三个耦合谐振子中的爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引

Ayoub Ghaba,[1], * Radouan Hab Arrih,[2], † Elhoussine Atmani,[1, 2] 和 Abdallah Slaoui[3], 4, ‡
[1] *Laboratory of Mathematics and Physical Sciences Applied to Engineering Sciences, Faculty of Sciences and Techniques, Hassan II University, Mohammedia, Morocco*
[2] *Laboratory of R&D in Engineering Sciences, Faculty of Sciences and Techniques Al-Hoceima, Abdelmalek Essaadi University, Tetouan, Morocco.*[3] *LPHE-MS, Faculty of Sciences, Mohammed V University in Rabat, Rabat, Morocco*[4] *CPM, Faculty of Sciences, Mohammed V University in Rabat, Rabat, Morocco.*（日期：2026年1月6日）

arXiv:2601.01307v1 [quant-ph] 4 Jan 2026

摘要

量子导引是量子力学中最引人入胜的现象之一，对于理解多体系统中的关联至关重要。尽管这一现象十分重要，但关于耦合三体振子的解析结果仍然十分有限。在本研究中，我们通过几何对角化方法研究这一现象，该方法减少了与系统导引性质相关的自由度。具体而言，我们利用维格纳函数框架推导出所有可能方向上的量子导引解析表达式，因为该框架能够完整描述系统的量子态。结果表明，激发会显著增强系统中的量子导引；这与基态（0，0，0）形成对比，后者不表现出可导引关联。此外，这些关联的方向性和拓扑由激发的空间分布而非其大小所决定。我们还观察到，在等效激发条件下，振子 x、y 和 z 之间表现出对称的导引行为，这可形式化为 $S^{(n,m,l)}_{x\to z}(\theta) = S^{(n,m,l)}_{x\to y}(-\theta)$ $S^{(n,m,l)}_{z\to x}(\theta) = S^{(n,m,l)}_{y\to x}(-\theta)$，以及 $S^{(n,m,l)}_{y\to z}(\theta) = S^{(n,m,l)}_{z\to y}(-\theta)$。因此，我们阐明了激发水平和混合角如何在三个耦合谐振子中产生并增强导引。

KEYWORDS: 量子导引、三个耦合振子、维格纳函数、量子涨落、几何对角化

I. 引言

量子力学中最引人入胜的现象之一是量子导引，它在量子力学和量子信息理论领域都引起了广泛关注。事实上，薛¨定谔最早提出[1]，通过选择适当的测量，一个复合系统的一部分可以将另一部分的状态导向特定的位置态或动量态 [2]。早在1935年，爱因斯坦、波多尔斯基和罗森（EPR）提出了著名的论证，质疑量子力学的完备性 [2, 3]。在这一论证中，假设存在一个二粒子态，其中一部分可以测量另一部分的位置或动量。如果在那里进行相同的测量，该态的关联就能够预测对另一部分进行这些测量时的结果。薛¨定谔的这一思想正是对此作出的回应。这种非局域影响与经典关联，乃至纠缠之间的区别在于，它无法由基于局域隐变量的经典理论加以解释。后来，Wiseman、Jones 和 Doherty 对量子导引的形式体系进行了发展和拓展 [4]，将其置于量子纠缠与贝尔非局域性之间。

即使系统并未处于最大纠缠态，也可能出现量子导引；这使其区别于纠缠，后者要求相距遥远的系统之间存在强关联。这一特性使量子导引成为一种独特的量子关联形式，能够体现非局域效应，但其条件仍不及贝尔非局域性严格；贝尔非局域性源于对贝尔不等式的违背。当不存在局域隐态模型能够解释某个子系统的测量结果时，便表明出现了量子导引，从而证明这些关联本质上是量子的，而非经典相互作用的结果。广义而言，量子导引指的是这样一种双体情形：一方能够通过局域测量影响（或导引）远方另一方的状态 [5]。Reid [6–9] 首次在连续变量（CV）系统中，通过非简并参量放大，于

* ayoub.ghaba-etu@etu.univh2c.ma
† habarrih46@gmail.com
‡ abdallah.slaoui@um5s.net.ma

20世纪80年代首次进行了实验验证。此后，这种方法已成功用于研究各种连续变量系统中的 EPR 导引 [8, 10]。我们对量子导引探测和分发的认识已取得长足进展 [11–13]。导引是量子信息与计算中的重要量子资源 [14], ，并在量子隐形传态中发挥着关键作用 [15, 16], ，也应用于安全通信 [17]和量子网络安全 [18]。

谐振子形式体系是物理学中的一项基础工具，广泛应用于各种理论框架。它尤其用于描述量子场论中的双模光压缩态 [19, 20], Lee 模型 [21], 部分子理论中的协变谐振子模型 [22], 以及超导性中的 Bogoliubov 变换 [23], ，也用于分子物理学中的多种研究方法 [24]。此外，若干模型依赖于不可观测自由度，例如双模压缩态 [25]、强子温度模型 [26], 以及信息科学中的 Barnett–Phoenix 表述 [27]。近年来，人们重新开始关注耦合谐振子的行为，其应用涵盖量子光学[28, 29], 、非线性物理学 [30–32], 、分子化学 [33, 34], 和量子化学 [35, 36]。在现代耦合量子谐振子研究中，量子纠缠 [37–41]和 EPR 导引 [42–46]最受关注。

受 [47], 相关研究启发，我们提出并拓展了一种可计算的方法，用于研究耦合系统中的量子导引，重点关注三个耦合谐振子的情形。我们采用几何对角化方法来减少系统的自由度，旨在理解三个耦合谐振子的导引，并寻找确定可导引态的最优条件。本文其余部分安排如下：在第（II）节，我们介绍三个耦合谐振子系统，描述其物理装置，并求得相应的能谱。在第（III）节，为了求得平均值，我们首先确定用于计算相空间涨落的维格纳函数。在第（IV）节，我们探讨量子导引，并重点分析系统的稳态性质，以及产生量子导引的条件。最后，在第（

V）节，我们总结主要研究结果。

II. 哈密顿量与能谱

我们考虑一个由三个耦合谐振子组成的系统，分别标记为 x、 y和 z，每个振子分别由自身的角频率 ω_x、 ω_y和 ω_z表征。该系统的哈密顿量描述了振子的动能、势能及其相互作用，具体由下列二次哈密顿量给出

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) + \frac{1}{2}\omega_x^2\hat{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_y^2\hat{y}^2 + \frac{1}{2}\omega_z^2\hat{z}^2 + J_{xy}\hat{x}\hat{y} + J_{xz}\hat{x}\hat{z} + J_{yz}\hat{y}\hat{z} \tag{1}$$

其中，位置算符和动量算符满足 $[\hat{}x, \hat{}p_x] = [\hat{}y, \hat{}p_y] = [\hat{}z, \hat{}p_z] = i$, $[\hat{}x, \hat{}y] = [\hat{}x, \hat{}z] = [\hat{}z, \hat{}y] = 0$ 以及$[\hat{}p_x, \hat{}p_y] = [\hat{}p_x, \hat{}p_z] = [\hat{}p_y, \hat{}p_z] = 0$。为简便起见且不失一般性，本文将考虑$\hbar = m = 1$ [48]。

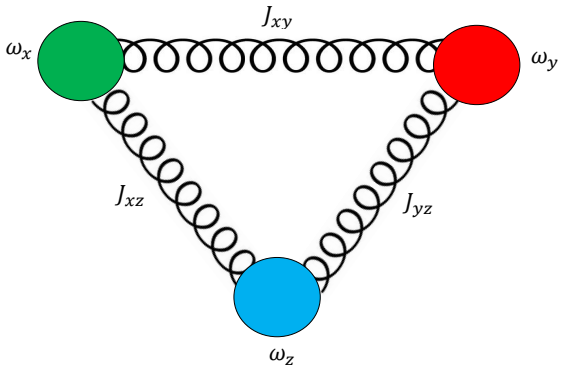


图 1. 示意图展示了三个耦合振子。两个振子 α和 β分别通过“位置-位置”相互作用 $\alpha\beta$进行耦合，耦合强度为 $J_{\alpha\beta}$，对所有 $\alpha \neq \beta$和 α, $\beta \in \{x, y, z\}$均成立。

为了对式（1）进行对角化，我们将利用欧拉幺正变换，其定义为 [49]。

$$\mathbb{R}(\varphi,\Phi,\theta) = e^{i\varphi\hat{L}_1}e^{i\Phi\hat{L}_2}e^{i\theta\hat{L}_3} \tag{2}$$

$$= \mathbb{R}_1(\varphi)\mathbb{R}_2(\Phi)\mathbb{R}_3(\theta) \tag{3}$$

生成元 $\hat{}\ L_k = (\hat{}x_i\hat{}p_j - \hat{}x_j\hat{}p_i)$ 满足代数关系 $[\hat{}L_i, \hat{}L_j] = i\,\epsilon_{ijk}\hat{}L_k$ [50]，其中 $\hat{}x_i$ 和 $\hat{}p_i$ 表示正则位置和动量算符，ϵ_{ijk} 是列维-奇维塔反对称张量，i 是虚数单位。因此，旋转矩阵可以明确表示为：

$$\mathbb{R}(\varphi,\Phi,\theta) = \begin{pmatrix} C_\theta C_\Phi & S_\Phi & S_\theta C_\Phi \\ -C_\varphi S_\Phi C_\theta - S_\varphi S_\theta & C_\varphi C_\Phi & -C_\varphi S_\Phi S_\theta + S_\varphi C_\theta \\ S_\varphi S_\Phi C_\theta - C_\varphi S_\theta & -S_\varphi C_\Phi & S_\varphi S_\Phi S_\theta + C_\varphi C_\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

其中我们设定

$$(S_\gamma, C_\gamma) \equiv (\sin\gamma, \cos\gamma), \quad \gamma \in \{\Phi, \theta, \varphi\}$$

然后，式（1）中哈密顿量的对角化形式可化为

$$\mathcal{H}_d = \frac{P^2+Q^2+F^2}{2} + \frac{1}{2}\vartheta_x^2X^2 + \frac{1}{2}\vartheta_y^2Y^2 + \frac{1}{2}\vartheta_z^2Z^2 \tag{5}$$

其中，新的位置坐标表示为：

$$X = xC_\theta C_\Phi + y(-C_\theta C_\varphi S_\Phi - S_\theta S_\varphi) + z(C_\theta S_\varphi S_\Phi - S_\theta C_\varphi) \tag{6}$$

$$Y = xS_\Phi + yC_\varphi C_\Phi - zS_\varphi C_\Phi \tag{7}$$

$$Z = xS_\theta C_\Phi + y(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi) + z(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi) \tag{8}$$

相应的动量写为：

$$P = p_xC_\theta C_\Phi + p_y(-C_\theta C_\varphi S_\Phi - S_\theta S_\varphi) + p_z(C_\theta S_\varphi S_\Phi - S_\theta C_\varphi) \tag{9}$$

$$Q = p_xS_\Phi + p_yC_\varphi C_\Phi - p_zS_\varphi C_\Phi \tag{10}$$

$$F = p_xS_\theta C_\Phi + p_y(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi) + p_z(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi) \tag{11}$$

我们强调，我们的系统涉及六个自由度（即三个频率和三个耦合），这显著增加了系统的复杂性。因此，研究三个模式之间的量子导引将是一项繁琐的任务。

我们采用几何对角化方法 [51]，该方法约束欧拉角，从而减少所研究系统的自由度。总之，我们强调，三个耦合量子振子的行为完全可以用一个混合角来描述，μ_θ。必须强调的是，在这一框架下，μ_Φ、μ_φ和 μ_θ 之间的关系如下：

$$\mu_\Phi = \frac{1-\mu_\theta^2-\sqrt{3-\mu_\theta^2}}{\sqrt{2+\mu_\theta^2-\mu_\theta^4}}, \quad \mu_\varphi = \frac{1-\mu_\theta\sqrt{2-\mu_\theta^2}}{\mu_\theta^2-1} \tag{12}$$

其中 μ_φ =tan(φ)、 μ_Φ =tan(Φ) 和 μ_θ =tan(θ)
我们考虑以下近似：

$$\omega_\alpha \sim \omega_\beta \sim \vartheta_\alpha \sim \vartheta_\beta \sim \vartheta, \qquad \forall\,\alpha \neq \beta, \quad \text{and} \quad \alpha,\beta \in \{x,y,z\}. \tag{13}$$

该近似假设系统具有单一特征频率，记为 ϑ。这一假设有助于我们理解多体系统中的量子转向现象。进一步地，我们明确写出本征能量

$$E_{(n,m,l)} = \vartheta_x\left(n+\frac{1}{2}\right) + \vartheta_y\left(m+\frac{1}{2}\right) + \vartheta_z\left(l+\frac{1}{2}\right) \simeq \vartheta\left(n+m+l+\frac{3}{2}\right) \tag{14}$$

以及本征函数：

$$\Psi_{(n,m,l)}(X,Y,Z) = \frac{1}{\sqrt{2^{n+m+l}n!m!l!}}\left(\frac{\vartheta}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\exp\left(-\frac{\vartheta}{2}(X^2+Y^2+Z^2)\right)H_n(\sqrt{\vartheta}X)H_m(\sqrt{\vartheta}Y)H_l(\sqrt{\vartheta}Z), \tag{15}$$

其中 n， m 和 l 代表量子　　量子数，而特殊函数 $H_{n,\ m,\ l}$ 是厄米正交多项式　　.

III. 维格纳函数与平均值

A. 维格纳函数

在量子态的诸多表述中，维格纳函数提供了一种引人注目的可能性，即利用类似经典的相空间概念来描述量子现象 [52, 53]。维格纳函数提供了关于系统量子态的完整信息 [53]。与我们对角化后的哈密顿量（5）相对应的维格纳函数是可分离的，因此

$$W_{(n,m,l)}(X,P;Y,Q;Z,F)=W_n(X,P)\times W_m(Y,Q)\times W_l(Z,F), \tag{16}$$

其中边缘Wigner函数为

$$\begin{aligned}
W_n(X,P)&=\frac{1}{\pi}\int \Psi_n^*(X+\mathbb{X})\Psi_n(X-\mathbb{X})\exp\left(2iP\mathbb{X}\right)d\mathbb{X}\\
&=\frac{(-1)^n}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{\vartheta_x}(\vartheta_x^2X^2+P^2)\right)\mathcal{L}_n\left[\frac{2}{\vartheta_x}(\vartheta_x^2X^2+P^2)\right], \qquad (17)\\
W_m(Y,Q)&=\frac{1}{\pi}\int \Psi_m^*(Y+\mathbb{Y})\Psi_m(Y-\mathbb{Y})\exp\left(2iQ\mathbb{Y}\right)d\mathbb{Y}\\
&=\frac{(-1)^m}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{\vartheta_y}(\vartheta_y^2Y^2+Q^2)\right)\mathcal{L}_m\left[\frac{2}{\vartheta_y}(\vartheta_y^2Y^2+Q^2)\right], \qquad (18)\\
W_l(Z,F)&=\frac{1}{\pi}\int \Psi_l^*(Z+\mathbb{Z})\Psi_l(Z-\mathbb{Z})\exp\left(2iF\mathbb{Z}\right)d\mathbb{Z}\\
&=\frac{(-1)^l}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{\vartheta_z}(\vartheta_z^2Z^2+F^2)\right)\mathcal{L}_l\left[\frac{2}{\vartheta_z}(\vartheta_z^2Z^2+F^2)\right], \qquad (19)
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{L}_n(x)$ 是拉盖尔多项式 [54]。进一步地，我们利用拉盖尔多项式的Rodrigues公式[54, 55]，

$$\mathcal{L}_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{du^n}\left(\frac{\exp\left(-\frac{xu}{1-u}\right)}{1-u}\right)\Bigg|_{u=0}. \tag{20}$$

在公式（13）所述的现实假设下，我们得到与公式（5）中的哈密顿量相关联的维格纳函数

$$W_{(n,m,l)}(X,P;Y,Q;Z,F)=\mathbb{R}_{n,l,m}\left(-\frac{\exp\left(\frac{1}{\vartheta}\left[\frac{(u+1)(P^2+X^2\vartheta^2)}{(u-1)}+\frac{(s+1)(Q^2+Y^2\vartheta^2)}{(s-1)}+\frac{(v+1)\left(F^2+Z^2\vartheta^2\right)}{(v-1)}\right]\right)}{(s-1)(u-1)(v-1)}\right)\Bigg|_{u,s,v=0}, \tag{21}$$

其中算符

$$\mathbb{R}_{n,l,m}=\frac{(-1)^{l+m+n}}{\pi^3 l!m!n!}\frac{d^n}{du^n}\frac{d^m}{ds^m}\frac{d^l}{dv^l}. \tag{22}$$

维格纳函数对于接下来分析我们系统中的量子导引至关重要。具体而言，量子可导引性取决于与每个振子相关的产生算符和湮灭算符的平均值。

B. 平均值

为了分析我们系统的量子涨落，算符的期望值 $\mathcal{A}$ 由下式给出： [56]。

$$\langle\mathcal{A}\rangle=\int_{\mathbb{R}^6}\mathcal{A}\times W_{n,m}(x,p_x;y,p_y;z,p_z)dxdp_xdydp_ydzdp_z \tag{23}$$

我们在**(附录一)**中定义位置和动量的平均值。利用期望值，可以直接得出以下求和规则

$$\langle x^2\rangle+\langle y^2\rangle+\langle z^2\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{2l+1}{\vartheta_z}+\frac{2m+1}{\vartheta_y}+\frac{2n+1}{\vartheta_x}\right)=\frac{1}{\vartheta}\left(n+m+l+\frac{3}{2}\right) \tag{24}$$

$$\langle p_x^2\rangle+\langle p_y^2\rangle+\langle p_z^2\rangle=\frac{1}{2}\Big((2l+1)\vartheta_z+(2m+1)\vartheta_y+(2n+1)\vartheta_x\Big)=\vartheta\left(n+m+l+\frac{3}{2}\right) \tag{25}$$

我们想强调的是，这些结果与此前在 [57]中给出的结果一致。此外，我们可以证明，期望值满足以下关系：

$$Cov(x^2;p_y^2)=Cov(y^2;p_x^2),\qquad Cov(z^2;p_x^2)=Cov(x^2;p_z^2),\qquad Cov(y^2;p_z^2)=Cov(z^2;p_y^2) \tag{26}$$

其中，两个可观测量之间的协方差为 $Cov(X,\ Y)=\langle XY\rangle-\langle X\rangle\langle Y\rangle$。

IV. 量子导引与数值结果

A. 量子导引的量化

量子导引是指，在双体情形下，一方可以通过实施局域测量 [5]改变远方另一方的状态。换言之，量子导引是一种量子力学过程，使一方（**A**）能够改变远方另一方（导引）的状态（**B** [58, 59] ），且这种改变无法用经典关联来解释 [47]。产生与湮灭算符为

$$(a_\beta^\dagger)^\dagger=a_\beta=\sqrt{\frac{\omega_\beta}{2}}\beta+\frac{i}{\sqrt{2\,\omega_\beta}}p_\beta\qquad \beta\in\{x,y,z\} \tag{27}$$

用于检测量子导引并量化所有可能情形下可导引性的参数 [60]，可以表示为

$$S_{\alpha\to\beta}^{(n,m,l)}=max\left[\left|\langle a_\alpha a_\beta^\dagger\rangle\right|^2-\left\langle a_\beta^\dagger a_\beta\left(a_\alpha^\dagger a_\alpha+\frac{1}{2}\right)\right\rangle,0\right] \tag{28}$$

$$S_{\beta\to\alpha}^{(n,m,l)}=max\left[\left|\langle a_\alpha a_\beta^\dagger\rangle\right|^2-\left\langle a_\alpha^\dagger a_\alpha\left(a_\beta^\dagger a_\beta+\frac{1}{2}\right)\right\rangle,0\right] \tag{29}$$

展开 x 与 y 之间的转向可得：

$$\begin{aligned}S_{x\to y}^{(n,m,l)}=max\Bigg[&\frac{w_xw_y}{4}\langle xy\rangle^2+\frac{1}{4w_xw_y}\langle p_xp_y\rangle^2+\frac{1}{2}\langle xy\rangle\langle p_xp_y\rangle-\frac{w_xw_y}{4}\langle x^2y^2\rangle\\&-\frac{w_x}{4w_y}\langle x^2p_y^2\rangle-\frac{w_y}{4w_x}\langle p_x^2y^2\rangle-\frac{1}{4w_xw_y}\langle p_x^2p_y^2\rangle+\frac{w_x}{4}\langle x^2\rangle+\frac{1}{4w_x}\langle p_x^2\rangle,0\Bigg]\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}S_{y\to x}^{(n,m,l)}=max\Bigg[&\frac{w_xw_y}{4}\langle xy\rangle^2+\frac{1}{4w_xw_y}\langle p_xp_y\rangle^2+\frac{1}{2}\langle xy\rangle\langle p_xp_y\rangle-\frac{w_xw_y}{4}\langle x^2y^2\rangle\\&-\frac{w_x}{4w_y}\langle x^2p_y^2\rangle-\frac{w_y}{4w_1}\langle p_x^2y^2\rangle-\frac{1}{4w_1w_y}\langle p_x^2p_y^2\rangle+\frac{w_y}{4}\langle y^2\rangle+\frac{1}{4w_2}\langle p_y^2\rangle,0\Bigg]\end{aligned} \tag{31}$$

B. 数值结果与讨论

本节将分析三个粒子中的量子导引结构。所有方向上的量子导引（$\alpha\leftrightarrow\beta$）定义于（**第二附录 II**）中。该表达式的形式表明，三个振子之间的量子导引取决于量子态以及混合角。此外，我们回顾

量子导引并不具有对称性。因此，其不对称性定义为：

$$\begin{aligned}\Delta S_{xy} =&|S_{x\to y}-S_{y\to x}|\\ =&\frac{(m-n)\left(\mu_\theta^2\mu_\varphi^2\mu_\Phi^2+\mu_\Phi^2-1\right)}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)}+\frac{(l-n)\left(2\mu_\theta\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi+\mu_\theta^2\mu_\varphi^2\right)}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)}-\frac{(l-m)\mu_\theta^2\left(\mu_\Phi^2-1\right)}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)}\\ &+\frac{\mu_\varphi^2\left((m-l)\mu_\Phi^2-l+n\right)}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)}\end{aligned} \tag{32}$$

我们发现系统中存在不对称性，这表明各子系统无法平等地控制彼此。这说明一个子系统可能对另一个子系统具有更大的影响力或控制力。

我们还找到了一个方程，用于关联所有子系统之间的权衡关系：

$$\Delta S_{xy}-\Delta S_{xz}-\Delta S_{zy}=0 \tag{33}$$

这里，我们直观地展示了各个方向以及不同量子数（n， m， l）从 0 到 100 且 $\mu_\theta\in[-1,1]$时的量子导引。绘图结果表明，导引取决于量子导引的方向和混合角 μ_θ。这使我们能够观察所有可能方向上量子导引的模式和行为。

在图2中，在这些条件下，转向（$x\leftrightarrow y$）达到的最高值为 $\simeq 6$，对应于特定的 μ_θ值。总体而言，我们注意到，对于给定的混合角 μ_θ，两个方向上的量子导引都是量子数的增函数，这表明系统激发水平的提高会增强导引效应。这里我们展示所有发生转向的状态。此外，子系统（$x\leftrightarrow y$）中其他状态的转向均为零；（$S_{x\to y}^{(0,m,0)}(\theta)=S_{x\to y}^{(0,0,l)}(\theta)=S_{y\to x}^{(n,0,0)}(\theta)=0$）。

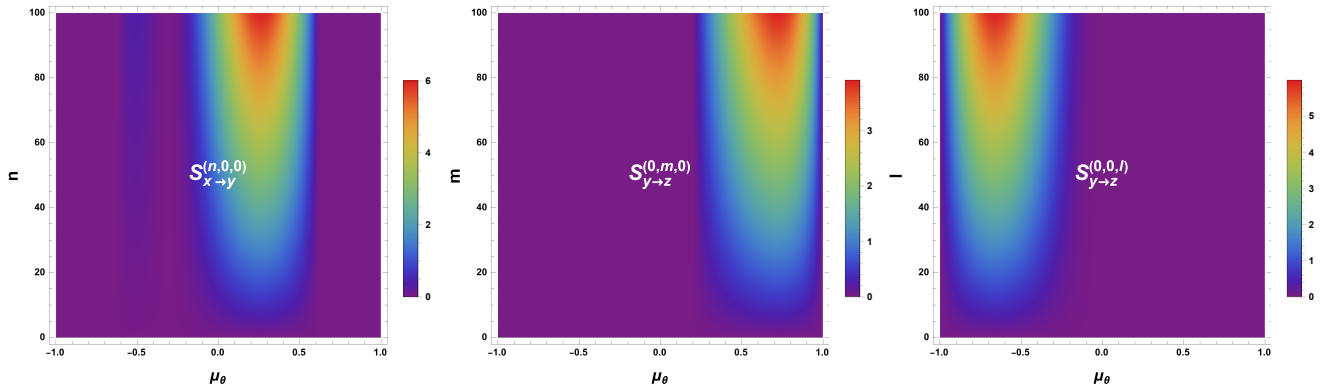


图 2. 量子导引的演化 $S_{x\to y}^{(n,m,l)}$和 $S_{y\to x}^{(n,m,l)}$随量子数 (n,m,l) 的变化，以及 μ_θ

这些图显示了量子关联随 $(n,\ m,\ l)$ 和混合角μ_θ变化时明显的强关联区与弱关联区。我们观察到，在 μ_θ的特定取值下会出现量子导引，并且当 μ_θ取正值时， $S_{x\to y}^{(n,0,0)}$和 $S_{y\to x}^{(0,m,0)}$会发生。另一方面， μ_θ取负值时才会出现 $S_{y\to x}^{(0,0,l)}$。此外，较高的量子数会增强两个方向上的量子导引，而基态（0，0，0）不显示任何关联。因此，量子导引表示为：

$$S_{x\to y}^{(n,0,0)}=-\frac{n\left(\mu_\theta^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)+\mu_\Phi^2-1\right)}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2}\left[\mu_\theta^2\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)+2\mu_\theta\mu_\varphi\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}+\mu_\Phi^2\right] \tag{34}$$

$$S_{y\to x}^{(0,m,0)}=-\frac{m\mu_\Phi^2\left(\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)+\mu_\Phi^2-1\right)}{2\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2} \tag{35}$$

$$S_{y\to x}^{(0,0,l)}=-\frac{l\mu_\theta^4\left(\mu_\Phi^2\left(\mu_\varphi^2-1\right)+\mu_\varphi^2+1\right)}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2}-\frac{l\mu_\theta^2\left(4\mu_\theta\mu_\varphi\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}-\left(\mu_\varphi^2-1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)\right)}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2} \tag{36}$$

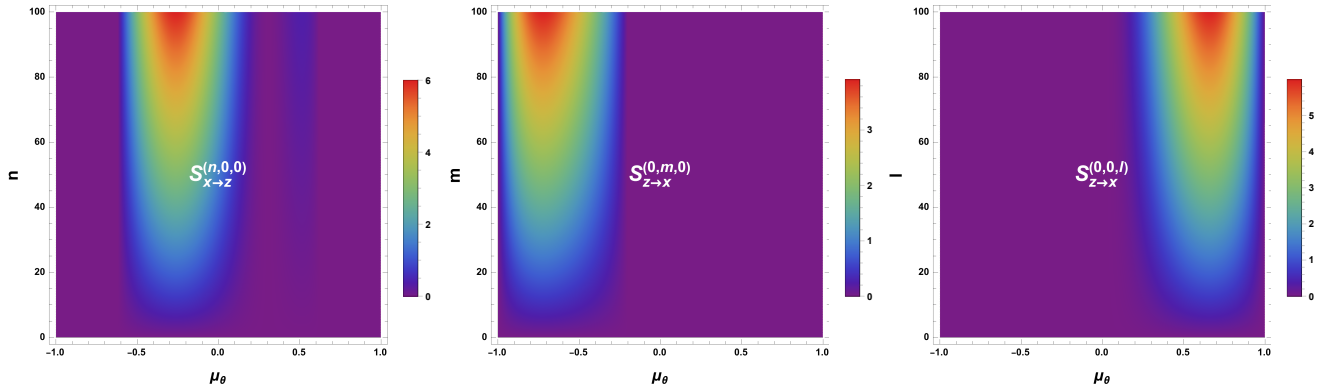


图3. 量子导引 $S^{(n,m,l)}_{x\to z}$和 $S^{(n,m,l)}_{z\to x}$随量子数 (n,m,l) 的演化，以及 μ_θ

图 3 显示了两个方向上的量子导引量（$x \to z$）和（$z \to x$）随 θ 变化的情况，对应的状态为（n，0，0）、（0，m，0）和（0，0，l）。该图表明，随着量子数激发程度的提高，量子导引会增强。此外，在每个状态下，取某些特定值时会出现导引；参数可有效调节这种导引的强度，使其从完全可分性变化到最大相关性。我们观察到，子系统（$x \leftrightarrow z$）的导引呈现出对称行为，与（$x \leftrightarrow y$）中的情况类似。我们可以将这种对称行为表示为

$$S^{(n,m,l)}_{x\to z}(\theta) = S^{(n,m,l)}_{x\to y}(-\theta) \quad \text{and} \quad S^{(n,m,l)}_{z\to x}(\theta) = S^{(n,m,l)}_{y\to x}(-\theta) \tag{37}$$

子系统 $(x \leftrightarrow z)$ 中其他态的转向为零。这可以表示为 $(S^{(0,m,0)}_{x\to z} = S^{(0,0,l)}_{x\to z} = S^{(n,0,0)}_{z\to x} = 0)$。

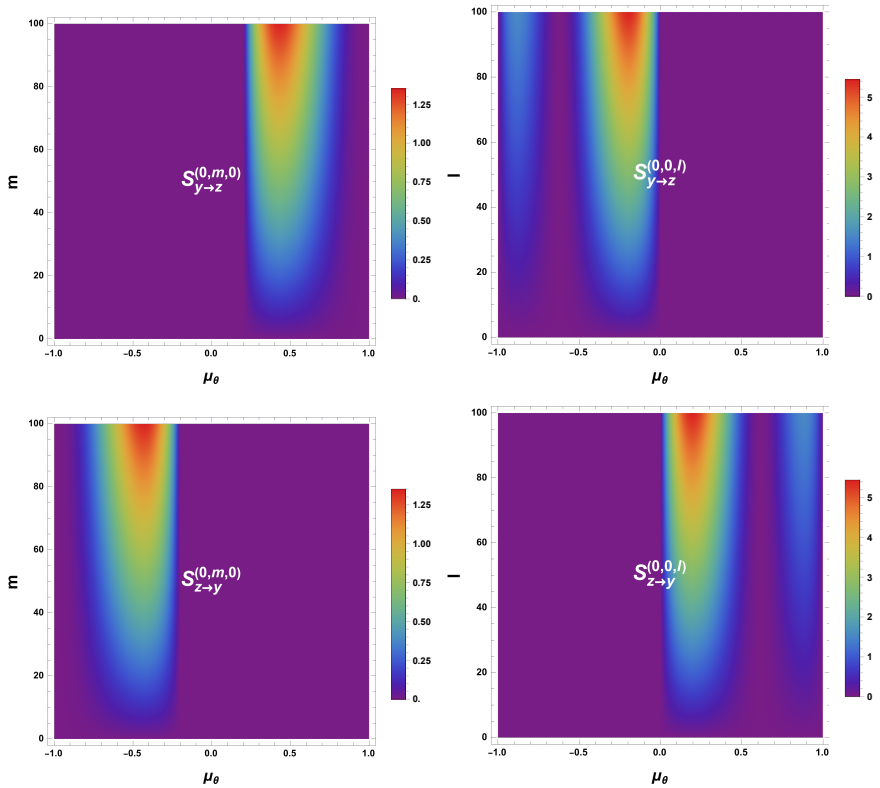


图4. 量子导引 $S^{(n,m,l)}_{y\to z}$和 $S^{(n,m,l)}_{z\to y}$随量子数 (n,m,l) 的演化，以及 μ_θ

在图4中，我们展示了沿（$y \to z$）和（$z \to y$）方向的量子导引随量子数 m和 l的变化，以及混合角 μ_θ。当 μ_θ 为正值时，两个方向（$y \to z$）和

（$z \to y$）的状态分别为（0，m，0）和（0，0，l）。另一方面，对于状态（0，0，l）和（0，m，0），在（$y \to z$）和（$z \to y$）方向上，当 μ_θ 为负值时会出现转向。此外，在状态（0，0，l）下，y 与 z 之间的转向值最高，最大值约为 $\simeq 5.4$。我们注意到，对于相同的状态，子系统（$y \leftrightarrow z$）中的量子导引在（$y \to z$）和（$z \to y$）之间呈现内在对称性，可表示为

$$S_{y\to z}^{(n,m,l)}(\theta) = S_{z\to y}^{(n,m,l)}(-\theta) \tag{38}$$

因 此，我们给出方向（$y \to z$）上的量子导引一般表达式 a s

$$S_{y\to z}^{(0,m,0)} = -\frac{m\mu_\varphi^2\left(\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)+\mu_\Phi^2-1\right)}{2\left(\mu_\varphi^2+1\right)^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} S_{y\to z}^{(0,0,l)} = &-\frac{l\mu_\theta^4\mu_\varphi^2\mu_\Phi^2\left(\left(\mu_\varphi^2-1\right)\mu_\Phi^2+\mu_\varphi^2+1\right)}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2} - \frac{l\mu_\theta^3\mu_\varphi\mu_\Phi\left(\left(3\mu_\varphi^2-1\right)\mu_\Phi^2+\mu_\varphi^2+1\right)}{\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)^{3/2}} \\ &+\frac{l\mu_\theta^2\left(\mu_\varphi^2\left(\left(\mu_\varphi^2-10\right)\mu_\Phi^2-1\right)+\mu_\Phi^2-1\right)}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)} + \frac{l\mu_\theta\mu_\varphi\left(\mu_\varphi^2-3\right)\mu_\Phi}{\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)^2\sqrt{\mu_\Phi^2+1}} + \frac{l\left(\mu_\varphi^2-1\right)}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)^2} \end{aligned} \tag{40}$$

下表显示了单激发能级下所有方向上的量子导引均为零。

导引方向 $(n,\ 0,\ 0)$	$(0,\ m,\ 0)$	$(0,\ 0,\ l)$
$x \to y$	$\neq 0$	0	0
$y \to x$	0	$\neq 0$	$\neq 0$
$x \to z$	$\neq 0$	0	0
$z \to x$	0	$\neq 0$	$\neq 0$
$y \to z$	0	$\neq 0$	$\neq 0$
$z \to y$	0	$\neq 0$	$\neq 0$

表一。不同激发方向下的导引条件。

双向量子导引（$x \to y$）和（$x \to z$）仅出现在n能级激发中。与此相反，在（$y \to x$）、（$z \to x$）、（$y \to z$）和（$z \to y$）的情况下，n能级激发时转向消失。这些结果表明，l、n和 m 上的特殊条件对于判定相应方向之间是否可能发生转向至关重要。需要指出的是，所有计算得到的量子导引值都完全不对称且不等价，即对于不同的量子数 n、m 和 l，$S_{\alpha\to\beta}^{(n,m,l)} \neq S_{\beta\to\alpha}^{(n,m,l)}$ 与 α，$\beta \in \{x, y, z\}$。

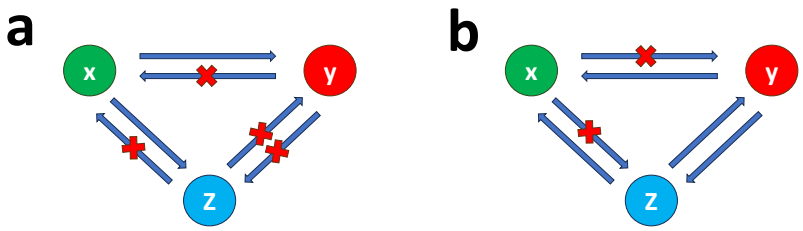


图5. 三个振子之间量子导引关联的构型。**a)**。对应状态（n,0.0）。**b)**。对应状态（$0, m, 0$）和（$0, 0, l$）。

图 5 展示了三个量子振子在不同状态（n, 0, 0）、(0, m, 0) 和 (0, 0, l) 下的量子导引。(a) 图展示了状态（n, 0, 0）下的导引，此时导引（$y \leftrightarrow z$）消失。振子 x 可以同时导引另外两个振子 y 和 z。而 (b) 图表明，状态 (0, m, 0) 和 (0, 0, l) 会产生相同的导引构型，这表明振子 y 和 z之间存在内在对称性。该图展示了可导引关联的方向性和拓扑由激发位置而非激发幅度决定。

五、结论

我们采用几何对角化 方法，对三个耦合谐振子之间的量子导引进行了深入研究，以尽量减少与系统相关的自由度。我们利用相空间中的维格纳函数，而非施密特分解，推导出了所有方向上量子导引的解析表达式。研究表明，三个耦合量子振子系统中的量子导引对混合角和激发能级高度敏感。相反，基态 (0,0,0) 在任何方向上都不呈现导引。此外，可导引关联的方向性和拓扑由激发位置而非激发幅度决定。我们还观察到，在振子 x、 y 和 z 之间，等效激发条件下的导引行为具有对称性。数学上，可表示为 $S_{x\to z}^{(n,m,l)}(\theta) = S_{x\to y}^{(n,m,l)}(-\theta)$,$S_{z\to x}^{(n,m,l)}(\theta) = S_{y\to x}^{(n,m,l)}(-\theta)$, and $S_{y\to z}^{(n,m,l)}(\theta) = S_{z\to y}^{(n,m,l)}(-\theta)$。此外，我们证明，在三个耦合谐振子系统中，同一对粒子之间不会出现对称导引。因此，我们写作$S_{\alpha\to\beta}^{(n,m,l)} \neq S_{\beta\to\alpha}^{(n,m,l)}$ with $\alpha,\beta\in\{x,y,z\}$。

此外，我们发现，在这样的系统中，一个粒子可以同时导引另外两个粒子。这些结果表明，调节混合角和激发能级对于实现强量子导引至关重要。此外，这些结果还加深了我们对三个耦合谐振子中量子导引行为的理解。理解量子导引或许能够促进量子控制、优化系统内的信息处理，并推动量子技术的发展。

附录一：位置和动量的平均值 A

我们详细考察位置和动量的平均值如下。

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{(2l+1)S_\theta^2C_\Phi^2}{\vartheta_z}+\frac{(2m+1)S_\Phi^2}{\vartheta_y}+\frac{(2n+1)C_\theta^2C_\Phi^2}{\vartheta_x}\right], \tag{41}$$

$$\langle y^2\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{(2l+1)(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2}{\vartheta_z}+\frac{(2m+1)C_\varphi^2C_\Phi^2}{\vartheta_y}+\frac{(2n+1)(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2}{\vartheta_x}\right], \tag{42}$$

$$\langle z^2\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{(2l+1)(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2}{\vartheta_z}+\frac{(2m+1)S_\varphi^2C_\Phi^2}{\vartheta_y}+\frac{(2n+1)(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2}{\vartheta_x}\right], \tag{43}$$

$$\langle p_x^2\rangle = \frac{2}{}\left[C_\Phi^2\left((2l+1)S_\theta^2\vartheta_z+(2n+1)C_\theta^2\vartheta_x\right)+(2m+1)S_\Phi^2\vartheta_y\right], \tag{44}$$

$$\langle p_y^2\rangle = \frac{1}{2}\left[(2l+1)\vartheta_z(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2+(2m+1)C_\varphi^2C_\Phi^2\vartheta_y+(2n+1)\vartheta_x(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2\right], \tag{45}$$

$$\langle p_z^2\rangle = \frac{1}{2}\left[(2l+1)\vartheta_z(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2+(2m+1)S_\varphi^2C_\Phi^2\vartheta_y+(2n+1)\vartheta_x(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\right], \tag{46}$$

$$\langle xy\rangle = \frac{1}{2}C_\Phi\left[\frac{(2l+1)S_\theta(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)}{\vartheta_z}+\frac{(2m+1)C_\varphi S_\Phi}{\vartheta_y}-\frac{(2n+1)C_\theta(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)}{\vartheta_x}\right], \tag{47}$$

$$\langle xz\rangle = \frac{1}{2}C_\Phi\left[\frac{(2l+1)S_\theta(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)\,\vartheta_z}{}-\frac{(2m+1)S_\varphi S_\Phi}{\vartheta_y}+\frac{(2n+1)C_\theta(C_\theta S_\varphi S_\Phi - S_\theta C_\varphi}{\vartheta_x}\right], \tag{48}$$

$$\langle yz\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{(2l+1)(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)\,\vartheta_z}{}-\frac{(2m+1)S_\varphi C_\varphi C_\Phi^2}{\vartheta_y}\right.$$
$$\left.+\frac{(2n+1)(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)(}{S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi}\right), \tag{49}$$

$$\langle p_xp_y\rangle = \frac{1}{2}\left[(2l+1)S_\theta\vartheta_z(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)+(2m+1)C_\varphi S_\Phi\vartheta_y-((2n+1)C_\theta\vartheta_x(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi))\right] \tag{50}$$

$$\langle p_xp_z\rangle = \frac{1}{2}C_\Phi\left[(2l+1)S_\theta\vartheta_z(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)-(2m+1)S_\varphi S_\Phi\vartheta_y+(2n+1)C_\theta\vartheta_x(C_\theta S_\varphi S_\Phi - S_\theta C_\varphi)\right], \tag{51}$$

$$\langle p_yp_z\rangle = \frac{1}{2}\left[(2l+1)\vartheta_z(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)-\left((2m+1)S_\varphi C_\varphi C_\Phi^2\vartheta_y\right)\right.$$
$$\left.+(2n+1)\vartheta_x(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)\right], \tag{52}$$

$$\langle x^2y^2\rangle = \frac{1}{4}\Bigg[\frac{3(2n(n+1)+1)C_\theta^2C_\Phi^2(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2}{\vartheta_x^2} + \frac{3(2m(m+1)+1)C_\varphi^2S_\Phi^2C_\Phi^2}{\vartheta_y^2}$$
$$+ \frac{3(2l(l+1)+1)S_\theta^2C_\Phi^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2}{\vartheta_z^2}\Bigg] + \frac{(2l+1)(2n+1)C_\Phi^2\left(3S_\Phi\left(8S_\theta^2C_\theta^2C_\varphi^2S_\Phi - S_{4\theta}S_{2\varphi}\right) + (3C_{4\theta}+1)S_\varphi^2\right)}{16\vartheta_x\vartheta_z}$$
$$+ (1+2m)\Bigg[\frac{(2n+1)\left(4S_\theta^2S_\varphi^2S_\Phi^2 + C_\theta^2C_\varphi^2(3C_{4\Phi}+1) + S_\theta C_\theta S_{2\varphi}(S_\Phi - 3S_{3\Phi})\right)}{16\vartheta_x\vartheta_y}$$
$$+ \frac{(2l+1)\left(S_\theta^2C_\varphi^2(3C_{4\Phi}+1) + 4C_\theta^2S_\varphi^2S_\Phi^2 - S_{2\theta}S_\varphi C_\varphi(S_\Phi - 3S_{3\Phi})\right)}{16\vartheta_y\vartheta_z}\Bigg], \tag{53}$$

$$\langle x^2z^2\rangle = \frac{1}{4}\Bigg[\frac{3(2n(n+1)+1)C_\theta^2C_\Phi^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2}{\vartheta_x^2} + \frac{3(2m(m+1)+1)S_\varphi^2S_\Phi^2C_\Phi^2}{\vartheta_y^2}$$
$$+ \frac{3(2l(l+1)+1)S_\theta^2C_\Phi^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2}{\vartheta_z^2}\Bigg] + \frac{(2l+1)(2n+1)C_\Phi^2\left(3S_\Phi\left(2S_{2\theta}^2S_\varphi^2S_\Phi + S_{4\theta}S_{2\varphi}\right) + (3C_{4\theta}+1)C_\varphi^2\right)}{16\vartheta_x\vartheta_z}$$
$$+ (1+2m)\Bigg[\frac{(2n+1)\left(C_\theta^2S_\varphi^2(3C_{4\Phi}+1) + 4S_\theta^2C_\varphi^2S_\Phi^2 - S_\theta C_\theta S_{2\varphi}(S_\Phi - 3S_{3\Phi})\right)}{16\vartheta_x\vartheta_y}$$
$$+ \frac{(2l+1)\left(S_\theta^2S_\varphi^2C_\Phi^4 - 4S_\theta S_\varphi S_\Phi C_\Phi^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi) + S_\Phi^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2\right)}{4\vartheta_y\vartheta_z}\Bigg], \tag{54}$$

$$\langle y^2z^2\rangle = \frac{1}{4}\Bigg[\frac{3(2n(n+1)+1)(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2}{\vartheta_x^2} + \frac{3(2m(m+1)+1)S_\varphi^2C_\varphi^2C_\Phi^4}{\vartheta_y^2}$$
$$+ \frac{3(2l(l+1)+1)(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2}{\vartheta_z^2}\Bigg]$$
$$+ (1+2m)\Bigg[\frac{(2n+1)C_\Phi^2\left(3S_\Phi\left(8C_\theta^2S_\varphi^2C_\varphi^2S_\Phi - S_{2\theta}S_{4\varphi}\right) + S_\theta^2(3C_{4\varphi}+1)\right)}{16\vartheta_x\vartheta_y}$$
$$+ \frac{(2l+1)C_\Phi^2\left(3S_\Phi\left(2S_\theta^2S_{2\varphi}^2S_\Phi + S_{2\theta}S_{4\varphi}\right) + C_\theta^2(3C_{4\varphi}+1)\right)}{16\vartheta_y\vartheta_z}\Bigg]$$
$$+ \frac{(1+2l)(1+2n)}{2048\vartheta_x\vartheta_z}\Bigg[-48S_{4\theta}S_{4\varphi}(S_{3\Phi} - 7S_\Phi) - 6C_{4\theta}(4(7C_{4\varphi}+1)C_{2\Phi}+3) + 24S_{2\theta}^2S_{2\varphi}^2C_{4\Phi}$$
$$+ 105(S_{4\theta}S_{4\phi} + C_{4\theta}C_{4\phi}) + 105(C_{4\theta}C_{4\phi} - S_{4\theta}S_{4\phi}) - 6C_{4\varphi}(4C_{2\Phi}+3) - 40C_{2\Phi} + 82\Bigg] \tag{55}$$

$$\langle p_x^2p_y^2\rangle = \frac{1}{16}(2l+1)(2n+1)C_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_z\Bigg[3S_\Phi\left(8S_\theta^2C_\theta^2C_\varphi^2S_\Phi - S_{4\theta}S_{2\varphi}\right) + (3C_{4\theta}+1)S_\varphi^2\Bigg]$$
$$+ (1+2m)\Bigg[\frac{1}{16}(2n+1)\vartheta_x\vartheta_y\left(4S_\theta^2S_\varphi^2S_\Phi^2 + C_\theta^2C_\varphi^2(3C_{4\Phi}+1) + S_\theta C_\theta S_{2\varphi}(S_\Phi - 3S_{3\Phi})\right)$$
$$+ \frac{1}{16}(2l+1)\vartheta_y\vartheta_z\left(S_\theta^2C_\varphi^2(3C_{4\Phi}+1) + 4C_\theta^2S_\varphi^2S_\Phi^2 - S_{2\theta}S_\varphi C_\varphi(S_\Phi - 3S_{3\Phi})\right)\Bigg]$$
$$+ \frac{1}{4}\Bigg[3(2l(l+1)+1)S_\theta^2C_\Phi^2\vartheta_z^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2 + 3(2m(m+1)+1)C_\varphi^2S_\Phi^2C_\Phi^2\vartheta_y^2$$
$$+ 3(2n(n+1)+1)C_\theta^2C_\Phi^2\vartheta_x^2(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2\Bigg] \tag{56}$$

$$\langle p_x^2 p_z^2\rangle = \frac{1}{16}(2l+1)(2n+1)C_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_z\Big[3S_\Phi\left(2S_{2\theta}^2S_\varphi^2S_\Phi + S_{4\theta}S_{2\varphi}\right) + (3C_{4\theta}+1)C_\varphi^2\Big]$$
$$+ (1+2m)\Big[\frac{1}{16}(2n+1)\vartheta_x\vartheta_y\left(C_\theta^2S_\varphi^2(3C_{4\Phi}+1) + 4S_\theta^2C_\varphi^2S_\Phi^2 - S_\theta C_\theta S_{2\varphi}(S_\Phi - 3S_{3\Phi})\right)$$
$$+ \frac{1}{4}(2l+1)\vartheta_y\vartheta_z\left(S_\theta^2S_\varphi^2C_\Phi^4 - 4S_\theta S_\varphi S_\Phi C_\Phi^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi) + S_\Phi^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2\right)\Big]$$
$$+ \frac{1}{4}\Big[3(2l(l+1)+1)S_\theta^2C_\Phi^2\vartheta_z^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2 + 3(2m(m+1)+1)S_\varphi^2S_\Phi^2C_\Phi^2\vartheta_y^2$$
$$+ 3(2n(n+1)+1)C_\theta^2C_\Phi^2\vartheta_x^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\Big] \tag{57}$$

$$\langle p_y^2 p_z^2\rangle = \frac{1}{2048}(2l+1)(2n+1)\vartheta_x\vartheta_z\Big[-48S_{4\theta}S_{4\varphi}(S_{3\Phi}-7S_\Phi) - 6C_{4\theta}(4(7C_{4\varphi}+1)C_{2\Phi}+3) + 24S_{2\theta}^2S_{2\varphi}^2C_{4\Phi}$$
$$+ 105(S_{4\theta}S_{4\phi}+C_{4\theta}C_{4\phi}) + 105(C_{4\theta}C_{4\phi}-S_{4\theta}S_{4\phi}) - 6C_{4\varphi}(4C_{2\Phi}+3) - 40C_{2\Phi} + 82\Big]$$
$$+ (1+2m)\Big[\frac{1}{16}(2n+1)C_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_y\left(3S_\Phi\left(8C_\theta^2S_\varphi^2C_\varphi^2S_\Phi - S_{2\theta}S_{4\varphi}\right) + S_\theta^2(3C_{4\varphi}+1)\right)$$
$$+ \frac{1}{16}(2l+1)C_\Phi^2\vartheta_y\vartheta_z\left(3S_\Phi\left(2S_\theta^2S_{2\varphi}^2S_\Phi + S_{2\theta}S_{4\varphi}\right) + C_\theta^2(3C_{4\varphi}+1)\right)\Big]$$
$$+ \frac{1}{4}\Big[3(2l(l+1)+1)\vartheta_z^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2 + 3(2m(m+1)+1)S_\varphi^2C_\varphi^2C_\Phi^4\vartheta_y^2$$
$$+ 3(2n(n+1)+1)\vartheta_x^2(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\Big] \tag{58}$$

$$\langle x^2 p_y^2\rangle = \frac{(2l+1)(2n+1)\left(S_\theta^2C_\Phi^2\vartheta_x^2\vartheta_y(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2 + C_\theta^2C_\Phi^2\vartheta_y\vartheta_z^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}$$
$$+ (1+2m)\Big[\frac{(2n+1)\left(S_\Phi^2\vartheta_x^2\vartheta_z(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2 + C_\theta^2C_\varphi^2C_\Phi^4\vartheta_y^2\vartheta_z\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}$$
$$+ \frac{(2l+1)\left(S_\theta^2C_\varphi^2C_\Phi^4\vartheta_x\vartheta_y^2 + S_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_z^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\Big] + \frac{C_\Phi^2}{4}\Big[(2l(l+1)+1)S_\theta^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2$$
$$+ (2m(m+1)+1)C_\varphi^2S_\Phi^2 + (2n(n+1)+1)C_\theta^2(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2\Big] \tag{59}$$

$$\langle y^2 p_x^2\rangle = \frac{(2l+1)(2n+1)\left(C_\theta^2C_\Phi^2\vartheta_x^2\vartheta_y(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2 + S_\theta^2C_\Phi^2\vartheta_y\vartheta_z^2(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}$$
$$+ (1+2m)\Big[\frac{(2n+1)\left(C_\theta^2C_\varphi^2C_\Phi^4\vartheta_x^2\vartheta_z + S_\Phi^2\vartheta_y^2\vartheta_z(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}$$
$$+ \frac{(2l+1)\left(S_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_y^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2 + S_\theta^2C_\varphi^2C_\Phi^4\vartheta_x\vartheta_z^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\Big]$$
$$+ \frac{C_\Phi^2}{4}\Big[(2l(l+1)+1)S_\theta^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2 + (2m(m+1)+1)C_\varphi^2S_\Phi^2 + (2n(n+1)+1)C_\theta^2(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S^\theta S_\varphi)^2\Big] \tag{60}$$

$$\langle x^2 p_z^2\rangle = \frac{(2l+1)(2n+1)\left(S_\theta^2C_\Phi^2\vartheta_x^2\vartheta_y(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2 + C_\theta^2C_\Phi^2\vartheta_y\vartheta_z^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}$$

$$+(1+2m)\left[\frac{(2n+1)\left(S_\Phi^2\vartheta_x^2\vartheta_z(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2 + C_\theta^2 S_\varphi^2 C_\Phi^4\vartheta_y^2\vartheta_z\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\right.$$
$$\left.+\frac{(2l+1)\left(S_\theta^2 S_\varphi^2 C_\Phi^4\vartheta_x\vartheta_y^2 + S_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_z^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\right]$$
$$+\frac{C_\Phi^2}{4}\left[(2l(l+1)+1)S_\theta^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2 + (2m(m+1)+1)S_\varphi^2 S_\Phi^2 + (2n(n+1)+1)C_\theta^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\right] \tag{61}$$

$$\langle z^2 p_x^2\rangle = \frac{(2l+1)(2n+1)\left(C_\theta^2 C_\Phi^2\vartheta_x^2\vartheta_y(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2 + S_\theta^2 C_\Phi^2\vartheta_y\vartheta_z^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}$$
$$+(1+2m)\left[\frac{(2n+1)\left(C_\theta^2 S_\varphi^2 C_\Phi^4\vartheta_x^2\vartheta_z + S_\Phi^2\vartheta_y^2\vartheta_z(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\right.$$
$$\left.+\frac{(2l+1)\left(S_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_y^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2 + S_\theta^2 S_\varphi^2 C_\Phi^4\vartheta_x\vartheta_z^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\right]$$
$$+\frac{C_\Phi^2}{4}\left[(2l(l+1)+1)S_\theta^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2 + (2m(m+1)+1)S_\varphi^2 S_\Phi^2 + (2n(n+1)+1)C_\theta^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\right] \tag{62}$$

$$\langle y^2 p_z^2\rangle = \frac{(2l(l+1)+1)\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2 + (2m(m+1)+1)S_\varphi^2 C_\varphi^2 C_\Phi^4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}$$
$$+(1+2m)\left[\frac{(2n+1)\left(C_\varphi^2 C_\Phi^2\vartheta_x^2\vartheta_z(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2 + S_\varphi^2 C_\Phi^2\vartheta_y^2\vartheta_z(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\right.$$
$$\left.+\frac{(2l+1)\left(S_\varphi^2 C_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_y^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2 + C_\varphi^2 C_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_z^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\right]$$
$$+\frac{(2l+1)(2n+1)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\left[\vartheta_x^2\vartheta_y(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2 + \vartheta_y\vartheta_z^2(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2\right]$$
$$+\frac{1}{4}(2n(n+1)+1)\left[(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\right] \tag{63}$$

$$\langle z^2 p_y^2\rangle = \frac{(2l(l+1)+1)\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2 + (2m(m+1)+1)S_\varphi^2 C_\varphi^2 C_\Phi^4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}$$
$$+(1+2m)\left[\frac{(2n+1)\left(S_\varphi^2 C_\Phi^2\vartheta_x^2\vartheta_z(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2 + C_\varphi^2 C_\Phi^2\vartheta_y^2\vartheta_z(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\right.$$
$$\left.+\frac{(2l+1)\left(C_\varphi^2 C_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_y^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2 + S_\varphi^2 C_\Phi^2\vartheta_x\vartheta_z^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2\right)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\right]$$
$$+\frac{(2l+1)(2n+1)}{4\vartheta_x\vartheta_y\vartheta_z}\left[\vartheta_x^2\vartheta_y(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2(S_\theta S_\varphi S_\Phi + C_\theta C_\varphi)^2 + \vartheta_y\vartheta_z^2(C_\theta S_\varphi - S_\theta C_\varphi S_\Phi)^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\right]$$
$$+\frac{1}{4}(2n(n+1)+1)\left[(C_\theta C_\varphi S_\Phi + S_\theta S_\varphi)^2(S_\theta C_\varphi - C_\theta S_\varphi S_\Phi)^2\right]. \tag{64}$$

第二附录 II：量子导引

弱耦合区域的量子导引表达式详述如下 ;

$$
\begin{aligned}
S_{x\to y} = &-\frac{1}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2}\Bigg[\mu_\theta^4\left(l\left(2m+1\right)\mu_\Phi^4-\left(l+m\right)\mu_\Phi^2+n\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(2l+\left(2m+1\right)\mu_\Phi^2+1\right)+2lm+m\right)\\
&+2\mu_\theta^3\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi\left(-\left(2m+1\right)\left(l-n\right)\mu_\Phi^2+2ln+l+n\right)-2\mu_\theta\mu_\varphi\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\left(\left(2m+1\right)\left(l-n\right)\mu_\Phi^2+2ln+l+n\right)\\
&+\mu_\theta^2\Bigg(\left(2m+1\right)\left(l+n\right)\left(\mu_\varphi^2+1\right)\mu_\Phi^4+\mu_\Phi^2\Bigg(2m\left(l+n\right)\mu_\varphi^2+4ln+l-2m+n\Bigg)+2m\left(l+n+1\right)-\left(l+n\right)\mu_\varphi^2\Bigg)\\
&+l\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(\left(2m+1\right)\mu_\Phi^2+2n+1\right)+\left(2m+1\right)n\mu_\Phi^4-\mu_\Phi^2\left(m+n\right)+2mn+m\Bigg],
\end{aligned}
\tag{65}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{y\to x} = &-\frac{1}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2}\Bigg[\mu_\theta^4\Bigg(\left(2lm+m\right)\mu_\Phi^4-\left(l+m\right)\mu_\Phi^2+\left(2n+1\right)\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(l+m\mu_\Phi^2\right)+2lm+l\Bigg)\\
&-4\mu_\theta^3\mu_\varphi\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\Bigg(m\left(l-n\right)\mu_\Phi^2-l\left(n+1\right)\Bigg)-4\mu_\theta\mu_\varphi\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\Bigg(m\left(l-n\right)\mu_\Phi^2+\left(l+1\right)n\Bigg)\\
&+\mu_\theta^2\Bigg(\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(2m\left(l+n+1\right)\mu_\Phi^2-l-n\right)+2m\left(l+n+1\right)\mu_\Phi^4+\mu_\Phi^2\left(4ln+l-2m+n\right)+\left(2m+1\right)\left(l+n\right)\Bigg)\\
&+\left(2l+1\right)\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(m\mu_\Phi^2+n\right)+m\mu_\Phi^4-m\mu_\Phi^2+2mn\mu_\Phi^4+2mn-n\mu_\Phi^2+n\Bigg],
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{x\to z} = &-\frac{1}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2}\Bigg[\mu_\theta^4\left(\mu_\varphi^2\left(\left(2lm+l\right)\mu_\Phi^4-\left(l+m\right)\mu_\Phi^2+2lm+m\right)+n\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(2l+\left(2m+1\right)\mu_\Phi^2+1\right)\right)\\
&-2\mu_\theta^3\mu_\varphi\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\left(-\left(\left(2m+1\right)\left(l-n\right)\mu_\Phi^2\right)+2ln+l+n\right)+2\mu_\theta\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi\left(\left(2m+1\right)\left(l-n\right)\mu_\Phi^2+2ln+l+n\right)\\
&+\mu_\theta^2\left(\mu_\varphi^2\left(\left(2m+1\right)\left(l+n\right)\mu_\Phi^4+\mu_\Phi^2\left(4ln+l-2m+n\right)+2m\left(l+n+1\right)\right)+\left(l+n\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(\left(2m+1\right)\mu_\Phi^2-1\right)\right)\\
&+l\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(\left(2m+1\right)\mu_\Phi^2+2n+1\right)+\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^4\left(2mn+n\right)-\mu_\Phi^2\left(m+n\right)+2mn+m\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{67}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{z\to x} = &-\frac{1}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2}\Bigg[\mu_\theta^4\left(\mu_\varphi^2\left(\left(2l+1\right)m\mu_\Phi^4-\left(l+m\right)\mu_\Phi^2+2lm+l\right)+\left(2n+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(l+m\mu_\Phi^2\right)\right)\\
&+4\mu_\theta^3\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi\left(m\left(l-n\right)\mu_\Phi^2-l\left(n+1\right)\right)+4\mu_\theta\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi\left(m\left(l-n\right)\mu_\Phi^2+\left(l+1\right)n\right)\\
&+\mu_\theta^2\left(\mu_\varphi^2\left(2m\left(l+n+1\right)\mu_\Phi^4+\mu_\Phi^2\left(4ln+l-2m+n\right)+\left(2m+1\right)\left(l+n\right)\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(2m\left(l+n+1\right)\mu_\Phi^2-l-n\right)\right)\\
&+\left(2l+1\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(m\mu_\Phi^2+n\right)+\mu_\varphi^2\left(m\left(2n+1\right)\mu_\Phi^4-\mu_\Phi^2\left(m+n\right)+2mn+n\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{68}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{y\to z} = &-\frac{1}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2}\Bigg[\mu_\theta^4\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2\left(4lm+l+m-2n\right)-\left(\left(l+n\right)\mu_\Phi^4\right)-m-n\right)\\
&+2\mu_\theta^3\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi\left(\mu_\varphi^2\left(-2lm+\left(4ln+3l+n\right)\mu_\Phi^2+2ln+l+2mn+n\right)+2lm-\left(4ln+l+3n\right)\mu_\Phi^2-2ln+l-2mn-3n\right)\\
&-2\mu_\theta\mu_\varphi\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\left(\mu_\varphi^2\left(2lm+\left(4ln+l+3n\right)\mu_\Phi^2+2ln+l-2mn+n\right)-2lm-\left(4ln+3l+n\right)\mu_\Phi^2-2ln-3l+2mn+n\right)\\
&+\mu_\theta^2\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2\left(l\left(4m+24n+11\right)+4mn+2m+11n\right)+2\left(l\left(12n+5\right)+5n\right)\mu_\Phi^4+4ln+l-2m+n\right)\\
&+\left(2n+1\right)\left(l\mu_\Phi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)+\mu_\theta^4\mu_\varphi^4\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(l\mu_\Phi^2+m\right)\right)+\left(2l+1\right)\left(\mu_\varphi^4\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(m+n\mu_\Phi^2\right)+n\mu_\theta^4\mu_\Phi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)\right)\\
&+\left(2m+1\right)\left(l\left(\mu_\Phi^2+1\right)+\mu_\theta^2\left(l+n\right)\left(\mu_\Phi^2+1\right)+n\mu_\theta^4\left(\mu_\Phi^2+1\right)\right)+\mu_\theta^2\mu_\varphi^4\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(2m\left(l+n+1\right)-\left(l+n\right)\mu_\Phi^2\right)\\
&-\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2\left(2l-4mn-m-n\right)+\left(l+n\right)\mu_\Phi^4+l+m\right)-\mu_\theta^2\left(l+n\right)\mu_\Phi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{69}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{z\to y} = &-\frac{1}{2\left(\mu_\theta^2+1\right)^2\left(\mu_\varphi^2+1\right)^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)^2}\Bigg[2l\mu_\theta\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi+4lm\mu_\theta\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi-2l\mu_\theta\mu_\varphi^3\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\left(2m+2n+3\right)\\
&+\mu_\theta^4\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2\left(4lm+l+m-2n\right)-\left(\left(l+n\right)\mu_\Phi^4\right)-m-n\right)+4ln\mu_\theta\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi-4mn\mu_\theta\mu_\varphi\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}+2n\mu_\theta\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\mu_\theta^3\mu_\varphi\mu_\Phi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\left(\mu_\varphi^2\left(2lm-\left(\left(4ln+l+3n\right)\mu_\Phi^2\right)-2ln+l-2mn-3n\right)-2lm+\left(4ln+3l+n\right)\mu_\Phi^2+2ln+l+2mn+n\right)\\
&+\mu_\theta^2\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2\left(l\left(4m+24n+11\right)+4mn+2m+11n\right)+2\left(l\left(12n+5\right)+5n\right)\mu_\Phi^4+4ln+l-2m+n\right)\\
&+2\mu_\theta\left(4ln+l+3n\right)\mu_\varphi\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi^3-2\mu_\theta\left(l\left(4n+3\right)+n\right)\mu_\varphi^3\mu_\Phi^3\sqrt{\mu_\Phi^2+1}+\left(2n+1\right)\left(l\mu_\varphi^4\mu_\Phi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)+\mu_\theta^4\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(l\mu_\Phi^2+m\right)\right)\\
&+\left(2m+1\right)\left(l\mu_\varphi^4\left(\mu_\Phi^2+1\right)+\mu_\theta^2\left(l+n\right)\mu_\varphi^4\left(\mu_\Phi^2+1\right)+n\mu_\theta^4\mu_\varphi^4\left(\mu_\Phi^2+1\right)+2n\mu_\theta\mu_\varphi^3\sqrt{\mu_\Phi^2+1}\mu_\Phi\right)\\
&+\left(2l+1\right)\left(\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(m+n\mu_\Phi^2\right)+n\mu_\theta^4\mu_\varphi^4\mu_\Phi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)\right)+\mu_\theta^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)\left(2m\left(l+n+1\right)-\left(l+n\right)\mu_\Phi^2\right)\\
&-\mu_\varphi^2\left(\mu_\Phi^2\left(2l-4mn-m-n\right)+\left(l+n\right)\mu_\Phi^4+l+m\right)-\mu_\theta^2\left(l+n\right)\mu_\varphi^4\mu_\Phi^2\left(\mu_\Phi^2+1\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{70}
$$

[1] E. Schr¨odinger, 《分离系统之间概率关系的讨论》，剑桥哲学学会会刊 31，555（1935）。[2] R. Uola、A. C. S. Costa、H. C. Nguyen 和 O. G¨uhne, 《现代物理评论》92，015001（2020）。[3] A. Einstein、B. Podolsky 和 N. Rosen, 《物理实在的量子力学描述能否被视为完备？》, 《物理评论》47，777（1935）。[4] H. M. Wiseman、S. J. Jones 和 A. C. Doherty, 《导引、纠缠、非定域性与爱因斯坦-波多尔斯基-罗森佯谬》, 《物理评论快报》98，140402（2007）。[5] D. Cavalcanti 和 P. Skrzypczyk, 《量子导引：侧重半定规划的综述》, 《物理学进展报告》80，024001（2016）。[6] I. Kogias 和 G. Adesso, 《双模连续变量态的爱因斯坦–波多尔斯基–罗森导引度量》, 《美国光学学会杂志B辑》32，A27（2015）。[7] Z. Y. Ou、S. F. Pereira、H. J. Kimble 和 K. C. Peng, 《连续变量爱因斯坦-波多尔斯基-罗森佯谬的实现》, 《物理评论快报》68，3663（1992）。[8] M. D. Reid、P. D. Drummond、W. P. Bowen、E. G. Cavalcanti、P. K. Lam、H. A. Bachor、U. L. Andersen 和 G. Leuchs, 《专题综述：爱因斯坦–波多尔斯基–罗森佯谬：从概念到应用》, 《现代物理评论》81，1727–1751（2009）。[9] Y. Xiang、S. Cheng、Q. Gong、Z. Ficek 和 Q. He, 《量子导引：实际挑战与未来方向》, 《PRX Quantum》3，030102（2022）。[10] Y. Xiang、F. X. Sun、Q. Y. He 和 Q. H. Gong, 《多体与高维爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引的进展》, Fundam. Res. 1，99（2021）[11] S. L. W. Midgley、A. J. Ferris 和 M. K. Olsen, 《非对称高斯导引：爱丽丝和鲍勃意见不一时》, 《物理评论A》81，022101（2010）。[12] M. D. Reid, 《爱因斯坦–波多尔斯基–罗森佯谬与量子导引的单配性不等式》, 《物理评论A》88，062108 2013（）。

[13] 111, 250403 2013 4

[14] Q. Y. He 和 M. D. Reid, 《真正的多体爱因斯坦–波多尔斯基–罗森导引》, 《物理评论快报》（）。Y. Fan、L. Qiu、C. Jia 和 Y. Gu, 《双量子比特态和三量子比特态的 EPR 导引与量子隐形传态保真度之间的关系》, 《物理学杂志A：数学与理论》56，185303（2023）。[15] N. Ikken、P. Kumar、A. Slaoui 等, 《利用离散时间量子行走实现双向多节点量子隐形传态》, Sci Rep 15，44798（2025）。[16] A. Slaoui、M. El Kirdi、R. Ahl Laamara 等, 《利用六量子比特簇态和六量子比特纠缠态实现双量子比特纠缠态的循环量子隐形传态》, Sci Rep 14，15856（2024）。[17] M. D. Reid, 《利用爱因斯坦–波多尔斯基–罗森导引不等式表征量子比特隐形传态和安全通信的量子基准》, arXiv:1402.4235（2014）。[18] C. Y. Huang、N. Lambert、C. M. Li、Y. T. Lu 和 F. Nori, 《利用多体爱因斯坦–波多尔斯基–罗森导引保障量子网络任务》, 《物理评论A》99，012302（2019）。[19] D. Han、Y.S. kim 和 M.E. Noz, 《维格纳相空间中相干态和压缩态的线性正则变换。III. 双模态》, 《物理评论A》41（1990）6233。[20] P. Shanta、S. Chaturvedi 和 V. Srinivasan, 《双玻色子产生与湮灭算符线性组合的本征态：一种代数方法》, Mod. Phys. Lett. A，11（1996）2381-2396。[21] S. S. Schweber, 《相对论量子场论导论》, Courier Corporation，2005。[22] Y.S. kim, 《部分子图像中的可观测规范变换》, Phys. Rev. Lett，63（1989）348。[23] A. L. Fetter 和 J. D. Walecka, 《多粒子系统的量子理论》, Courier Corporation，2012。[24] F. Iachello 和 S. Oss, 《n 个耦合非谐振子模型及其在八面体分子中的应用》, Phys. Rev. Lett，66（1991）2976。[25] B. Yurke 和 M. Potasek, 《由纯量子态获得热噪声》, Phys. Rev. A，36（1987）3464。[26] D. Han、Y. S. kim 和 M. E. Noz, 《洛伦兹压缩强子与强子温度》, Phys. Lett. A，144（1989）111-115。[27] S. M. Barnett 和 S. J. Phoenix, 《信息论、压缩与量子关联》, Phys. Rev. A，44（1991）535。[28] J. D. Tang、Q. Z. Cai、Z. D. Cheng、N. Xu、G. Y. Peng、P. Q. Chen 等, 《关于光力学系统中量子纠缠的展望》, Phys. Lett. A 429，127966（2022）。

[29] M. Aspelmeyer、T. J. Kippenberg 和 F. Marquardt，《腔光力学》，《现代物理评论》86，1391–1452（2014）。[30] U. Fano，《用密度矩阵和算符技术描述量子力学中的态》，《现代物理评论》29，74 1957（）。[31] D. Han、Y. S. Kim 和 M. E. Noz，《维格纳相空间中相干态和压缩态的线性正则变换。III. 双模态》，《物理评论A》41，6233（1990）。[32] D. Han、Y. S. Kim 和 M. E. Noz，《费曼的宇宙其余部分的示例说明》，Am. J. Phys. 67，61（1999）。[33] S. Ikeda 和 F. Fillaux，《对 $KHCO_3$ 晶体中质子的振动动力学和自旋相关对称性进行的非相干弹性中子散射研究》，《物理评论B》59，4134（1999）。[34] F. Fillaux，《甲酸二聚体及其类似物中的量子纠缠与非局域质子转移动力学》，Chem. Phys. Lett. 408，302（2005）。[35] P. C. Stamp 和 A. Gaita-Arino，《由化学构建基于自旋的量子计算机：方法与缘由》，J. Mater. Chem. 19，1718（2009）。[36] X. Ma、P. Jiang、Y. Qi、J. Jia、Y. Yang、W. Duan 等，《表面化学反应活性的量子振荡实验观测》，Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 104，9204（2007）。[37] D. N. Makarov，《耦合谐振子及其量子纠缠》，Phys. Rev. E 97，042203（2018）。[38] D. N. Makarov，《耦合谐振子的量子纠缠与反射系数》，Phys. Rev. E 102，052213 2020（）。[39] J. Y. Kao 和 C. H. Chou，《耦合谐振子系统中的量子纠缠：从微观到宏观》，New J. Phys. 18，073001（2016）。[40] R. Hab-Arrih、A. Jellal 和 A. Merdaci，《磁场对含时谐振子纠缠动力学的影响》，Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 19，2250090（2022）。[41] R. Hab-Arrih、A. Jellal、D. Stefanatos 和 A. Merdaci，《迈斯纳微分方程的不稳定性及其与光子激发和耦合量子振子系统中纠缠的关系》，Quantum Rep. 3，684（2021）。[42] M. B. S. Tsefack、J. V. N. Tegnitsap、H. B. Fotsin 和 E. B. M. Ngouonkadi，《用于电子束转向技术的大功率耦合非线性振子阵列的动力学：基于三极管的范德波尔振子的情形》，Phys. Scr. 99，025222 2024（）。[43] S. H. Yan 和 T. H. Chu，《一种采用注入锁定耦合振子并自调谐振子自由振荡频率的波束转向天线阵列》，IEEE Trans. Antennas Propag. 56，2920（2008）。[44] R. Hab-Arrih、A. Jellal、D. Stefanatos 和 E. H. El Kinani，《本征退相干下超强耦合谐振子中的虚激发与量子关联》，Optik 278，170719（2023）。[45] A. Isar，《高斯开放系统中量子导引的生成》，Rom. J. Phys. 63，108（2018）。[46] J. El Qars、M. Daoud 和 R. A. Laamara，《光力学中的动力学高斯量子导引》，Eur. Phys. J. D 71，122（2017）。[47] R. Hab-Arrih、A. Ghaba、P. D´ıaz、D. Laroze 和 A. Jellal，《两个耦合谐振子中的量子导引与纠缠》，Ann. Phys. 484，170306（2026）。[48] D. X. Macedo 和 I. Guedes，《含时耦合谐振子》，《数学物理杂志》53，052104（2012）。[49] R. Hab-Arrih、A. Jellal 和 A. Merdaci，《三个含时耦合谐振子中纠缠与相干性的动力学及再分配》，Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 18，2150120（2021）。[50] M. A. Lohe，《含时薛定谔方程解的精确时间依赖性》，《物理学杂志A：数学与理论》42，035307（2009）。¨A. Ghaba、R. Hab Arrih、E. Atmani 和 A. El Allati，《评估三个耦合谐振子的纠缠》，[51] E. Wigner，《关于热力学平衡的量子修正》，《物理评论》40，749（1932）。[52] K. Banaszek、M. W. Brown、P. G. Kwiat 和 S. F. Pereira，《通过光子计数直接测量维格纳函数》，《物理评论A》60，674（1999）。[53] R. Koekoek 和 H. G. Meijer，《拉盖尔多项式的一种推广》，SIAM J. Math. Anal. 24，768（1993）。[54] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun，《数学函数手册》，Dover（1972）。[55] C. Zachos、D. Fairlie 和 T. Curtright，《相空间中的量子力学：概述与精选论文》，（2005）。[56] D. Park 和 E. Jung，《量子不确定性的求和规则：参数随时间变化的耦合谐振子系统》，Quantum Inf. Process. 19，259（2020）。[57] I. Kogias、L. G. Helt、M. S. Tame、M. Paternostro 和 V. Vedral，《高斯量子导引的量化》，《物理评论快报》114，060403（2015）。[58] E. G. Cavalcanti、S. W. W. J. Oliveira 和 A. C. S. Costa，《导引与爱因斯坦-波多尔斯基-罗森佯谬的实验判据》，《物理评论A》80，032112（2009）。[59] M. K. Olsen，《玻色-哈伯德小链中的纠缠与导引传播》，《物理评论A》92，033627（2015）。[60] A. Frisk Kockum、M. A. S. V. D. R. S. L. Johansson，《光与物质之间的超强耦合》，Nat. Rev. Phys. 1，19 2019（）。