arXiv:2601.01286v1 [math.AP] 3 Jan 2026

¨边界分数阶阻尼下退化薛定谔方程的稳定性

Fatiha Chouaou and Abbes Benaissa,

偏微分方程分析与控制实验室，吉拉利·利亚贝斯大学，邮政信箱89号，西迪贝勒阿贝斯22000，阿尔及利亚。drchouaou@gmail.com
benaissa_abbes@yahoo.com

摘要

本文研究带有分数阶边界阻尼的退化薛定谔方程的适定性与稳定性。首先，我们建立了退化问题 $\psi_t(x,t) - \imath(\tau(x)\psi_x(x,t))_x = 0$的适定性，其中 $x \in (0,1)$，该问题由狄利克雷—诺伊曼条件控制。随后，利用乘子方法建立了解的指数衰减率和多项式衰减率。

关键词：退化薛定谔方程，指数稳定性与多项式稳定性，半群理论。

$\mathcal{AMS}$ 分类：35B40、35Q41、35P15。

1 引言

本文研究以下系统所表示的分数阶边界阻尼下退化薛定谔方程的适定性和稳定性：

$$
\begin{cases}
\psi_t(x,t) - \imath(\tau(x)\psi_x(x,t))_x = 0, & \text{in } (0,1)\times(0,+\infty),\\
\begin{cases}\psi(0,t)=0 & \text{if } 0 \le m_\tau < 1\\ (\tau(x)\psi_x)(0,t)=0 & \text{if } 1 \le m_\tau < 2\end{cases} & \text{in } (0,+\infty),\\
(\tau\psi_x)(1,t) - \imath\rho\partial^{\tilde{\alpha},\wp}\psi(1,t) = 0 & \text{in } (0,+\infty),\\
\psi(x,0) = \psi_0(x) & \text{on } (0,1),
\end{cases} \tag{1}
$$

其中 $\rho > 0$ 和 $\tau \in \mathcal{C}([0,1]) \cap \mathcal{C}^1([0,1])$ 是满足以下假设的函数：

$$\begin{cases} \tau(x) > 0, \ \forall\, x \in]0,1], \ \tau(0) = 0, \\ \\ m_\tau = \sup\limits_{x<0\leq 1} \dfrac{x|\tau'(x)|}{\tau(x)} < 2, \\ \\ \tau \in \mathcal{C}^{[m_\tau]}([0,1]), \end{cases}$$

其中，$[.]$ 表示整数部分。$\partial^{\tilde{\alpha},\ \wp}$ 表示$0 < \tilde{\alpha} \leq 1$ 阶指数分数阶积分（见 [6]），其定义如下：

$$\partial^{\tilde{\alpha},\wp} w(t) = \begin{cases} w(t) & \text{for } \tilde{\alpha} = 1, \ \wp \geq 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(1-\tilde{\alpha})} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\tilde{\alpha}} e^{-\wp(t-s)} w(s)\, ds, & \text{for } 0 < \tilde{\alpha} < 1, \ \wp \geq 0. \end{cases}$$

我们分析以下两种情况：

当 $m_\tau \in [0,1[$, 时，该问题称为在 0 处弱退化，与 $(1)_1$ 相关的常见边界条件是狄利克雷边界条件 $\psi(0) = 0$。

当 $m_\tau > 1$时，该问题称为在 0 处强退化，与 $(1)_1$ 相关的常见边界条件是诺伊曼边界条件 $(\tau\psi_x)(0) = 0$。

方程 (1) 在非线性光学、等离子体物理、流体力学和量子气体等领域有着广泛的应用。考虑这类阻尼不仅具有数学意义，也与实际应用密切相关。

G. Fibich [10] 指出，阻尼（吸收）项在物理模型中起着重要作用，最好不要忽略。这启发我们考虑 (1)。

许多作者研究了 Schr¨odinger 方程，例如 Machtyngier 和 Zuazua [17], , 他们运用乘子技巧研究 Schr¨odinger 方程的稳定化。他们在 Ω（一个 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开区域）满足某些几何条件时，获得了指数衰减。

Liu 和 Wang [15]采用反步法，通过仅利用位移观测的边界反馈，研究了反稳定 Schr¨odinger 方程的稳定化问题。首先，他们在 $H^1(\Omega)$ 中通过 Neumann 边界阻尼获得了指数稳定性；随后，他们研究了 $L^2(\Omega)$ 中的稳定性，其中阻尼项位于 Ω 边界附近。

Cui、Liu 和 Xu [7] 研究了具有受限边界阻尼的 Schr¨odinger 方程的稳定化。这些稳定性结果与 [11] 和 [22] 中得到的结果类似。

Nicaise 和 Rebiai [19] 获得了具有边界或内部差分型阻尼的 Schr¨ödinger 方程的指数稳定化。最近，Chen、Xie 和 Xu [5] 将 Feng 等人提出的方法 [9]应用于带有内部纯时滞控制的多维 Schr¨ödinger 方程，并实现了指数稳定化。此外，Li、Chen 和 Xie [14] 使用该方法研究了具有输入时滞的 Schr¨ödinger 方程的稳定化问题，并获得了闭环系统具有任意衰减率的指数稳定性。

本文结构如下：第 2 节介绍一些预备知识。第 3 节利用半群理论给出系统 (1) 的适定性结果。第 4 节利用经典乘子法证明指数衰减和多项式衰减。第 5 节说明所得结果是最优的。

2 预备知识

本节将介绍后文中会用到的记号、定义和命题。首先介绍一些加权索 Sobole夫空间：

$H_\tau^1(0,1) = \left\{\psi \in L^2(0,1)\ \psi 在\ (0,1],\ \sqrt{\tau(x)}\psi_x \in L^2(0,1)\right\}$, 上局部绝对连续

$$H_{0,\tau}^1(0,1) = \left\{\psi \in H_\alpha^1(0,1),\ \psi(0) = 0\right\},$$

and

$$H_\tau^2(0,1) = \left\{\psi \in L^2(0,1), \psi \in H_\tau^1(0,1),\ \tau(x)\psi_x \in H^1(0,1)\right\},$$

其中，$H^1(0,1)$ 表示经典 Sobolev 空间。

我们可以定义如下范数

$$|\psi|_{H_{0,\tau}^1(0,1)} = \left(\int_0^1 \tau(x)|\psi_x(x)^2|dx\right)^{1/2}, \quad \forall\ \psi \in H_{0,\tau}^1(0,1),$$

它是在闭子空间 $H_{0,\tau}^1(0,1)$ 上与范数 $H_\tau^1(0,1)$ 等价的范数。

为了在泛函框架中表述方程 (1) 的解的第一分量所满足的边界条件，我们根据 m_τ 的取值定义空间 $W_\tau^1(0,1)$，如下：

$$W_\tau^1(0,1) = \begin{cases} H_{0,\tau}^1(0,1) & \text{if } 0 \le m_\tau < 1, \\ H_\tau^1(0,1) & \text{if } 1 \le m_\tau < 2. \end{cases}$$

2.1 增广模型

本节将方程 (1) 重新表述为一个增广系统。为此，我们需要以下命题。

命题 2.1（见 [18]）设 η 为函数：

$$\eta(\xi) = |\xi|^{(2\tilde{\alpha}-1)/2}, \quad -\infty < \xi < +\infty,\ 0 < \tilde{\alpha} < 1. \tag{2}$$

那么系统的“输入”U与“输出”O之间的关系

$$\partial_t \vartheta(\xi,t) + (\xi^2 + \wp)\vartheta(\xi,t) - U(t)\eta(\xi) = 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \wp \ge 0, t > 0, \tag{3}$$

$$\vartheta(\xi,0) = 0, \tag{4}$$

$$O(t) = (\pi)^{-1}\sin(\tilde{\alpha}\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(\xi)\vartheta(\xi,t)\,d\xi, \tag{5}$$

其中 $U \in C^0([0,+\infty))$，由下式给出

$$O = I^{1-\tilde{\alpha},\wp}U, \tag{6}$$

其中

$$[I^{\alpha,\wp}f](t) = \frac{1}{\Gamma(\tilde{\alpha})}\int_0^t (t-s)^{\tilde{\alpha}-1}e^{-\wp(t-s)}f(s)\,ds.$$

引理 2.1（见 [1]）若 $\lambda \in D_\wp = \mathbb{C}\backslash]-\infty,-\wp]$ 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta^2(\xi)}{\lambda+\wp+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{\sin\tilde{\alpha}\pi}(\lambda+\wp)^{\tilde{\alpha}-1}.$$

现在利用命题 2.1 和关系式 (6)，可将系统 (1) 改写为以下增广系统

$$(P)\qquad \begin{cases} \psi_t(x,t) - \imath(\tau(x)\psi_x(x,t))_x = 0, \\ \vartheta_t(\xi,t) + (\xi^2+\wp)\vartheta(\xi,t) - \psi(1,t)\eta(\xi) = 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad t > 0, \\ \begin{cases} \psi(0,t) = 0 & \text{if } 0 \le m_\tau < 1 \\ (\tau(x)\psi_x)(0,t) = 0 & \text{if } 1 \le m_\tau < 2 \end{cases} \qquad \text{in } (0,+\infty), \\ (\tau\psi_x)(1,t) - \imath\zeta\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(\xi)\vartheta(\xi,t)\,d\xi = 0 \qquad \text{in } (0,+\infty), \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \vartheta(\xi,0) = 0, \end{cases}$$

其中 $\zeta = \rho(\pi)^{-1}\sin(\tilde{\alpha}\pi)$。

此外，将系统 (P) 的总能量定义为

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\psi(x,t)|^2\,dx + \frac{\zeta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\vartheta(\xi,t)|^2\,d\xi. \tag{7}$$

引理 2.2 设 (ψ,ϑ) 是问题 (P) 的正则解。则由 (7) 定义的能量泛函满足

$$E'(t) = -\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\wp)|\vartheta(\xi,t)|^2 d\xi \le 0. \tag{8}$$

证明。将（P）中的第一个方程乘以 $\overline{\psi}$，在 $(0,1)$ 上积分，进行分部积分并利用边界条件，我们得到

$$\int_0^1 \psi_t\overline{\psi}\,dx = -\zeta\int_{\mathbb{R}}\eta(\xi)\vartheta(\xi,t)\,d\xi\overline{\psi}(1,t) - \imath\int_0^1\tau(x)|\psi_x|^2\,dx, \tag{$s1$}$$

将（P）中的第二个方程乘以 $\zeta\overline{\vartheta}$，并在（$-\infty,+\infty$）上积分，得到:

$$\frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}\|\vartheta\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \zeta\int_{\mathbb{R}}(\xi^2+\eta)|\vartheta(\xi,t)|^2\,d\xi - \zeta\Re\int_{\mathbb{R}}\eta(\xi)\,\overline{\vartheta}(\xi,t)d\xi\psi(1,t) = 0. \tag{$s2$}$$

将 $(s1)$ 和 $(s2)$ 的实部相加，即可得到所需结果。

3 适定性

本节的目标是使用半群方法和 Lumer-Philips 定理证明方程 (1) 的适定性结果。

我们在自然状态空间中考虑系统（P）

$$\mathcal{H} = L^2(0,1) \times L^2(\mathbb{R})$$

该空间配备内积

$$\langle U, \widetilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 \psi(x)\overline{\widetilde{\psi}}(x)dx + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(\xi)\overline{\widetilde{\vartheta}}(\xi)\, d\xi$$

对于所有满足 $U = (\psi, \vartheta)^T$ 且 $\widetilde{U} = (\widetilde{\psi}, \widetilde{\vartheta})^T$ 的 U、$\widetilde{U} \in \mathcal{H}$，定义（$P$）的系统算子如下：

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \imath(\tau(x)\psi_x)_x \\ -(\xi^2 + \wp)\vartheta + \eta(\xi)\psi(1) \end{pmatrix}$$

其定义域为

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{c} (\psi, \vartheta) \in \mathcal{H} : \psi \in H^2_\tau(0,1) \cap W^1_\tau(0,1),\ (\tau(x)\psi_x)(1) = \imath\zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi)\vartheta(\xi)\, d\xi \\ -(\xi^2 + \wp)\vartheta + \eta(\xi)\psi(1) \in L^2(\mathbb{R}), |\xi|\vartheta \in L^2(\mathbb{R}) \end{array} \right\}.$$

于是，（P）可在 $\mathcal{H}$ 中写成一个演化方程

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0. \end{array} \right. \tag{9}$$

下面的定理给出了问题 (9) 的解的存在唯一性结果。

定理 3.1 设 $U_0 \in \mathcal{H}$，则存在唯一的解 $U \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$。此外，若$U_0 \in D(\mathcal{A})$，则 $U \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$。

证明
我们采用半群方法。下文将证明 $\mathcal{A}$ 是耗散的。对于任意$U \in D(\mathcal{A})$，利用 (7)、(8) 以及以下事实：

$$E(t) = \frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathcal{H}}, \tag{10}$$

我们有

$$\Re\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \wp)|\vartheta(\xi)|^2 d\xi \leq 0. \tag{11}$$

因此，$\mathcal{A}$ 是耗散的。接下来，我们证明算子 $\lambda I - \mathcal{A}$ 对于 $\lambda > 0$是满射的。给定$F \in \mathcal{H}$，我们证明存在满足以下条件的 $U \in D(\mathcal{A})$：

$$(\lambda I - \mathcal{A})U = F. \tag{12}$$

方程（12）等价于

$$\begin{cases} \lambda\psi - \imath(\tau(x)\psi_x)_x = f_1, \\ \lambda\vartheta + (\xi^2 + \wp)\vartheta - \psi(1)\eta(\xi) = f_2. \end{cases} \tag{13}$$

由 (13)$_2$ 可得 ϑ:

$$\vartheta(\xi) = \frac{\psi(1)\eta(\xi) + f_2(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \wp}. \tag{14}$$

问题 (13) 可改写如下:

$$\int_0^1 (\lambda\psi - \imath(\tau(x)\psi_x)_x)\overline{w}\, dx = \int_0^1 f_1\overline{w}\, dx \quad \forall w \in W_\tau^1(0,1). \tag{15}$$

分部积分可得:

$$\int_0^1 \lambda\psi\overline{w}\, dx + \rho(\lambda + \wp)^{\tilde{\alpha}-1}\psi(1)\overline{w}(1) + \imath\int_0^1 \tau(x)\psi_x\overline{w}_x\, dx = \int_0^1 f_1\overline{w}\, dx - \zeta\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\xi)f_2(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \wp}\, d\xi\overline{w}(1).$$

对所有 $w \in W_\tau^1$(0, 1) 均成立。将方程乘以 $(1-i)$，可得:

$$\begin{aligned}(1-i)\int_0^1 \lambda\psi\overline{w}\, dx + (1-i)\rho(\lambda + \wp)^{\tilde{\alpha}-1}\psi(1)\overline{w}(1) + (1+i)\int_0^1 \tau(x)\psi_x\overline{w}_x\, dx = (1-i)\int_0^1 f_1\overline{w}\, dx \\ -\zeta(1-i)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\xi)f_2(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \wp}\, d\xi\overline{w}(1)\ \forall w \in W_\tau^1(0,1).\end{aligned} \tag{16}$$

问题 (16) 的形式为:

$$\mathcal{L}(\psi, w) = \mathcal{M}(w), \tag{17}$$

其中 $\mathcal{L}$: $[W_\tau^1$(0, 1) $\times W_\tau^1$(0, 1)$] \longrightarrow \mathbb{C}$ 是由下式定义的双线性型:

$$\mathcal{L}(\psi, w) = (1-i)\int_0^1 \lambda\psi\overline{w}\, dx + (1-i)\rho(\lambda + \wp)^{\tilde{\alpha}-1}\psi(1)\overline{w}(1) + (1+i)\int_0^1 \tau(x)\psi_x\overline{w}_x\, dx,$$

以及 $\mathcal{M}$: W_τ^1(0, 1) $\longrightarrow \mathbb{C}$ 是由下式给出的反线性形式

$$\mathcal{M}(w) = (1-i)\int_0^1 f_1\overline{w}\, dx - \zeta(1-i)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\xi)f_2(\xi)}{\lambda + \xi^2 + \wp}\, d\xi\overline{w}(1).$$

容易验证，$\mathcal{L}$ 是连续且强制的，而 $\mathcal{M}$ 是连续的。因此，根据 Lax-Milgram 引理，系统 (17) 存在唯一的解 $\psi \in W_\tau^1$(0, 1)。根据线性椭圆方程的正则性理论可得，$\psi \in H_\tau^2$(0, 1)。因此，对于任意 $\lambda > 0$，算子 $\lambda I - \mathcal{A}$都是满射。于是，利用希尔-吉田定理，即可得出定理 3.1 的结论。

4 渐近稳定性

为了陈述并证明我们的稳定性结果，我们需要以下定理。

定理 4.1 ([2]) 设 $\mathcal{A}$ 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的一致有界 C_0半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 的生成元。若：

(i) $\mathcal{A}$ 在 $i\mathbb{R}$上没有特征值。

(ii) 谱 $\sigma(\mathcal{A})$与 $i\mathbb{R}$ 的交集至多是一个可数集，

则半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 是渐近稳定的，即对于任意$z \in \mathcal{H}$，当 $t \to \infty$ 时，$\|S(t)z\|_{\mathcal{H}} \to 0$ 。

4.1 系统的强稳定性

由于 $\mathcal{A}$ 生成一个压缩半群，并利用 Arendt-Batty 定理（定理 4.1），当 $\mathcal{A}$ 没有纯虚特征值且 $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ 是可数集时，系统 (9) 强稳定。

我们的主要结果如下定理所示：

定理 4.2 C_0-半群 $e^{t\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{H}$中强稳定；也就是说，对于所有 $U_0 \in \mathcal{H}$，(9) 的解满足

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{t\mathcal{A}}U_0\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

为证明定理 4.2，我们需要以下两个引理。

引理 4.1 $\mathcal{A}$ 在 $i\mathbb{R}$上没有特征值。

证明
我们将通过压缩映射进行论证。假设存在 $\lambda \in \mathbb{R}$。
•情形 1： $\lambda > 0$ 和 $U \neq 0$，使得 $\mathcal{A}U = i\lambda U$。于是，我们得到

$$\begin{cases} i\lambda\psi - \imath(\tau(x)\psi_x)_x = 0, \\ i\lambda\vartheta + (\xi^2 + \wp)\vartheta - \psi(1)\eta(\xi) = \end{cases} \tag{18}$$

于是，由 (11) 和 $(18)_2$ ，我们有

$$\vartheta \equiv 0,\ \psi(1) = 0. \tag{19}$$

由边界条件可得

$$\psi_x(1) = 0. \tag{20}$$

我们得到

$$\begin{cases} \lambda\psi - (\tau(x)\psi_x)_x = 0, \\ \psi(1) = \psi_x(1) = 0, \end{cases} \tag{21}$$

将方程 (21)$_1$ 乘以 $\overline{\psi}$，在 (0, 1) 上积分并进行分部积分，可得

$$\lambda\|\psi\|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^1 \tau(x)|\psi_x|^2 dx = 0. \tag{22}$$

由此可得

$$\psi = 0.$$

•情形 2： $\lambda < 0$ 且 $U \neq 0$，使得 $\mathcal{A}U = i\lambda U$。然后，将式 (21)$_1$ 乘以 $-2x\overline{\psi}_x$，在 (0,1) 上积分，分部积分并利用边界条件，我们得到

$$\lambda\|\psi\|^2_{L^2(0,1)} - \int_0^1 \tau(x)|\psi_x|^2 dx + \int_0^1 x\tau'(x)|\psi_x|^2 dx = 0. \tag{23}$$

将 e 相 式 (22) 乘以 $-m_\tau/2$，并将该式与式 (23) 相加，我们得 t

$$\frac{2-m_\tau}{2}\lambda\int_0^1 |\psi|^2\, dx - \int_0^1 \left(\tau(x) - x\tau'(x) + \frac{m_\tau}{2}\tau(x)\right)|\psi_x|^2\, dx = 0. \tag{24}$$

由此可得

$$\psi = 0.$$

•情形 3： $\lambda = 0$ 且 $U \neq 0$，使得 $\mathcal{A}U = 0$。我们得到

$$\begin{cases} (\tau(x)\psi_x)_x = 0, \\ \psi(1) = \psi_x(1) = 0, \end{cases} \tag{25}$$

那么 $\psi_x = 0$ 在 (0, 1) 上，因此 $\psi \equiv 0$。

引理 4.2 我们有

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

证明。

•情形 1： $\lambda \neq 0$。

我们将证明算子 $i\lambda I - \mathcal{A}$ 对于 $\lambda \neq 0$ 是满射。为此，设 $F = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H}$，我们寻求 $U = (\psi, \vartheta)^T \in D(\mathcal{A})$ 的解，使其满足下列方程

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F. \tag{26}$$

等价地，我们有

$$\begin{cases} i\lambda\psi - i(\tau(x)\psi_x)_x = f_1, \\ i\lambda\vartheta + (\xi^2 + \wp)\vartheta - \psi(1)\eta(\xi) = f_2. \end{cases} \tag{27}$$

求解系统 (27) 等价于求取满足以下条件的 $\psi \in H^2_\tau \cap W^1_\tau(0, 1)$：

$$\int_0^1 (\lambda\psi\overline{w} - (\tau(x)\psi_x)_x\overline{w})\, dx = -i\int_0^1 f_1\overline{w}\, dx \tag{28}$$

对所有 $w \in W_\tau^1(0,1)$ 均成立。于是，我们得到

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (\lambda\psi\overline{w} + (\tau(x)\psi_x)\overline{w}_x)\,dx - i\rho(i\lambda+\wp)^{\tilde{\alpha}-1}\psi(1)\ \overline{w}(1) \\ \quad = -i\displaystyle\int_0^1 f_1\overline{w}\,dx + i\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta(\xi)}{\xi^2+\wp+i\lambda}f_2(\xi)\overline{w}\,d\xi\,. \end{cases} \tag{29}$$

请注意,

$$-i\rho(i\lambda+\wp)^{\tilde{\alpha}-1} = -i\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta(\xi)^2}{(\xi^2+\wp)^2+\lambda^2}\,d\xi - \zeta\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta(\xi)^2}{(\xi^2+\wp)^2+\lambda^2}\,d\xi.$$

若 $\lambda < 0$，则可将 (29) 改写为

$$-(\mathcal{L}_\lambda\psi, w)_{W_\tau^1} + (\psi, w)_{W_\tau^1} = \mathcal{M}(w) \tag{30}$$

其中内积定义为

$$\begin{aligned}(\psi, w)_{W_\tau^1} = \int_0^1 \tau(x)\psi_x\overline{w}_x\,dx - \zeta\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta(\xi)^2}{(\xi^2+\wp)^2+\lambda^2}\,d\xi\psi(1)\ \overline{w}(1) \\ -i\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta(\xi)^2}{(\xi^2+\wp)^2+\lambda^2}\,d\xi\psi(1)\ \overline{w}(1)\end{aligned}$$

and

$$(\mathcal{L}_\lambda\psi, w)_{W_\tau^1} = -\int_0^1 \lambda\psi\overline{w}\,dx.$$

利用从 $L^2(0,1)$ 到 $W_\tau^{-1}(0,1)$ 以及从 $W_\tau^1(0,1)$ 到 $L^2(0,1)$ 的紧嵌入，我们可推得算子 $\mathcal{L}_\lambda$ 从 $L^2(0,1)$ 到 $L^2(0,1)$ 是紧的。因此，根据 Fredholm 二择一，证明 (27) 存在解 ψ，归结为证明 1 不是 $\mathcal{L}_\lambda$ 的特征值。事实上，若 1 是特征值，则存在 $\psi \neq 0$，使得

$$(\mathcal{L}_\lambda\psi, w)_{W_\tau^1} = (\psi, w)_{W_\tau^1} \quad \forall w \in W_\tau^1. \tag{31}$$

特别地，对于 $w = \psi$，可得

$$-\lambda\|\psi(x)\|^2_{L^2(0,1)} + i\rho(i\lambda+\wp)^{\tilde{\alpha}-1}|\psi(1)|^2 = \|\sqrt{\tau(x)}\psi_x(x)\|^2_{L^2(0,1)}.$$

因此，我们有

$$\psi(1) = 0. \tag{32}$$

由（31）可得

$$(\tau\psi_x)(1) = 0 \tag{33}$$

Then

$$\begin{cases} \lambda\psi - (\tau(x)\psi_x)_x = 0 \text{ on } (0,1), \\ \begin{cases} \psi(0) = 0 & \text{if } m_\tau \in [0,1) \\ (\tau(x)\psi_x)(0) = 0 & \text{if } m_\tau \in [1,2) \end{cases} \\ \psi(1) = 0,\ \psi_x(1) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

由此可推得 $U = 0$。

若 $\lambda > 0$，我们可以将 (29) 改写为

$$-(\mathcal{L}_\lambda \psi, w)_{W_\tau^1} + (\psi, w)_{W_\tau^1} = \mathcal{M}(w), \tag{35}$$

其中内积定义为

$$(\psi, w)_{W_\tau^1} = \int_0^1 \tau(x)\psi_x \overline{w}_x \, dx + \int_0^1 \lambda \psi \overline{w} \, dx - i\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\xi)^2}{(\xi^2 + \wp)^2 + \lambda^2} \, d\xi \psi(1) \, \overline{w}(1).$$

and

$$(\mathcal{L}_\lambda \psi, w)_{W_\tau^1} = \zeta\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\xi)^2}{(\xi^2 + \wp)^2 + \lambda^2} \, d\xi \psi(1) \, \overline{w}(1).$$

类似地，我们证明 $U = 0$。

•情形 2： $\lambda = 0$ 和 $\wp \neq 0$。

系统 (27) 可化为以下系统

$$\begin{cases} -(\tau(x)\psi_x)_x = -if_1, \\ (\xi^2 + \wp)\vartheta - \psi(1)\eta(\xi) = f_2. \end{cases} \tag{36}$$

求解系统 (36) 等价于求出满足以下条件的 $\psi \in W_\tau^1(0, 1)$

$$-\int_0^1 (\tau(x)\psi_x)_x \overline{w} \, dx = -i \int_0^1 f_1 \overline{w} \, dx \tag{37}$$

对所有 $w \in W_\tau^1(0, 1)$，于是我们得到

$$\int_0^1 \tau(x)\psi_x \overline{w}_x \, dx - i\rho\wp^{\alpha-1}\psi(1)\overline{w}(1) = -i \int_0^1 f_1 \overline{w} \, dx + i\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\xi) f_2(\xi)}{\xi^2 + \wp} \, d\xi \overline{w}(1). \tag{38}$$

将该方程乘以 $(1 + i)$，可得

$$\begin{aligned} (1+i)\int_0^1 \tau(x)\psi_x \overline{w}_x \, dx - (1+i)i\rho\wp^{\alpha-1}\psi(1)\overline{w}(1) &= -i(1+i)\int_0^1 f_1 \overline{w} \, dx \\ &+ i(1+i)\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\xi) f_2(\xi)}{\xi^2 + \wp} \, d\xi \overline{w}(1). \end{aligned} \tag{39}$$

因此，(39) 等价于以下问题

$$\mathcal{L}(\psi, w) = \mathcal{M}(w), \tag{40}$$

其中，双线性形式 $\mathcal{L}: W_\tau^1(0, 1) \times W_\tau^1(0, 1) \to \mathbb{C}$ 和线性形式 $\mathcal{M}: W_\tau^1(0, 1) \to \mathbb{C}$ 定义如下：

$$\mathcal{L}(\psi, w) = (1+i)\int_0^1 \tau(x)\psi_x \overline{w}_x \, dx - (1+i)i\rho\wp^{\alpha-1}\psi(1)\overline{w}(1) \tag{41}$$

and

$$\mathcal{M}(w) = -i(1+i)\int_0^1 f_1 \overline{w} \, dx + i(1+i)\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\xi) f_2(\xi)}{\xi^2 + \wp} \, d\xi \overline{w}(1).$$

容易验证， $\mathcal{L}$ 是连续且强制的，而 $\mathcal{M}$ 是连续的。因此，根据 Lax-Milgram 定理可知，对于所有 $w \in W_\tau^1(0,1)$，问题 (40) 都存在唯一解$\psi \in W_\tau^1(0,1)$。由经典椭圆正则性可从 (39) 得出 $\psi \in H_\tau^2(0,1)$。因此，算子 $\mathcal{A}$ 是满射。

$\diamondsuit$

4.2 稳定性

本节将研究系统 (9) 的解的指数衰减。为此，我们将使用以下定理。接下来，为了证明多项式衰减率，我们将使用以下定理。

定理 4.3 [3] 设 $\mathcal{A}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{X}$上的强连续压缩半群 $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ 的生成元。若

$$\imath\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \tag{42}$$

其中 $\rho(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$的预解集，那么对于固定的 $l > 0$，以下条件等价：

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \frac{1}{\beta^l} \|(\imath\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < \infty$$

若对某个 l成立，则存在 c 使得

$$\|e^{\mathcal{A}t} V_0\|^2 \leq \frac{c}{t^{\frac{2}{l}}} \|V_0\|^2_{D(\mathcal{A})}.$$

我们的主要结果如下。

Th定理 4.4 若 $\wp \neq 0$，则半群 $(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t))_{t\geq 0}$ 是多项式稳定的 d

$$E(t) = \|S_{\mathcal{A}}(t) V_0\|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{c}{t^{\frac{2}{1-\tilde{\alpha}}}} \|V_0\|^2_{D(\mathcal{A})}.$$

此外，对于 $D(\mathcal{A})$ 中的一般初始数据，能量衰减速率 $t^{\frac{2}{1-\tilde{\alpha}}}$ 是尖锐的。

证明。我们需要研究预解方程 $(i\lambda - \mathcal{A})U = F$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$，即

$$\begin{cases} i\lambda\psi - \imath(\tau(x)\psi_x)_x = f_1, \\ i\lambda\vartheta + (\xi^2 + \wp)\vartheta - \psi(1)\eta(\xi) = f_2. \end{cases} \tag{43}$$

我们的目标是证明存在 C 使得

$$\|(\imath\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < C|\lambda|^{1-\tilde{\alpha}}.$$

在 $\mathcal{H}$ 中与 u 取内积，并利用（11），可得

$$|Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle| \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{44}$$

这意味着

$$\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \wp)|\vartheta(\xi)|^2 d\xi \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{45}$$

将 $(43)_2$ 乘以 $(i\lambda + \xi^2 + \wp)^{-2}|\xi|$，得到

$$(i\lambda + \xi^2 + \wp)^{-2}\psi(1)\eta(\xi)|\xi| = (i\lambda + \xi^2 + \wp)^{-1}|\xi|\vartheta - (i\lambda + \xi^2 + \wp)^{-2}|\xi| f_2(\xi). \tag{46}$$

因此，对 (46) 两边取绝对值，在区间 $]-\infty, +\infty[$ 上关于变量 ξ 积分，并应用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\mathcal{R}|\psi(1)| \leq \sqrt{2}\mathcal{P}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\vartheta|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} + 2\mathcal{Q}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{47}$$

其中

$$\mathcal{R} = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (i\lambda + \xi^2 + \wp)^{-2}|\xi|\eta(\xi)\, d\xi\right| = \frac{|1 - 2\tilde{\alpha}|}{4} \frac{\pi}{|\sin\frac{(2\tilde{\alpha}+3)}{4}\pi|} |i\lambda + \wp|^{\frac{(2\tilde{\alpha}-5)}{4}},$$

$$\mathcal{P} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (|\lambda| + \xi^2 + \wp)^{-2} \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = (\frac{\pi}{2})^{1/2} ||\lambda| + \wp|^{-\frac{3}{4}},$$

$$\mathcal{Q} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (|\lambda| + \xi^2 + \wp)^{-4}|\xi|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi}{16}||\lambda| + \wp|^{-\frac{5}{2}}\right)^{1/2}.$$

我们推得

$$|\psi(1)|^2 \leq c|\lambda|^{1-\tilde{\alpha}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{48}$$

我们将使用经典乘子法。将方程 (43) 乘以 $\overline{\psi}$，在 (0, 1) 上积分并分部积分，得到

$$\lambda\|\psi\|^2_{L^2(0,1)} - \left[\tau(x)\psi_x\overline{\psi}\right]_0^1 + \int_0^1 \tau(x)|\psi_x|^2 dx = -\imath \int_0^1 f_1\overline{\psi} dx. \tag{49}$$

若 $\lambda > 0$ 足够大，则由 (49) 和 (48) 可得

$$\begin{aligned}
\lambda\|\psi\|^2_{L^2(0,1)} &\leq \|f_1\|_{L^2(0,1)}\|\psi\|_{L^2(0,1)} + |(\tau(x)\psi_x)(1)||\overline{\psi}(1)| \\
&\leq \|f_1\|_{L^2(0,1)}\|\psi\|_{L^2(0,1)} + \zeta|\int_{\mathbb{R}} \eta(\xi)\vartheta(\xi)\, d\xi||\overline{\psi}(1)| \\
&\leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + c(\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}})^{1/2}(|\lambda|^{\frac{1-\tilde{\alpha}}{2}}(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}})^{1/2} + c\|F\|_{\mathcal{H}}). \\
&\leq c\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + c|\lambda|^{\frac{1-\tilde{\alpha}}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

因此，我们推导出

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{\lambda}\|F\|^2_{\mathcal{H}}.$$

现在，若 $\lambda < 0$ 较大，我们将 (43) 乘以 $-2x\overline{\psi}_x$，在 (0,1) 上积分，并分部积分，得到

$$\begin{aligned}
-\lambda\left[x|\psi|^2\right]_0^1 \;+\; & \lambda\|\psi\|^2_{L^2(0,1)} + 2\left[\tau(x)|\psi_x|^2 x\right]_0^1 - 2\int_0^1 \tau(x)|\psi_x|^2 dx - \left[x\tau(x)|\psi_x|^2\right]_0^1 \\
+\; & \int_0^1 \tau(x)|\psi_x|^2 dx + \int_0^1 x\tau'(x)|\psi_x|^2 dx = 2\Re\; i\int_0^1 f_1 x\overline{\psi}_x dx.
\end{aligned}$$

将 (49) 乘以 $-\frac{m_\tau}{2}$，与上一个方程相加并取实部，得到

$$\begin{aligned}\lambda\left(1-\frac{m_\tau}{2}\right)\|\psi\|^2_{L^2(0,1)} &- \int_0^1\left(\tau(x)-x\tau'(x)+\frac{m_\tau}{2}\tau(x)\right)|\psi_x|^2dx-\lambda\left[x|\psi^2|\right]_0^1+\left[x\tau(x)|\psi_x|^2\right]_0^1\\ &+\frac{m_\tau}{2}\left[\tau(x)\psi_x\overline{\psi}\right]_0^1=2\imath\Re\int_0^1 f_1x\overline{\psi}_xdx+\frac{m_\tau}{2}\imath\int_0^1 f_1\overline{\psi}dx.\end{aligned}$$

此外

$$\int_0^1 x^2|\psi_x|^2\,dx\le\int_0^1 x^{m_\tau}|\psi_x|^2\,dx\le\frac{1}{\tau(1)}\int_0^1\tau(x)|\psi_x|^2\,dx$$

Then

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f_1x\overline{\psi}_x\,dx\right| &\le \|f_1\|_{L^2(0,1)}\|x\psi_x\|_{L^2(0,1)}\\ &\le \frac{1}{\sqrt{\tau(1)}}\|f_1\|_{L^2(0,1)}\|\sqrt{\tau(x)}\psi_x\|_{L^2(0,1)}\\ &\le c(\varepsilon)\|f_1\|^2_{L^2(0,1)}+\varepsilon\|\sqrt{\tau(x)}\psi_x\|^2_{L^2(0,1)}\\ &\le c(\varepsilon)\|F\|^2_{\mathcal{H}}+\varepsilon\|\sqrt{\tau(x)}\psi_x\|^2_{L^2(0,1)}\end{aligned}$$

因此，我们推导得

$$\begin{aligned}&-\lambda\left(1-\tfrac{m_\tau}{2}\right)\|\psi\|^2_{L^2(0,1)}+\int_0^1\left(\tau(x)-x\tau'(x)+\frac{m_\tau}{2}\tau(x)\right)|\psi_x|^2dx=-\lambda|\psi(1)|^2\\ &+\frac{1}{\tau(1)}|\tau(1)\psi_x(1)|^2+\frac{m_\tau}{2}(\tau(1)\psi_x(1)\overline{\psi}(1))-2\imath\Re\int_0^1 f_1x\overline{\psi}_xdx-\frac{m_\tau}{2}\imath\int_0^1 f_1\overline{\psi}dx.\end{aligned}\tag{50}$$

因此，存在 c_1、 c_2 和 c_3，使得

$$\begin{aligned}&|\lambda|\left(1-\tfrac{m_\tau}{2}\right)\|\psi\|^2_{L^2(0,1)}+\textstyle\int_0^1\left(\tau(x)-x\tau'(x)+\frac{m_\tau}{2}\tau(x)\right)|\psi_x|^2dx\le\\ &c|\lambda|(|\lambda|^{1-\tilde{\alpha}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+c\|F\|^2_{\mathcal{H}})+c(\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}})^{1/2}(|\lambda|^{\frac{1-\tilde{\alpha}}{2}}(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}})^{1/2}+c\|F\|_{\mathcal{H}})\\ &+c\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+c\|F\|_{\mathcal{H}}\|\sqrt{\tau(x)}\psi_x\|_{L^2(0,1)}\end{aligned}$$

根据 m_τ 的定义，我们有

$$\frac{(2-m_\tau)}{2}\tau\le(\tau-x\tau')+\frac{m_\tau}{2}\tau$$

Then

$$\begin{aligned}&\|\psi\|^2_{L^2(0,1)}\le c|\lambda|^{1-\tilde{\alpha}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+c|\lambda|^{-\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &+\frac{c}{|\lambda|}(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}})^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|}\|F\|^2_{\mathcal{H}}+c\|F\|^2_{\mathcal{H}}\\ &\le c|\lambda|^{1-\tilde{\alpha}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+c'\|F\|^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

由于 ($\wp>0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\vartheta(\xi)|^2\,d\xi\le\frac{1}{\wp}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\wp)|\vartheta(\xi)|^2\,d\xi\le C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

因此
(51) $$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c|\lambda|^{1-\tilde{\alpha}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Then

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq c|\lambda|^{1-\tilde{\alpha}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

因此，对于较大的 λ

$$\|(\imath\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} < C|\lambda|^{1-\tilde{\alpha}}\|F\|_{L^2(0,1)}.$$

因此

$$\|(\imath\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < C|\lambda|^{1-\tilde{\alpha}}.$$

结论由定理 4.3 可得。

5 能量衰减的最优性

本节将研究系统 (9) 的解不呈指数衰减这一性质。为此，我们将使用以下定理。

引理 5.1 [20] 设 $S(t)$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{X}$ 上的压缩映射 C_0-半群，其生成元为$\mathcal{A}$。那么，当且仅当 $S(t)$ 指数稳定时，

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{\imath\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv \imath\mathbb{R}$$

and

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}}\|(\imath\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < \infty.$$

我们的主要结果如下。

定理 5.1 由算子 $\mathcal{A}$ 生成的半群并非指数稳定 *le.*

证明。我们考虑 $\tau(x) = x^\alpha, 0 < \alpha < 1$ 的情形。我们旨在证明， $\mathcal{A}$ 的无穷多个特征值趋近于虚轴，从而阻止系统（9）达到指数稳定。设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，并设其对应的特征向量为 U。那么方程 $\mathcal{A}U = \lambda U$ 等价于

$$\imath\lambda\psi + (x^\alpha\psi_x)_x = 0$$

以及条件

$$\begin{cases} \psi_x(1) = \imath\rho(\lambda + \wp)^{\tilde{\alpha}-1}\psi(1), \\ \psi(0) = 0, \end{cases}$$

因此，我们得到以下系统

(52) $$\begin{cases} \gamma^2\psi - (x^\alpha\psi_x)_x = 0, \\ \psi_x(1) = \imath\rho(\lambda + \wp)^{\tilde{\alpha}-1}\psi(1), \\ \psi(0) = 0, \end{cases}$$

其中 $\gamma^2 = -\imath\lambda$。

设 v 是（52）的一个解$_1$, ，则由下式定义的函数 Ψ

$$v(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}}\Psi\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\gamma x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)$$

是下列方程的一个解

$$y^2\Psi''(y) + y\Psi'(y) + \left(y^2 - \left(\frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)^2\right)\Psi(y) = 0. \tag{53}$$

我们有

$$\psi(x) = c_+\widetilde{\theta}_+(x) + c_-\widetilde{\theta}_-(x) \tag{54}$$

其中

$$\widetilde{\theta}_+(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}}J_{\nu_\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\gamma x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right) \quad \text{and} \quad \widetilde{\theta}_-(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}}J_{-\nu_\alpha}\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\gamma x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right).$$

$\psi(0) = 0$，则 $c_-d^- = 0$，于是 $c_- = 0$。因此

$$\psi(x) = c_+\widetilde{\theta}_+(x).$$

因此，边界条件可以写成如下系统

$$c_+\widetilde{\theta}'_+(1) = \imath\rho(\lambda+\wp)^{\tilde{\alpha}-1}c_+\widetilde{\theta}_+(1).$$

那么，当且仅当存在一个非平凡解 u

$$f(\gamma) = (1-\alpha)J_{\nu_\alpha}\left(\frac{2\gamma}{2-\alpha}\imath\right) - \imath\gamma J_{1+\nu_\alpha}\left(\frac{2\gamma}{2-\alpha}\imath\right) - i\rho(\lambda+\wp)^{\tilde{\alpha}-1}J_{\nu_\alpha}\left(\frac{2\gamma}{2-\alpha}\imath\right) = 0.$$

我们的目的是借助 Rouch´e 定理证明，存在一个特征值子序列，其实部趋于 0。

接下来，由于 $\mathcal{A}$ 是耗散的，我们研究条带 $-\alpha_0 \leq \Re(\lambda) \leq 0$内大特征值$\lambda$ 的渐近行为，其中 $\mathcal{A}$ ，当 $\alpha_0 > 0$ 充分大且满足此类 λ时，我们注意到 θ_+ 和 θ_- 保持有界。

引理 5.2 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\{\lambda_k\}_{k\in\mathbf{Z}^*,\ |k|\geq N} \subset \sigma(\mathcal{A}),$$

其中

- 如果 $1 \geq \tilde{\alpha} > \frac{1}{2}$，那么

$$\lambda_k = -i\left[C_0^2(k\pi)^2 + C_1^2\pi^2 + 2C_0C_1k\pi^2 + 2C_0C_2\right] - 2i^{1-\tilde{\alpha}}\frac{C_0C_3}{(k\pi)^{2-2\tilde{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{k^{2-2\tilde{\alpha}}}\right),$$

其中

$$C_0 = -\frac{2-\alpha}{2}, C_1 = -\frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{\nu_\alpha}{2}+\frac{5}{4}\right),$$
$$C_2 = \frac{(2-\alpha)}{4}\left((\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha) - \frac{4(1-\alpha)}{(2-\alpha)}\right)$$

and

$$C_3 = -\rho\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{2-2\tilde{\alpha}}.$$

• 若 $\tilde{\alpha} < \frac{1}{2}$，则

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \imath\gamma_k^2 \\ &= -i\left[C_0^2(k\pi)^2 + C_1^2\pi^2 + 2C_0C_1k\pi^2 + 2C_0C_2 + 2\frac{C_0C_3}{k} + 2\frac{C_1C_2}{k}\right] \\ &\quad -2i^{1-\tilde{\alpha}}\frac{C_0C_4}{(k\pi)^{2-2\tilde{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{k^{2-2\tilde{\alpha}}}\right).\end{aligned}$$

其中

$$C_0 = -\frac{2-\alpha}{2}, C_1 = -\frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{\nu_\alpha}{2}+\frac{5}{4}\right),$$
$$C_2 = \frac{(2-\alpha)}{4}\left((\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha) - \frac{4(1-\alpha)}{(2-\alpha)}\right)$$
$$C_3 = -\frac{2-\alpha}{4}\left(-\frac{(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha)}{4}(2-\alpha)+(1-\alpha)\right)\frac{2C_1}{C_0^2}.$$

and

$$C_4 = -\rho\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{2-2\tilde{\alpha}}.$$

and

$$\lambda_k = \overline{\lambda_{-k}},\ \textit{if } k \le -N.$$

证明。对于所有 $\delta > 0$，且当 $|\arg z| < \pi - \delta$ 时，我们将使用以下经典展开（参见 [**13**]）：

$$\begin{aligned}J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\Bigg[&\cos\left(z-\nu\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right) - \frac{(\nu-\frac{1}{2})(\nu+\frac{1}{2})}{2}\frac{\sin\left(z-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{z} \\ &-\frac{(\nu-\frac{1}{2})(\nu+\frac{1}{2})(\nu-\frac{3}{2})(\nu+\frac{3}{2})}{8}\frac{\cos\left(z-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{z^2} + O\left(\frac{1}{|z|^3}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{55}$$

我们得到

$$f(\gamma) = -\imath\gamma\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}}{2}\tilde{f}(\gamma),$$

其中

$$z = \frac{2\gamma}{2-\alpha}\imath$$

and

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\gamma) &= 1 + e^{2\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} - \frac{(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha)}{2i}\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\right)^{-1}\frac{e^{2\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}-1}{\gamma} \\
&- \frac{1-\alpha}{i\gamma}(e^{\imath(2z-\nu_\alpha\pi-\pi)}+e^{-i\frac{\pi}{2}}) + \frac{\rho}{\gamma}\lambda^{\tilde{\alpha}-1}(e^{\imath(2z-\nu_\alpha\pi-\pi)}+e^{-i\frac{\pi}{2}}) \\
&- \frac{(\nu_\alpha+\frac{1}{2})(\nu_\alpha+\frac{3}{2})(\nu_\alpha-\frac{1}{2})(\nu_\alpha+\frac{5}{2})}{8}\frac{1+e^{2\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}}{z^2} \\
&- \frac{1-\alpha}{i\gamma}\frac{(\frac{1}{2}-\nu_\alpha)(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)}{2}\frac{(e^{\imath(2z-\nu_\alpha\pi-\pi)}-e^{-i\frac{\pi}{2}})}{iz} \\
&= f_0(\gamma) + \frac{f_1(\gamma)}{\gamma} + \frac{f_2(\gamma)}{\gamma^{3-2\tilde{\alpha}}} + \frac{f_3(\gamma)}{\gamma^2} + O\left(\frac{1}{\gamma^3}\right) + O\left(\frac{1}{\gamma^{4-2\tilde{\alpha}}}\right)
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
f_0(\gamma) &= 1 + e^{2\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}, \\
f_1(\gamma) &= -\frac{(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha)}{2i}\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\right)^{-1}(e^{2\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}-1) - \frac{1-\alpha}{i}(e^{\imath(2z-\nu_\alpha\pi-\pi)}+e^{-i\frac{\pi}{2}}), \\
f_2(\gamma) &= \rho i^{\tilde{\alpha}-1}(e^{\imath(2z-\nu_\alpha\pi-\pi)}+e^{-i\frac{\pi}{2}}). \\
f_3(\gamma) &= -\frac{(\nu_\alpha+\frac{1}{2})(\nu_\alpha+\frac{3}{2})(\nu_\alpha-\frac{1}{2})(\nu_\alpha+\frac{5}{2})}{8}\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\right)^{-2}(1+e^{2\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}) \\
&\quad + \frac{1-\alpha}{\gamma}\frac{(\frac{1}{2}-\nu_\alpha)(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)}{2}\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\right)^{-1}(e^{\imath(2z-\nu_\alpha\pi-\pi)}-e^{-i\frac{\pi}{2}}),
\end{aligned}$$

注意到， f_0、 f_1、 f_2 和 f_3 在条带 $-\alpha_0 \le \Re(\lambda) \le 0$中保持有界。

情形 1： $\tilde{\alpha} > \frac{1}{2}$。

我们求 f_0的根,

$$f_0(\gamma) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + e^{2\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} = 0,$$

因此， f_0 有以下根

$$\gamma_k^0 = -\frac{2-\alpha}{2}\imath\left(k + \frac{\nu_\alpha}{2} + \frac{5}{4}\right)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

令 $B_k(\gamma_k^0, r_k)$ 为中心为 γ_k^0、半径为 $r_k = \frac{1}{\sqrt{|k|}}$的球，则若 $\gamma \in \partial B_k$，有 $\gamma = \gamma_k^0 + r_k e^{\imath\theta}$、$\theta \in [0, 2\pi]$，于是有

$$f_0(\gamma) = \frac{4}{2-\alpha}r_k e^{\imath\theta} + o(r_k^2).$$

因此，存在一个正常数 c，使得对于所有 $\gamma \in \partial B_k$

$$|f_0(\gamma)| \geq cr_k = \frac{c}{\sqrt{k}}.$$

根据 f 的表达式，我们得出

$$|\widetilde{f}(\gamma) - f_0(\gamma)| = O\left(\frac{1}{\gamma}\right) = O\left(\frac{1}{k}\right),$$

于是，当 k 足够大时，对所有 $\gamma \in \partial B_k$

$$|\widetilde{f}(\gamma) - f_0(\gamma)| < |f_0(\gamma)|.$$

˜利用 Rouch´e 定理，我们推得 f 和 f_0 在 B_k中具有相同数量的零点。˜因此，存在 f 的一个根子序列趋于 f_0 的根 γ_k^0 ；于是存在 $N \in \mathbb{N}$ 和 $f(\gamma)$ 的一个根子序列 $\{\gamma_k\}_{|k|\geq N}$，使得 $\gamma_k = \gamma_k^0 + o(1)$ 趋于 f_0 的根 $-\frac{2-\alpha}{2}\imath\left(k + \frac{\nu_\alpha}{2} + \frac{5}{4}\right)\pi$。

现在，我们可以写成

$$\gamma_k = -\frac{2-\alpha}{2}\imath\left(k + \frac{\nu_\alpha}{2} + \frac{5}{4}\right)\pi + \varepsilon_k, \tag{56}$$

then

$$\begin{aligned} e^{2\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} &= -e^{-\frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k} \\ &= -1 + \frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k + O(\varepsilon_k^2). \end{aligned}$$

˜利用前一个方程以及 $f(\gamma_k) = 0$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(\gamma_k) &= \frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k - \frac{(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha)}{2i}\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\right)^{-1}\frac{(-2)}{\left(-\frac{2-\alpha}{2}\imath k\pi\right)} \\ &- \frac{1-\alpha}{i}\frac{(-2i)}{\left(-\frac{2-\alpha}{2}\imath k\pi\right)} + O(\varepsilon_k^2) + O\left(\frac{\varepsilon_k}{k}\right) + O\left(\frac{1}{k^{3-2\tilde{\alpha}}}\right) = 0. \end{aligned}$$

因此

$$\varepsilon_k = i\frac{(2-\alpha)}{4}\left((\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha) - \frac{4(1-\alpha)}{(2-\alpha)}\right)\frac{1}{k\pi} + O(\varepsilon_k^2) + O\left(\frac{\varepsilon_k}{k}\right) + O\left(\frac{1}{k^{3-2\tilde{\alpha}}}\right),$$

我们可以写成

$$\gamma_k = -\frac{2-\alpha}{2}\imath\left(k + \frac{\nu_\alpha}{2} + \frac{5}{4}\right)\pi + i\frac{(2-\alpha)}{4}\left((\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha) - \frac{4(1-\alpha)}{(2-\alpha)}\right)\frac{1}{k\pi} + \tilde{\varepsilon}_k, \tag{57}$$

其中 $\tilde{\varepsilon}_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$。将 (57) 代入 $\tilde{f}(\gamma_k) = 0$, 得到

$$\tilde{f}(\gamma_k) = \frac{4}{2-\alpha}\tilde{\varepsilon}_k + \rho i^{\tilde{\alpha}-1}\frac{(-2i)}{\left(-\frac{2-\alpha}{2}\imath k\pi\right)^{3-2\tilde{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) + O(\tilde{\varepsilon}_k^2) = 0.$$

因此

$$\tilde{\varepsilon}_k = -\rho i^{1-\tilde{\alpha}}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{2-2\tilde{\alpha}}\frac{1}{(k\pi)^{3-2\tilde{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{k^{3-2\tilde{\alpha}}}\right).$$

由此可得

$$\gamma_k = -\tfrac{2-\alpha}{2}\imath\left(k + \tfrac{\nu_\alpha}{2} + \tfrac{5}{4}\right)\pi + i\frac{(2-\alpha)}{4}\left((\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha) - \frac{4(1-\alpha)}{(2-\alpha)}\right)\frac{1}{k\pi}$$
$$-\rho i^{1-\tilde{\alpha}}\left(\tfrac{2}{2-\alpha}\right)^{2-2\tilde{\alpha}}\frac{1}{(k\pi)^{3-2\tilde{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{k^{3-2\tilde{\alpha}}}\right).$$

由于 $\gamma_k^2 = -\imath\lambda_k$, 因此

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \imath\gamma_k^2 \\
&= \imath\left[-C_0^2(k\pi)^2 - C_1^2\pi^2 - 2C_0C_1k\pi^2 - 2C_0C_2 + 2i^{2-\tilde{\alpha}}\frac{C_0C_3}{(k\pi)^{2-2\tilde{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{k^{2-2\tilde{\alpha}}}\right)\right] \\
&= -i\left[C_0^2(k\pi)^2 + C_1^2\pi^2 + 2C_0C_1k\pi^2 + 2C_0C_2\right] - 2i^{1-\tilde{\alpha}}\frac{C_0C_3}{(k\pi)^{2-2\tilde{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{k^{2-2\tilde{\alpha}}}\right).
\end{aligned}$$

其中

$$C_0 = -\frac{2-\alpha}{2}, C_1 = -\frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{\nu_\alpha}{2} + \frac{5}{4}\right),$$
$$C_2 = \frac{(2-\alpha)}{4}\left((\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha) - \frac{4(1-\alpha)}{(2-\alpha)}\right)$$

and

$$C_3 = -\rho\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{2-2\tilde{\alpha}}.$$

♢

- 情形 2: $\tilde{\alpha} < \frac{1}{2}$。

$$\gamma_k = \gamma_k^0 + \frac{il}{k\pi} + \varepsilon_k,$$

其中 $l = \frac{(2-\alpha)}{4}\left((\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha) - \frac{4(1-\alpha)}{(2-\alpha)}\right)$。然后

$$\begin{aligned}
e^{2\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} + 1 &= 1 - e^{-\frac{4}{2-\alpha}\left(\varepsilon_k + \frac{il}{k\pi}\right)} \\
&= \frac{4}{2-\alpha}\left(\varepsilon_k + \frac{il}{k\pi}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2-\alpha}\right)^2\frac{(il)^2}{(k\pi)^2} + O(\varepsilon_k^2) + O\left(\frac{\varepsilon_k}{k}\right).
\end{aligned}$$

$$e^{2\imath(z-(\nu_\alpha+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}-1 \;=\; -2+\frac{4}{2-\alpha}\frac{il}{k\pi}+O(\varepsilon_k).$$

~利用前一个方程以及 $f(\gamma_k)=0$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\gamma_k) &= \frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k+\frac{4}{2-\alpha}\left(\frac{il}{k\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2-\alpha}\right)^2\frac{(il)^2}{(k\pi)^2}\\
&- \frac{(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha)}{2i}\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\right)^{-1}\frac{(-2+\frac{4}{2-\alpha}\left(\frac{il}{k\pi}\right)+O(\varepsilon_k))}{rk(1+\frac{\tilde{r}}{rk}+\frac{il}{rk^2\pi}+\frac{\varepsilon_k}{k})}\\
&+ \frac{1-\alpha}{i}\frac{\left(2i+\frac{4}{2-\alpha}\frac{l}{k\pi}+O(\varepsilon_k)\right)}{rk(1+\frac{\tilde{r}}{rk}+\frac{il}{rk^2\pi}+\frac{\varepsilon_k}{k})}+O(\varepsilon_k^2)+O\left(\frac{\varepsilon_k}{k}\right)+O\left(\frac{1}{k^{3-2\tilde{\alpha}}}\right)=0.\\
&= \frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k+\frac{4}{2-\alpha}\left(\frac{il}{k\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2-\alpha}\right)^2\frac{(il)^2}{(k\pi)^2}\\
&- \frac{(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha)}{2i}\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\right)^{-1}(-\frac{2}{rk}+\frac{2\tilde{r}}{r^2k^2}+\frac{4}{2-\alpha}\frac{il}{rk^2\pi}+o(\frac{1}{k^2}))\\
&+(1-\alpha)(\frac{2}{rk}-\frac{2\tilde{r}}{r^2k^2}-\frac{4}{2-\alpha}\frac{il}{rk^2\pi}+o(\frac{1}{k^2}))
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k-\frac{(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha)}{2i}\left(\frac{2}{2-\alpha}\imath\right)^{-1}\frac{2\tilde{r}}{r^2k^2}+(1-\alpha)\frac{2\tilde{r}}{r^2k^2}+o(\frac{1}{k^2})=0.$$

Then

$$\varepsilon_k=\frac{2-\alpha}{4}(-\frac{(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha)}{4}(2-\alpha)+(1-\alpha))\frac{2\tilde{r}}{r^2k^2}+o(\frac{1}{k^2}).$$

现在，我们可以写成

$$\gamma_k=\gamma_k^0+\frac{il}{k\pi}+\frac{2-\alpha}{4}\left(-\frac{(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha)}{4}(2-\alpha)+(1-\alpha)\right)\frac{2\tilde{r}}{r^2k^2}+\varepsilon_k, \tag{58}$$

利用 $f(\gamma_k)=0$ 这一事实，我们得到

$$\frac{4}{2-\alpha}\varepsilon_k+\rho i^{\tilde{\alpha}-1}\frac{(-2i)}{\left(-\frac{2-\alpha}{2}\imath k\pi\right)^{3-2\tilde{\alpha}}}+o\left(\frac{1}{k^{3-2\tilde{\alpha}}}\right)=0$$

$$\tilde{\varepsilon}_k=-\rho i^{1-\tilde{\alpha}}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{2-2\tilde{\alpha}}\frac{1}{(k\pi)^{3-2\tilde{\alpha}}}+o\left(\frac{1}{k^{3-2\tilde{\alpha}}}\right).$$

由于 $\gamma_k^2 = -\imath\lambda_k$，因此

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \imath\gamma_k^2 \\
&= \imath\left[-C_0^2(k\pi)^2 - C_1^2\pi^2 - \frac{C_2^2}{(k\pi)^2} - 2C_0C_1k\pi^2 - 2C_0C_2 - 2\frac{C_0C_3}{k} - 2\frac{C_1C_2}{k}\right. \\
&\quad \left. +2i^{2-\tilde{\alpha}}\frac{C_0C_4}{(k\pi)^{2-2\tilde{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{k^{2-2\tilde{\alpha}}}\right)\right] \\
&= -i\left[C_0^2(k\pi)^2 + C_1^2\pi^2 + 2C_0C_1k\pi^2 + 2C_0C_2 + 2\frac{C_0C_3}{k} + 2\frac{C_1C_2}{k}\right] \\
&\quad -2i^{1-\tilde{\alpha}}\frac{C_0C_4}{(k\pi)^{2-2\tilde{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{k^{2-2\tilde{\alpha}}}\right).
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
C_0 = -\frac{2-\alpha}{2}, C_1 = -\frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{\nu_\alpha}{2} + \frac{5}{4}\right), \\
C_2 = \frac{(2-\alpha)}{4}\left((\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha) - \frac{4(1-\alpha)}{(2-\alpha)}\right) \\
C_3 = -\frac{2-\alpha}{4}\left(-\frac{(\frac{1}{2}+\nu_\alpha)(\frac{3}{2}+\nu_\alpha)}{4}(2-\alpha) + (1-\alpha)\right)\frac{2C_1}{C_0^2}.
\end{aligned}$$

and

$$C_4 = -\rho\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^{2-2\tilde{\alpha}}.$$

现在，令 $\tilde{U}_k = (\lambda_k^0 I - \mathcal{A})U_k$，其中 U_k 是与 λ_k 相关的归一化特征函数，并且

$$\lambda_k^0 = \begin{cases} -i\left[C_0^2(k\pi)^2 + C_1^2\pi^2 + 2C_0C_1k\pi^2 + 2C_0C_2\right] & \text{if } \frac{1}{2} < \tilde{\alpha} < 1, \\ -i\left[C_0^2(k\pi)^2 + C_1^2\pi^2 + 2C_0C_1k\pi^2 + 2C_0C_2 + 2\frac{C_0C_3}{k} + 2\frac{C_1C_2}{k}\right] & \text{if } 0 < \tilde{\alpha} < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_k^0 I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup_{U\in\mathcal{H}, U\neq 0}\frac{\|(\lambda_k^0 I - \mathcal{A})^{-1}U\|_{\mathcal{H}}}{\|U\|_{\mathcal{H}}} &\geq \frac{\|(\lambda_k^0 I - \mathcal{A})^{-1}\tilde{U}_k\|_{\mathcal{H}}}{\|\tilde{U}_k\|_{\mathcal{H}}} \\
&\geq \frac{\|U_k\|_{\mathcal{H}}}{\|(\lambda_k^0 I - \mathcal{A})U_k\|_{\mathcal{H}}}.
\end{aligned}$$

因此，由引理 5.2，我们推得

$$\|(\lambda_k^0 I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \geq c|k|^{2-2\tilde{\alpha}} \equiv |\lambda_k^0|^{1-\tilde{\alpha}},$$

因此，对于 $0 < \tilde{\alpha} < 1$，引理 5.1 的第二个条件不成立。因此，半群$e^{t\mathcal{A}}$ 不是指数稳定的。证明完毕。

参考文献

[1] Achouri, Z., Amroun, N., Benaissa, A.：具有分数阶导数型边界耗散的 Euler-Bernoulli 梁方程，《应用科学中的数学方法》。40 (2017年)-11，3887-3854。[2] Arendt, W 和 Batty, CJK，陶伯定理与单参数半群的稳定性，《美国数学会汇刊》。1988年；306(-2)：837-852。[3] Borichev, A 和 Tomilov, Y，函数与算子半群的最优多项式衰减，《数学年刊》。2010年；347(-2)：455-478。[4] Br´ezis, H，《Hilbert 空间中的极大单调算子与压缩半群》，数学笔记（50）。North-Holland，阿姆斯特丹：里约热内卢联邦大学和罗切斯特大学；1973年。[5] H. Chen, Y. Xie 和 G. Xu，内部时滞控制下多维薛定谔方程的快速稳定化，《国际控制杂志》，92 (2019年)，2521-2531。[6] Choi, J. U., Maccamy, R. C.：分数阶沃尔泰拉方程及其在弹性力学中的应用，《数学分析与应用杂志》139 (1989年)，448-464。[7] H. Cui, D. Liu 和 G. Xu，受约束边界反馈作用下薛定谔方程的渐近行为，《数学控制与相关领域》，8 (2018年)，383-395。[8] Dieudonn´e, J，《微积分》，Collection Methodes，Herman，巴黎。1968年。[9] X. Feng, G. Xu 和 Y. Chen，内部时滞控制下 Euler-Bernoulli 梁的快速稳定化，《国际控制杂志》，92 (2019年)，42-55。[10] G. Fibich，阻尼非线性薛定谔方程中的自聚焦，《SIAM 应用数学杂志》61 (2001年)-5，1680-1705。[11] Komornik, V 和 Zuazua, E，波动方程边界稳定化的直接方法，《纯粹与应用数学杂志》69 (1990年)，33-54。[12] Krstic, M, Guo, B. Z 和 Smyshlyaev, A，线性化薛定谔方程的边界控制器与观测器，《SIAM 控制与优化杂志》，第 49 卷，第 4 期，第 1479-1497 页，2011 年 7 月。[13] Lebedev, N. N，《特殊函数及其应用》，纽约：Dover Publications；1972年。[14] Y. Li, H. Chen 和 Y. Xie，具有输入时滞的薛定谔方程的任意收敛速率稳定化，《系统科学与复杂性杂志》，(2020年)。

[15] Liu, J. J 和 Wang J. M，采用仅有位移观测的边界反馈对反稳定 Schr ¨odinger 方程进行输出反馈镇定，《动力学与控制系统杂志》2013年；19：471-482。[16] Machtyngier, E, Sch ¨ordinger 方程的精确能控性，《SIAM控制与优化杂志》1994年；32：24-34。[17] Machtyngier, E 和 Zuazua, E，Schr ¨odinger 方程的稳定化，《葡萄牙数学》1994年；51：243-256。[18] Mbodje, B.：分数阶导数控制下的波能衰减，《IMA数学控制与信息杂志》，23（2006年），237-257。[19] S. Nicaise 和 S.-E. Rebiai，含边界或内部反馈时滞项的 Sch ¨odinger 方程的稳定性，《葡萄牙数学》，68（2011年），19-39。[20] Pr ¨uss, J，关于 C_0-半群的谱，《美国数学学会汇刊》。1984年；284(-2)：847-857。[21] Watson, G. N，《贝塞尔函数理论论著》，第二版，英国剑桥：剑桥大学出版社；1944年。[22] Zuazua, E，具有局部分布阻尼的半线性波方程的指数衰减，《偏微分方程通讯》，15(2)，（1990年）205-235。[23] Guo B. Z 和 Zheng, F，Schr ¨odinger 方程及其半离散逼近的一致指数稳定性，《IEEE自动控制汇刊》，69，（2024年）-12，8900-8907。