通过 KP 层级实现 $\beta = L^2$ 随机矩阵系综的精确可解性

Christopher D. Sinclair[1] *Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403, USA*(日期：2026年1月6日)

Dyson 指数为 $\beta = L^2$ 的随机矩阵系综描述了在外部势作用下对数相互作用的 M 电荷-L 粒子系统，但长期以来，人们一直难以获得其物理可观测量的精确公式，尤其是 $L \neq 1, 2$。我们证明，对于偶数 L，$\beta = L^2$ 系综在有限粒子数下受 KP 层级支配——这与经典 $\beta = 1, 2, 4$ 系综的 KP 可解性相呼应。配分函数是一个满足 Hirota 双线性恒等式的超 Pfaffian τ-函数，而关联函数则由作用于该 τ-函数的有限阶微分算子生成。其关键机制是涌现出的量子化动量，它将系统划分为离散扇区，并以动量守恒作为选择定则。这使系统实现了显著的降维，从 $\binom{LM}{L}$ 降至 $O(L^2M)$，从而能够显式计算物理可观测量。

arXiv:2601.01304v1 [math-ph] 3 Jan 2026

引言。随机矩阵理论已成为数学物理中的基础工具，对量子混沌、无序系统、数值分析和数论产生了深远影响 [1, 2]。经典结果表明，许多不同的物理系统具有相同的局部谱统计，这一现象称为普适性 [3]。具有 $\beta = 1$、2、4 的 Dyson 系综具有特殊地位：其行列式或 Pfaffian 结构能够精确计算关联函数，并将其与可积层级、正交多项式和表示论联系起来 [4–7]。可积层级出现在随机矩阵理论中，反映了一种更广泛的代数现象；这一现象早已在矩阵积分理论和 Toda/KP 格点中得到认识 [8]。这些系综为“可解”随机矩阵模型树立了标杆。

远离经典取值 $\beta = 1, 2, 4$ 时，几乎没有代数结构留存。对于一般的 β，联合密度仍保留对数气体形式

$$F(x_1, \ldots, x_M) \propto \prod_{i<j} |x_i - x_j|^\beta \prod_k e^{-V(x_k)},$$

但不存在行列式或 Pfaffian 表示，关联函数缺乏简洁的闭式描述，而现有方法——例如三对角模型 [9]——要么是微扰性的，要么是渐近性的 [10]。一个核心问题是，是否存在某些非经典的 β 值，使精确的代数结构得以恢复。

在本快报中，我们证明了 $\beta = L^2$ 为偶数的L 系综可通过 KP 层级实现精确求解。配分函数是一个超 Pfaffian τ函数，满足 Hirota 双线性恒等式；所有关联函数均由作用于该τ函数的微分算子生成。其可解性源于一种涌现的量子化动量，它强制实施一条守恒律。动量守恒充当选择定则，将有效维数从 $\binom{LM}{L}$ 压缩至 $O(L^2M)$，从而为物理可观测量提供精确公式。

从代数角度看，相互作用项 $|x_i - x_j|^{L^2}$ 与由 L 重折朗斯基刃所张成的外积体积完全等同，从而将系综提升到外代数框架中；在该框架下，超 Pfaffian（L 形式的多项式不变量）取代行列式。配分函数成为 Gram L 形式的超 Pfaffian，这相当于当 $\beta = 1, 2$ 时出现的反对称 Gram 矩阵，而该超 Pfaffian 的时间变形定义了一个 τ 函数。

时间导数通过平移动量振幅起作用，而满足动量守恒的粒子插入与湮灭的配对服从 Pl¨ucker 关系，由此得到 Hirota 双线性恒等式。该恒等式编码了 τ函数所满足的可积层级。

超 Pfaffian 几何、动量守恒与可积结构的结合，使 $\beta = L^2$ 系综成为一类新型可解的非经典随机矩阵模型，将精确可解性扩展到经典 Dyson 指数以外（$\beta = 1$、2、4）。它们处于完全可解的经典系综与在解析上难以处理的通用对数气体之间的中间地带，表明可积性能够通过代数机制在非经典区域中涌现。该框架揭示，精确可解性并不局限于经典 Dyson 指数，而是扩展到一个由平方 β Dyson 指数组成的无限族。我们聚焦于 L 偶数情形，因为这简化了论述；奇数 L的情形涉及一种基于 $2L$-形式的相关形式体系，将在未来的出版物中讨论。

主要结果。对于偶数 L 和 $\beta = L^2$，M-粒子 β-系综可在有限维外代数中获得一种规范表示，其中配分函数是一个超 Pfaffian $\tau(t)$，并且关于变形参数 $t = \{t_k\}$ 呈多项式形式。该超 Pfaffian 定义了一个 KP τ-函数：它满足 Hirota 双线性恒等式（其中 Miwa 平移按L^2加权），且所有关联函数都可通过 Miwa 平移或作用于 τ 的微分算子生成。可积层级直接源自由相互作用 $|x_i - x_j|^{L^2}$ 所确定的动量分次子空间上的 Pl¨ucker 关系，从而确立 $\beta = L^2$ 系综作为一类可解的非经典随机矩阵模型。

此处推导出的所有可积恒等式均源自固定粒子数下的有限维 Pl¨ucker 几何，无需引入无限秩格拉斯曼流形或大-M 极限。

朗斯基几何。粒子位置被视为 LM维向量空间 V中 L维子空间的格拉斯曼流形，从而将 L体相互作用编码为一个反对称几何对象。对于每个点 x，定义 L刃（可分解元素）

$$\omega(x) = v(x) \wedge v'(x) \wedge \cdots \wedge v^{(L-1)}(x) \in \Lambda^L V,$$

其中， v 是由单项式构成的向量，它生成次数小于 LM 的多项式空间，撇号表示导数。 $\omega(x)$的坐标由 L 个有序整数型量子数（u_1、.....、u_L）标记，其振幅由朗斯基行列式Wr(x^{u_1}、.....、x^{u_L})给出。该朗斯基行列式是一个幂次为 $u_1+\cdots+u_L-L(L-1)/2$.的单项式。通过减去规范总和 $\Sigma = L(LM_1)/2$ 对这些幂次重新居中，定义动量 $p_u = u_1 + \cdots + u_L - \Sigma$,–据此将 $\omega(x)$的坐标按动量扇区分级。

关键的代数恒等式是合流 Vandermonde 公式

$$\star(\omega(x_1) \wedge \cdots \wedge \omega(x_M)) = \prod_{i<j} (x_j - x_i)^{L^2},$$

其中 $\star$ 表示霍奇对偶（投影到行列式线）。该恒等式表明，整个 L^2-相互作用结构源自一个反对称多重线性对象。

超 Pfaffian 表示。对 Wronskian 刃的坐标按照概率测度 μ 进行积分，可得到 Gram L-形式

$$\gamma = \int \omega(x)\, d\mu(x),$$

这是 L-形式的直接类比，对应于 $\beta = 1$,4 系综中的反对称 Gram 矩阵。利用合流 Vandermonde 恒等式， M粒子的配分函数为

$$Z = \star\left(\frac{\gamma^{\wedge M}}{M!}\right) =: \mathrm{PF}(\gamma),$$

的超 Pfaffian，它将整个对数气体相互作用编码在 γ的反对称结构中。

动量守恒源于几何结构。每个刃 $\omega(x)$都可分解为具有确定动量 p 的分量，而楔积会将动量标签相加。行列式线携带的总动量为零，霍奇投影 $\star$ 只选取 $\gamma^{\wedge M}$ 的零动量分量。因此，只有净动量为零的构型才会对 Z作出贡献。这一动量守恒律正是降维的机制：超 Pfaffian 起到动量过滤器的作用，将 $\binom{LM}{L}$ 维外代数压缩到一个 $O(L^2M)$ 维子空间。所有物理可观测量——配分函数、关联函数和时间流——都遵守这一守恒律。

动量脊。动量守恒将外代数组织成有限个离散扇区，我们可以定义一组按动量索引的基本 L-形式，$\{\varepsilon_p\}$ 。$\{\varepsilon_p\}$ 的线性张成空间就是动量脊。在此基底下，

$$\omega(x) = \sum_p x^{P+p}\, \varepsilon_p, \qquad \gamma = \sum_p m_p \varepsilon_p,$$

其中， $P = L^2(M-1)/2$ 是用于补偿 Wronskian行列式导数偏移的规范幂，而 $m_p = \int x^{P+p}\, d\mu(x)$ 是移位矩。允许的动量为 $|p| \le L^2(M-1)/2$，因此有效维数为 $O(L^2M)$。

超 Pfaffian τ函数。为与可积层级建立联系，我们引入测度的时间变形，将静态配分函数 Z 扩展为时间依赖的 τ函数。给定时间 $t = \{t_k : k \in \mathbb{Z}\}$，引入时间变形的测度

$$d\mu_t(x) = e^{\xi(x,t)}\, d\mu(x), \qquad \xi(x,t) = \sum_k t_k x^k.$$

矩变为时间依赖的，从而得到时间变形的 Gram L形式 $\gamma(t) = \sum_p m_p(t)\, \varepsilon_p$. 时间变形的配分函数

$$\tau(t) = \mathrm{PF}(\gamma(t))$$

是一个有限维超 Pfaffian，充当 τ系综的 $\beta = L^2$ 函数。从概率论的角度看，该 τ函数将所有关联函数封装为一个生成函数。它在结构上与 KP τ函数 [5, 6, 13], 发挥相同作用，只是以超 Pfaffian 取代了行列式或普通 Pfaffian。

时间导数与动量流。时间导数会移动矩。记作 $\partial_k := \partial_{t_k}$，我们有$\partial_k \gamma = \sum_p m_{p+k}(t)\, \varepsilon_p$，因此 ∂_k 充当作用于动量脊的移位算子，其复合规则为 $\partial_k \partial_\ell \gamma = \partial_{k+\ell}\gamma$.

τ 的时间导数由超Pfaffian多重线性性得到：

$$\partial_k \tau = \star\left(\partial_k \gamma \wedge \frac{\gamma^{\wedge(M-1)}}{(M-1)!}\right),$$

在一个因子 γ中移动动量。

Gram 型上的多项式微分算子可规范地提升为作用于 τ-函数的算子。对于多项式 $Q(x) = \sum_k q_k x^k$，定义

$$Q(\partial)[\gamma] := \int Q(x)\, \omega(x)\, d\mu(x), \qquad Q(\partial) := \sum_k q_k\, \partial_k,$$

其中，∂_k 在积分下表现为乘以 x^k。$Q(\partial)$ 作为托普利茨算子作用于动量脊。

由于 $\tau = \mathrm{PF}(\gamma)$ 是关于矩 $m_j(t)$ 的齐次 M 次多项式，算子 $Q(\partial)$ 通过$\widehat{\ }$极化提升为微分算子 $Q(\partial)$，满足$\widehat{\ }$基本恒等式 $Q(\partial)[\tau] = \mathrm{PF}(Q(\partial)[\gamma])$。这是 KP 理论中顶点算子演算的超 Pfaffian 类比。

关联函数。系综中具有物理意义的可观测量包括 m 点关联函数 $R_m(\mathbf{y})$，它们表示在位置 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ 发现粒子的概率密度。在代数上，

$$R_m(\mathbf{y}) \propto \star\left(\omega(y_1) \wedge \cdots \wedge \omega(y_m) \wedge \frac{\gamma^{\wedge(M-m)}}{(M-m)!}\right). \quad (1)$$

这一约化由 米瓦时间平移 [14]精确刻画。我们根据分量 $[z^{-1}]$定义基本平移向量 $[z^{-1}]_k = 1/(kz^k)$。对于一个构型 $\mathbf{y}$，总时间变形是以下各项的叠加 $t_{\mathbf{y}} = -L^2 \sum_{i=1}^m [y_i^{-1}]$。这种时间变形对应于在位置 m 为荷的L 粒子 $\mathbf{y}$。因此，只需在这些平移后的时间处计算（$M-m$）粒子 τ函数，即可恢复关联函数：

$$R_m(\mathbf{y}) = \prod_{i<j} |y_i - y_j|^\beta \prod_{i=1}^m e^{-V(y_i)} \cdot \frac{\tau_{M-m}(t_{\mathbf{y}})}{\tau_M(0)}.$$

因此，粒子坐标充当离散的 Miwa 时间参数 [15]。向系综中插入粒子，相当于沿动量主轴将 τ函数按向量 $t_{\mathbf{y}}$ 移位，从而连接静态概率与动态时间演化。

等价地，根据算子提升机制，由多项式 $Q_{\mathbf{y}}(x) = \prod_i (x - y_i)^\beta$ 构成的微分算子对应于粒子插入，

$$R_m(\mathbf{y}; t) = \prod_{i<j} |y_i - y_j|^\beta \prod_{i=1}^m e^{\xi(y_i,t)} \cdot \frac{\widehat{Q}_{\mathbf{y}}(\partial)[\tau_{M-m}(t)]}{\tau_M(t)}.$$

这两种视角——Miwa 特化与微分算子——都能用通用的 τ函数给出所有关联函数的显式公式。

可积结构。Hirota 双线性恒等式断言，在一对离域粒子系统中，粒子插入与湮灭之间存在双线性关系，并由共轭 Miwa 移位加以调节。考虑一对背景 $\gamma(t)^{\wedge(M-1)} \otimes \gamma(t')^{\wedge(M+1)}$，分别表示势由时间 t和 t'.确定的 $M-1$（分别为 $M+1$）个离域粒子。在代数层面，粒子插入对应于与一个固定的 L-刃作楔积，而移除则对应于相对于对偶刃进行收缩；双线性恒等式源于这样一个事实：这些运算必须满足动量脊中的动量守恒 Pl¨ücker 关系。此处的 Hirota 恒等式并非额外假设，而是一种记账恒等式，用于确保成对粒子插入与移除时动量守恒。

在时间 t向背景中插入一个粒子，会得到一个关于所插入粒子的动量标签的分布。若新粒子占据动量扇区 j，则动量守恒将 $\gamma(t)^{\wedge(M-1)}$ 的背景态限制为总动量为 $-j$。相应的概率生成函数为

$$e^{\xi(z,t)} \frac{\tau_{M-1}(t - L^2[z^{-1}])}{\tau_M(t)} \propto \star\big(\omega(z) \wedge \gamma(t)^{\wedge(M-1)}\big).$$

因此，粒子插入是通过负 Miwa 移位 $-L^2[z^{-1}]$实现的。

背景 $\gamma(t')^{\wedge(M+1)}$中的粒子湮灭由共轭正 Miwa 移位生成。正如补充材料所示，在对偶动量脊中存在一个刃 $\Omega(z,\ t')$，使得增量 $\Delta\tau_{M+1}(z,\ t') = \tau_{M+1}(t' + L^2[z^{-1}]) - \tau_{M+1}(t')$ 满足

$$\Delta\tau_{M+1}(z, t') \propto \star\big(\iota_{\Omega(z,t')} \gamma(t')^{\wedge M}\big)$$

除标量归一化因子外，该收缩生成了粒子湮灭所诱导的动量脊振幅移位。

Hirota 双线性恒等式断言 Laurent 展开中的常数项为零，

$$[z^0]\ \tau_{M-1}(t - L^2[z^{-1}])\, \Delta\tau_{M+1}(z, t'),$$

它将两个系统之间的动量插入与移除配对，从而确保整体动量守恒。在代数上，这对应于算子 $\omega(z)$ 对 $\gamma(t)^{\wedge(M-1)}$ 进行楔积插入，并与算子 $\iota_{\Omega(z,t')}$ 对 $\gamma(t')^{\wedge(M+1)}$ 进行收缩相配。

动量脊上的 Pl¨ucker 关系由恒等式 $\omega(z) \wedge \omega(z) = 0$生成。它进一步推出组合插入–缩并算子$\omega(z) \otimes \iota_{\Omega(z,t')}$ 作用于 $\gamma(t)^{\wedge(M-1)} \otimes \gamma(t')^{\wedge(M+1)}$时为零，从而得到有限维 M Hirota 双线性恒等式。当动量带扩展且移除固定粒子数投影后，该双线性恒等式便恢复为通常的 KP 层级 Hirota 方程，其 Miwa 时间变量按 L^2缩放。

尽管由此得到的恒等式与 KP 层级的恒等式相似，但这里是在有限维情形下推导的，体现的是精确的动量守恒，而非诉诸无限秩可积结构。

圆系综。圆形系综提供了一个典型例子，其中动量结构达到最大程度的简化。对于单位圆上的 Haar 测度，Gram 型简化为纯动量态$\gamma(0) = \varepsilon_0$. 。与所有动量扇区都有贡献的一般系综不同，离域粒子在

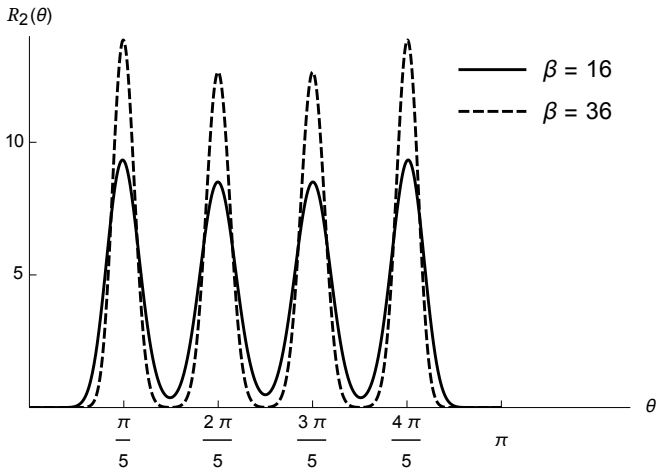


图 1。圆形系综中精确二点关联函数 $R_2(\theta) := R_2(e^{i\theta/2},\ e^{-i\theta/2})$，其中 $M = 5$，分别展示了 $\beta = 16$（实线）和 $\beta = 36$（虚线）的结果。归一化固定为 $\int_0^\pi R_2\, d\theta = \binom{5}{2} = 10$。随着 β 增大，峰在非平凡五次单位根处变得尖锐，这与粒子间距相对局域化程度的增加相一致。

圆形系综仅占据零动量扇区。这使得计算尤为简便，参见图1，其中给出了当 $\beta = 16$ 时圆系综的精确二点函数，36。

这揭示了不确定性原理。在圆上完全去局域化会产生尖锐的动量（单一扇区 ε_0），而在 y 插入一个粒子则会激活动量脊中的所有动量扇区。因此，尖锐的动量与尖锐的位置是相互排斥的极端状态。

讨论。我们已经证明，$\beta = L^2$ 系综与 L 即使在有限情况下也构成一个由 KP 层级支配的可精确求解类。该可积层级在有限 M 下出现，无需借助渐近分析。配分函数是一个 τ-函数，可作有限维格拉斯曼流形解释，并满足 Hirota 双线性恒等式；关联函数则由作用于 τ 的偏微分算子生成。

这一框架阐明了经典系综与非经典系综之间的关系。对于经典辛情形（$\beta = 4$，$L = 2$），达布定理保证了其可解性，因为该定理允许在全局范围内将 Gram 2-形式（反对称）对角化。对于 $L > 2$，一般形式不存在达布定理的类似定理，这在历史上遮蔽了高阶β 系综的可积结构。$\beta = L^2$ 系综绕过了这一几何障碍，因为它们不涉及一般的 L-形式，而是涉及 *Wronskian* L-形式。Wronskian 的刚性代数结构定义了 KP 层级中一个特定的可解子层，其对应于按 L^2缩放的 Miwa 时间变量。

可积性并非人为施加的，而是从受动量守恒约束的粒子插入的刚性组合结构中涌现出来的。这一涌现的守恒律充当选择定则，有效地将无限维 KP 流约化为与 $\beta = L^2$ 相互作用相容的特定扇区。这一视角提出了一种“电荷 L”层级的元理论，其中经典辛系综（$L = 2$）是由 Berezin 型演算涵盖的无限族超 Pfaffian 可解系统的基点，从而实现多组分对数气体的可解性。未来的工作将研究奇数-L 情形，该情形需要一种相关的 $2L$-形式主义，以及这些非经典可积系统在大M 下的渐近行为。

[1] F. J. Dyson，《数学物理学杂志》3，140（1962）。[2] M. L. Mehta，*Random matrices*，第3版，纯数学与应用数学（阿姆斯特丹）第142卷（Elsevier/Academic Press，阿姆斯特丹，2004），第xviii+688页。[3] P. J. Forrester，*Log-gases and random matrices*，伦敦数学学会专著系列第34卷（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2010），第xiv+791页。[4] E. Date、M. Jimbo、M. Kashiwara和T. Miwa，《物理学D辑》4，343（1981/82）。[5] M. Jimbo和T. Miwa，载于*Vertex operators in mathematics and physics (Berkeley, Calif., 1983)*，数学科学研究所出版物第3卷（施普林格，纽约，1985），第275–290页。[6]T. Miwa、M. Jimbo和E. E. Date，*Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*，剑桥数学论丛（剑桥大学出版社，剑桥，2000），第108页。[7] J. Harnad和A. Y. Orlov，《亨利·庞加莱年鉴》22，3025（2021）。[8] M. Adler和P. van Moerbeke，《纯粹与应用数学通讯》54，153（2001）。[9] I. Dumitriu和A. Edelman，《数学物理学杂志》43，5830（2002）。[10] J. A. Ramírez、B. Rider和B. Virág，《美国数学会杂志》24，919（2011）。[11] J.-G. Luque和J.-Y. Thibon，《应用数学进展》29，620（2002）。[12] C. D. Sinclair，《统计物理学杂志》136，17（2009）。[13] M. Sato和Y. Sato，载于 *Nonlinear partial differential equations in applied science (Tokyo, 1982)*，北荷兰数学研究丛书第81卷（北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1983），第259–271页。[14] T. Miwa，《日本学士院纪要A辑：数学科学》58，9（1982）。[15] C. D. Sinclair和J. M. Wells，arXiv预印本（2025），arXiv:2509.05487 [math-ph]。

《通过 KP 层级实现 $\beta = L^2$随机矩阵系综的精确可解性》的补充材料

I. 动量脊的组合学

精确可解性的核心机制，是将完整的外代数 $\Lambda^L V$（维数 $\binom{LM}{L}$）约化为动量脊。对于一个构型 $u = (u_1, \ldots\ldots, u_L)$，Wronskian行列式

$$\mathrm{Wr}(x^{u_1}, \ldots, x^{u_L}) = \Delta_u \, x^{u_1+\cdots+u_L-\frac{1}{2}L(L-1)}, \qquad \Delta_u = \prod_{j<k}(u_k - u_j),$$

在 x 中是齐次的，并且自然地按总次数分级。

定义重心化动量

$$p_u := \sum_{i=1}^{L} u_i - \overline{\Sigma}, \qquad \overline{\Sigma} = \tfrac{1}{2}L(LM-1),$$

我们引入动量扇区向量

$$\varepsilon_j := \sum_{p_u = j} \Delta_u \, e_u, \tag{S1}$$

其线性张成空间定义了动量脊 $\mathcal{S}$。对于一个由 M 个电荷为 L 的粒子组成的系统，可容许的动量满足$|j| \le L^2(M-1)/2$, 这对应于费米子指标的可容许构型。因此，有效维数按 $O(L^2M)$ 缩放，相较于 $\binom{LM}{L}$ 大幅降低。

II. 普适结构系数

令 $\star$ 表示对 $\Lambda^{LM}V$ 中行列式线的霍奇投影。对于动量构型 $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_M)$，定义 $C_{\mathbf{j}} := \star(\varepsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{j_M})$。由于行列式线携带的净动量为零,

$$C_{\mathbf{j}} = 0 \qquad \text{unless} \qquad \sum_{k=1}^{M} j_k = 0. \tag{S2}$$

将时间依赖矩写作

$$m_j(t) := \int x^{P+j} e^{\xi(x,t)} \, d\mu(x), \qquad P = \tfrac{1}{2}L^2(M-1),$$

该 τ-函数可作有限展开

$$\tau_M(t) = \sum_{\mathbf{j}:\, \sum j_k = 0} C_{\mathbf{j}} \prod_{k=1}^{M} m_{j_k}(t), \tag{S3}$$

从而将普适相互作用几何与时间依赖的／系综特定约束分离开来。

¨III. 动量脊上的普吕克关系

令 V的维数为 $L(M+1)$，并令 $\mathcal{S} \subset \Lambda^L V$表示以 $\{\varepsilon_j\}_{j=-P}^{P}$为基的动量–脊柱子空间，其中 $P = \frac{1}{2}L^2M$。定义生成 L–形式

$$\omega(z) := \sum_{|j| \le P} z^{P+j} \, \varepsilon_j. \tag{S4}$$

作为 Wronskian行列式 L–刃， $\omega(z)$ 是可分解的，因此 $\omega(z)\wedge\omega(z)=0$。提取系数可得动量脊内在的二次 Pl¨ucker 关系，

$$\sum_{j+k=n}\varepsilon_j\wedge\varepsilon_k=0. \tag{S5}$$

令 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示动量脊 $\mathcal{S}$ 与其对偶动量脊 $\mathcal{S}^*$之间的典范配对。在此配对下，用 $\mathcal{S}$ 中的元素进行楔积，与用相应的 $\mathcal{S}^*$中元素进行收缩互为伴随。令 $\{\varepsilon_j^*\}\subset\mathcal{S}^*$表示固定的对偶动量脊基，由 $\varepsilon_j^*(\varepsilon_k)=\delta_{jk}$定义，并记 $\iota_{-j}:=\iota_{\varepsilon_j^*}$, 使得 ι_{-j}通过收缩从背景中移除动量 j。于是

$$\langle\varepsilon_j\wedge A,\,B\rangle=\langle A,\,\iota_{-j}B\rangle.$$

将（S5）与背景 $\Psi\in\mathcal{S}^{\wedge(M-1)}$ 和 $\Phi\in\mathcal{S}^{\wedge(M+1)}$ 配对可得

$$\sum_{k-j=n}\langle\varepsilon_k\wedge\Psi,\;\iota_j\Phi\rangle=0,$$

我们将其称为提升的 Pl¨ucker 关系。

IV. HIROTA 双线性恒等式

负 Miwa 移位 $t\mapsto t-L^2[z^{-1}]$ 插入一个粒子，并产生

$$\tau_{M-1}(t-L^2[z^{-1}])\propto\star\big(\omega(z)\wedge\gamma(t)^{\wedge(M-1)}\big).$$

对偶地，正 Miwa 移位插入一个空穴。在格拉姆层面，这一操作表现为

$$\gamma(t'+L^2[z^{-1}])=\gamma(t')+\Omega(z,t'),$$

其中 $\Omega(z,\;t')\in\mathcal{S}^*$ 是所诱导的对偶动量脊元素，编码了从 z 处移除一个粒子时 $\gamma(t')$ 的响应。将该元素写在对偶基中，

$$\Omega(z,t')=\sum_{k=1}^{2P}z^{-k}\,\varphi_k(t'),\qquad\varphi_k(t')=\binom{L^2+k-1}{k}\sum_j m_{j+k}(t')\,\varepsilon_j^*,$$

这反映了正 Miwa 移位对矩序列的作用。

定义托普利兹线性算子 $\kappa(z,\;t')$: $V\to V^*$，其符号为 $(1-x/z)^{-L^2}$。将该算子逐分量作用于 $\omega(z)=v(z)\wedge v'(z)\wedge\cdots\wedge v^{(L-1)}(z)$ 的每个因子，并在对偶基中展开可得

$$\Omega(z,t')=\kappa(z,t')v(z)\wedge\kappa(z,t')v'(z)\wedge\cdots\wedge\kappa(z,t')v^{(L-1)}(z)\;\in\;\Lambda^LV^*.$$

由于 $\Omega(z,\;t')$ 是线性映射作用于可分解刃所得的像，因此其自身也是可分解的，从而 $\Omega(z,\;t')\wedge\Omega(z,\;t')=0$ 恒等为零。由于所有高阶插入项都消失，展开 $(\gamma(t')+\Omega(z,\;t'))^{\wedge(M+1)}$ 可得

$$\Delta\tau_{M+1}(z,t')\propto\star\left(\Omega(z,t')\wedge\frac{\gamma(t')^{\wedge M}}{M!}\right). \tag{S6}$$

标量洛朗级数

$$\mathcal{H}(z):=\star\big(\omega(z)\wedge\gamma(t)^{\wedge(M-1)}\big)\;\star\big(\Omega(z,t')\wedge\gamma(t')^{\wedge M}\big). \tag{S7}$$

表示在背景 t 中插入一个粒子，同时在背景 t' 中插入一个空穴； z 的幂生成由此产生的总动量变化。

用动量–脊柱基 $\{\varepsilon_k\}\subset\mathcal{S}$ 和 $\{\varphi_j\}\subset\mathcal{S}^*$ 展开 $\mathcal{H}(z)$，得到

$$\mathcal{H}(z)=\sum_{k,j}z^{k-j}\left\langle\varepsilon_k\wedge\gamma(t)^{\wedge(M-1)},\,\iota_{\varphi_j}\gamma(t')^{\wedge(M+1)}\right\rangle.$$

将 φ_j 写在对偶基中，提升后的 Pl¨ucker 关系表明，对于每个固定整数 n，这些配对对 $k-j=n$ 求和后为零。特别地，z^0 的系数为 $[z^0]\mathcal{H}(z)=0$. 这等价于

$$[z^0]\;\tau_{M-1}(t-L^2[z^{-1}])\,\Delta\tau_{M+1}(z,t')=0 \tag{S8}$$

这恰好是 $\beta=L^2$ 系综的有限-M Hirota 双线性恒等式，差别仅在于常规的归一化因子。