arXiv:2601.01269v1 [q-fin.MF] 3 Jan 2026

从对数正态到幂律转变的临界波动率阈值

迭代期权模型

Valerii Kremnev

2026年1月

目录

从对数正态到幂律转变的临界波动率阈值：迭代期权模型 1

摘要.1 前言.3 1. 引言与研究动机.4 2. 布莱克-斯科尔斯设定.5 3. 迭代期权：数学结构.8 4. 重新居中（平值）情形.10 5. 收敛与临界阈值.12 6. 超过临界阈值后的发散与幂律.13 7. V* 的数值模拟.20 8. 解读与市场影响.24 9. 结论.27 附录：符号汇总.29 代码可用性.30 参考文献.31

对数正态向幂律转变的临界波动率阈值：迭代期权模型

摘要

具有对数正态结果的随机游走模型与局部市场观测高度吻合。然而，互联或递归结构——分层衍生品、杠杆头寸、迭代融资轮次——会周期性地产生幂律分布事件。我们表明，从对数正态到幂律动力学的转变只需要三个条件：底层过程具有随机性、收益整流，以及期望值的迭代前馈。以无限期权之期权链为示例模型，我们推导出无条件情形下的临界波动率阈值为 $\sigma^* = \sqrt{2\pi} \approx 250.66$ %。在选择性存续的情况下——参与者必须达到最低回报才能继续参与——临界阈值会不连续地降至 $\sigma^*_{\text{th}} = \sqrt{\pi/2} \approx 125.3$%，并且随着存续阈值提高还可能进一步降低。由此产生的结果遵循我们所称的临界

波动率（V*）分布——一种幂律，其指数可用存续压力和条件期望增长表示为闭式表达式。结果表明，肥尾可能是具有选择机制的迭代对数正态过程所涌现的属性，而非外生特征。

序言

金融系统建立在截断收益之上。投资高风险项目，结果要么有所回报，要么一无所获——损失不会超过投入金额。期权的收益为 $\max(S - K,\ 0)$。即使是有限责任，也是一种整流形式。

这些截断结构往往彼此层层叠加。一个项目取得成功，便能促成以它为基础的其他项目。一次成功的交易会成为下一次交易的资本。衍生产品以其他衍生产品为参照。了解这类迭代的表现会很有帮助——它们究竟会保持稳定，还是会呈现截然不同的动态特征。

为回答这个问题，我们分析一种极限情形：一条无限期权链，其中每一期权都以此前一期权的预期支付额为标的。结果取决于三个条件——底层过程中的随机性、收益整流，以及期望值前馈。这些条件足以在 $\sigma^* = \sqrt{2\pi} \approx 250.66\%$ 处产生临界阈值。低于该阈值时，累积期权性保持有界；高于该阈值时，系统则会发散。若存在选择性存续——参与者必须达到最低回报才会继续——阈值会降至 $\sigma^*_{\mathrm{th}} = \sqrt{\pi/2} \approx 125.3\%$。发散结果遵循我们称为 V* 分布的规律：这是一种幂律，其指数取决于具体的波动率，以及参与者进行下一次下注的意愿。

我们还发现，在恰好达到临界阈值时存在一种自相似状态，其中每次迭代都会复现前一次迭代的统计结构。

这些条件十分简单：随机性、有限下行风险和迭代。这些并非特殊假设，表明该机制可能广泛适用于具有复合行为的动态系统。

至于无限导数塔本身：据我们所知，还没有人建造过这样的塔。这大概是明智之举。不过，如果金融工程继续朝着产品日益分层的方向迈进，至少现在已经知道悬崖在哪里了。

1. 引言与研究动机

布莱克-斯科尔斯框架为欧式期权定价提供了基础模型。在风险中性估值下，看涨期权的价格反映了其收益 max($S_T - K$，0) 的期望值，并经过适当折现。这种“整流”——即取一个可能为负的量与零两者中的较大值——正是赋予期权非对称收益结构的关键非线性。

一个自然的问题是：如果我们对期权再写出一个期权，会发生什么？然后再对它写出一个期权呢？原则上，我们可以构造任意深的此类工具链，每一层的价值都源自下一层的预期支付额。

本文分析了这类迭代整流期望的数学结构。我们发现：

1. 对于无条件 ATM 情形，系统在年化临界波动率 $\sigma^* = \sqrt{2\pi} \approx 250.66\%$ 处发生相变。这里假设的是理想情形：定价没有误差，波动率不会在衍生品层级之间放大，而是与资产价格保持完全相关，且比率恒定。现实系统若付诸实践，偏离理想情况的速度会快得多。2. 低于临界性（$\sigma < \sigma^*$）时，无限期权链的总价值收敛为有限和，这意味着无论增加多少层，期权性都有“上限”。3. 高于临界性（$\sigma > \sigma^*$）时，期权链发散——期权性的累积价值超过标的资产本身。这不仅仅是数学上的奇特现象；它意味着在极端波动率区制下，期权性可能主导产品的基本价值。这会导致预期支付额在每个连续步骤中不断放大，使预期支付额呈现幂律动力学。4. 在临界性（$\sigma = \sigma^*$）处，系统变为自相似，每次迭代都会重现前一次迭代的统计结构。5. 若存在选择性存续——即参与者要求最低回报才会继续——临界阈值会降至 $\sigma^*_{\text{th}} = \sqrt{\pi/2} \approx 125.3\%$。当 $\beta_{\text{eff}} > 1$ 时，幂律动力学（V* 分布）便会出现，其中 β_{eff} 是存续条件下的条件期望增长。

这些发现有助于理解市场压力期间的波动率区制、复合期权的定价，以及衍生品分层的理论极限。

2. 布莱克-斯科尔斯设定

2.1 标准框架

在　　在布莱克-斯科尔斯模型中，标的资产遵循几何布朗运动：

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$$

欧式看涨期权的布莱克-斯科尔斯公式为：

$$C(S_t,t) = N(d_+)S_t - N(d_-)Ke^{-r(T-t)}$$

其中：

$$d_+ = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$

$$d_- = d_+ - \sigma\sqrt{T-t}$$

且 $N(\cdot)$ 是标准正态累积分布函数。

2.2 平值特殊情形

对于满足 $S_t = K$ 的平值期权，我们有 $\ln(S_t/K) = 0$，因此：

$$d_+ = \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T-t}$$

$$d_- = \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T-t}$$

在 $r \ll \sigma$ 极限下（适用于 $\sigma > 100\%$ 和 $r \approx 5\%$ 的高波动率情形）：

$$d_+ \approx \frac{\sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T-t} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}$$

$$d_- \approx \frac{-\sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T-t} = -\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}$$

由于 $d_- \approx -d_+$，我们有 $N(d_-) = N(-d_+) = 1 - N(d_+)$，期权价格可简化为　　：

$$C = K\left[N(d_+) - N(d_-)\right] = K\left[2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1\right]$$

平值期权价格可简化为单个高斯累积分布函数减去一个常数。让我们来分析其行为。

2.3 高斯结构

高斯分布通过 $N(d_+)$ 和 $N(d_-)$ 显式出现在布莱克-斯科尔斯公式中，并在高波动率平值假设下简化为单个高斯累积分布函数。我们注意到，根据定义，期权收益 $\max(S_T - K, 0)$ 不可能为负值——期权结构会将基础回报在零点处截断。

整流高斯分布的期望值是期权定价的数学核心。现在我们分析 $\mathbb{E}[\max(X, 0)]$（其中 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$）。

在以下数学推导中，σ 表示分布 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的标准差，遵循标准统计惯例，而不是无量纲波动率。

2.4 截断高斯期望

Let $Y = \max(X, 0)$ where $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. We seek $\mathbb{E}[Y]$.

期望分为两个区域：

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_{X>0}] = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

代入 $u = (x - \mu)/\sigma$：

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\mu/\sigma}^\infty (\mu + \sigma u) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

可分解为：

$$\mathbb{E}[Y] = \mu \int_{-\mu/\sigma}^\infty \phi(u)\, du + \sigma \int_{-\mu/\sigma}^\infty u \cdot \phi(u)\, du$$

第一个积分为 $\mu \cdot \Phi(\mu/\sigma)$。对于第二个，注意 $u \cdot \phi(u) = -\phi'(u)$，因此：

$$\int_{-\mu/\sigma}^\infty u \cdot \phi(u)\, du = [-\phi(u)]_{-\mu/\sigma}^\infty = \phi(\mu/\sigma)$$

因此：

$$\mathbb{E}[Y] = \mu\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \sigma\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 是标准正态累积分布函数，$\phi(\cdot)$ 是标准正态概率密度函数。

2.5 函数 g(z)

除以 σ 并令 $z = \mu/\sigma$：

$$\frac{\mathbb{E}[Y]}{\sigma} = z\Phi(z) + \phi(z)$$

使用 Φ和 ϕ的积分形式展开:

$$\frac{\mathbb{E}[Y]}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(z\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}dt + e^{-z^2/2}\right)$$

我们定义:

$$g(z) = z\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}dt + e^{-z^2/2}$$

从而整流高斯分布的期望值变为:

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}g(z)$$

这种形式对于分析迭代至关重要。

3. 迭代期权：数学结构

3.1 迭代方案

考虑一个期权链，其中每个期权都以先前期权的预期支付额为标的。在这种期权链的简化模型中，我们将以先前期权的预期支付额作为价格，建立一个新的衍生工具，并计算新的参数。由于先前期权的行权价只会作为一个常数乘数，因此我们可以专注于分析整流高斯分布的行为，将其作为一种简化模型。

令 μ_n 表示阶段 n的期望值，并假设每个阶段的波动率为 σ_n。

根据第 2.5 节，阶段 n的整流高斯分布的期望值为：

$$\mathbb{E}_n[Y] = \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi}} g(z_n)$$

其中 $z_n = \mu_n / \sigma_n$。

如果我们令一次整流的输出成为下一次整流的均值（即 $\mu_{n+1} = \mathbb{E}_n[Y]$），则得到：

$$\mu_{n+1} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi}} g(z_n)$$

3.2 一般递归

根据第 2.5 节：

$$\mathbb{E}_1[Y] = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} g(z_1)$$

令输出成为下一阶段的均值： $\mu_2 = \mathbb{E}_1[Y]$。

下一个价格为：

$$z_2 = \frac{\mu_2}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(z_1)$$

令 $r = \sigma_1 / \sigma_2$ 和 $w = g(z_1)$。于是：

$$z_2 = \frac{r}{\sqrt{2\pi}} w$$

下一个期望：

$$\mathbb{E}_2[Y] = \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} g(z_2)$$

更一般地，令 $w_n = g(z_n)$ 和 $\alpha = \frac{r}{\sqrt{2\pi}}$：

$$w_{n+1} = g(\alpha \cdot w_n)$$

具体而言：

$$w_{n+1} = \alpha w_n \int_{-\infty}^{\alpha w_n} e^{-t^2/2}\, dt + e^{-\alpha^2 w_n^2/2}$$

这是一个非线性递归，其行为取决于 α。

3.3 自相似情形

W当 $\alpha = 1$ （等价地，$r = \sqrt{2\pi}$，¯即 $\sigma_1 = \sigma_2\sqrt{2\pi}$）¯时，递归简化为 ：

$$w_{n+1} = g(w_n)$$

这是对 g 的纯迭代——该过程变得自相似。比率：

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = \frac{w_n}{g(w_n)}$$

这表明，该序列会根据 w_n （或等价地，根据 α）呈现自身的收敛/发散行为。参数 α 控制递归的缩放方式，决定迭代期望是增长、缩小还是趋于稳定。

4. 重新居中（平值）情形

4.1 引入平移

在实际中，期权的行权价通常设为平值，即行权价等于当前期望值。我们通过引入平移参数 s_n 来对此建模，使分布在每一步重新居中：

$$z_n^s = \frac{\mu_n - s_n}{\sigma_n} = z_n - \frac{s_n}{\sigma_n}$$

设置 $s_n = \mu_n$ （平值条件）会在每次迭代时强制满足 $z_n^s = 0$ 。

这种平移的直观解释如下：每个新期权在发行时均按平值条件设定，行权价等于当前标的价格（即上一阶段的期望值）。随后，在持有期内，标的资产以自身的波动率围绕该行权价波动。由于行权价等于均值，与收益相关的分布以零为中心。

4.2 在零点处求值

由于 $g(0) = 0 + e^0 = 1$，平移后的期望值大幅简化：

$$\mathbb{E}_n^s[Y] = \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi}}$$

这是一个众所周知的结果：平值期权的预期支付额（贴现前且不含市场价格乘数）与波动率成正比。这与众所周知的实务近似直接相关：

$$C \approx \frac{S \cdot \sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4 \cdot S \cdot \sigma\sqrt{T}$$

4.3 几何机制

在金融情境中，我们通常假设波动率是与价格相关的百分比——价格较高的股票，其绝对波动率也按比例较高。我们采用类似的定义，并使其随期望值缩放。

现在回到金融惯例，其中 σ 表示百分比波动率（变异系数， σ_n/μ_n）。假设百分比波动率为常数（绝对波动率随价格成比例变化）：

$$\mu_{n+1} = \frac{\sigma \cdot \mu_n}{\sqrt{2\pi}} = \beta \cdot \mu_n$$

其中 $\beta = \sigma/\sqrt{2\pi_\circ}$

由此得到闭式表达式：

$$\mu_n = \mu_1 \cdot \beta^{n-1}$$

每个阶段的期望值构成一个等比数列。

5. 收敛与临界阈值

5.1 无限链之和

平值期权无限链的总期望值为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = \frac{\mu_1}{1-\beta}$$

当且仅当 $\beta < 1$ 时，该级数收敛。

5.2 临界波动率

收敛条件 $\beta < 1$ 可转化为:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} < 1 \implies \sigma < \sqrt{2\pi} \approx 2.5066$$

以百分比表示，临界波动率为年化 $\sigma^* \approx 250.66\%$。

5.3 求和的闭式

当 $\sigma < \sqrt{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \frac{\mu_1 \sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi} - \sigma}$$

6. 超越临界阈值后的发散与幂律

6.1 超临界状态下的指数增长

当 $\sigma \quad > \sqrt{2\pi}$，我们有 $\beta = \sigma/\sqrt{2\pi} > 1$，并且期望值呈指数增长：

$$\mu_n = \mu_1 \cdot \beta^{n-1}$$

每次迭代都会放大上一次的期望值。总和发散——累积期权性没有有限上限。

6.2 存续条件与幂律的出现

在现实市场中，参与者得到的不是期望值，而是从分布中实际抽取的结果。玩家能否继续参与，取决于他们的结果和风险承受能力。

我们可以采用简化的类期权模型，其收益随赌注成比例变化，并假设收益为 $\max(X, 0)$，其中 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma w)$ 是以零为中心的高斯分布。参与者需要最低回报，才能证明持续冒险行为的合理性。令 k_{th} 为阈值乘数：参与者仅当其收益超过 $k_{\text{th}} \cdot w$ 时才能存活。

由于收益必须为正且超过阈值，存活要求 $X \geq k_{\text{th}} \cdot w$。将其标准化为 $Z = X/(\sigma w)$，其中 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$：

$$P(\text{survive}) = P\left(Z \geq \frac{k_{\text{th}}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k_{\text{th}}}{\sigma}\right)$$

例如，当 $\sigma = 3$ 与 $k_{\text{th}} = 2.5$ 时，我们得到 $k_{\text{th}}/\sigma \approx 0.833$，从而得到 $p \approx 0.20$（每轮存活率为 20%）。

连续存活 n个阶段的概率为：

$$P(\text{survive } n \text{ stages}) = p^n$$

在幸存者中，每个阶段的期望财富乘数是**给定存活条件下的条件期望**。对于以零为中心的截断正态分布：

$$\beta_{\text{eff}} = \mathbb{E}\left[\frac{X}{w} \,\middle|\, X \geq k_{\text{th}} w\right] = \sigma \cdot \frac{\phi(k_{\text{th}}/\sigma)}{1 - \Phi(k_{\text{th}}/\sigma)} = \sigma \cdot \frac{\phi(k_{\text{th}}/\sigma)}{p}$$

其中 ϕ 是标准正态概率密度函数。

V* 临界阈值。当 $\beta_{\text{eff}} = 1$ 时，会发生向幂律行为的相变。令 $z = k_{\text{th}}/\sigma$，该条件可得：

$$\sigma_{\text{critical}} = \frac{1 - \Phi(z)}{\phi(z)}$$

Th是逆米尔斯比率。当 $z \to 0^+$（阈值从上方趋近于零时 e)：

$$\sigma^*_{\text{th}} = \lim_{z\to 0^+} \frac{1-\Phi(z)}{\phi(z)} = \frac{0.5}{1/\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.253 \approx 125.3\%$$

这揭示了第二个临界常数：一旦引入任何正的生存阈值，临界波动率就会从 $\sigma^* = \sqrt{2\pi} \approx 250.66\%$ 降至 $\sigma^*_{\text{th}} = \sqrt{\pi/2} \approx 125.3\%$。这是因为筛除 $X < 0$ 的参与者（约占总人数的一半）后，幸存者的条件增长率会翻倍。

对于更高的阈值（$z > 0$），临界波动率会进一步降低。在（σ， k_{th}）空间中，临界曲线参数化为：

$$\sigma_{\text{critical}}(z) = \frac{1-\Phi(z)}{\phi(z)}, \quad k_{\text{th, critical}}(z) = z \cdot \frac{1-\Phi(z)}{\phi(z)}$$

存活过程的数量呈指数衰减（p^n），但当 $\beta_{\text{eff}} > 1$ 时，每个存活过程的值呈指数增长（β^n_{eff}）。这种组合会产生幂律分布结果。

6.3 V* 分布（临界波动率分布）

若有 N 个独立过程开始运行，经过 n 次迭代后，大约有 $N \cdot p^n$ 个过程存活下来，每个过程的值与 β^n_{eff} 成正比。

令 $v = \beta^n_{\text{eff}}$（该值），则有 $n = \log(v)/\log(\beta_{\text{eff}})$，因此：

$$\text{Number with value} > v \propto p^n = p^{\log(v)/\log(\beta_{\text{eff}})} = v^{\log(p)/\log(\beta_{\text{eff}})}$$

这是一个指数为以下数值的幂律：

$$\alpha = -\frac{\log(p)}{\log(\beta_{\text{eff}})}$$

由于 $p < 1$（无法保证生存）且 $\beta_{\text{eff}} > 1$（具有条件增长的超临界状态），因此我们得到 $\alpha > 0$：一个真正的幂律尾部。

因此，V* 分布为：

$$P(V > v) \propto \left(1 - \Phi\left(\frac{k_{\text{th}}}{\sigma}\right)\right)^{\frac{\log v}{\log\left(\sigma \cdot \frac{\phi(k_{\text{th}}/\sigma)}{1-\Phi(k_{\text{th}}/\sigma)}\right)}}$$

其中：

- k_{th} 是阈值乘数（最低收益相当于财富的倍数）
- σ 是波动率参数
- ϕ、 Φ 分别是标准正态概率密度函数和累积分布函数

可写为 $P(V > v) \propto v^{-\alpha}$ 其中 $\alpha = -\log(p)/\log(\beta_{\text{eff}})$。

6.4 价值状态：扩展至负阈值

第6.2节中的存续条件要求 $X \geq k_{\text{th}} \cdot w$，其中 X 是标的资产的回报（整流前）， k_{th} 是阈值乘数。虽然收益仍为 max(X,0)，但存续条件是根据 X 本身进行评估的。

对于 $k_{\text{th}} > 0$，参与者要求回报高于某个阈值——这对寻求实际收益的投资者而言，是一种自然约束。对于 $k_{\text{th}} = 0$，只要 $X > 0$，参与者就会继续；期权带来了收益。

从数学上说，没有任何因素会阻止 $k_{\text{th}} < 0$。这描述的是一种不同的博弈：参与者接受财富损失，以便继续参与。如果 $X = -0.5w$，期权的收益为零，但拥有$k_{\text{th}} = -1$ 的参与者仍能存续——他们用储备金承担损失，并进入下一轮。

这已不再是类似期权的行为。阈值为负时，参与者对损失承担线性敞口，最高可达 $|k_{\text{th}}| \cdot w$。我们将这种状态称为**价值状态（ATV）**：参与者承诺，即使遭遇不利结果也会继续，以接受财富毁损为代价，换取留在游戏中的机会。

ATV 状态体现了耐心资本：

- 在下行轮融资中继续支持投资组合公司的风险投资基金
- 具有长期投资期限的战略投资者
- 任何拥有储备金且重视持续参与胜过即时回报的参与者

后续相图延伸至这一负值 k_{th} 区域，揭示了参与者能够承受损失时临界边界的表现。

6.5 相空间刻画

V* 分布存在于二维参数空间（σ， k_{th}）中。图 1 展示了这一空间，其中临界边界 $\beta_{\text{eff}} = 1$ 将两种状态区分开来：

- **亚临界区域**（左上方，蓝色）：$\beta_{\text{eff}} < 1$。条件增长无法弥补损耗。结果呈薄尾分布。

- **超临界区域**（右下方，红色/橙色）：$\beta_{\text{eff}} > 1$。条件增长超过损耗。结果遵循具有幂律尾部的 V* 分布。

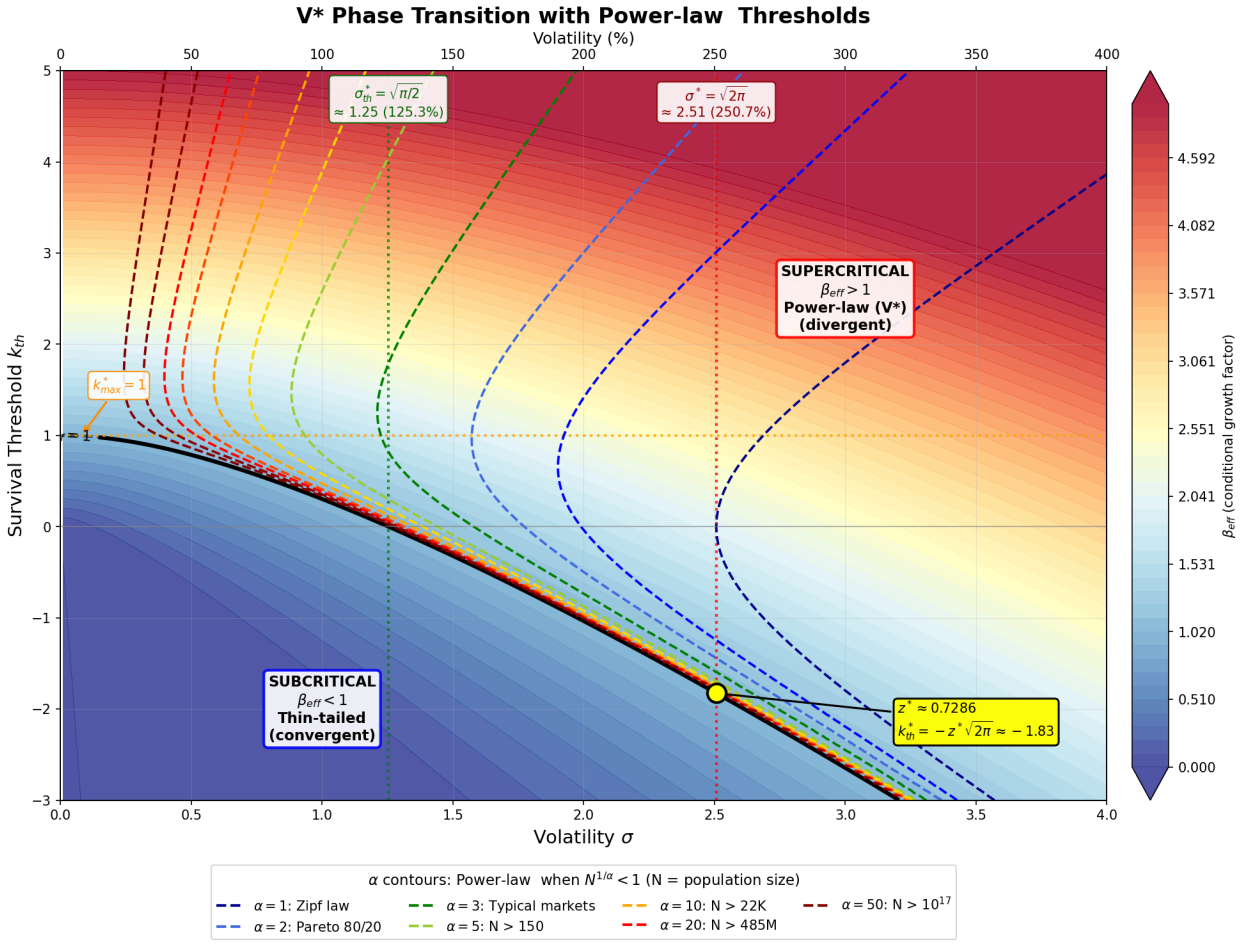


图 1：(σ， k_{th}) 空间中的 V*相变。颜色表示条件增长因子 β_{eff}。 $\beta_{\text{eff}} = 1$ 所在的临界边界（实线）将亚临界（薄尾）状态与超临界（V*幂律）状态区分开来。竖线标示 $\sigma_{\text{th}}^* = \sqrt{\pi}/2$ 和 $\sigma^* = \sqrt{2\pi}$。

图 2 将相空间分解为各个组成量。左侧面板显示存活概率 $p = 1 - \Phi(k_{\text{th}}/\sigma)$，当阈值的选择性更强（ k_{th} 更高）或波动率降低（ σ 更低）时，该概率会下降。右侧面板显示超临界区域内的幂律指数 $\alpha = -\log(p)/\log(\beta_{\text{eff}})$，其中较低的 α 表示尾部更重。

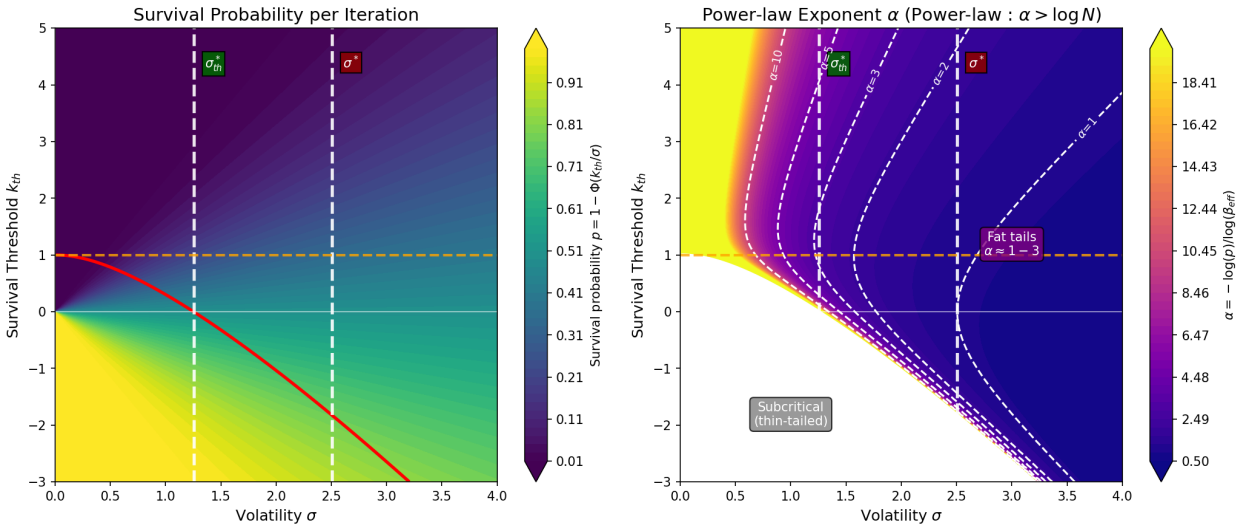


图 2：相空间组成部分。左：每次迭代的存活概率 p 。右：超临界区域中的 V*幂律指数 α 。较低的 α 对应更重的尾部和更极端的财富集中。

临界边界的形状反映了一种根本性的权衡。高波动率会使幸存者获得较大的数值；高选择压力则会将增长集中在较少的参与者身上。这两种机制都可能产生 $\beta_{\text{eff}} > 1$:

- 在低 σ时，需要较强的选择（较高的 k_{th}）才能达到超临界状态
- 在高 σ时，较弱的选择（较低的 k_{th}）就足够，因为仅凭波动率就能推动增长

因此，边界会沿参数空间弯曲；当波动率足够高时，还会延伸至风险容忍区域（$k_{\text{th}} < 0$）。

6.6 发散与幂律：选择的作用

区分该框架揭示的两种现象非常重要。

期望值发散 发生于 $\beta = \sigma/\sqrt{2\pi} > 1$，也就是说，当 $\sigma > \sqrt{2\pi}$ 时。在这种状态下，每次迭代的期望值都高于前一次： $\mu_{n+1} = \beta \cdot \mu_n$。无限链的总和发散。这正是第 5 节针对无条件 ATM 情形推导出的结果。

幂律分布 需要选择。V* 分布由两个指数过程结合而成:

- 存活参与者的数量按 p^n递减
- 每位存活者的价值增长为 β^n_{eff}

只有当 $p < 1$ （发生选择）且 $\beta_{\text{eff}} > 1$ （条件增长超过 1）时，幂律指数 $\alpha = -\log(p)/\log(\beta_{\text{eff}})$ 才有明确定义。没有选择时（$p = 1$），就不存在结果分布——所有参与者都沿着相同的轨迹前进。

这些现象彼此相关，但并不相同:

- 发散涉及系统的总期望值
- 幂律关注的是选择作用下结果分布的形状

临界波动率 $\sigma^* = \sqrt{2\pi}$ 标志着期望值开始发散的位置。但只要选择足够强，以达到 $\beta_{\text{eff}} > 1$，任何波动率下都可能出现幂律行为。反之，即使高于 σ^*，如果存活群体过大，选择不足也可能无法产生幂律尾部。

6.7 临界交点

相图揭示了这两个阈值的交点：无条件发散阈值 $\sigma = \sqrt{2\pi}$ 与临界边界 $\beta_{\text{eff}} = 1$ 相遇之处。

在 $\sigma = \sqrt{2\pi}$ 时，要产生幂律行为需要多强的选择?

令 $\beta_{\text{eff}} = 1$:

$$\sigma \cdot \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(z)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1 - \Phi(z)}{\phi(z)} = M(z)$$

其中， $M(z)$ 是米尔斯比率，且 $z = k_{\text{th}}/\sigma$。代入 $\sigma = \sqrt{2\pi}$:

$$M(z^*) = \sqrt{2\pi}$$

由于 $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$，可简化为:

$$1 - \Phi(z^*) = e^{-z^{*2}/2}$$

解为 $z^* \approx 0.7286$，对应于 $k_{\text{th}}^* = -z^*\sqrt{2\pi} \approx -1.83$。

解释。 在 $\sigma = \sqrt{2\pi}$ 时，系统表现出:

选择	状态	行为
$k_{\text{第}k\text{个}} > -1.83$	$\beta_{\text{效应}} > 1$	幂律（V*）
$k_{\text{阶}} = -1.83$	$\beta_{\text{效应}} = 1$	临界
$k_{\text{阶}} < -1.83$	$\beta_{\text{eff}} < 1$	薄尾

在无条件发散阈值处，期望值无限增长。然而，仅有这种发散并不能保证产生幂律结果。如果选择压力过弱（$k_{\text{th}} < -1.83$），存活群体就会包含过多参与者，从而使条件增长降至 1 以下。尽管期望值发散，分布仍保持薄尾。

常数 z^* 因此标志着在 $\sigma = \sqrt{2\pi}$处将发散增长转变为幂律分布所需的最低选择压力。超过这一点后，选择会充分集中增长，从而出现 V* 动力学。低于这一点时，稀释占主导。

6.8 高斯截断的四个常数

该框架得出四个特征常数：

常数	值	解释
σ^*	$\sqrt{2\pi} \approx 2.507$	发散阈值：期望值无界
σ^*_{th}	$\sqrt{\pi/2} \approx 1.253$	幂律阈值位于 $k_{\text{第}} \to 0^+$
z^*	≈ 0.7286	$\sigma = \sigma^*$处的标准化选择阈值
k^*_{th}	$-z^*\sqrt{2\pi} \approx -1.83$	参数空间中的选择阈值

比率 $\sigma^*/\sigma^*_{\text{th}} = 2$ 反映了生存筛选器排除负结果时条件增长翻倍。常数 z^*由 $1 - \Phi(z^*) = e^{-z^{*2}/2}$ 定义，是波动率达到发散阈值时幂律行为首次出现所对应的标准化选择参数；k^*_{th} 则以相图的单位表示这一参数。

这些常数源于高斯截断的几何结构——尾概率、局部密度以及归一化因子 $\sqrt{2\pi}$之间的相互作用。

6.9 启示

幂律指数 $\alpha = -\log(p)/\log(\beta_{\text{eff}})$同时取决于存活概率和条件增长。在临界性附近（$\beta_{\text{eff}} \approx 1$），即使适度的选择压力也会产生厚尾。在超临界区间的深处（$\beta_{\text{eff}} \gg 1$），分布变得愈发极端——众多失败者中只有少数巨大的赢家。

相图显示，只要适当调节选择，V* 动力学就能在广泛的波动率范围内实现。波动率适中（$\sigma \approx 100 - 200\%$）的系统，如果参与者对继续进行施加足够的选择性，就能表现出幂律行为。即使选择较弱，波动率极高的系统也能表现出幂律行为。

这种机制无需任何奇特的假设：对高斯过程进行迭代整流，并根据结果进行选择性延续。肥尾本身便从数学中自然涌现——具体而言，是选择所造成的指数级损耗与指数级条件增长之间的张力所致。

7. V* 的数值模拟

为验证理论预测，我们模拟了一个简化模型，称为 ATV（价值状态），参与者反复将全部财富押在一份平值期权上，其收益为 max(X，0)，其中 $X \sim \mathcal{N}(0,\ \sigma w)$。

7.1 模拟设置

我们模拟 $N = 10{,}000{,}000$ 名参与者，历时 $T = 15$ 期，每位参与者的初始财富为 w_0 =\$20,000。每期，高风险游戏中的参与者获得收益 max(X,0)，其中 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma w)$。如果参与者的收益低于 $2.5\times$ 其当前财富，他们就会退出并转而选择安全替代方案（波动率为 10%，采用实值结构）——这体现了这样一项要求：当每回合的破产风险为 ~50%时，只有收益足以证明继续冒险是合理的，参与者才会继续冒险。

模型测试的波动率范围从 $\sigma = 0.1$ (10%) 到 $\sigma = 4.0$ (400%)，涵盖了 $\sigma^* = \sqrt{2\pi} \approx 2.507$ (251%) 这一临界阈值。

模拟算法：

```
def simulate_atv_model(n=10_000_000, t=15, w0=20_000, sigma=2.5, threshold_k=2.5):
    w = np.full(n, w0, dtype=float)
    in_high_risk = np.ones(n, dtype=bool)
    sigma_low = 0.1

    for year in range(t):
        x_high = np.random.randn(n) * sigma * w
        payoff_high = np.maximum(x_high, 0)

        payoff_low = w * (1 + np.random.randn(n) * sigma_low)
        payoff_low = np.maximum(payoff_low, 0)

        threshold = threshold_k * w
        dropout = in_high_risk & (payoff_high < threshold)

        w = np.where(in_high_risk, payoff_high, payoff_low)
        in_high_risk = in_high_risk & ~dropout

    return w
```

7.2 结果

图 3 展示了在双对数尺度下，模拟所得的跨所有波动率区制的排名—财富分布，并叠加了 V* 理论预测（紫色虚线）。随着波动率越过临界阈值，从弯曲的（对数正态）行为向线性的（幂律）行为转变的过程清晰可见。图 4 对比了亚临界和超临界状态下的财富分布，并展示了 V* 理论幂律斜率以供比较。表 1 列出了各个波动率水平的详细统计数据。

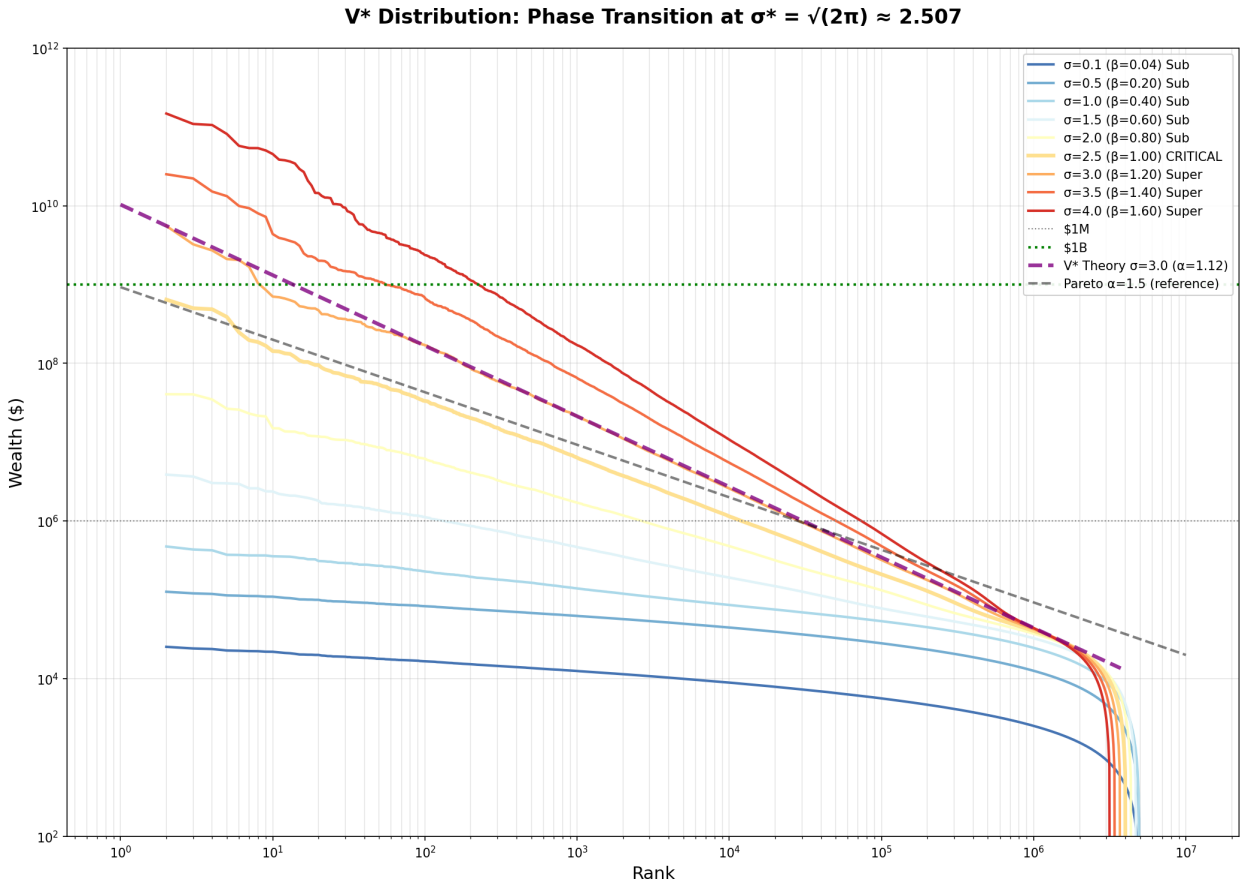


图 3：模拟与 V* 理论：不同波动率区制下的排名—财富分布。彩色线条显示从 σ=0.1（蓝色）到 σ=4.0（红色）的模拟结果。紫色虚线表示 σ=3.0 对应的 V* 理论预测（$\alpha = -\log(p)/\log(\beta_{\text{eff}})$）。超过临界点（$\sigma^* \approx 2.507$）后，模拟分布收敛至理论幂律斜率。

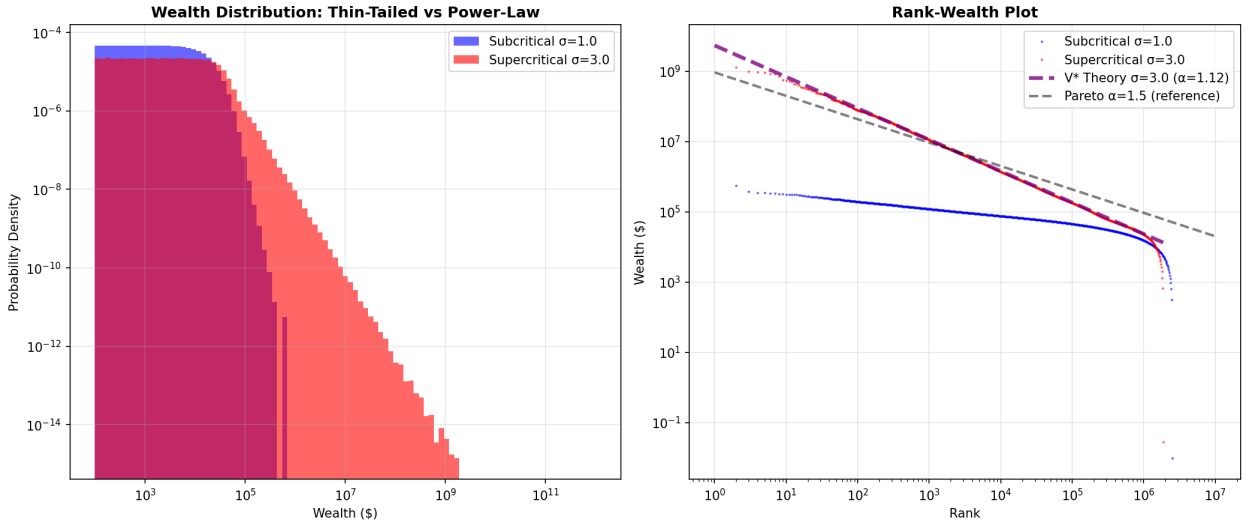


图 4：模拟与 V* 理论：亚临界（σ=2.0，蓝色）与超临界（σ=3.0，红色）财富分布。左：双对数尺度上的概率密度。右：排名-财富图，其中 V* 理论预测（紫色虚线）与超临界模拟结果高度吻合。

σ	β	破产	重大损失 $2k-20k		>$20k	>$50k	>$100k	>$1M	>$10M	>$100M	>$1B	比率
0.10	0.04	5,229,613	3,313,805	1,456,562	20	0	0	0	0	0	0	∞
0.50	0.20	5,045,879	862,558	3,759,334	332,229	4,878	20	0	0	0	0	∞
1.00	0.40	5,054,141	436,565	3,093,118	1,416,176	134,222	4,702	0	0	0	0	∞
1.50	0.60	5,267,191	295,832	2,421,761	2,015,216	360,722	53,688	134	0	0	0	∞
2.00	0.80	5,603,627	225,395	1,960,344	2,210,634	562,968	158,609	2,672	34	1	0	78.6
2.51	1.00	5,957,643	181,984	1,632,383	2,227,990	707,131	275,089	12,076	553	17	1	21.8
3.00	1.20	6,277,439	153,424	1,398,570	2,170,567	794,856	371,871	28,760	2,234	175	8	12.9
3.50	1.40	6,564,826	132,271	1,217,426	2,085,477	845,480	444,779	50,506	5,647	674	54	8.9
4.00	1.60	6,818,493	116,154	1,075,393	1,989,960	870,073	497,072	73,912	10,648	1,602	224	6.9

表 1：展示不同波动率区制下财富分布的模拟结果。“破产” =财富 $<$ \$100，“重大损失” = \$100-\$2,000，“比率” =count(\$1M+) / count(\$10M+)。

7.3 关键观察

低波动性陷阱。在 $\sigma = 0.1$（$\beta = 0.04$）下，令人震惊的是，85% 的参与者要么破产，要么遭受重大损失。这是因为每个期间的预期收益仅为$0.04w$ -，每次迭代的损失率高达 96%。低波动率带来的上行空间不足以弥补 ATV 结构固有的破产风险。1,000 万名参与者中没有产生一位百万富翁。

临界转变。在 $\sigma = 2.507 \approx \sigma^*$，我们观察到 $\beta = 1.00$ ——盈亏平衡点，即预期收益等于当前财富的点。百万富翁与千万富翁的比率急剧下降至

21.8，表明　厚尾的出现。模拟中出现了第一位亿万富翁　　.

超临界幂律。对于 $\sigma > \sigma^*$，比率趋于稳定（21.8 $\to$ 12.9 $\to$ 8.9 $\to$ 6.9），这是幂律行为的典型特征：相邻数量级类别之间的比例变为常数。在 $\sigma = 4.0$ 时，尽管有 70% 的人破产或遭受重大损失，仍涌现出 224 位亿万富翁——这清楚地展现了幂律特有的少数巨额赢家、多数输家分布。

8. 解读与市场影响

8.1 三种状态

无条件 ATM 情形。当所有参与者无论结果如何都继续参与时，参数$\beta = \sigma/\sqrt{2\pi}$ 定义了三种状态：

状态	条件	行为
亚临界	$\sigma < \sqrt{2\pi} \approx 250.66\%$	收敛：每次收益期望值都低于前一次，且总收益有界。 产生薄尾的结果分布。
临界	$\sigma \approx \sqrt{2\pi}$	自相似：每一层都复制上一层。
超临界	$\sigma > \sqrt{2\pi}$	发散：每一层的收益期望值都更高于上一层，且总收益趋于无穷大。

带生存阈值的 V* 情形。 当参与者要求获得最低回报 k_{th} 才会继续时，条件增长因子 $\beta_{\text{eff}} = \sigma \cdot \phi(k_{\text{th}}/\sigma)/p$ 决定了状态：

状态	条件	行为
亚临界	$\beta_{\text{效}} < 1$	收敛：幸存者的增长速度不足以弥补损耗。因此会产生薄尾分布分布。
临界	$\beta_{\text{效}} \approx 1$	自相似：条件增长恰好平衡存活概率。V* 行为随之出现。
超临界	$\beta_{\text{效应}} > 1$	发散：幸存者的增长速度快于总体的衰减速度。产生带有 V* 分布的指数 $\alpha = -\log(p)/\log(\beta_{\text{效应}})$。

V* 框架将平值结果推广开来：对于任何正的生存阈值，临界波动率都会降至 $\sigma^*_{\text{th}} = \sqrt{\pi}/2 \approx 125.3\%$，并随着 k_{th} 增大而进一步下降。因此，即使波动率远低于 σ^*，也可能出现幂律动力学。

8.2 期权之期权的波动率

一个重要的现实世界考量是：期权价值的波动率通常高于标的资产的波动率。这是由于期权收益的凸性（伽马）所致。对于复合期权（期权之期权）而言，这种效应会叠加。

如果将第 n层的波动率记为 σ_n，根据经验我们观察到：

$$\sigma_n > \sigma_{n-1}$$

这意味着在实践中，迭代期权结构往往会加速趋向超临界区间。因此，我们几何机制中的恒定百分比波动率假设是保守的；实际的复合结构可能会比我们的模型预测得更快发散。

8.3 临界时间

在布莱克-斯科尔斯模型中，相关的波动率参数为 $\sigma\sqrt{T}$，其中 σ 是年化波动率，T 是以年为单位的到期时间。对于无条件情形，临界阈值 $\sigma\sqrt{T} = \sqrt{2\pi}$为：

$$T^* = \frac{2\pi}{\sigma^2}$$

对于 V* 情　形，若采用生存阈值，临界阈值将降至 $\sigma\sqrt{T} = \sqrt{\pi/2}$，从而得到　　：

$$T^*_{\text{th}} = \frac{\pi/2}{\sigma^2}$$

年化波动率 σ	T^* （无条件）	T^*_{th} （采用阈值的 V*）
10%	628 年	157 年
20%	157 年	39 年
50%	25 年	6.3 年
100%	6.3 年	1.6 年
150%	2.8 年	8.4 月
200%	1.6 年	4.7 月
250%	1.0 年	3.0 月
300%	8.4 月	2.1 月
400%	4.7 月	1.2 月
500%	3.0月	3.3周
800%	1.2月	1.3周

对于典型的股票波动率（15-30%），无条件临界阈值要数百年后才会达到。但在现实市场中普遍存在的存续阈值下，临界性到来的速度会快四倍。对于隐含波动率高达 400-800% 的迷因股和陷入困境的股票，**V* 临界性会在数周内出现**。

这意味着，对于波动率为 500% 的标的资产，3 个月期平值期权已经处于临界状态——其预期收益结构呈现出第3.3节所述的自相似性质。同一标的资产的 6 个月期期权则处于超临界状态。

一个有趣的观察：早期初创企业的年度估值波动率处于 100-250% 的范围内，融资轮次每 12-24 个月进行一次。在无条件模型下，临界期限为 1-6 年——这使初创企业在典型融资周期内处于临界性之下。然而，在采用存续阈值（$\sigma^*_{\text{th}} \approx 125\%$）后，临界期限降至 3-19 个月——正好处于典型融资周期之内。

风险投资家施加了隐性的存续阈值：初创企业必须展现出足够的进展，才能获得下一轮融资。这种选择性延续——只有超过某个收益阈值 k_{th} 的企业才能存续到下一阶段——创造了条件增长 $\beta_{\text{eff}} > 1$ 即使

在无条件增长 $\beta < 1$时也是如此。风险投资回报众所周知呈幂律分布，因此可能是 V*机制的自然结果：具有选择性存续的迭代期权性，其中每个融资阶段既是生存筛选器，也是对通过筛选者的增长乘数。

8.4 与实际工具的联系

一些现有工具呈现出相关的动态特征：

- **复合期权**（期权之上的期权）：用于公司金融中的分阶段投资和外汇市场。
- **波动率衍生品**：VIX期权是以波动率指数为标的的期权，而该指数本身又源自期权价格——这是一种二阶期权性。
- **杠杆交易所交易基金**：每日再平衡会产生与迭代期望相关的路径依赖复合效应。
- **附带赎回条款的可转换债券**：多个嵌入式期权形成分层期权性。

涉及对多个期权进行平均的工具（例如 VIX衍生品）为扩展该框架提供了一个值得探索的方向。聚合可能会使波动率低于单个工具的波动率，这需要进一步建模，而本文未对此进行探讨。

9. 结论

我们分析了迭代截断高斯期望，并通过无限期权嵌套链这一理论构造加以说明。主要发现如下：

1. 临界波动率阈值为 $\sigma^* = \sqrt{2\pi} \approx 250.66\%$。低于此阈值时，无限期权链的累积价值收敛；高于此阈值时，期权链发散。这是在假设系统处于最大稳定状态这一理想化条件下的稳定性上限。2. 超临界区间意味着期权性可能超过标的资产价值。在市场压力事件期间，这一点具有现实意义，因为隐含波动率可能飙升至 250% 以上。3. 现实中的复合结构往往趋于超临界，因为凸性效应会使期权波动率高于标的资产波动率。现实世界中的波动率放大、杠杆或定价不完善都会导致临界下限降低。4. 在选择性存续的情况下，临界阈值会不连续地降至 $\sigma^*_{\text{th}} = \sqrt{\pi/2} \approx 125.3\%$。我们将由此产生的幂律称为 V* 分布，其特征是存活概率$p = 1 - \Phi(k_{\text{th}}/\sigma)$和条件期望增长 $\beta_{\text{eff}} = \sigma \cdot \phi(k_{\text{th}}/\sigma)/p$。幂律指数 $\alpha = -\log(p)/\log(\beta_{\text{eff}})$可写成闭式表达式。

阈值 $\sigma^* = \sqrt{2\pi}$ 和 $\sigma^*_{\text{th}} = \sqrt{\pi/2}$完全源自高斯截断的几何结构——这些不易察觉的边界将截然不同的经济区间区分开来。

V* 分布提供了一种幂律涌现机制，无需任何特殊假设。在具有截断高斯收益的重复博弈中，存活参与者的数量按 p^n 指数级衰减，而每位幸存者的财富则按 β_{eff}^n 指数级增长。 β_{eff} 的条件性至关重要：它衡量的是在存活条件下的预期增长，而非无条件预期收益。指数级损耗与指数级条件增长的这种相互作用，会产生指数可预测的肥尾。

最后指出一点：虽然衍生品嵌套的字面层层嵌套并不常见，但我们的数学框架所需的假设要弱得多——只需预期收益通过某种迭代结构传递即可。许多常见的金融安排都符合这一条件，却并非明确的衍生品链：贷款和信贷便利（借款人的偿还能力取决于资产价值）、保证金账户和杠杆头寸（维持保证金要求会形成递归依赖），以及紧密关联的金融工具价格（某种工具的价值充当另一种工具的抵押品或参考依据）。这些结构在压力事件期间的相互作用——此时相关性飙升，波动性超出正常范围——可能呈现出与本文分析相似的动态，即使没有正式签订任何期权合约。

此外，该框架并不要求衍生品结构的所有层级同时存在。随时间逐步展开的连续依赖型金融工具——其中每个阶段的收益都会成为下一阶段的标的资产——遵循相同的数学递归。正如我们在模拟中所展示的，V* 分布会从这一过程中稳定地产生，其幂律指数与理论预测相符。因此，我们确定的临界阈值可能不仅适用于奇异衍生品，也有助于理解随时间演变的、具有杠杆且相互关联的金融系统中的系统性行为。

人们或许会想，这个模型能否帮助预测不那么奇异的情形中的不稳定性。黑天鹅事件、肥尾、出乎意料的风险投资回报以及波动率微笑，能否通过将随机游走反馈给自身并检验其是否收敛来预测？

最后，我们想强调的是，我们仍然认为，任何人都不应实际构造无限导数塔。但至少现在我们知道它会在哪里失效了。

附录：符号汇总

符号	定义
$\Phi(z)$	标准正态累积分布函数
$\phi(z)$	标准正态概率密度函数
$g(z)$	$z\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}dt + e^{-z^2/2}$，未归一化的期望整流值
σ	波动率参数
β	$\sigma/\sqrt{2\pi}$，无条件几何比率
σ^*	$\sqrt{2\pi} \approx 2.5066 \approx 250.66\%$，临界波动率（无条件）
σ^*_{th}	$\sqrt{\pi/2} \approx 1.2533 \approx 125.3\%$，临界波动率（具有任意生存阈值）
k_{th}	阈值乘数（最低收益与财富的倍数）
p	每阶段的存活概率，$1-\Phi(k_{\text{th}}/\sigma)$
β_{eff}	条件期望增长因子，$\sigma\cdot\phi(k_{\text{第}}/\sigma)/p$
α	幂律指数，$-\log(p)/\log(\beta_{\text{有效}})$
V^*	V* 分布：$P(V>v)\propto v^{-\alpha}$

代码可用性

仿真代码 an d 补充材料可在以下地址获取：github.com/sci2sci-opensource/researc h

参考文献

布莱克，F. 和 斯科尔斯，M.（1973年）。期权与公司负债的期权定价。《政治经济学杂志》，81(3)，637-654。

格斯克，R.（1979年）。复合期权估值。《金融经济学杂志》，7(1)，63-81。