评估三个耦合谐振子的纠缠

Ayoub Ghaba,[1], * Radouan Hab Arrih,[2], † Elhoussine Atmani,[1] Abderrahim El Allati,[2] 和 Abdallah Slaoui [3], 4, ‡

[1] *Laboratory of Mathematics and Physical Sciences Applied to Engineering Sciences,Faculty of Sciences and Techniques, Hassan II University, Mohammedia, Morocco*[2] *Laboratory of R&D in Engineering Sciences, Faculty of Sciences and Techniques Al-Hoceima,Abdelmalek Essaadi University, Tetouan, Morocco.*[3] *LPHE-MS, Faculty of Sciences, Mohammed V University in Rabat, Rabat, Morocco*[4] *CPM, Faculty of Sciences, Mohammed V University in Rabat, Rabat, Morocco.*(日期：2026年1月6日)

arXiv:2601.01292v1 [quant-ph] 3 Jan 2026

摘要

量子纠缠是理解多体系统中关联的关键现象，但针对耦合三体振子的解析结果仍然十分有限。在这项工作中，我们通过提出一种几何对角化方法来弥补这一不足；该方法对欧拉角施加约束，从而减少纠缠分析中的自由度。我们利用维格纳函数框架，推导了二分划分 $(x|yz)$、$(y|xz)$ 和 $(xy|z)$ 下线性熵与纯度的解析表达式。结果表明，任一振子中的激发基本上都会增强关联在整个系统中的重新分布。混合角 θ 决定了纠缠强度，其范围从可分性到最大关联。此外，我们揭示了对称关系，特别是$S_{Ly}[(n,\ m,\ l)\ \theta] = S_{Lz}[(n,\ m,\ l)\ -\theta]$，以及 $(x|yz)$ 内的内禀对称性。因此，我们阐明了激发能级和混合角如何在三个耦合谐振子中产生并增强纠缠。

KEYWORDS: 纠缠、三个耦合振子、维格纳函数、几何对角化 ion

I. 引言

量子纠缠是量子力学中最引人入胜的特征之一，尽管最初引入它是为了质疑该理论的一些基础观点。具体而言，爱因斯坦、波多尔斯基和罗森指出，纠缠波函数暗示存在隐变量，这揭示了量子力学的不完备性 [1, 2]。随后，纠缠现象被确认为量子理论的基本方面 [3–5], ，对于解释和验证其预测至关重要 [6]。近年来，纠缠被视为量子信息科学中的关键资源，可实现超越经典通信和计算能力的协议 [7–11]。事实上，人们利用纠缠现象设计实验装置，以产生稳健的纠缠度，使其能够抵御退相干并实现最优控制 [12–21]。此外，连续变量系统中的量子纠缠已成为量子信息科学中一个核心且受到广泛研究的课题 [22–31]。特别是，人们研究了在内禀退相干影响下，双振子和三耦合振子系统中高斯态所产生的纠缠 [32–34],外禀退相干 [35–38] 以及无退相干的理想情形 [39–41]。然而，人们也研究了由双耦合振子系统的非高斯态产生的量子纠缠 [42–45]。事实上，研究表明，纠缠在高激发态中会显著增强。这凸显了非高斯态中的量子纠缠可能比其高斯态对应物发挥更重要的作用 [46, 47]。值得注意的是，耦合谐振子提供了一个简单而灵活的物理平台，可用于实现高斯态和非高斯态。

耦合谐振子系统是一种无处不在的物理平台，许多系统在平衡态附近都可以用耦合谐振子有效建模。事实上，量子振子在理解超导性 [48], 量子光学 [49], 生物物理学[50–52], 分子化学 [53, 54] 和量子化学 [55, 56]等基本现象方面发挥着核心作用。值得注意的是，Makarov 利用量子态的施密特分解，研究了两个耦合振子中的量子纠缠 [42, 43]。通过引入

* ayoub.ghaba-etu@etu.univh2c.ma
† habarrih46@gmail.com
‡ abdallah.slaoui@um5s.net.ma

合适的物理假设，他巧妙地将纠缠问题简化为对混合角的依赖：

$$\theta = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\epsilon}{\omega_1^2-\omega_2^2}\right),$$

其中，ω_i 表示振子 i的频率，而 ϵ 表示振子之间的耦合强度。受这项卓越研究的启发，我们自然会思考，类似的方法能否推广到更复杂的系统——三个耦合谐振子。这类系统带来了显著更大的挑战，既涉及对角化过程，也涉及不同划分之间纠缠的刻画 [57]。通过利用一个涉及系统特征值和本征矢量的恰当数学恒等式，可以得到三个不同的混合角 θ、ϕ、φ，它们由耦合和频率等物理参数表示 [41]。因此，借助这三个相互依赖的混合角来刻画纠缠，结果极为复杂。在本文中，我们提出一种新方法——几何对角化，它有效地将纠缠的描述简化为仅依赖一个混合角，即 θ。此外，我们将在相空间框架下运用解析和数值方法评估每种二分划分的纠缠，而不依赖传统的施密特分解。我们对这一复杂系统中量子纠缠的分析表明，纠缠对混合角 θ以及量子数 n、m和 l都非常敏感。

此外，我们的工作全面揭示了量子纠缠在不同二分划分中的结构，凸显了系统内部关联分布的复杂性。这一细致的认识表明，该系统能够成为生成和控制纠缠的多功能且稳健的资源。因此，我们的物理平台在多种量子技术中具有重要的应用潜力，包括量子通信和量子传感协议。此外，系统参数的可调性以及混合角的可控性，为量子信息的编码、处理和操控提供了灵活的方案。归根结底，这些特性使耦合谐振子网络成为实现可扩展量子计算架构的有力候选者。

本文其余部分安排如下。在第II节，我们介绍由三个耦合谐振子构成的系统，并概述几何对角化过程。第III 节介绍如何利用维格纳函数和线性熵量化量子纠缠。在第IV节，我们报告研究结果，并进行详细的物理讨论。最后，第V 节给出总结性结论。

II. 哈密顿量与几何对角化

考虑一个由耦合谐振子构成的三体系统，即 x、y 和 z。每个振子都具有固有角频率，分别为 ω_x、ω_y 和 ω_z。该二次项描述了三个耦合谐振子的动能和势能贡献。因此，该系统的哈密顿量为 [32, 39]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{a=x,y,z}\left(\hat{p}_a^2+\omega_a^2\hat{a}^2\right) + J_{xy}\hat{x}\hat{y} + J_{xz}\hat{x}\hat{z} + J_{yz}\hat{y}\hat{z}, \tag{1}$$

其中 $\hbar = m = 1$ [58]，算符 $\hat{}x$、$\hat{}y$ 和 $\hat{}z$ 表示振子的位置算符，而其共轭动量定义为 $\hat{}p_a = -i\frac{\partial}{\partial a}$，满足正则对易关系 $[\hat{a},\hat{}p_a] = i$，其中 i表示虚数单位。参数 ω_a 对应振子的角频率，而 J_{ab}表示振子 a 与 b之间的耦合强度。为了研究该系统的量子纠缠特性，必须对哈密顿量进行对角化，这可以通过适当的旋转实现，并由欧拉角 (θ,φ,Φ) [59]参数化。事实上，我们采用以下正交旋转矩阵 [41]

$$\mathbb{R}(\varphi,\Phi,\theta) = e^{i\varphi\hat{L}_1}e^{i\Phi\hat{L}_2}e^{i\theta\hat{L}_3}, \tag{2}$$

这里，生成元 $\hat{}L_k = (\hat{}q_i\hat{}p_j - \hat{}q_j\hat{}p_i)$ 满足闭合代数 $[\hat{}L_i, \hat{}L_j] = i\,\epsilon_{ijk}\hat{}L_k$，其中 $\hat{}q_i$ 和 $\hat{}p_i$ 分别表示正则位置算符和动量算符，ϵ_{ijk} 是列维-奇维塔反对称张量，i 表示虚数单位。此外，旋转矩阵可以显式表示为：

$$\mathbb{R}(\varphi,\Phi,\theta) = \begin{pmatrix} C_\theta C_\Phi & S_\Phi & S_\theta C_\Phi \\ -C_\varphi S_\Phi C_\theta - S_\varphi S_\theta & C_\varphi C_\Phi & -C_\varphi S_\Phi S_\theta + S_\varphi C_\theta \\ S_\varphi S_\Phi C_\theta - C_\varphi S_\theta & -S_\varphi C_\Phi & S_\varphi S_\Phi S_\theta + C_\varphi C_\theta \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中，我们设 $(S_\eta,\ C_\eta) = (\sin\ \eta,\ \cos\eta)$，其中 $\eta \in \{\varphi, \Phi, \theta\}$。

本研究旨在回答以下问题：如何设计一种对角化方案，对欧拉角施加额外约束？基于此，如何减少相应的角的数量，从而简化对系统中量子纠缠的分析？

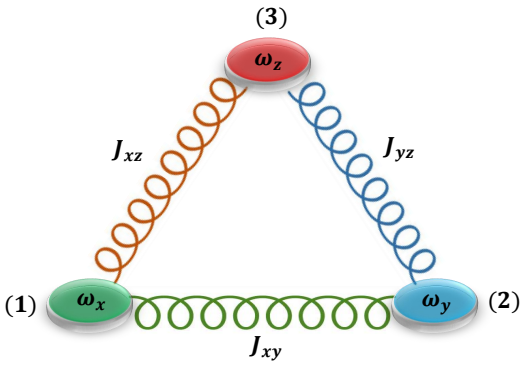


图 1. 三个耦合振子的示意图；任意两个振子之间均通过“位置-位置”相互作用 $\tilde{i}\tilde{j}$ 耦合，耦合强度为 J_{ij}，其中所有 $i \neq j$ 和 $i, j \in \{x, y, z\}$。

为回答上述问题，我们需要采用量身定制的解析方法。实际上，我们首先将旋转矩阵分解为：

$$\mathbb{R}(\varphi,\Phi,\theta) = \mathbb{R}_1(\varphi)\mathbb{R}_2(\Phi)\mathbb{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\varphi & S_\varphi \\ 0 & -S_\varphi & C_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\Phi & S_\Phi & 0 \\ -S_\Phi & C_\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

一方面，利用式（1中的哈密顿量，可以定义所谓的势矩阵，即 $\mathbb{K}$。其定义如下：

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} \omega_x^2 & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & \omega_y^2 & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & \omega_z^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

另一方面，势矩阵可表示为 $\mathbb{K} = \mathbb{R}\,\Sigma\,\mathbb{R}^{-1}$，其中 $\Sigma = \mathrm{diag}(\vartheta_x^2, \vartheta_y^2, \vartheta_z^2)$，其中 ϑ_a^2表示势矩阵的特征值。此外，值得注意的是，ϑ_a^2 的显式表达式（见 [41]）在此省略，因为它们对后续分析并无实质作用。于是，对角矩阵 Σ可写为：

$$\begin{aligned} \Sigma = \mathbb{R}^{-1}\,\mathbb{K}\,\mathbb{R} &= \mathbb{R}_3(-\theta)\mathbb{R}_2(-\Phi)\mathbb{R}_1(-\varphi)\,\mathbb{K}\,\mathbb{R}_1(\varphi)\mathbb{R}_2(\Phi)\mathbb{R}_3(\theta) \\ &= \mathbb{R}_3(-\theta)\mathbb{R}_2(-\Phi)\,\mathbb{A}_\varphi\,\mathbb{R}_2(\Phi)\mathbb{R}_3(\theta). \end{aligned} \tag{6}$$

利用公式（4），可以推导出辅助矩阵 $\mathbb{A}_\varphi$的两种不同表示形式。这一步至关重要，因为这些等价形式能够减少独立混合角的数量。辅助矩阵 $\mathbb{A}_\varphi$ 为：

$$\mathbb{A}_\varphi = \mathbb{R}_1(-\varphi)\,\mathbb{K}\,\mathbb{R}_1(\varphi) = \mathbb{R}_3(\theta)\mathbb{R}_2(\Phi)\,\Sigma\,\mathbb{R}_2(-\Phi)\mathbb{R}_3(-\theta). \tag{7}$$

需要注意的是，$\mathbb{A}_\varphi$ 和 $\mathbb{K}$ 都是对称矩阵。因此，它们的逆矩阵与其矩阵转置相同，即 $\mathbb{A}_\varphi^{-1} = \mathbb{A}_\varphi^T$ 以及 $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{K}^T$，其中上标 T 表示矩阵转置。接下来要分解混合角。为此，我们根据式（$\mathbb{A}_\varphi$ ）将辅助矩阵 7用两种不同的形式明确表示。第一种形式写作：

$$\mathbb{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \omega_x^2 & J_{xy}C_\varphi - J_{xz}S_\varphi & J_{xy}S_\varphi + J_{xz}C_\varphi \\ J_{xy}C_\varphi - J_{xz}S_\varphi & -2J_{yz}S_\varphi C_\varphi + C_\varphi^2\omega_y^2 + S_\varphi^2\omega_z^2 & J_{yz}C_{2\varphi} + S_\varphi C_\varphi(\omega_y^2 - \omega_z^2) \\ J_{xy}S_\varphi + J_{xz}C_\varphi & J_{yz}C_{2\varphi} + S_\varphi C_\varphi(\omega_y^2 - \omega_z^2) & J_{yz}S_{2\varphi} + S_\varphi^2\omega_y^2 + C_\varphi^2\omega_z^2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

然而，利用式（7）右侧的表达式，辅助矩阵 $\mathbb{A}_\varphi$ 也可以表示为：

$$\mathbb{A}_\varphi = \begin{pmatrix} C_\theta^2(C_\Phi^2\vartheta_x^2 + S_\Phi^2\vartheta_y^2) + S_\theta^2\vartheta_z^2 & C_\theta S_\Phi C_\Phi(\vartheta_y^2 - \vartheta_x^2) & S_\theta C_\theta(-C_\Phi^2\vartheta_x^2 - S_\Phi^2\vartheta_y^2 + \vartheta_z^2) \\ C_\theta S_\Phi C_\Phi(\vartheta_y^2 - \vartheta_x^2) & S_\Phi^2\vartheta_x^2 + C_\Phi^2\vartheta_y^2 & S_\theta S_\Phi C_\Phi(\vartheta_x^2 - \vartheta_y^2) \\ S_\theta C_\theta(-C_\Phi^2\vartheta_x^2 - S_\Phi^2\vartheta_y^2 + \vartheta_z^2) & S_\theta S_\Phi C_\Phi(\vartheta_x^2 - \vartheta_y^2) & S_\theta^2(C_\Phi^2\vartheta_x^2 + S_\Phi^2\vartheta_y^2) + C_\theta^2\vartheta_z^2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

因此，利用 $\mathbb{A}_\varphi$ 的两种形式，可以很容易地证明以下恒等式：

$$\begin{aligned}
\tan(\theta) &= -\frac{\mathbb{A}_{23}}{\mathbb{A}_{12}} = -\frac{J_{yz}\cos(2\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varphi)(\omega_y^2 - \omega_z^2)}{J_{xy}\cos(\varphi) - J_{xz}\sin(\varphi)}, \\
\sin(2\Phi) &= \frac{2\sqrt{\mathbb{A}_{12}^2 + \mathbb{A}_{23}^2}}{\vartheta_x^2 - \vartheta_y^2} = \frac{2\sqrt{\left(J_{xy}\cos(\varphi) - J_{xz}\sin(\varphi)\right)^2 + \left(J_{yz}\cos(2\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)(\omega_y^2 - \omega_z^2)\right)^2}}{\vartheta_x^2 - \vartheta_y^2}, \\
\cos(2\Phi) &= \frac{\mathbb{A}_{11} - \mathbb{A}_{22} + \mathbb{A}_{33} - \vartheta_z^2}{\vartheta_x^2 - \vartheta_y^2} = \frac{2J_{yz}\sin(2\varphi) + \omega_x^2 + \cos(2\varphi)(\omega_z^2 - \omega_y^2) - \vartheta_z^2}{\vartheta_x^2 - \vartheta_y^2}, \\
\tan(2\Phi) &= \frac{2\sqrt{\mathbb{A}_{12}^2 + \mathbb{A}_{23}^2}}{\mathbb{A}_{11} - \mathbb{A}_{22} + \mathbb{A}_{33} - \vartheta_z^2} = \frac{2\sqrt{\left(J_{xy}\cos(\varphi) - J_{xz}\sin(\varphi)\right)^2 + \left(J_{yz}\cos(2\varphi) + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)(\omega_y^2 - \omega_z^2)\right)^2}}{2J_{yz}\sin(2\varphi) + \omega_x^2 - \cos(2\varphi)\,\omega_y^2 + \cos(2\varphi)\,\omega_z^2 - \vartheta_z^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

如果给定角 φ，则可由方程（Φ 和 θ）确定相应的角8和（9）。因此，为了得到 φ 关于物理参数$\mathbb{K}ij$ $(i \neq j)$的显式公式，我们使用方程（6），于是：

$$\Sigma_{ij} = 0, \quad (i \neq j). \tag{11}$$

经过一系列直接的代数运算（篇幅所限，此处不再赘述），可以得到以下条件：

$$\mathbb{A}_{13}\left(\mathbb{A}_{12}^2 - \mathbb{A}_{23}^2\right) = \mathbb{A}_{23}\,\mathbb{A}_{12}\left(\mathbb{A}_{11} - \mathbb{A}_{33}\right). \tag{12}$$

该方程导出

$$\sum_{n=0}^{5} a_n \mu_\varphi^n = 0, \quad \text{where} \quad \mu_\varphi = \tan(\varphi), \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}
a_0 &= J_{xy}J_{yz}\left(\omega_z^2 - \omega_x^2\right) + J_{xy}^2 J_{xz} - J_{xz}J_{yz}^2, \\
a_1 &= J_{xy}\left(-2J_{xz}^2 + J_{yz}^2 + \left(\omega_x^2 - \omega_z^2\right)\left(\omega_z^2 - \omega_y^2\right)\right) + J_{xz}J_{yz}\left(\omega_x^2 - 2\omega_y^2 + \omega_z^2\right) + J_{xy}^3, \\
a_2 &= J_{xz}\left(\omega_x^2 - \omega_y^2\right)\left(\omega_y^2 - \omega_z^2\right) - J_{xy}^2 J_{xz} + J_{xy}J_{yz}\left(\omega_y^2 - \omega_z^2\right) + J_{xz}^3, \\
a_3 &= -J_{xy}\left(J_{xz}^2 + \left(\omega_x^2 - \omega_z^2\right)\left(\omega_y^2 - \omega_z^2\right)\right) + J_{xy}^3 + J_{xz}J_{yz}\left(\omega_z^2 - \omega_y^2\right), \\
a_4 &= J_{xy}J_{yz}\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 - 2\omega_z^2\right) + J_{xz}\left(J_{xz}^2 + J_{yz}^2 + \left(\omega_x^2 - \omega_y^2\right)\left(\omega_y^2 - \omega_z^2\right)\right) - 2J_{xy}^2 J_{xz}, \\
a_5 &= J_{xz}J_{yz}\left(\omega_y^2 - \omega_x^2\right) + J_{xy}\left(J_{xz}^2 - J_{yz}^2\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

在现实物理平台中，不同子系统之间的耦合通常处于同一量级，即 $J_{xy} \sim J_{xz} \sim J_{yz}$ 且远弱于特征跃迁频率 [42–45]。因此，耦合和振荡器频率满足以下假设：

$$\max(J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}) \ll \min(\omega_x, \omega_y, \omega_z), \tag{15}$$

b通过使用 [41]，中报告的特征值，我们得到以下近似关系 :

$$\omega_x \sim \omega_y \sim \omega_z \sim \vartheta_x \sim \vartheta_y \sim \vartheta_z \sim \vartheta. \tag{16}$$

在这些具有物理依据的假设下，参数 a_n 消失，且对于μ_φ的任意取值，方程（13）均成立，从而得到 $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$。此外，利用方程（10）， 我们得到了本文的一项核心结果，即将其余混合角表示为 φ的显式表达式，

$$\begin{aligned}
\tan(\theta) &= -\sin(\varphi) - \cos(\varphi), \\
\tan(2\Phi) &= \frac{\sqrt{1 - 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}\sqrt{\sin(2\varphi) + 2}}{\sin(2\varphi)}.
\end{aligned} \tag{17}$$

因此，我们证明，只需一个混合角 θ，即可全面刻画这三个耦合量子振子的行为。在此框架下，需要指出的是， μ_Φ、 μ_φ 和 μ_θ 之间的关系为：

$$\mu_\Phi = \frac{1-\mu_\theta^2-\sqrt{3-\mu_\theta^2}}{\sqrt{2+\mu_\theta^2-\mu_\theta^4}}, \quad \mu_\varphi = \frac{1-\mu_\theta\sqrt{2-\mu_\theta^2}}{\mu_\theta^2-1}, \tag{18}$$

其中 μ_Φ =tan(Φ)、 μ_θ =tan(θ) 和 μ_φ =tan(φ)。这大大简化了对系统中纠缠的分析。进一步而言，系统的本征能量可简化为：

$$E(n,m,l) = \vartheta_x\left(n+\frac{1}{2}\right)+\vartheta_y\left(m+\frac{1}{2}\right)+\vartheta_z\left(l+\frac{1}{2}\right) \simeq \vartheta(n+m+l+\frac{3}{2}). \tag{19}$$

相应的本征函数表示为：

$$\Psi_{(n,m,l)}(X,Y,Z) = \frac{1}{\sqrt{2^{n+m+l}n!m!l!}}\left(\frac{\vartheta}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\exp\left(-\frac{\vartheta}{2}(X^2+Y^2+Z^2)\right)H_n(\sqrt{\vartheta}X)H_m(\sqrt{\vartheta}Y)H_l(\sqrt{\vartheta}Z), \tag{20}$$

其中，新的位置坐标写作：

$$\begin{aligned} X &= xC_\theta C_\Phi + y(-C_\theta C_\varphi S_\Phi - S_\theta S_\varphi) + z(C_\theta S_\varphi S_\Phi - S_\theta C_\varphi), \\ Y &= xS_\Phi + yC_\varphi C_\Phi - zS_\varphi C_\Phi, \\ Z &= xS_\theta C_\Phi + y(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi) + z(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi), \end{aligned} \tag{21}$$

其对应的动量形式如下：

$$\begin{aligned} P_x &= p_x C_\theta C_\Phi + p_y(-C_\theta C_\varphi S_\Phi - S_\theta S_\varphi) + p_z(C_\theta S_\varphi S_\Phi - S_\theta C_\varphi), \\ P_y &= p_x S_\Phi + p_y C_\varphi C_\Phi - p_z S_\varphi C_\Phi, \\ P_z &= p_x S_\theta C_\Phi + p_y(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi) + p_z(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi). \end{aligned} \tag{22}$$

在下一节中，我们将利用维格纳分布函数研究相空间中的量子纠缠结构。

III. 量子纠缠与相空间形式主义

众所周知，量子态的首个相空间表示由尤金·维格纳于1932年提出[60]。事实上，维格纳函数能够完整描述量子态，提供比传统量子方法所能提取的信息更全面的内容 [61, 62]。凭借这一特性，它已成为研究各种量子现象的有力框架。此外，既可以通过分析维格纳函数的负性[46, 47] ，也可以通过评估约化（边缘）态的量子纯度来表征这一框架中的纠缠现象 [22, 24]。为求简洁，鉴于我们的量子态具有特定结构，本文采用后一种方法。进一步而言，与对角化哈密顿量对应的维格纳函数是可分离的 [63]。因此可得：

$$W_{(n,m,l)}(X,P_x;Y,P_y;Z,P_z) = W_n(X,P_x)\times W_m(Y,P_y)\times W_l(Z,P_y), \tag{23}$$

其中，约化维格纳函数定义为 [63]

$$\begin{aligned} W_n(Q_i,P_i) &= \frac{1}{\pi}\int \Psi_n^*(Q_i+\mathbb{Q}_{\mathbb{i}})\Psi_n(Q_i-\mathbb{Q}_{\mathbb{i}})\exp\left(2iP_i\mathbb{Q}_{\mathbb{i}}\right)d\mathbb{Q}_{\mathbb{i}}, \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{\vartheta_i}(\vartheta_i^2Q_i^2+P_i^2)\right)\mathcal{L}_n\left[\frac{2}{\vartheta_i}(\vartheta_i^2Q_i^2+P_i^2)\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

这里， $Q_i \in \{X,Y,Z\}$、 $P_i \in \{P_x,P_y,P_z\}$、 $\vartheta_i \in \{\vartheta_x,\vartheta_y,\vartheta_z\}$ 和 $\mathcal{L}_n(x)$ 引入拉盖尔多项式 [64]。接下来，我们使用拉盖尔多项式的罗德里格斯公式 [64, 65]。

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{du^n}\left(\frac{\exp\left(-\frac{xu}{1-u}\right)}{1-u}\right)\Bigg|_{u=0}, \tag{25}$$

从而得到与我们的哈密顿量相关的维格纳函数，如下所示：

$$W_{(n,m,l)}(X,P_x;Y,P_y;Z,P_z)=\mathcal{R}_{n,l,m}(u,s,v)\left(-\frac{\exp\left(\frac{(v+1)\left(P_z^2+Z^2\vartheta_z^2\right)}{(v-1)\vartheta_z}+\frac{(u+1)(P_x^2+X^2\vartheta_x^2)}{(u-1)\vartheta_x}+\frac{(P_y^2+Y^2\vartheta_y^2)(s+1)}{(s-1)\vartheta_y}\right)}{(s-1)(u-1)(v-1)}\right)\Bigg|_{u,s,v=0}, \tag{26}$$

其中，算符 $\mathcal{R}_{(n,l,m)}$ 写作：

$$\mathcal{R}_{n,l,m}(u,s,v)=\frac{(-1)^{l+m+n}}{\pi^3 l!m!n!}\frac{d^n}{du^n}\frac{d^m}{ds^m}\frac{d^l}{dv^l}. \tag{27}$$

在方程（16）和（15）中的现实假设下，维格纳函数为：

$$W_{(n,m,l)}(X,P_x;Y,P_y;Z,P_z)=\mathcal{R}_{n,l,m}(u,s,v)\left(-\frac{\exp\left(\frac{1}{\vartheta}\left[\frac{(v+1)\left(P_z^2+Z^2\vartheta^2\right)}{(v-1)}+\frac{(u+1)(P_x^2+X^2\vartheta^2)}{(u-1)}+\frac{(P_y^2+Y^2\vartheta^2)(s+1)}{(s-1)}\right]\right)}{(s-1)(u-1)(v-1)}\right)\Bigg|_{u,s,v=0}. \tag{28}$$

鉴于全局态是纯态，由此可得：

$$\mathbb{P}=(2\pi)^3\int_{\mathbb{R}^6}dx\,dp_x\,dy\,dp_y\,dz\,dp_z\,W^2_{(n,m,l)}(x,p_x;y,p_y;z,p_z)=1 \tag{29}$$

因此，对我们的系统（即三个耦合谐振子）中的量子纠缠进行分析，就是通过计算相应约化态的纯度 [22, 24, 63]:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(n,m,l) &= 2\pi\int_{\mathbb{R}^2}dx\,dp_x\,W^2_{(n,m,l)}(x,p_x),\\
\mathbb{P}_y(n,m,l) &= 2\pi\int_{\mathbb{R}^2}dy\,dp_y\,W^2_{(n,m,l)}(y,p_y),\\
\mathbb{P}_z(n,m,l) &= 2\pi\int_{\mathbb{R}^2}dz\,dp_z\,W^2_{(n,m,l)}(z,p_z),
\end{aligned} \tag{30}$$

其中，边缘维格纳函数 $W_{(n,m,l)}(x,\ p_x)$ $W_{(n,m,l)}(y,\ p_y)$ 和 $W_{(n,m,l)}(z,\ p_z)$ 定义为 [63]

$$\begin{aligned}
W_{(n,m,l)}(x,p_x) &= \int_{\mathbb{R}^4}dy\,dp_y\,dz\,dp_z\,W_{(n,m,l)}(x,p_x;y,p_y;z,p_z),\\
W_{(n,m,l)}(y,p_y) &= \int_{\mathbb{R}^4}dx\,dp_x\,dz\,dp_z\,W_{(n,m,l)}(x,p_x;y,p_y;z,p_z),\\
W_{(n,m,l)}(z,p_z) &= \int_{\mathbb{R}^4}dx\,dp_x\,dy\,dp_y,W_{(n,m,l)}(x,p_x;y,p_y;z,p_z).
\end{aligned} \tag{31}$$

现在，通过计算式（31）中的积分，并将其代入边缘纯度表达式，再计算式（30）中的积分，最终得到以下关键结果：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(n,m,l) &= (l!m!n!)^{-2}\frac{d^n}{du^n}\frac{d^m}{ds^m}\frac{d^l}{dv^l}\frac{d^n}{da^n}\frac{d^m}{db^m}\frac{d^l}{dc^l}\left(\frac{\left(\mu_\theta^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)}{\Omega_1+\Omega_2}\right)\Bigg|_{u,s,v,a,b,c=0},\\
\mathbb{P}_y(n,m,l) &= (l!m!n!)^{-2}\frac{d^n}{du^n}\frac{d^m}{ds^m}\frac{d^l}{dv^l}\frac{d^n}{da^n}\frac{d^m}{db^m}\frac{d^l}{dc^l}\left(\frac{-\left(\mu_\theta^2+1\right)\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)}{\Omega_3+\Omega_4+\Omega_5+\Omega_6}\right)\Bigg|_{u,s,v,a,b,c=0},\\
\mathbb{P}_z(n,m,l) &= (l!m!n!)^{-2}\frac{d^n}{du^n}\frac{d^m}{ds^m}\frac{d^l}{dv^l}\frac{d^n}{da^n}\frac{d^m}{db^m}\frac{d^l}{dc^l}\left(\frac{-\left(\mu_\theta^2+1\right)\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)}{\Omega_7+\Omega_8+\Omega_9+\Omega_{10}}\right)\Bigg|_{u,s,v,a,b,c=0},
\end{aligned} \tag{32}$$

其中，我们将不同的量 Ω_i 定义如下

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= (c+1)(v+1)\Big[(a+1)(u+1)(1-bs)\mu_\Phi^2+(b+1)(s+1)(1-au)\Big],\\
\Omega_2 &= (a+1)(u+1)\mu_\theta^2\Big[(c+1)(v+1)(1-bs)\mu_\Phi^2+(b+1)(s+1)(1-cv)\Big],\\
\Omega_3 &= (a+1)(b+1)(s+1)(u+1)(cv-1)\left[\mu_\theta^2\mu_\Phi^2\left(\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right)^2+\mu_\Phi^2+1\right],\\
\Omega_4 &= (b+1)(c+1)(s+1)(v+1)(au-1)\left[\mu_\Phi^2\left(\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right)^2+\mu_\Phi^2\mu_\theta^2+\mu_\theta^2\right],\\
\Omega_5 &= (a+1)(c+1)(u+1)(v+1)(bs-1)\left(\mu_\theta^2+1\right)\left[\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right]^2,\\
\Omega_6 &= 2(b+1)(s+1)\mu_\theta\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\left(\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right)\Big[a\Big(c(u-v)+uv+2u+1\Big)-cv(u+2)+u-c-v\Big],\\
\Omega_7 &= (a+1)(b+1)(s+1)(u+1)(cv-1)\left(\mu_\theta^2\mu_\varphi^2\mu_\Phi^2+\mu_\Phi^2+1\right),\\
\Omega_8 &= (b+1)(c+1)(s+1)(v+1)(au-1)\left(\mu_\Phi^2\mu_\varphi^2+\mu_\Phi^2\mu_\theta^2+\mu_\theta^2\right),\\
\Omega_9 &= (a+1)(c+1)(u+1)(v+1)(bs-1)\left(\mu_\theta^2+1\right)\mu_\varphi^2,\\
\Omega_{10} &= -2(b+1)(s+1)\mu_\theta\mu_\varphi\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\Big[a\Big(c(u-v)+uv+2u+1\Big)-cv(u+2)+u-c-v\Big],
\end{aligned}
\tag{33}
$$

其中，μ_φ 和 μ_ϕ 基本上取决于 μ_θ，如式（18）所述。通过递归求导，可以明确推导出各种态的量子纯度（n，m，l）：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(1,1,0) &= \frac{2\mu_\theta^2\left(\mu_\Phi^6-\mu_\Phi^4+\mu_\Phi^2+3\right)\mu_\Phi^2+\mu_\theta^4\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2\left(\mu_\Phi^4+1\right)+\mu_\Phi^8-4\mu_\Phi^6+14\mu_\Phi^4-4\mu_\Phi^2+1}{\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)^4},\\
\mathbb{P}_x(1,0,1) &= \frac{2}{\left(\mu_\Phi^2+1\right)^4}\left(-\frac{6\mu_\theta^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)}{\left(\mu_\theta^2+1\right)^2}+\frac{\left(\mu_\theta^4+4\mu_\theta^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2}{\left(\mu_\theta^2+1\right)^2}+\frac{12\mu_\theta^4}{\left(\mu_\theta^2+1\right)^4}-\left(\mu_\Phi^2+1\right)^3\right)+1,\\
\mathbb{P}_x(0,1,1) &= \frac{2\mu_\theta^2\mu_\Phi^2\left(\mu_\Phi^6-\mu_\Phi^4+\mu_\Phi^2+3\right)+\mu_\theta^4\left(\mu_\Phi^8-4\mu_\Phi^6+14\mu_\Phi^4-4\mu_\Phi^2+1\right)+\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2\left(\mu_\Phi^4+1\right)}{\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)^4}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

值得强调的是，上述纯度完全取决于量子数 n、m、l以及混合角 θ，因为 φ 和 Φ 本身都是 θ 的函数，正如式（18）所示。这表明，我们的技术——几何对角化——在简化纠缠描述的复杂性方面非常有效。通过将系统的依赖关系归结为一个混合角，即 θ，它为分析我们的三个耦合振子系统中的双体纠缠提供了一种强大而适用的工具。在下一节中，我们将给出数值示例，并辅以详尽的物理讨论。

IV. 数值结果与讨论

双体量子纠缠可通过多种度量进行量化，例如纯度、线性熵、冯·诺伊曼熵和施密特参数 [22, 24, 42, 43]。其中，线性熵尤为方便且计算效率高，特别适用于相空间形式主义。基于这一思路，我们可以直接评估各子系统中的纠缠，而无需进行完整的施密特分解。事实上，与边缘纯度对应的线性熵可表示为 [24]

$$
S_{La}(n,m,l)=1-\mathbb{P}_a(n,m,l),\qquad a=x,y,z.
\tag{35}
$$

此外，值得注意的是，多体系统中量子纠缠的量化仍然是现代物理学中最具挑战性的问题之一。这一难题自然源于不同子系统与系统其余部分发生纠缠的多种方式 [57]。在接下来的分析中，我们将聚焦于三个耦合谐振子的三种可能的二分划分，即 $(x|yz)$、$(y|xz)$ 和 $(z|xy)$。

A. x 振子与 yz 振子之间的量子纠缠

在这一部分，我们将分析二分划分 $(x|yz)$ 中的纠缠，这对应于振子 x与由振子 y 和 z组成的子系统之间的关联。具体而言，我们的研究从这样一种情形开始：两个振子处于基态，而剩下的一个振子处于激发态。因此，边缘线性熵可简化为：

$$\begin{aligned}
S_{Lx}[(n,0,0),\theta] &= 1-\frac{(-1)^{(n)}}{16^n n!}(\kappa_1+1)^{2n}P_n^{(-2n-1,0)}\left(1-\frac{16(\kappa_1-1)}{(\kappa_1+1)^2}\right),\\
S_{Lx}[(0,m,0),\theta] &= 1-\frac{(-1)^{(m)}}{4^m m!}\left(\frac{\kappa_2-1}{\kappa_2}\right)^{2m}P_m^{(-2m-1,0)}\left(\frac{\kappa_2(\kappa_2+6)+1}{(\kappa_2-1)^2}\right),\\
S_{Lx}[(0,0,l),\theta] &= 1-\frac{(-1)^{(l)}}{16^l l!}\left(\frac{\kappa_1\kappa_2-\kappa_2-2}{\kappa_2}\right)^{2l}P_l^{(-2l-1,0)}\left(\frac{16\kappa_2(\kappa_1\kappa_2+\kappa_2-2)}{(-\kappa_1\kappa_2+\kappa_2+2)^2}+1\right),
\end{aligned} \tag{36}$$

其中，$(x)^{(n)}=x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$ 定义了下降阶乘，也称为下阶乘。此外，可以将 κ_1 和 κ_2 定义如下：

$$\kappa_1(\theta)=\frac{(1-\mu_\theta^2)\left(\sqrt{3-\mu_\theta^2}+2\right)}{\sqrt{3-\mu_\theta^2}\,(1+\mu_\theta^2)},\quad \kappa_2(\theta)=\frac{\sqrt{3-\mu_\theta^2}}{1-\mu_\theta^2}. \tag{37}$$

因此，态 $(n,0,0)$、$(0,m,0)$ 和 $(0,0,l)$ 的纠缠量 S_{Lx} 与 θ 的关系如图 (2) 所示。显然，对于态 $(n,0,0)$，二分划分 $(x|yz)$ 中的量子纠缠随 n 单调增加，这表明随着 x 振子的激发程度提高，纠缠程度也随之增加。对于固定的 n，纠缠量在 $\mu_\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 处达到最大值，在 $\theta=0$ 处达到最小值。然而，当 x 振子处于基态 $(n=0)$，而 (yz) 子系统处于态 $(m\neq 0)$ 时，纠缠呈现出类似的行为：在 $\mu_\theta=1$ 时达到最大值，在 $\mu_\theta=0$ 处达到最小值。最后，当 x 和 y 振子均处于基态，而 z 振子被激发时，二分划分 $(x|yz)$ 在 $\mu_\theta=0$ 时变为可分离，而在 $\mu_\theta=1$ 时达到最大纠缠。从物理角度来看，这些结果表明，任一振子中的激发都会增强系统内部关联的重新分配。此外，参数 μ_θ 能够有效调节这种纠缠的强度，使其从完全可分离性变化至最大关联。

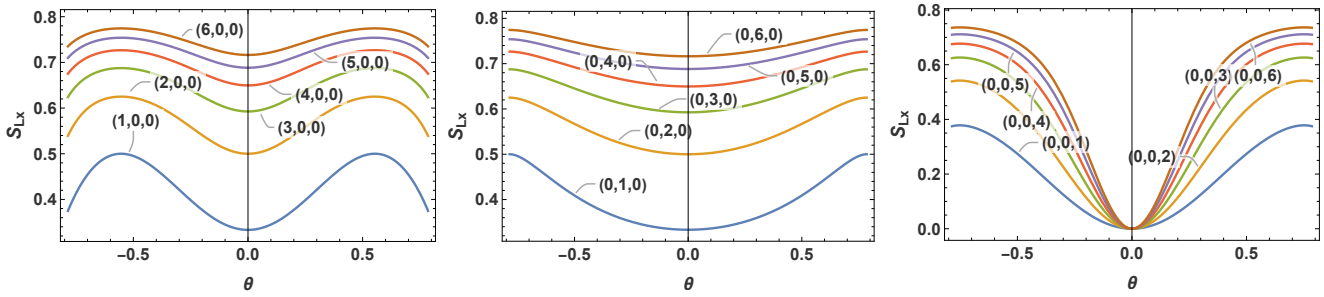


图 2. 从左到右依次为状态（S_{Lx}，0，0）、（0，m，0）和（0，0，l）的纠缠与 θ 的关系。

在图（3）中，我们绘制了纠缠随 S_{Lx} 变化的曲线，θ 对应不同的状态（n、m、l）。显然，当两个振子同时被激发时，子系统（$x|yz$）之间的双体纠缠相比单激发情形显著增强。此外，在所有配置中，S_{Lx} 的量随激发数单调增加，这反映出强激发能够促进更强的量子关联。显然，熵见证在 $\theta=0$处达到最小值，此时状态趋于可分。在 θ的中间取值处，熵见证达到最大值，其具体位置取决于各振子之间的激发分布。从物理上看，这种行为源于同时激发会占据耦合系统的更多模式，从而丰富量子关联的结构，并形成更稳健的纠缠轮廓。特别是，较为均衡的激发（例如（2、2、1）或（3、3、1）会产生更平滑、强度更高的纠缠曲线。然而，强烈不对称的配置仍呈现相同的定性特征，只是最大值的位置有所偏移。另一个值得注意的特点是，当 θ 时，即使

该 x 振子处于高度激发状态。请注意，在 θ 的大部分范围内，状态（4、1、1）表现出的纠缠程度高于（1、4、1）和（1、1、4）。

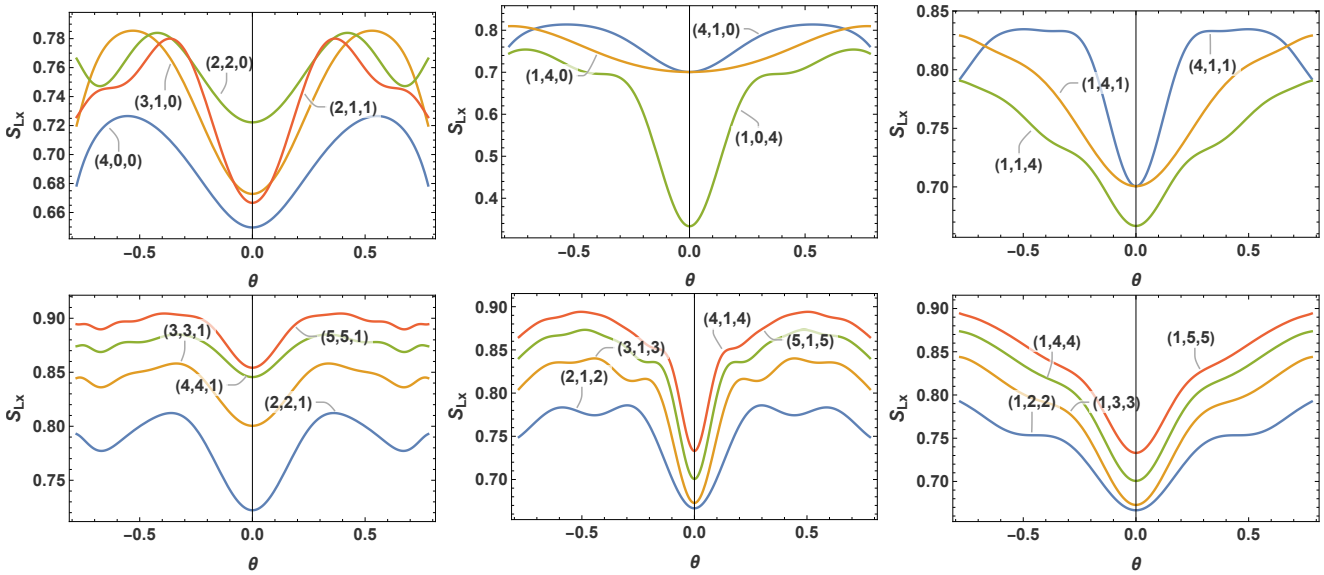


图 3. 各种量子态（n、 m、 l）下，线性熵 S_{Lx} 随混合角 θ 的演化。

从图（2）和（3）可以得出结论：以熵衡量的纠缠程度呈现显著的多振荡行为，凸显了其对混合角 θ 的高度敏感性。这种显著的可调控性表明，当前系统是利用量子纠缠构建技术平台的理想候选方案，并提供了一种自然且灵活的硬件实现方式。

B. y 振子与 xz 振子之间的量子纠缠

在开始讨论参数 θ 对 y 振子与 xz 振子之间纠缠行为的影响之前，我们先介绍边缘线性熵的精确表达式。它们的计算方式如下：

$$
\begin{aligned}
S_{Ly}[(n,0,0);\theta] &= 1-\frac{(-1)^{(n)}}{n!}\left(\frac{\kappa_3+\kappa_4}{\kappa_3}\right)^{2n} P_n^{(-2n-1,0)}\left(\frac{2\kappa_4^2}{(\kappa_3+\kappa_4)^2}-1\right),\\
S_{Ly}[(0,m,0);\theta] &= 1-\frac{(-1)^{(m)}}{m!}\left(\frac{\kappa_5+\kappa_6}{\kappa_5}\right)^{2m} P_m^{(-2m-1,0)}\left(\frac{2\kappa_6^2}{(\kappa_5+\kappa_6)^2}-1\right),\\
S_{Ly}[(0,0,l);\theta] &= 1-\frac{(-1)^{(l)}}{l!}\left(\frac{\kappa_3+\kappa_7}{\kappa_3}\right)^{2l} P_l^{(-2l-1,0)}\left(\frac{2\kappa_7^2}{(\kappa_3+\kappa_7)^2}-1\right),
\end{aligned}
\tag{38}
$$

其中各量 κ_i 化简为:

$$\begin{aligned}
\kappa_3(\theta) &= \left(\mu_\theta^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(\left(\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right)^2+1\right),\\
\kappa_4(\theta) &= -\left(\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right)^2\left(\mu_\theta^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)+1\right)+2\left(\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right)\mu_\theta\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}-\mu_\Phi^2-1,\\
\kappa_5(\theta) &= \left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(\left(\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right)^2+1\right),\\
\kappa_6(\theta) &= -\left(\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right)^2\mu_\Phi^2-\mu_\Phi^2-1,\\
\kappa_7(\theta) &= 2\left(\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right)\mu_\theta\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}+\left(\frac{2}{\mu_\theta^2-1}-\mu_\varphi\right)^2\left(-\mu_\theta^2-\mu_\Phi^2-1\right)-\mu_\theta^2\left(\mu_\Phi^2-1\right).
\end{aligned} \tag{39}$$

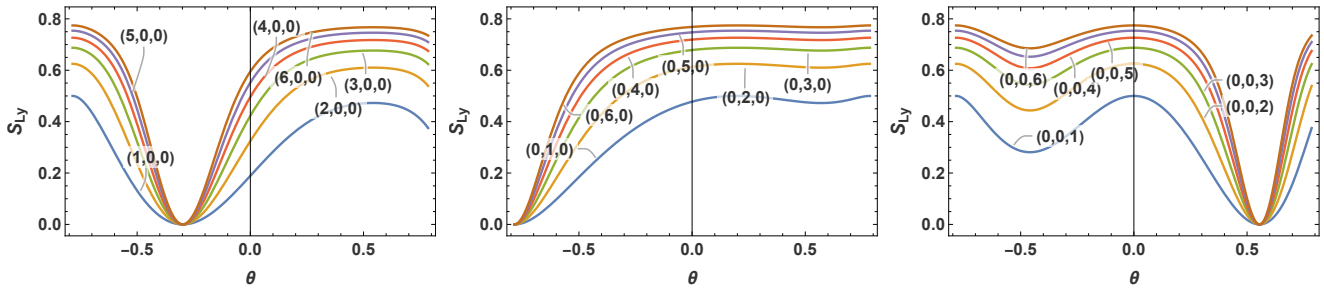


图 4. 线性熵的演化 熵 S_{Ly} 随混合角 θ 的变化，分别对应状态（n，0，0）、（0，m，0）和（0，0，l），从左至右依次显示，分别。

图（4）考察了状态（$n,0,0$）、（$0,m,0$）和（$0,0,l$）的纠缠量，以熵来衡量，即 S_{Ly} 与 θ。显然，对于状态（$n,0,0$），二分划分（$y|xz$）中的纠缠十分显著；随着量子数 n 增大，纠缠也变得显著，这表明 x 振子激发程度越高，纠缠程度就越大。然而，对于固定的 n，熵在 $\theta \simeq \frac{-2}{21}\pi$ 处为零。此外，对于（$n=0$）和（$m=0$），纠缠表现出相似的行为，即在 $\theta=\frac{11}{62}\pi$ 处达到最小值。最后，当 x 和 z 振子均处于基态而 y 振子被激发时，二分划分（$x|yz$）在 $\theta=-\frac{\pi}{4}$ 处变为可分离，而在 θ 上则持续增大。所得结果表明，任何一个振子的激发都会增强系统中关联的重新分布，而参数 μ_θ 则能有效调节这种纠缠的强度，使其从完全可分性变化至最大关联。还值得注意的是，对于总激发级相同的状态，无论激发的是哪个振子，其纠缠程度最大值都相同。这里最重要的并非激发在各振子间的分布，而是达到最大纠缠时 μ_θ 的具体取值。

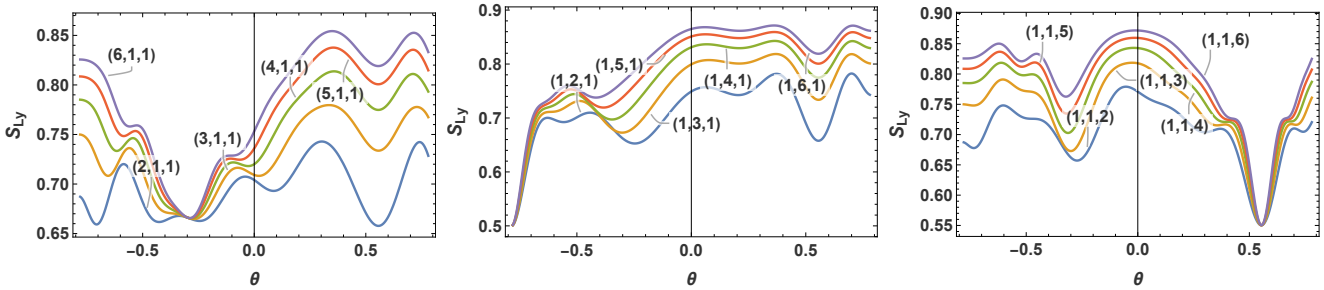


图 5.（在线彩色）量子纠缠 S_{Ly} 随混合角 θ 的变化，分别对应状态（n，1，1）、（1，m，1）和（1，1，l），从左至右依次显示。

在图（5）中，我们评估了参数 θ 对不同状态下量子纠缠 S_{Ly} 的影响，即（n，1，1）、（1，m，1）和（1，1，l）。显然，当所有振子同时被激发时，熵呈现出

对混合角 θ 的丰富多重振荡依赖性，这种行为源于支配演化的 Jacobi多项式的复杂结构。在这一状态下，（$y|xz$）子系统的双体纠缠相比单激发情形显著增强。在三个面板中，增加激发数都会系统性地提高熵，这意味着激发通常会增强纠缠。然而，系统对 θ 的响应在很大程度上取决于被激发的模式。在第一个面板中，增加第一个指标会产生明显的振荡，并具有更高的平均值。在第二个面板中，激发第二种模式会提高熵，但会产生更为紧凑的非振荡曲线。在第三个面板中，激发第三种模式会在 $\theta \simeq \frac{3\pi}{17}$ 附近引起陡峭的下降，在特定角值下纠缠受到显著抑制。这些结果凸显了不同激发模式所扮演的不对称角色：一些模式始终会增强关联，而另一些模式则会在纠缠结构中引入强烈的角依赖调制。

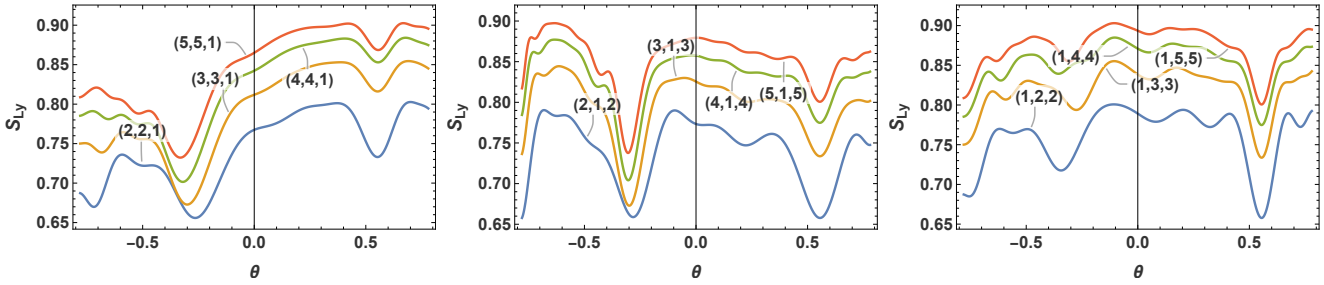


图 6.（彩色在线）线性熵 S_{Ly} 随混合角 θ 变化的演化，适用于态（$n, m,$ l).

熵见证 S_{Ly} 与 θ 的关系现予以研究，但此处考虑的态为（n, m, l），结果见图（6）。可以观察到，它明显依赖于混合角 θ，这证实后者是量子关联的一个可控参数。结果还揭示了双体纠缠（$y|xz$）中的内在不对称性。显然，激发态越高、对应的量子数越大，纠缠越强，这表明系统中的量子关联会随能量变化而缩放。最后，当θ取某一特定值时，纠缠会降至最小值，该值约等于图（4）中提到的数值。

C. z 振子与 xy 振子之间的量子纠缠

关于二分划分（ S_{Lz} 的线性熵 $xy|z$的量子纠缠计算结果如图（7）所示。事实上，与（$xy|z$）相关的双体熵可表示如下:

$$\begin{aligned} S_{Lz}[(n,0,0);\theta] &= S_{Ly}[(n,0,0);-\theta], \\ S_{Lz}[(0,m,0);\theta] &= S_{Ly}[(0,m,0);-\theta], \\ S_{Lz}[(0,0,l);\theta] &= S_{Ly}[(0,0,l);-\theta]. \end{aligned} \tag{40}$$

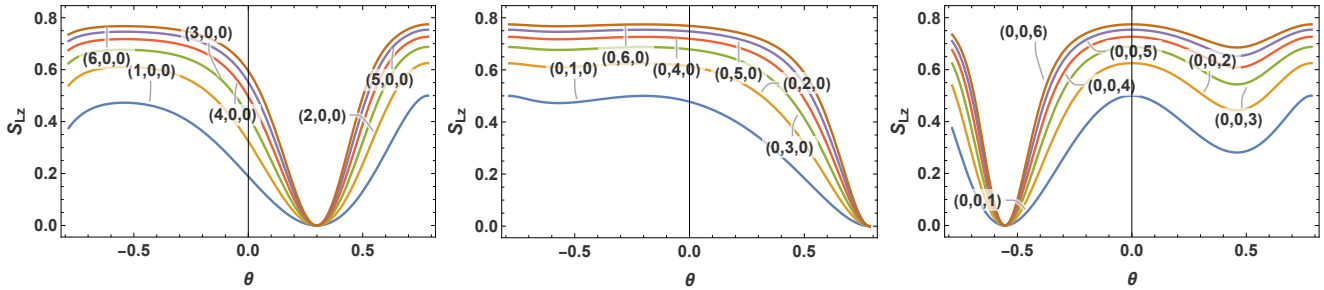


图 7.（在线彩色）线性熵 S_{Lz} 随混合角 θ 变化的情况；从左到右分别对应态 (n，0，0)、(0，m，0) 和 (0，0，l)。

图（7）中的结果表明，对于相同的状态，二分划分（ S_{Lz} ）的线性熵$xy|z$与二分划分（ S_{Ly} ）的线性熵$y|xz$呈现出对称关系。此外，

对于状态（n，0，0），量子纠缠随 n 单调增加。这表明，随着 x 振子激发程度的提高，纠缠也会增加。对于固定的 n，量子纠缠在$\theta \simeq \frac{2}{11}\pi$处消失。然而，当 x 振子处于基态，即 $n=0$，但对于（$m \neq 0$）时，随着 m激发态的能级提高，纠缠也会增加。此外，在 m 固定时，纠缠随 θ 值的增大而减小，并在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处达到最小值。此外，当 x 和 y 振子均处于基态（$n=0$，$m=0$），而振子 z 处于激发态（$l \neq 0$）时，纠缠随 l 的变化呈现稳健特性，并在 $\theta = -\frac{11}{62}\pi$ 处达到最小值。

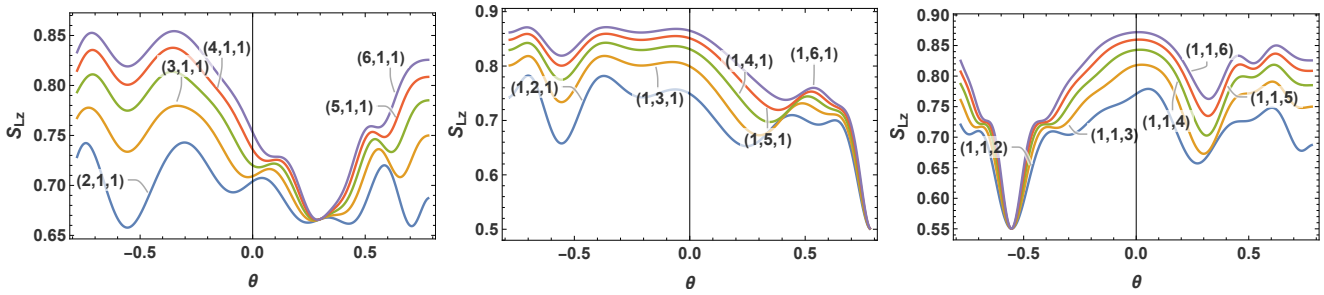


图 8. 对于态（n，1，1）、（1，m，1）和（1，1，l），线性熵 S_{Lz} 随混合角 θ 的演化，图中从左至右依次排列。

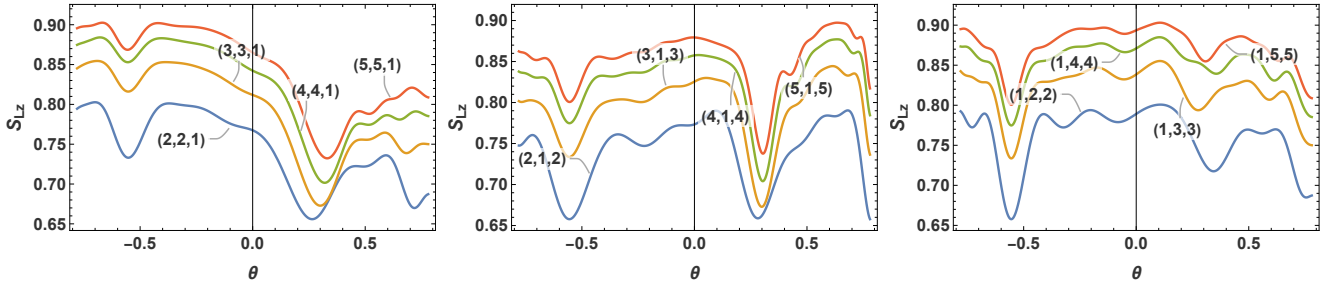


图 9. 对于态（n，m，l），线性熵 S_{Lz} 随混合角 θ 的演化。

在图（8）和图（9）中，我们分别研究了态（n，1，1）、（1，m，1）、（1，1，l）和（n，m，l）的熵 S_{Lz} 随 θ 的变化。如图所示，纠缠的变化再次主要取决于混合角 θ。此外，结果揭示了双体纠缠（$xy|z$）中固有的不对称性。显然，具有较高量子数的稳健激发态会增强纠缠。然而，根据对二分划分（$y|xz$）和（$xy|z$）的线性熵的研究可以发现，对于所有量子数 n、m 和 l，图（8）和图（9）的整体结构都呈现出显著的对称性，这与图（5）和图（6）所示的结构形成对照。事实上，我们可以将相应线性熵之间的关系，即 S_{Ly}和 S_{Lz}，表示为：$S_{Ly}[(n, m, l); \theta] = S_{Lz}[(n, m, l); -\theta]$。这一结果表明，系统的量子信息含量具有重要的对称性。事实上，这意味着这两个对偶基之间的量子信息流相对于混合角 θ 是平衡且可逆的。

D. 一方与其余部分之间的纠缠程度

在本段中，我们将展示不同二分划分之间的量子纠缠满足一种类单配约束，通常称为三角不等式。具体而言，一个二分划分中的纠缠量不能超过其他二分划分中的纠缠量之和。为进一步讨论，我们引入以下权衡量 [66, 67]

$$M_k[(n,m,l),\theta] = S_{Li}[(n,m,l);\theta] + S_{Lj}[(n,m,l);\theta] - S_{Lk}[(n,m,l);\theta], \tag{41}$$

对于所有互不相同的 i、j、$k \in \{x, y, z\}$。

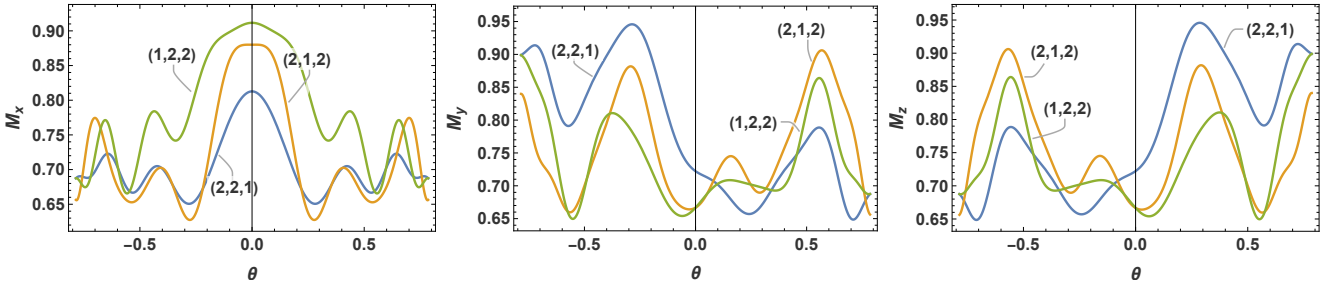


图 10。（网络版为彩色）对于状态（n，m，l），各量 M_x、M_y 和 M_z 随混合角 θ 的演化

在图（10）中，我们给出了针对一些选定态的式（41）所定义三角量的数值示例。结果揭示了显著的内禀对称性。特别是，对于态（1, 2, 2），在 θ 的大部分范围内，熵的强度高于（2, 1, 2）态和（2, 2, 1）态，其中 M_x 在 $\theta = 0$ 处达到最大值。此外，M_y 表现出这样的特征：当 θ 取负值时，（2, 2, 1）态的强度明显较高，而当其取正值时，（2, 1, 2）态占主导。然而，M_z 呈现出与 M_y 相反的行为。随后，M_y 和 M_z 表现出关于一的明显对称性，这由关系 $M_z(\theta) = M_y(-\theta)$ 所体现。

E. 两个耦合振子的一个受限情形

这里，我们来探讨如何推导文献中已有的一些结果 [68]。在两个角 Φ 和 φ 均为零的条件下，纯度 $\mathbb{P}_y$ 具有如下形式：

$$\mathbb{P}_y(n, m, l) = 1. \tag{42}$$

于是，双体系统（$y|xz$）为纯态，这意味着振子（n，m，l）的线性熵为零。在相同条件下，纯度 P_x 和 P_z 为：

$$\mathbb{P}(n,l) = \mathbb{P}_x(n,l) = \mathbb{P}_z(n,l) = (n!l!)^{-2} \frac{d^n}{du^n}\frac{d^l}{dv^l}\frac{d^n}{da^n}\frac{d^l}{dc^l}\left(-\frac{\mu_\theta^2+1}{\Sigma}\right)\Bigg|_{u,v,a,c=0}, \tag{43}$$

其中，我们将量 Σ 定义为：

$$\Sigma = (c+1)(v+1)(au-1)\mu_\theta^2 + (a+1)(u+1)(cv-1). \tag{44}$$

此外，对于 n 和 l 的所有取值，还可以得到 $\mathrm{P}(n, l) = \mathrm{P}(l, n)$。这表明，系统的量子纠缠关于两个振子的激发能级 (n, l) 具有明显的对称性。这一分析结果与文献 [68] 中定义的线性熵和纯度的解析表达式完全一致。受此启发，我们给出以下关于 $\Phi = \varphi = 0$ 的线性熵量子纠缠计算结果。

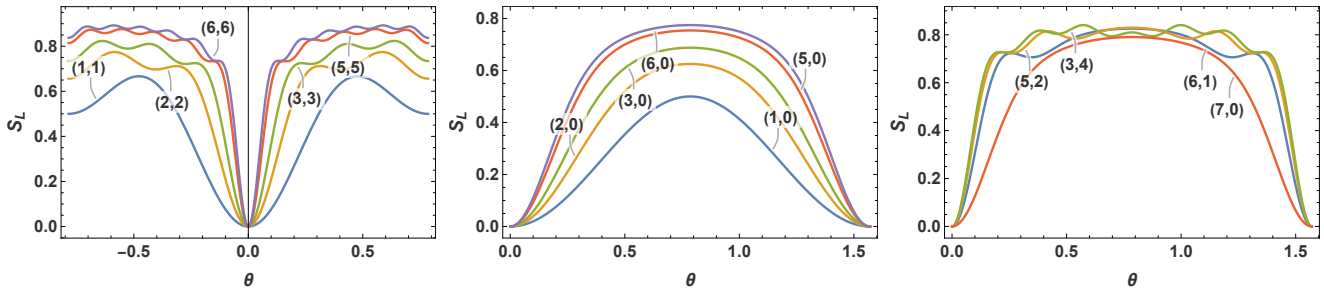


图 11。（在线彩色）对于若干双部态 (n, m)，线性熵随混合角 θ 的演化。

此外，我们还给出了本例中状态（n，0）和（0，n）的纯度：

$$\mathbb{P}(n,0) = \mathbb{P}(0,n) = \frac{(-1)^{(n)}}{n!}\left(\frac{1}{\mu_\theta^2+1}\right)^{2n} P_n^{(-2n-1,0)}\left(2\mu_\theta^4 - 1\right). \tag{45}$$

通过对角施加 $\frac{\pi}{4}$ 的相移，使其限制在正值范围内，我们给出了相同状态的对应示意图。

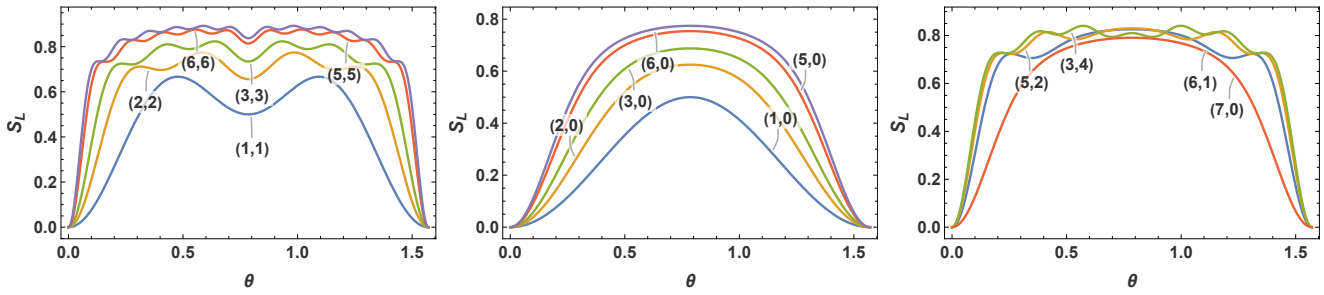


图 12。（在线彩色）线性熵 S_L 随混合角 θ的演化，其中 $\Phi = \varphi = 0$，平移量为 $\frac{\pi}{4}$。

图（11）和（12）表明，初始量子数 n和 l 基本上能够增强纠缠界限。然而，对于 $n + l = 7$，纠缠量并无显著差异。此外，对于 $n = l$，量子纠缠在 θ的某些取值下达到最大值。还值得注意的是，这种行为与 [69]中提到的行为相似。

V. 结论

在本文中，我们提出了一种称为几何对角化的新型数学技术。该技术基于旋转变换和混合角，用于研究三个量子谐振子中的纠缠。事实上，我们旨在减少自由度，从而显著促进该系统中的量子纠缠计算与分析。此外，我们利用系统的纯度，仅基于一个参数，即混合角 θ，来确定系统的双体纠缠。我们针对每个双体系统的纠缠展示了若干具体实例：$(x|yz)$、$(y|xz)$和$(xy|z)$。此外，我们表明，某些结果可以用直接明了的解析形式表示。我们证明，所有子系统中的纠缠量都对任一振子中的激发高度敏感。事实上，我们表明，这些激发增强了整个系统中关联的重新分配。

粗略地说，纠缠强度实际上由参数 θ 调制，该参数的取值范围从最大关联到完全可分性。此外，我们通过等式 $S_{Ly}[(n,\ m,\ l)\ \theta] = S_{Lz}[(n,\ m,\ l)\ -\theta]$ 量化了二分划分 $(y|xz)$ 与 $(xy|z)$ 之间的对称行为。基于此，我们获得了二分划分 $(x|yx)$ 内部对于量子数 $(n,\ m,\ l)$ 的对称行为。此外，我们考察了极限情形，将两个混合角 (Φ 和 φ) 设为零，以验证研究结果的准确性。总之，我们获得了与 [68] 中所述相同的纠缠界限。

我们的研究成果加深了对三个耦合谐振子中纠缠行为的理解，并强调了激发能级和混合角在塑造这一量子现象中的重要作用。这些结果表明，量子振子在量子通信和量子技术方面具有良好的应用前景。控制和操纵量子性质的能力，可能会推动高精度量子传感器和计算系统取得重大进展。

利益冲突
作者声明不存在利益冲突。

数据可用性
本研究期间未生成或分析任何数据集。数据共享不适用。

[1] 爱因斯坦、波多尔斯基和罗森，“量子力学描述的物理实在能否被认为是完备的？”，《物理评论》47，777（1935）。[2] T. Figueiredo Roque 和 J. A. Roversi，“不稳定性在量子关联存续中的作用”，《物理评论A》88，032114 2013( )。[3] E. Schr¨odinger，“分离系统之间概率关系的讨论”，剑桥哲学学会数学会刊31，555（1935）。

[4] A. Slaoui, N. Ikken, L. B. Drissi, and R. A. Laamara, 《量子通信协议：从理论到量子计算机实现》，载于《量子计算：现代研究中的创新与应用》，IntechOpen（2023）。[5] H. Tarif, A. Slaoui, and R. A. Laamara, 《解锁热力学多任务：通过相干性与纠缠探索双量子比特引擎的运行》，《物理学A：统计力学及其应用》，668（2025）130469。[6] J. S. Bell, “关于爱因斯坦-波多尔斯基-罗森悖论”, 《物理学》1，195（1964）。[7] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, “量子纠缠”, 《现代物理评论》81，865（2009）。[8] A. K. Ekert, “基于贝尔定理的量子密码学”, 《物理评论快报》67，661（1991）。[9] S. L. Braunstein and H. J. Kimble, “连续量子变量的隐形传态”, 《物理评论快报》80，869（1998）。[10] X. M. Hu, Y. Guo, B. H. Liu, C. F. Li, and G. C. Guo, “量子隐形传态进展”, 《自然综述：物理》5，339（2023）。[11] A. Kuhn and D. Ljunggren, “基于腔的单光子源”, 《当代物理学》51，289（2010）。[12] T. Figueiredo Roque and J. A. Roversi, “不稳定性在量子关联存续中的作用”, 《物理评论A》88，032114（2013）。[13] S. G. Hofer, W. Wieczorek, M. Aspelmeyer, and K. Hammerer, “脉冲腔光机械学中的量子纠缠与隐形传态”, 《物理评论A》84，052327（2011）。[14] Q. Lin and B. He, “脉冲驱动下的光机械纠缠”, 《光学快报》23，24497（2015）。[15] K. Jacobs, R. Wu, X. Wang, S. Ashhab, Q.-M. Chen, and H. Rabitz, “线性网络中的快速量子通信”, 《欧洲物理快报》114，40007（2016）。[16] D. Stefanatos, “利用最优控制最大化光机械纠缠”, 《量子科学与技术》2，014003（2017）。[17] D. Stefanatos and E. Paspalakis, “通过约瑟夫森耦合的开关控制增强激子-极化激元间的纠缠”, 《物理评论B》98，035303（2018）。[18] D. Stefanatos and E. Paspalakis, “利用绝热捷径高效生成激子-极化激元间的纠缠”, 《光学快报》43，3313（2018）。[19] S. R. Hedemann and B. D. Clader, “远程微波腔的光机械纠缠”, 《美国光学学会杂志B》35，2509（2018）。[20] M. Yachi, R. Hab-arrih, and A. Jellal, “利用三个量子比特实现量子傅里叶变换”, 《物理学杂志A：数学与理论》56，185302（2023）。[21] A. El Allati, H. Amellal, N. Metwally, S. Aliloute, 《通过耗散腔实现纠缠与量子隐形传态》，《光学与激光技术》116，13–17（2019）。[22] G. Adesso, S. Ragy, and A. R. Lee, “连续变量量子信息：高斯态及其扩展”, 《开放系统与信息动力学》21，1440001（2014）。[23] A. Naimy, A. Slaoui, A. Lakhfif, H. El Hadfi, and R. Ahl Laamara, 《在光机械学中实现最优多参数量子估计》，《物理评论A》，112（2025）052604。[24] G. Adesso, A. Serafini, and F. Illuminati, “连续变量系统三模高斯态中的多体纠缠：量化、共享结构与退相干”, 《物理评论A》73，032345（2006）。[25] G. Adesso, A. Serafini, and F. Illuminati, “连续变量系统中的纠缠、纯度与信息熵”, 《开放系统与信息动力学》12，189（2005）。[26] Aliloute, S., El Allati, A., El Aouadi, I. & Metwally, N.《通过纠缠相干量子网络实现双向隐形传态》。《美国光学学会杂志B》。38(12)，3784–3793（2021）。[27] Seida, C., El Allati, A., Metwally, N. & Hassouni, Y.《多方双向隐形传态》。《光学》247，167784（2021）。[28] C. Rod´o, G. Adesso, and A. Sanpera, “连续变量关联的操作性量化”, 《物理评论快报》100，110505（2008）。[29] R. Tatham, L. Mi˘sta Jr., G. Adesso, and N. Korolkova, “连续变量非高斯维尔纳态中的非经典关联”, 《物理评论A》85，022326（2012）。[30] G. Adesso, S. Ragy, and D. Girolami, “相对论量子信息中的连续变量方法：非惯性参考系中标量场模量子与经典关联的表征”, 《经典与量子引力》29，224002（2012）。[31] G. Adesso, M. Ericsson, and F. Illuminati, “无限双体纠缠与真正多体纠缠并存：从离散变量到连续变量系统中产生的多重性量子关联”, 《物理评论A》76，022315（2007）。[32] R. Hab-Arrih and A. Jellal, “三个超强耦合系统中的虚激发、纠缠动力学与多妻性”, 《物理学年鉴》535，2200527（2023）。[33] R. Hab-Arrih, A. Jellal, D. Stefanatos, and E. H. El Kinani, “内禀退相干下超强耦合谐振子中的虚激发与量子关联”, 《光学》262，170719（2023）。[34] B. El Alaoui, A. Slaoui, A. Lakhfif, and R. A. Laamara, 《高斯噪声信道中自旋j相干态叠加的宇称对称性破缺》，Phys. Scr，100（2024）015113。[35] J.-Y. Zhou, Y.-H. Zhou, X.-L. Yin, J.-F. Huang, and J.-Q. Liao, “超强耦合振子系统中由虚激发维持的量子纠缠”, 《科学报告》10，12557（2020）。[36] A. Voje, A. Croy, and A. Isacsson, “与热环境非线性耦合的量子振子的纠缠动力学”, 《物理评论A》92，012313（2015）。[37] J. C. Gonzalez-Henao, E. Pugliese, S. Euzzor, S. F. Abdalah, R. Meucci, and J. A. Roversi, “利用相位控制在量子参量振子中生成纠缠”, 《科学报告》5，13152（2015）。[38] J. C. Gonzalez-Henao, E. Pugliese, S. Euzzor, R. Meucci, J. A. Roversi, and F. T. Arecchi, “三耦合量子振子系统中的纠缠动力学控制”, 《科学报告》7，9957（2017）。[39] D. Park, “耦合谐振子系统中的纠缠动力学与不确定性关系：精确结果”, 《量子信息处理》17，147（2018）。

[40] D. Park, 《三个耦合谐振子中的纠缠动力学》, 《量子信息处理》18，219（2019）。[41] R. Hab-Arrih、A. Jellal 和 A. Merdaci, 《三个含时耦合谐振子中的纠缠与相干性的动力学及再分配》, 《国际几何方法与现代物理学杂志》18，2150120（2021）。[42] D. N. Makarov, 《电磁场中谐振子的量子纠缠》, 《科学报告》8，16650（2018）。[43] D. N. Makarov, 《耦合谐振子及其量子纠缠》, 《物理评论E》97，042203（2018）。[44] D. N. Makarov, 《耦合谐振子的量子纠缠与反射系数》, 《物理评论E》102，052213（2020）。[45] R. Hab-Arrih、A. Jellal 和 A. Merdaci, 《磁耦合模态的非高斯纠缠：动力学分析》, 《物理学杂志A：数学与理论》（2022）。[46] M. Walschaers, 《非高斯量子态及其寻找之处》, 《PRX量子》2，030204（2021）。[47] F. Albarelli、M. G. Genoni、M. G. A. Paris 和 A. Ferraro, 《量子非高斯性与维格纳负性的资源理论》, 《物理评论A》98，052350（2018）。[48] M. Di Tullio、N. Gigena 和 R. Rossignoli, 《超导系统中的费米子纠缠》, 《物理评论A》97，062109（2018）。[49] J.-D. Tang、Q.-Z. Cai、C. Ze-di 等, 《关于光机械系统中量子纠缠的展望》, 《物理学快报A》429，127966（2022）。[50] A. Halpin、P. J. Johnson、R. Tempelaar、R. S. Murphy、J. Knoester、T. L. Jansen 和 R. D. Miller, 《分子二聚体的二维光谱揭示了振电耦合对激子相干性的影响》, 《自然化学》6，196（2014）。[51] L. F. Calder´on 和 L. A. Pach´on, 《非绝热太阳能采集》, 《物理化学化学物理》22，12678（2020）。[52] L. Chen、P. Shenai、F. Zheng、A. Somoza 和 Y. Zhao, 《光捕获系统中的最优能量转移》, 《分子》20，15224（2015）。[53] F. Fillaux, 《甲酸二聚体及其类似物中的量子纠缠与非局域质子转移动力学》, 《化学物理快报》408，302（2005）。[54] M. Quack, 《多原子分子中耦合振动的光谱与动力学》, 《物理化学年度评论》41，839（1990）。[55] P. C. Stamp 和 A. Gaita-Arino, 《由化学制成的基于自旋的量子计算机：缘由与方式》, 《材料化学杂志》19，1718（2009）。[56] X. Ma、P. Jiang、Y. Qi、J. Jia、Y. Yang、W. Duan 等, 《表面化学反应活性量子振荡的实验观测》, 《美国国家科学院院刊》104，9204（2007）。[57] G. Giedke、B. Kraus、M. Lewenstein 和 J. I. Cirac, 《三模高斯态的可分性性质》, 《物理评论快报》87，167904（2001）。[58] D. X. Macedo 和 I. Guedes, 《含时耦合谐振子》, 《数学物理学杂志》53，052101（2012）。[59] A. Merdaci 和 A. Jellal, 《三个耦合谐振子中的纠缠》, 《物理学快报A》383，126134（2019）。[60] E. Wigner, 《关于热力学平衡的量子修正》, 《物理评论》40，749（1932）。[61] K. Banaszek、M. W. Brown、P. G. Kwiat 和 S. F. Pereira, 《通过光子计数直接测量维格纳函数》, 《物理评论A》60，674（1999）。[62] J. Weinbub 和 D. K. Ferry, 《维格纳函数方法的最新进展》, 《应用物理评论》5，041104（2018）。[63] Y. S. Kim 和 M. E. Noz, 《量子力学的相空间图像：群论方法》, World Scientific（1991）。[64] R. Koekoek 和 H. G. Meijer, 《拉盖尔多项式的推广》, 《SIAM数学分析杂志》24，768（1993）。[65] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun, 《数学函数手册》, Dover（1972）。[66] V. Coffman、J. Kundu 和 W. K. Wootters, 《分布式纠缠》, 《物理评论A》61，052306（2000）。[67] X. Ge、L. Liu、Y. Wang、Y. Xiang、G. Zhang、L. Li 和 S. Cheng, 《真正三方纠缠的忠实几何度量》, 《物理评论A》110，L010402（2024）。[68] R. Hab-arrih、A. Ghaba 和 A. Jellal, 《耦合系统中的量子导引与纠缠：精确结果》, arXiv:2411.07010（2024）。（已投稿至《物理学年鉴》）[69] D. Makarov 和 K. Makarova, 《线性耦合量子谐振子及其量子纠缠》, 《数学》13，1452（2024）。