 和 (c) 中绘制了采用三个分离距离 $r=0.1$、0.8 和 4 cm 时 δu_L 和 δu_T 的概率密度函数。相应的平坦度因子标注在各个子图中。

在正向级联区间内，当 r 等于0.8 cm时，结果如(b)所示。我们观察到，纵向分布明显偏离抛物线形状而趋向指数形，而横向分布仍接近抛物线形状。因此，逆级联中所观察到的局部各向同性在正向级联区间内遭到破坏。 δu_T 的平坦度因子为2.8， δu_L的平坦度因子为3.6，这表明纵向明显偏离高斯分布，而横向则没有。两个方向上行为的差异反映了此处局部各向同性的缺失

尺度。

对于处于准二维范围的 $r = 0.15$ cm，如图6(c)所示，两个方向之间的各向异性更加明显。在这些尺度下，纵向和横向都明显偏离高斯分布，并呈现清晰的指数尾部。平坦度因子分别达到 $F_L = 4.7$ 和 $F_T = 18.8$，量化了这一现象，表明两个方向之间的差异更大。纵向低速度处出现两个峰值的原因尚不清楚。

我们通过强调以下事实来结束本节：（1）速度场的概率密度函数接近高斯分布，这从视觉上反映了在第III节中观察到的随机性。（2）在大尺度下，速度增量的概率密度函数仍接近高斯形状，但随着尺度减小，会呈现指数尾部。（3）小增量下局部各向同性遭到破坏， δu_L 的概率密度函数与 δu_T的概率密度函数不同。

V. 二阶结构函数

Kolmogorov [4] 开创性的理论借助结构函数，首次对充分发展三维湍流作出了预测；该理论建立在冯·卡门和豪沃思 [26]的奠基性工作之上。另可参阅杰尼迪和安东尼亚 [27]较近期的研究。通过在惯性区间引入自相似性和局部各向同性，Kolmogorov 推导出了特征性的 $r^{2/3}$ 能量标度。相比之下，充分发展二维湍流同时守恒能量和涡量平方，因此呈现出不同的标度律： r^2 适用于大于强迫尺度的尺度（逆级联），而 $r^{2/3}$ 适用于更小的尺度（直接级联） [6]。至关重要的是，局部各向同性假设意味着，在二维湍流的两个 级联区间内，横向分量和纵向分量具有相同的 r依赖关系。

我们在实验室参考系中将二阶结构函数定义为

$$S_{XX} = \langle \delta u(r)^2 \rangle,\ S_{YY} = \langle \delta v(r)^2 \rangle\,, \tag{1}$$

其中， X 和 Y 表示相应的坐标方向。括号 $\langle \cdot \rangle$ 表示对这 10 部影片进行的时空平均值。我们将总能量结构函数定义为 $S_2 = S_{XX} + S_{YY}$。

在珠子参考系中，我们将二阶结构函数定义为

$$S_{LL} = \langle \delta u_L(r)^2 \rangle,\ S_{TT} = \langle \delta u_T(r)^2 \rangle, \tag{2}$$

其中， T 和 L 分别表示珠子运动的横向和纵向。

A. 以往研究结果

湍流的相关性质随 r 的变化关系可通过结构函数（本文将采用此方法）或由速度场相关性得到的能谱 $E(k)$ 来确定。

$$S_{LL}(r) = \langle [u_L(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - u_L(\mathbf{x})]^2 \rangle = 2\langle u_L^2 \rangle - 2\langle u_L(\mathbf{x}+\mathbf{r}) u_L(\mathbf{x}) \rangle \tag{3}$$

$$= 4\int_0^\infty E(k)\left(1 - \frac{\sin(kr)}{kr}\right) dk \tag{4}$$

若 $S_{LL} \sim r^\alpha$，则 $E(k) \sim k^{-(\alpha+1)}$。对于随时间进行的测量，可利用泰勒冻结湍流假说建立其与空间依赖关系的联系，其中角频率为 $\omega = Uk$，从而得到 $E(\omega) \sim E(k)$ [28, 29]。

Gage 和 Nastrom [30] 利用飞机采集的数据获得了大气湍流的能谱，并发现大尺度和小尺度分别遵循 k^{-3} 和 $k^{-5/3}$ 标度关系，这反映了涡量平方级联和能量级联。Gharib 和 Derango [11]利用重力驱动的肥皂膜开展研究，发现频域中确定的能谱遵循 $f^{-\alpha}$，其中 α 可取多个值，具体取决于测量位置相对于湍流生成栅格的下游距离。

Kellay 等人 [31, 32] 采用相同的装置，并在频域中发现了两个具有不同标度指数的范围：在高频范围内，斜率约为 -3.6，而在低频范围内约为 -2。然而，作者指出，由于研究仅涵盖了一个十倍频程的三分之一，这些测量结果不能被视为具有决定性意义。随后，Belmonte 等人证实了能量的这一标度关系，并发现斜率等于 -3.3 [12]。据称，与数值 $-5/3$ 之间的差异是由大型、长寿命的相干结构和有限尺寸效应造成的。

Tabeling 等人 [16]在薄层稳定分层流体中施加电磁力进行实验，并发现能谱呈现出 $k^{-5/3}$ 依赖关系，这与逆级联区间 [13]中的预测一致。速度是通过粒子图像测速法测得的，测量区域为 64×64 的栅格，置于一个 15×15 厘米

容器 [33]中。Boffetta 等人 [14], 发现能谱呈现幂律，其斜率比Kraichnan的预测 k^{-3}更陡，并将其解释为底部摩擦所致。

2006年，Chen 等人 [18] 发表了一篇论文，报告了使用电磁驱动层的实验结果：该盐水层厚 3 mm，横向尺寸为 18×18 cm。研究中使用了一个较重、厚 3 mm 的氟缓冲层，以尽量减小驱动层的底部摩擦。研究人员采用粒子跟踪测速法获取速度场，并以 100×100 空间网格分辨速度。能谱与理论并不吻合，作者认为这可能是由于所考察的尺度范围有限。另一方面，Xia 等人 [17, 19] 使用类似的装置，得到了与 KK 预测一致的幂律。他们强调，存在“凝聚体会显著改变湍流强度及其统计特性；不同的速度矩在不同尺度上受到影响”。在 [20, 34, 35], 中，作者表明，所得功率谱取决于测量位置；测量位置越靠近底部，结果与理论预测的偏差就越大，这凸显了底层的影响。

von Kameke 等人 [36] 测量了由法拉第波在薄流体层（2 mm）中诱导的水平表面流。他们发现了伴有负平均谱能量通量的逆能量级联，以及一个 Kolmogorov 型标度区间。此外，数据表明，可能存在伴有正平均谱涡量平方通量的正向涡量平方级联。随后，该团队公布了支持法拉第波驱动逆能量级联存在的实验结果 [35, 37, 38]。另一方面，Bard´oczi等人 [21]使用不同高度（范围从 $2-8$ mm）的氯化钠溶液进行了实验。他们报告称，存在一种尺度约为容器尺寸、并在稳态下主导湍流动力学的凝聚体。

B. 实验室参考系中的二阶结构函数

本节将介绍利用实验室参考系中的二阶结构函数研究湍流流动相关性质所得的结果。

在图 7(a) 中，我们绘制了 S_{XX} 和 S_{YY} 随 r的变化。记录到的行为相同，反映出流动的各向同性。这证实了测得的速度场统计量可靠，并且如预期所示，不依赖于坐标方向。

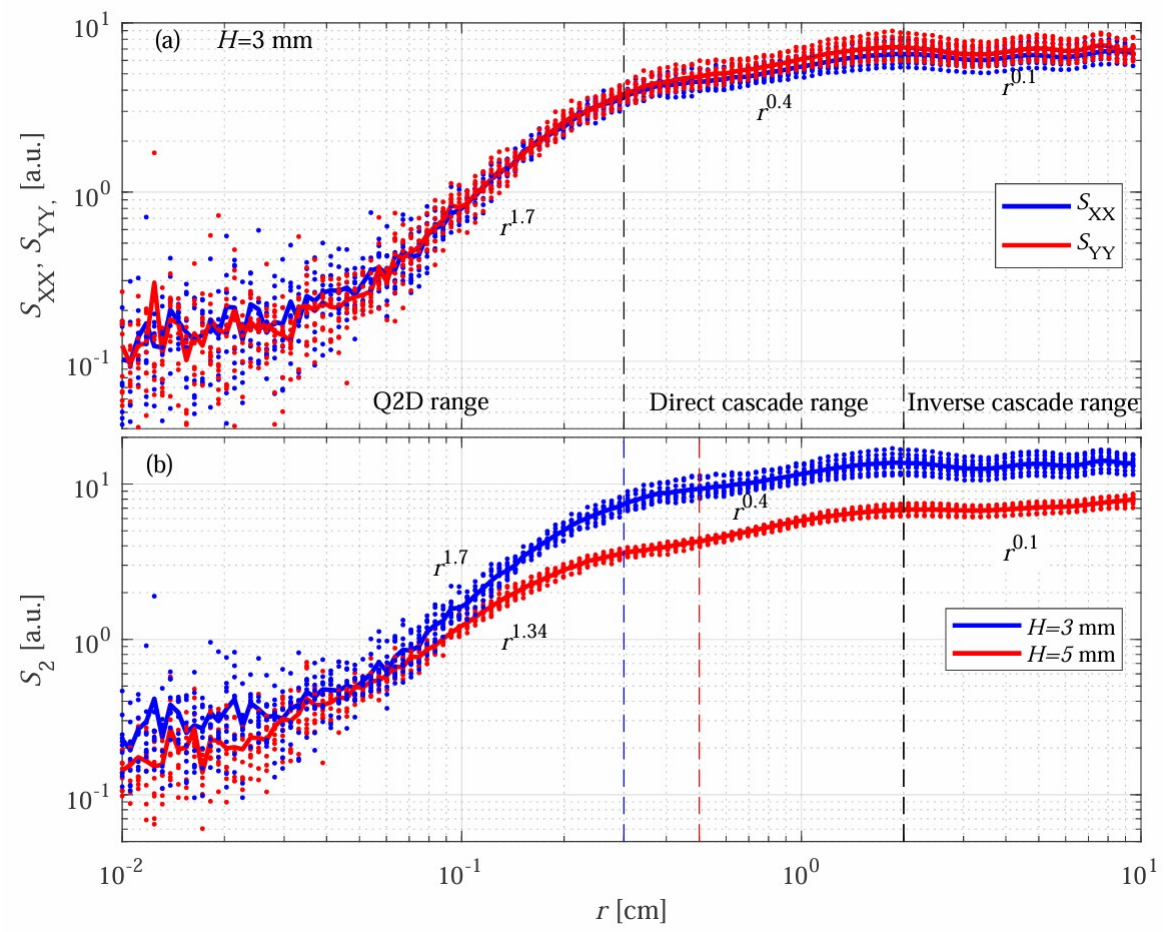

图 7. (a) 实验室参考系中， x （S_{XX}）和 y方向上的二阶结构函数（S_{YY}）随 r 的变化，其中 $H = 3$ 为 mm。竖直虚线标示了$r = L$ 和 $r = H$的位置。幂律最佳拟合得到的标度指数分别为 1.7 和 1.34，对应于 $H = 3$ 和 5 mm。在直接范围内，我们报告幂律$r^{0.4}$；而在正向级联区间内，几乎未检测到变化，最佳拟合为 $r^{0.1}$。请注意，两个方向之间没有差异，这反映出湍流具有各向同性（ $=$）。(b) 总能谱 $S_2 = S_{XX} + S_{YY}$随 r 的变化，其中$H = 3$和 $H = 5$ 为 mm。

对于 $r < H$，在准二维范围内，两个方向的动力学均按 $r^{1.7}$ 的尺度变化。在 0.1 至 0.5 cm 之间，我们记录到饱和现象，这可能是由于接近柯尔莫哥洛夫尺度时的黏性耗散所致。

对于 $L > r > H$，根据 KK理论，涨落应源于直接级联，并遵循幂律 r^2。然而，在此范围内，我们发现

总体上呈增加趋势，r 的最佳拟合为 $r^{0.4}$（在波数空间 $k^{-1.4}$中），这与理论预期的 r^2 相去甚远。

对于 $W > r > L$，速度扰动由能量逆级联引起，预期的幂律为 $r^{2/3}$。我们回顾一下，在统计稳态区间内，并未观察到凝聚体。实验结果表明，在逆级联区间内，记录到的最佳拟合 $r^{0.1}$ ($k^{-1.1}$) 略大于 0，这意味着它几乎不依赖于 r。

图 7(b) 展示了在两种流体高度下测得的总二阶结构函数 S_2 。在逆级联区间和正向级联区间内，所得标度关系在实验误差范围内相同。准二维范围内则并非如此：标度关系从 $r^{1.7}$（对应 $H = 3$ mm）变为 $r^{1.34}$（对应 $H = 5$ mm）。请注意，$H = 5$ mm 时的电流为 700 mA，但速度涨落幅度仍小于 $H = 3$ mm 时的幅度。实际上，对于 $H = 5$ mm，需要更大的电流才能达到湍流状态，其特征是相干结构的缺失。

实验室参考系中结构函数的行为表明：（1）湍流是各向同性的；（2）相对于 r 的标度关系在所有尺度上都偏离 KK理论；（3）标度律取决于 H，这表明其缺乏普适性。

C. 运动参考系中的二阶结构函数

我们记纵向和横向二阶结构函数分别为 S_{LL} 和 S_{TT}，其方向分别平行于和垂直于 $\vec{r}$；$\vec{r}$ 是属于同一帧的两个微珠之间的矢量距离。这两个方向之间的关系为

$$S_{TT} = \frac{d}{dr}(rS_{LL}). \tag{5}$$

因此，当 $S_{LL} \sim r^{\alpha}$ 时，S_{TT} 将得到相同的标度关系。

对于 $H = 3$ mm，在 10 部影片中，两个方向上的结构函数绘制于图 8(a) 中。这展示了误差棒随 r 变化的情况。

对于对应逆级联区间（$W > r > L$）的尺度范围，两个方向的结果一致，最佳拟合表明 $r^{0.1}$。在 x 和 y方向检测到的振荡似乎是由横向运动引起的，而纵向方向则没有这种振荡。

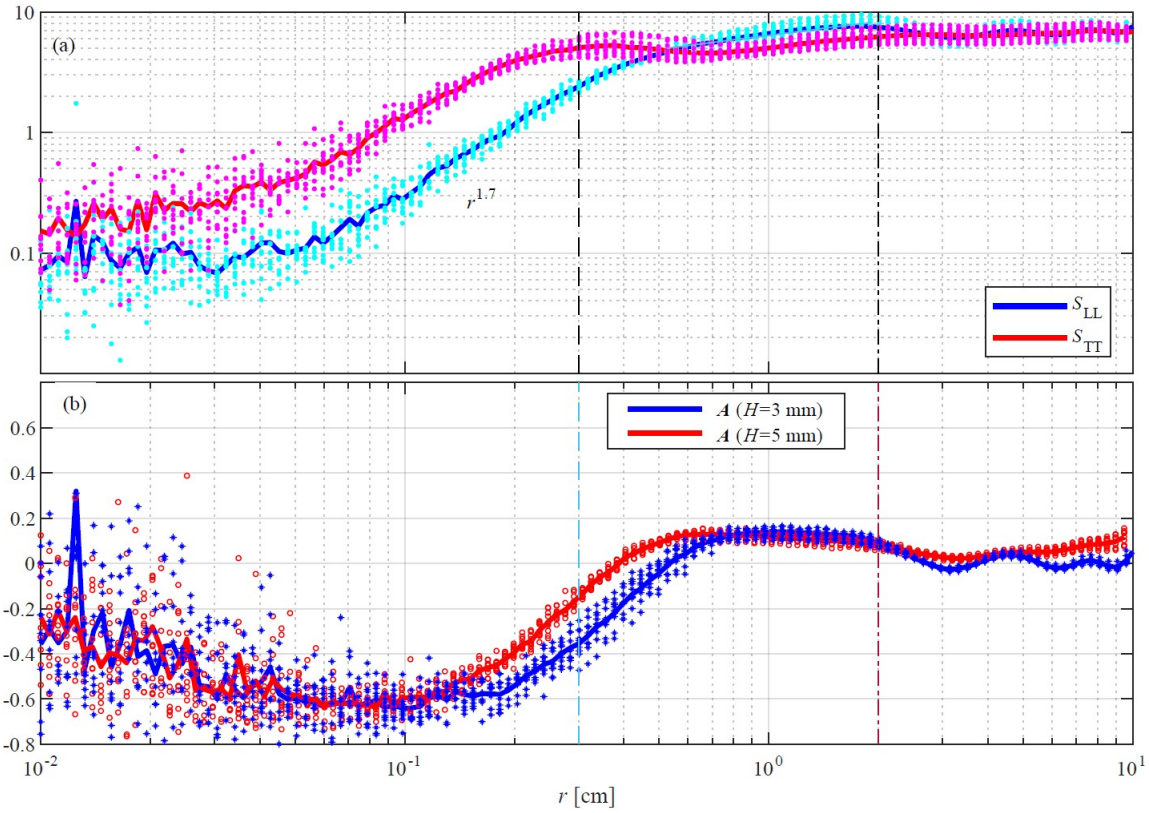

图 8。（a）高度为 $H = 3$ mm 时，纵向（S_{LL}）和横向（S_{TT}）的二阶结构函数。（b）我们绘制了两个高度下各向异性因子 $\mathcal{A}$ 随 r 变化的关系。

在 $L > r > H$范围内，最佳拟合表明存在幂律 $r^{0.4}$，这与实验室参考系中该范围内观测到的幂律一致。两个参考系之间的一个主要差异是，纵向方向上 $r \approx H$ 附近的结构函数有所增大，使能谱在 H附近形成一个“凸起”。因此，我们记录到二阶结构函数相对于 r呈非单调递减。这表明小尺度上存在另一个湍流源，它产生的涨落导致能量在 H附近积聚。

准二维范围内的幂律 $\lambda_K < r < H$ 在纵向和横向均呈现约 1.7 的标度指数，与实验室参考系相似。纵向的标度关系延伸范围比横向更宽；在横向上，S_{TT} 在 $r < 0.4$ cm 范围内保持恒定。

在小尺度下，结构函数对 r 的依赖在两个方向上存在明显差异

，这种差异主要出现在准二维范围内，其中 $S_{LL} < S_{TT}$ 对 $r < H$而言。这种差异甚至出现在实验所能检测到的最小尺度上，该尺度接近柯尔莫哥洛夫尺度。图 8(b) 更清楚地展示了这一点，其中我们绘出了两个高度处定义的各向异性因子：

$$\mathcal{A} = \frac{S_{LL} - S_{TT}}{S_{LL} + S_{TT}}. \tag{6}$$

$\mathcal{A}$ 的变化并非单调，而是取决于 r，这表明局部各向同性假设遭到破坏。其值从0.01 cm处的 -0.3上升至0.1 cm处的 -0.6 。随后，它逐渐减小至0，并在约1 cm的尺度处超过零值，达到 $+0.17$ 的最大值；此时横向涨落超过纵向涨落。该图表明，各向异性体现在 $\mathcal{A}$对 r的依赖关系中，在小尺度处最为显著，并在 $r \approx H/2$处达到最大值。

我们认为，纵向与横向小尺度动力学之间的差异是由底部无滑移边界造成的：该边界使摩擦力沿运动平行方向作用，而横向则不存在摩擦力。因此， z方向上的纵向速度梯度会产生三维运动，这或许可以解释为什么 $r < H$时$S_{LL} < S_{TT}$ 。在准二维范围内，另一种湍流来源也可以解释纵向结构函数随r 在 $r = H$附近呈非单调下降的现象，而横向并未出现这一效应。二阶结构函数的结果清楚地表明，流动偏离了局部各向同性；局部各向同性是KK理论的一项主要假设。这与前一节关于概率分布函数的结果一致。

VI. 三阶结构函数

三阶结构函数与速度涨落的非线性相互作用所导致的不同尺度间能量和涡量平方的传递率有关 [29,39–41]。能量传递率可分解为四个部分： S_{LLL}、 S_{TTT}、 S_{LLT}和 S_{LTT}。本节展示纵向和横向三阶结构函数的实验结果，而 S_{LLT} 和 S_{LTT} 则留待下一节讨论。

K科尔莫戈罗夫推导出了三维湍流的“4/5定律”

$$S_{LLL} = \langle (\delta u_L)^3 \rangle = -\frac{4}{5}\,\varepsilon\, r, \tag{7}$$

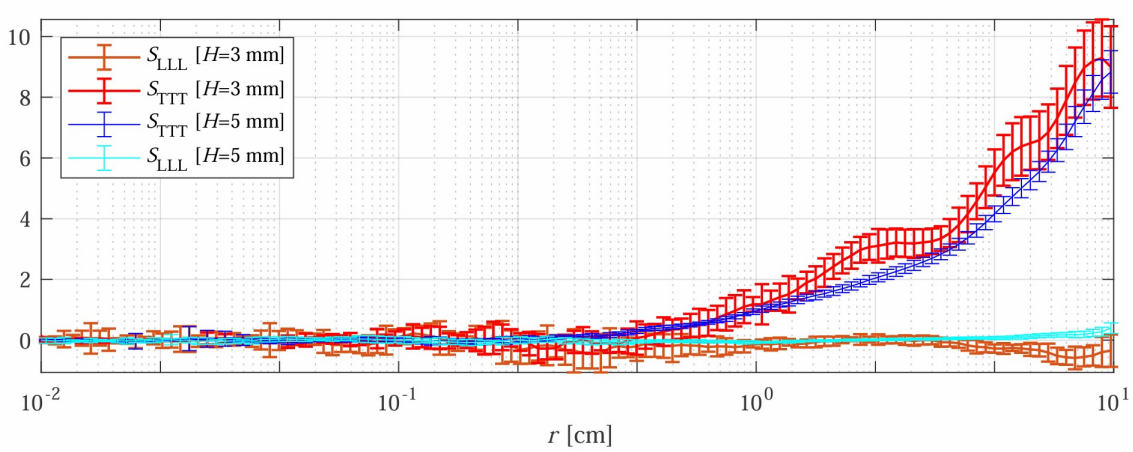

图 9. S_{LLL}和 S_{TTT}随 r的变化，展示了所研究的两种高度。误差棒是根据在相同实验条件下拍摄的 10 部不同影片估算得出的。

其中， ε 是单位质量的平均能量耗散率。负号表示能量从大尺度向小尺度传递，这也是它被称为直接级联的原因。

在二维流动中， [40, 42], 两种级联可能共存，从而导致

$$S_{LLL} \sim r^3, \text{ in the direct cascade range, and} \tag{8}$$

$$S_{LLL} \sim r, \text{in the inverse cascade range} \tag{9}$$

在逆级联区间，KK理论预测，纵向和横向方向上的标度性质类型相同，且均随 r变化。

[12] 研究了肥皂膜中的网格湍流，并观察到三阶矩在小尺度上略为负值，但在测量范围的大部分区间内转为正值。这表明能量传递主要由逆级联主导。在另一项研究中， [43, 44] 使用了一个装有电解质溶液的 40×30 cm^2 容器，液面高度达 7 mm，并使其受到洛伦兹力作用。他们的测量结果显示，三阶纵向结构函数为负，这与类似于三维湍流的直接能量级联相符。

图 9 展示了高度为 3 和 5 mm 时纵向（S_{LLL}）和横向（S_{TTT}）方向上的三阶矩，并以半对数尺度绘制。二阶结构函数表明，在所有尺度上都存在强相关性。纵向方向上的三阶矩在达到 $r \approx L \approx 2$ cm 之前始终接近 0，之后略微变为负值，这表明存在直接能量级联。 S_{LLL} 对于 $r < L$ 接近 0 这一事实可能

表明在这一范围内，能量传递主要由涡量平方级联主导。在横向方向上，我们注意到，S_{TTT}的振幅远大于 S_{LLL}，并且从 $r \approx H$开始取正值。由此可以推断，反向涡量平方级联主导了传递，这一过程从 $r = H$ 开始变得重要，而不是由磁体之间的距离决定。

我们的分析揭示了三种截然不同的状态:

- 当间距为 $r < H$时，尽管这些尺度上存在显著的涨落，两个方向上的三阶结构函数都趋近于零。鉴于二维湍流中能量级联和涡量平方级联同时存在，这种行为可能表明，尺度间的能量传递主要通过涡量平方级联实现。

- 在 $H > r > L$范围内， S_{TTT}的符号为正，而 S_{LLL}仍接近 0。因此，可以推断，能量传递开始在横向变得重要，而纵向上仍由涡量平方级联占主导。

- 对于 $r > L$，振幅 S_{TTT}继续增大且保持正值，依据r^1 可知这表明存在逆能量级联，而 S_{LLL} 仍接近于零。

A. 交叉三阶结构函数

在小尺度上检测到局部各向异性，纵向和横向的二阶结构函数呈现不同的行为。为研究横向与纵向之间的相关性，我们采用交叉三阶结构函数，

$$S_{LTT} = \langle \delta u_T^2 \delta u_L \rangle \text{ and } S_{LLT} = \langle \delta u_L^2 \delta u_T \rangle. \tag{10}$$

这些函数是交叉三阶矩，反映不同方向上各尺度之间的能量传递。它们使我们能够评估两个方向之间的耦合，即纵向和横向。

在图10中，我们绘制了两个高度下的 S_{LTT} 和 S_{LLT} 随 r 变化的曲线。两个方向之间的互相关在小尺度下接近于零，在大尺度下则变得显著。对于 S_{LLT}，可以验证其在 $r > H$ 时取正值

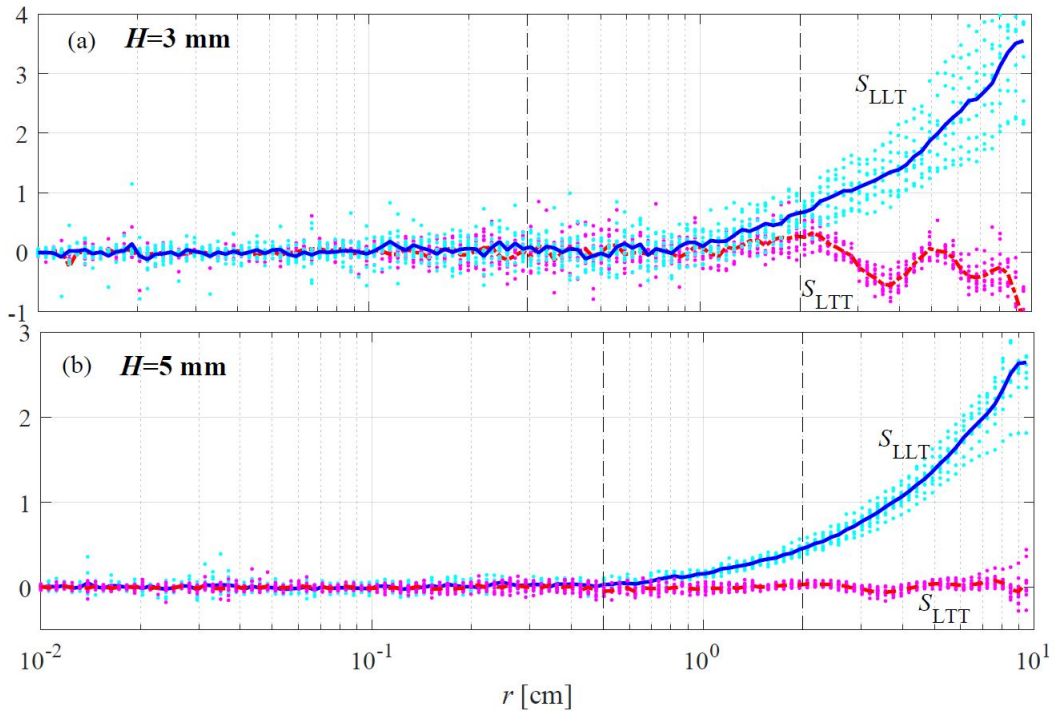

图10. 非对角三阶结构函数 S_{LLT} 和 S_{LTT} 随 r 的变化，$H = 3$ 对应(a)，5 mm对应(b)。圆点表示每部影片的结果，实线表示所有数据的平均值。在较大尺度上，交叉方向耦合高于实验误差。

而在 $r < H$ 时仍接近 0。因此，纵向和横向方向主要在大尺度下耦合。对于 $r < H$，互相关接近 0 这一事实也适用于 S_{LTT}；其值略为负，且对于 $r > H$，其数值高于实验误差，这与 S_{LLL} 的行为一致。

我们推断，在运动参考系中，两方向之间的净耦合可在 $r > H$ 处检测到。因此，可以推测，主要影响纵向的底部摩擦，可能是由于两方向在大尺度上的这种非线性耦合，导致横向标度关系偏离的原因。

VII. 结论

我们报告了在具有无滑移底边界的方形容器中，对受迫准二维流动动力学开展的一项实验研究。工作流体为氢氧化钾（KOH）电解质溶液，流体层高度为 3 mm 或 5 mm。通过施加在两侧壁电极上的电流，并结合由容器下方一组交替极性永磁体产生的磁场，驱动复杂运动。通过在自由表面撒布50 μm 荧光示踪粒子实现流动可视化。这些粒子吸收紫外光（波长 356 nm，由紫外灯提供），并发射可见光谱中的光。高分辨率相机（50 μm/像素，与粒子直径相当）拍摄整个区域，并谨慎地将时间分析限制在统计平稳时段内。

我们发现，对于所采用的电流（3 mm 和 5 mm 高度下分别为 500 mA 和 700 mA），速度场在空间中变得随机且混沌，低电流下可见的相干涡旋也不复存在。然而，对于本文所研究的雷诺数，我们无法排除相干过渡结构的存在。速度的概率密度函数（PDF）也反映出这种随机性：它接近高斯分布，偏度和平坦度因子分别为 0 和 2.8。

我们将这里获得的统计性质与 KK 理论进行了比较。通过速度增量的概率密度函数可以观察到与 KK 理论的偏离：这些函数不仅表现出非高斯行为，而且相对于运动参考系，纵向运动与横向运动之间也存在差异。尽管二阶结构函数在实验室参考系中似乎具有各向同性，但这种各向同性在运动参考系中不再成立。通过引入局部各向异性因子，我们发现它在柯尔莫哥洛夫尺度与流动高度之间的准二维范围内达到峰值。对三阶结构函数的分析凸显了逆能量级联的普遍性，这表明小尺度的局部各向异性会向更大尺度传递。因此，观测到的标度律在这一方向上偏离了 KK 理论的预测。此外，交叉三阶结构函数揭示了纵向运动与横向运动之间显著的混合，表明大尺度上存在强相关性，并伴随一种向横向传播的“污染”效应。

对实验结果的一种可能解释如下：底部的无滑移边界使摩擦作用于纵向运动方向，从而内在地破坏了流动的局部各向同性。更大尺度则受到反向涡量平方级联的影响。由于湍流的横向性质与纵向方向存在非线性耦合，因此也会受到影响。于是，固体边界的影响会沿两个方向传播，使湍流的统计性质在所有尺度上都偏离 KK 理论。此外，由于本研究均在中等雷诺数下进行，过渡性相干结构也可能在实验数据与 KK 理论不一致这一现象中发挥重要作用。

未来的研究应着重理解这些流动中占主导地位的逆级联背后的理论原因。最后需要指出，将实验结果与直接数值模拟进行比较，能够为这项实验研究提供另一个有趣的视角，也必将使我们进一步深入了解流动结构，以及固体边界在改变流动动力学方面所起的作用，尤其是与理论结果相比较时。

致谢

SB 和 KS 感谢法国磁聚变研究联合会（FR-FCM）和 Eurofusion联盟提供的经费支持。该联盟由欧盟委员会根据第 633053 号资助协议，通过欧拉姆研究与培训计划提供资金。本文所表达的观点和意见不一定代表欧盟委员会的立场。GA 和 JK 感谢大学研究委员会（URB）第 104391 号资助以及本科生研究体验（URE）第 11.513117 号资助提供的经费支持。

---

[1] Patrick H Diamond、Sanae-I Itoh 和 Kimitaka Itoh，《现代等离子体物理学：第 1 卷，湍流等离子体物理动理学》（剑桥大学出版社，*2010* 年）。[2] A. Alexakis，“准二维湍流”，《现代等离子体物理学评论》**7**，31（2023）。[3] S. Narimousa、T. Maxworthy 和 G. R. Spedding，“关于……的结构与实验

受迫准二维湍流的动力学，《流体力学杂志》**223**，113–133（1991）。[4] 安德烈·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫，“极高雷诺数下不可压缩流体中的局部湍流结构”，载于苏联科学院院刊，第30卷（1941）。[5] 安德烈·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫，“关于高雷诺数下黏性不可压缩流体中湍流局部结构的先前假设的修正”，《流体力学杂志》**13**，82–85（1962）。[6] 罗伯特·H·克雷奇南，“二维湍流中的惯性区间”，《流体物理学》**10**，1417–1423（1967）。[7] 乔尔·索梅里亚，“方形盒中二维逆能量级联的实验研究”，《流体力学杂志》**170**，139–168（1986）。[8] 哈米德·凯莱和沃尔特·I·戈德堡，“二维湍流：近期若干实验综述”，物理学进展报告**65**，845（2002）。[9] HJH Clercx 和 GJF Van Heijst，“有界区域中的二维纳维–斯托克斯湍流”，应用力学评论**62**（2009）。[10] 圭多·博费塔和 Robert E Ecke，“二维湍流”，流体力学年度评论**44**，427–451（2012）。[11]莫尔特扎·加里卜和菲利普·德兰戈，“用于研究二维层流和湍流剪切流的液膜（肥皂膜）隧道”，物理学D辑：非线性现象**37**，406–416（1989）。[12] A Belmonte、WI Goldburg、H Kellay、MA Rutgers、B Martin 和 XL Wu，“湍流肥皂膜中的速度涨落：二维三阶矩”，《流体物理学》**11**，1196–1200（1999）。[13] J´erˆome Paret 和 Patrick Tabeling，“二维逆能量级联的实验观测”，《物理评论快报》**79**，4162（1997）。[14] G Boffetta、A Cenedese、Stefania Espa 和 S Musacchio，“摩擦对二维湍流的影响：直接级联的实验研究”，欧洲物理快报**71**，590（2005）。[15] MG Shats、Hua Xia 和 Horst Punzmann，“等离子体和流体中的湍流谱凝聚及其在环形等离子体低到高相变中的作用”，《物理评论E》**71**，046409（2005）。[16] P Tabeling、S Burkhart、O Cardoso 和 H Willaime，“自由衰减的实验研究

二维湍流”，《物理评论快报》**67**, 3772 (1991).[17] Hua Xia、Horst Punzmann、Gregory Falkovich 和 MG Shats，“二维湍流中的湍流—凝聚态相互作用”，《物理评论快报》**101**, 194504 (2008).[18] Shiyi Chen、Robert E Ecke、Gregory L Eyink、Michael Rivera、Minping Wan 和 Zuoli Xiao，“二维逆能量级联的物理机制”，《物理评论快报》**96**, 084502 (2006).[19] H Xia、M Shats 和 Gregory Falkovich，“薄层中的谱凝聚湍流”，《流体物理学》**21**, 125101 (2009).[20] D Byrne、H Xia 和 M Shats，“三维流体层中的稳健逆能量级联与湍流结构”，《流体物理学》**23**, 095109 (2011).[21] L Bard´oczi、M Berta 和 A Bencze，“准二维磁化电解质系统中的逆能量级联与湍流输运：一项实验研究”，《物理评论E》**85**, 056315 (2012).[22] RAD Akkermans、AR Cieslik、LPJ Kamp、RR Trieling、HJH Clercx 和 GJF Van Heijst，“浅流体层中电磁生成偶极涡的三维结构”，《流体物理学》**20**, 116601 (2008).[23] M. Lesieur，“流体力学中的湍流导论”，《流体中的湍流：第四版修订增补版》，1–23 (2008).[24]LM Moubarak 和 GY Antar，“稳恒电磁力作用下二维流动的动力学”，《流体实验》**53**, 1627–1636 (2012).[25] Jerome Paret 和 Patrick Tabeling，“二维逆能量级联中的间歇性：实验观测”，《流体物理学》**10**, 3126–3136 (1998).[26] Theodore von K´arm´an 和 Leslie Howarth，“各向同性湍流统计理论”，《伦敦皇家学会会刊：A辑——数学与物理科学》**164**, 192–215 (1938).[27] L Djenidi 和 RA Antonia，“均匀各向同性湍流的 K´arm´an–Howarth 解”，《流体力学杂志》**932**, A30 (2022).[28]Andreĭ Sergeevich Monin 和 Akiva M Yaglom，《统计流体力学，第二卷：湍流力学》，第2卷（Courier Corporation，2013年）。[29] Uriel Frisch，《湍流：AN Kolmogorov 的遗产》（剑桥大学出版社，1995年）。[30] KS Gage 和 GD Nastrom，“大气波数谱的理论解释

商用飞机在 GASP 观测到的风和温度”，《大气科学杂志》**43**, 729–740 (1986).[31] H Kellay、XL Wu 和 WI Goldburg，“湍流肥皂膜实验”，《物理评论快报》**74**, 3975 (1995).[32] H Kellay、XL Wu 和 WI Goldburg，“湍流肥皂膜中的涡量测量”，《物理评论快报》**80**, 277 (1998).[33] O Cardoso、D Marteau 和 P Tabeling，“准二维湍流自由衰减的定量实验研究”，《物理评论E》**49**, 454 (1994).[34] Hua Xia、David Byrne、Gregory Falkovich 和 Michael Shats，“厚湍流流体层中的向大尺度能量传递”，《自然·物理》**7**, 321–324 (2011).[35] H Xia 和 N Francois，“三维流动中的二维湍流”，《流体物理学》**29**, 111107 (2017).[36] Alexandra von Kameke、Fern´andez Huhn、Guillermo Fern´andez-Garc´ıa、Alberto P Mu˜nuzuri 和 Vicente P´erez-Mu˜nuzuri，“法拉第波诱导的水平流体流动中的双级联湍流与 Richardson 扩散”，《物理评论快报》**107**, 074502 (2011).[37] Nicolas Francois、Hua Xia、Horst Punzmann 和 Michael Shats，“法拉第波驱动的湍流中的逆能量级联与大尺度相干涡旋的形成”，《物理评论快报》**110**, 194501 (2013).[38] Nicolas Francois、Hua Xia、Horst Punzmann、Stuart Ramsden 和 Michael Shats，“法拉第波中的三维流体运动：涡量的形成与二维湍流的产生”，《物理评论X》**4**, 021021 (2014).[39] Sergei D Danilov 和 D Gurarie，“准二维湍流”，《物理-乌斯佩希》**43**, 863 (2000).[40]Rory T Cerbus 和 Pinaki Chakraborty，“二维三阶结构函数：罗生门效应”，《流体物理学》**29**(2017).[41] Jin-Han Xie 和 Oliver B¨uhler，“二维湍流的精确三阶结构函数”，《流体力学杂志》**851**, 672–686 (2018).[42]Erik Lindborg，“大气动能谱能否用二维湍流解释？”，《流体力学杂志》**388**, 259–288 (1999).[43]AE Gledzer、EB Gledzer、AA Khapaev 和 OG Chkhetiani，“实验室实验中的准二维湍流结构函数”，《实验杂志》和

理论物理**113**，516–529（2011年）。

[44] AE Gledzer、EB Gledzer、AA Khapaev 和 OG Chkhetiani，“实验室实验中三维结构对薄流体层湍流动力学的影响”，《Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics》**49**，187–200（2013年）。